

EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN

zu 2.1: Definitionen, Sätze und so weiter

MICHAEL GROSSER

Definition: Definitionen dienen zur Vergabe von Namen oder Abkürzungen. Sie sind weder richtig noch falsch (außer bei der Reproduktion schon vorhandener Definitionen im Rahmen einer Prüfung); sie können allerdings mehr oder weniger sinnvoll sein [EmA]¹.

Axiom: Axiome sind Grundaussagen, die an den Beginn einer Theorie gestellt werden und die als nicht beweisbedürftig angesehen werden (das ist letzten Endes Vereinbarungssache). Aus den Axiomen werden durch logische Schlussfolgerungen die Sätze der Theorie abgeleitet.

Satz: Der typische Fall einer Aussage in einer Theorie. Jeder Satz muss durch logische Schlussfolgerungen bewiesen werden, und zwar aus den Axiomen oder aus anderen Sätzen, die bereits vorher bewiesen wurden.

Für Sätze werden gegebenenfalls auch noch andere Bezeichnungen verwendet, die jeweils jeweils eine spezielle Zusatzbedeutung tragen. Der Einsatz dieser Bezeichnungen ist teilweise auch eine Geschmacks- und Stilfrage und von AutorIn zu AutorIn verschieden. Wir führen hier drei solche wichtigen „Untertypen“ des Begriffes „Satz“ an.

Proposition: (lateinisch für „Aussage“) Gewissermaßen ein „kleinerer“ Satz, also eine Aussage, der man diese gewichtige Bezeichnung nicht zugestehen möchte, sonst würde es von Sätzen ja nur so wimmeln.

Lemma: Das Wort stammt aus dem Griechischen (die Mehrzahl ist daher Lemmata) mit der Bedeutung „Einnahme“, „Annahme“, „Stichwort“ oder „Hauptgedanke“. Meistens bezeichnet es ein technisches Hilfsresultat von untergeordneter Bedeutung, das im Beweis eines Satzes benötigt wird. Ein solches kann auch mit dem deutschen Wort „**Hilfssatz**“ bezeichnet werden. Zum anderen kann es sich dabei um besonders wichtige Schlüsselgedanken handeln, die in verschiedenen Situationen nützlich sind und eigentlich selbst sehr respektable Sätze darstellen. Solche genialen Erkenntnisse tragen oft den Namen des Erfinders (Lemma von Zorn, Lemma von Urysohn, . . .) [EmA].

¹An den mit [EmA] gekennzeichneten Stellen habe ich Textstücke aus dem Buch „Einführung in das mathematische Arbeiten“ von Hermann Schichl und Roland Steinbauer herangezogen.

Korollar, Folgerung: Dies ist ein Satz, der aus einem anderen (meistens unmittelbar vorhergehenden) Satz durch unmittelbare Einsicht oder durch sehr einfache Schlussweisen mit einem ganz kurzen Beweis folgt. Das Wort Korollar stammt vom lateinischen Wort *corollarium* ab: Geschenk, Zulage, Trinkgeld (laut de.pons.eu).

Weiters finden sich in der Literatur auch noch die folgenden Bezeichnungen für gewisse Sätze: Manche AutorInnen verwenden generell den Ausdruck **Theorem**, um Sätze zu bezeichnen; andere drücken damit eine Wichtigkeitsabstufung aus: Ein Theorem ist ein besonders bedeutender Satz. — Ein **Kriterium** ist ein Resultat, das eine sogenannte Äquivalenz ausdrückt (siehe Kapitel 3, Logik): Eine interessierende Eigenschaft E liegt genau dann vor, wenn diese und jene Bedingung A (oder Bedingungen $A \& B \& C \dots$) erfüllt sind. Ein solches Resultat dient natürlich dazu, um festzustellen, ob die (meistens schwierig zu überprüfende) Eigenschaft E vorliegt oder nicht, indem man stattdessen die Gültigkeit der (meist einfacher handhabbaren) Bedingung A (oder Bedingungen $A \& B \& C \dots$) feststellt. — Was ein **Hauptsatz** oder **Fundamentalsatz** ist, braucht wohl nicht extra erklärt zu werden.

Bemerkung: Das ist eigentlich ein Stück des laufenden Textes zwischen Definitionen und Sätzen, das zwar nicht zum Hauptstrang der Darstellung gehört, dem die AutorIn jedoch dennoch ein gewisses Gewicht verleihen will, oder das einfach eine später zitierbare Nummer (so wie ein Satz) bekommen soll. Oftmals enthalten Bemerkungen sehr wichtige und interessante Fakten im Sinne von „Übrigens, was man unbedingt noch dazusagen sollte: ...“. Die in Bemerkungen getroffenen Feststellungen werden oftmals nicht bewiesen; deren Beweise werden oft der LeserIn überlassen, weil sie den Rahmen der betreffenden Darstellung sprengen würden.

Vermutung: Damit wird eine mathematische Aussage bezeichnet, von deren Gültigkeit die AutorIn zwar mehr oder weniger überzeugt ist, die sie/er aber (noch) nicht beweisen kann; zum Beispiel hatte der sogenannte „Große Satz von Fermat“ über Jahrhunderte hinweg den Status einer Vermutung; die sogenannte „Riemannsche Vermutung“ ist bis heute unbewiesen [EmA].

Ein sehr informeller Ausdruck schließlich ist **Behauptung**: Meistens wird damit eine Aussage innerhalb eines langen Beweises bezeichnet, die gewissermaßen einen Zwischenschritt darstellt. Oft wird auch im Rahmen eines komplizierten Beweises die Aussage des Satzes in mehrere Teilbehauptungen zerlegt, die dann einzeln bewiesen werden. Das erhöht natürlich die Lesbarkeit des betreffenden Beweises.