Michor P.

Banach-Semikategorien I

Von

P. Michor

Aus den
Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 185. Bd., 4. bis 7. Heft, 1976

Wien 1976

In Kommission bei Springer-Verlag, Wien-New York
Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien

Banach-Semikategorien I

Von

P. Michor

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 5. März 1976 durch das w. M. E. Hlawka)

Das ist die erste in einer Folge von drei Arbeiten und enthält § 1—§ 4 der obigen Liste.

Banach-Semikategorien sind eine gemeinsame Verallgemeinerung von Banachalgebra, Banach-Operatorideal und Kategorie von Banachräumen. Gründe für ihre Einführung und exakte Definitionen werden in § 1 gegeben. § 2 und § 3 beschäftigen sich mit Methoden, Banach-Semikategorien in Banach-Kategorien einzubetten, die vor allem der Theorie der Banachalgebren entnommen sind. § 4 beschäftigt sich damit, gewisse Funktoren auf die Erweiterungen von § 2 und § 3 fortzusetzen. § 5 und § 6 bringen Koenden und Enden von Bifunktoren auf Banach-

Semikategorien, vor allem das wichtige Tensorprodukt von Funktoren. § 7 beschäftigt sich mit totalen und starken Funktoren auf Banach-Semikategorien und bringt das semidirekte Produkt einer Banach-Semikategorie mit einem Bifunktor darauf. § 8 und § 9 beschäftigen sich mit Methoden, Banach-Semikategorien zu Banachalgebren von (unendlichen) Matrizen zu machen und Funktoren zu Banachmoduln.

§ 1 Semikategorien

Das einfachste Beispiel einer additiven Kategorie ist ein Ring mit Eins, also kann eine additive Kategorie als Verallgemeinerung eines Ringes betrachtet werden; Mitchell [14] nennt daher eine additive Kategorie auch einen lokalen Ring, weil die Ringoperationen nur lokal definiert sind. Da aber der Begriff lokaler Ring schon mit fester Bedeutung in die Literatur eingegangen ist, ist vielleicht der Begriff Pseudoring in Analogie zu den Pseudogruppen der Differentialgeometrie vorzuziehen. Hier interessieren uns vor allem Kategorien von Banachräumen (Cigler [2, 3]). Das einfachste Beispiel einer solchen ist wohl eine Kategorie mit nur einem Objekt, daher isomorph zur Banachalgebra aller beschränkten linearen Operatoren auf dem betreffenden Banachraum, enthält also eine Identität.

Es gibt jedoch Banachalgebren, die nicht als Algebren von Operatoren darstellbar sind, und die interessantesten Banachalgebren besitzen keine Einheit. Die Situation, in die wir uns gestellt sehen, nämlich die Theorie der Banachmoduln mit der der Kategorien von Banachräumen zu vereinen, ist also nicht so einfach wie die, die Mitchell [14] betrachtete, wenn wir die interessanten Objekte der Funktionalanalysis mit einschließen.

Darüber hinaus gibt es noch eine weite Literatur und hochentwickelte Theorie der Banachoperatorideale, die ebenfalls der von uns gewünschten Verallgemeinerung der Banachalgebren zur Kategorientheorie ähnlichsieht: Man betrachte etwa die folgende „Kategorie“, deren Objekte Banachräume sind und deren Morphismen die kompakten oder die nuklearen Operatoren zwischen diesen Räumen sind. Aus naheliegenden Gründen wollen wir auch solche Begriffsbildungen in unsere Theorie einschließen. Aus diesen Gründen sind wir zur Ansicht gekommen, daß für unser Ziel der Begriff der Kategorie zu eng gefaßt ist und wir ihn daher verallgemeinern wollten, und der geeignete Name dafür ist wohl Semikategorie, in Analogie zum Begriff Semigruppe.

Da wir vor allem an Banach-Semikategorien interessiert sind, setzen wir voraus, daß die Hom-Mengen immer lineare Räume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind oder nur eines von beiden. Wir bezeichnen den Grundraum mit I ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

1.1. **Definition:** Eine Semikategorie $\mathbf{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten X, Y, ... und je einem linearen Raum $\mathbf{C}(X, Y)$ für jedes Paar von Objekten, der der Raum der Morphismen von X nach Y, $X \to Y$, heißen möge.

Es sei eine Komposition $\mathbf{C}(X, Y) \times \mathbf{C}(X, Z) \to \mathbf{C}(Z, Y)$ gegeben, geschrieben als $(f, g) \to f \circ g$, die bilinear sei und assoziativ, wenn immer sie definiert ist. Wenn nicht ausdrücklich anders betont, setzen wir weiter voraus, daß alle Räume $\mathbf{C}(X, Y)$ Banachräume seien, mit einer Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{C}}$ (manchmal auch nur normierte Räume), und daß die Komposition durch 1 beschränkt ist als bilineare Abbildung, d. h. $\|f \circ g\|_{\mathbf{C}} \leqslant \leqslant \|f\|_{\mathbf{C}} \|g\|_{\mathbf{C}}$.

Der einzige Unterschied zur üblichen Kategorientheorie ist also, daß wir auf Einheiten verzichtet haben, wenn man vom uns hier speziell interessierenden Zusammenhang mit Banachräumen absieht.

Ein Funktor zwischen Semikategorien ist dasselbe wie zwischen Kategorien; hier setzen wir noch zusätzlich voraus, daß er linear und kontraktiv auf den Morphismenräumen wirken möge; Bifunktoren werden also bilinear usw. Wir haben daher nur auf die Regel der Identitätserhaltung verzichtet.

Wenn eine Semikategorie $\mathbf{C}$ als Semikategorie von Operatoren zwischen Banachräumen dargestellt werden kann, d. h. wenn ein treuer, kontraktiver Funktor $\mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ existiert, dann nennen wir $\mathbf{C}$ eine Operatoralgebra.

Wenn $\mathbf{C}$ eine Operatoralgebra ist und der Hom-Funktor von $\mathbf{C}$ die Einschränkung eines Bifunktors auf $\mathbf{Ban}$ ist, der ein Teilfunktor von H ist, dann nennen wir $\mathbf{C}$ ein Operatorideal, d. h. wenn für alle $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, $g_1 \in H(X_1, X)$, $g_2 \in H(Y, Y_1)$ gilt: $g_2 \circ f \circ g_1 \in \mathbf{C}(X, Y)$ und $\|g_2 \circ f \circ g_1\|_{\mathbf{C}} \leqslant \|g_2\| \, \|f\|_{\mathbf{C}} \|g_1\|$. Dabei ist $H(X, Y)$ der Raum aller beschränkten linearen Operatoren wie etwa in Cigler [2, 3] oder Michor [12, 13].

Nun wollen wir noch einige Beispiele aufzählen:

1.2. **Beispiel:** Ist A eine Banachalgebra, dann betrachten wir A als Semikategorie, die aus nur einem Objekt besteht (A selbst) und deren Morphismen die Elemente von A sind und deren Komposition die Multiplikation in A. Die duale Semikategorie A^{op} ist dann gerade die entgegengesetzte Banachalgebra. Funktoren $A \to \mathbf{Ban}$ sind genau die linken (kontraktiven) Banach-A-Moduln, Funktoren $A^{\text{op}} \to \mathbf{Ban}$ gerade die rechten Banach-A-Moduln. Die natürlichen Transformationen zwischen zwei Funktoren sind gerade die A-Modul-Homomorphismen. Das Tensorprodukt von Moduln entspricht gerade dem Tensorprodukt der Funktoren (siehe Cigler [3]). Wir werden später auf diese Ideen zurückkommen.

1.3. **Beispiel:** Zu jeder Kategorie von Banachräumen und jedem Banachoperatorideal (im allgemeinen Sinn, siehe Pietsch [15] oder Michor [13]) können wir ein Operatorideal in unserem Sinn zuordnen, gerade das erstere beschränkt auf die Objekte der Kategorie.

1.4. **Definition:** Man sagt, daß eine Semikategorie $\mathbf{C}$ links approximierende Einheiten besitze, wenn für jedes $X \in \mathbf{C}$ ein Netz von Morphismen (u_i) in $\mathbf{C}(X, X)$ existiert, wonach $\|u_i \cdot f - f\|_{\mathbf{C}} \to 0$ für alle $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ gilt und $\|u_i\|_{\mathbf{C}} \leqslant 1$ für alle u_i. Analog sind rechts und beidseitig approximierende Einheiten definiert.

Beispiel: Die Semikategorie K aller kompakten Operatoren zwischen Banachräumen mit der metrischen Approximationseigenschaft besitzt linksapproximierende Einheiten, beschränkt durch 1.

1.5. **Definition:** Sind $F, G: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ Funktoren zwischen zwei Semikategorien, so ist der Raum $\mathbf{D}_{\mathbf{C}}(F, G)$ aller natürlichen Transformationen zwischen F und G definiert als der Raum aller $(\eta_X)_{X \in \mathbf{C}}$, $\eta_X \in \mathbf{D}(F(X), G(X))$ mit $\|\eta\| = \sup \|\eta_X\|_D < \infty$ und $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$ für alle $f \in \mathbf{C}(X, Y)$.

Für kontravariante Funktoren ist die Definition analog.

1.6. **Bifunktoren:** Ein Bifunktor G: $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ zwischen Semikategorien ist ein System von Komponentenfunktoren in der ersten und in der zweiten Variablen, so daß die Wirkung auf Morphismen in der einen Variablen jeweils natürlich ist in der anderen, d. h., $G(X, \cdot)$: $\mathbf{D} \to \mathbf{E}$ und $G(\cdot, Y): \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ sollen als Funktoren auch existieren. In dieser umständlichen Formulierung zeigt sich der Nachteil des Fehlens der Identität.

1.7. **Bemerkung:** Die Theorie, die wir hier entwickeln wollen, kann leicht in ein Gewand gepaßt werden, das analog dem der relativen Kategorientheorie geschneidert ist, vgl. etwa J. Fischer-Palmquist und D. C. Newell [6] oder Dubuc [5]. Die Kategorie Ban aller Banachräume würde sich als Basiskategorie eignen, und wir hätten Begriffe wie Ban-Semikategorien und Banfunktoren. Da wir nicht die Absicht haben, die Basiskategorie zu wechseln, würde das aber nur die Notation belasten, und wir verzichten daher darauf.

Möglicherweise auftretende, mengentheoretische Schwierigkeiten ignorieren wir einfach; wer dazu zu vorsichtig ist, möge an kritischen Stellen voraussetzen, daß gewisse Semikategorien klein sind bezüglich Ban.

§ 2 Die einseitigen Zentralisator-Kategorien

Wir wollen nun verschiedene Möglichkeiten studieren; eine gegebene Semikategorie $\mathbf{C}$ in eine Kategorie einzubetten. Die einfachste ist sicherlich, eine Identität 1_X zu jedem $\mathbf{C}(X, X)$ zu adjungieren [d. h., man bilde $\mathbf{C}(X, X) \oplus I$] und ihre Wirkung als identisch zu erklären.

Wir wählen den Fall einer Banachalgebra A als Modell und wollen die Konstruktion von B. E. Johnson [8, 9], wie sie in Cigler [2] ausgeführt ist, verallgemeinern.

2.1. **Definition:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie. Wir definieren die rechte Zentralisatorkategorie $H^{\mathbf{C}}$ wie folgt:

Objekte vom $H^{\mathbf{C}}$ sind die von $\mathbf{C}$.

Für $X \in \mathbf{C}$ ist $\mathbf{C}^X: Y \to \mathbf{C}(Y, X)$ ein kontravarianter Funktor $\mathbf{C} \to$ Ban. Wir definieren $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ als den Raum aller $\mathbf{C}$-natürlichen Transformationen $\mathbf{C}^X \to \mathbf{C}^Y$, d. h.

$$H^{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Nat}(\mathbf{C}^X, \mathbf{C}^Y).$$

Damit ist $H^{\mathbf{C}}$ die volle Teilkategorie der Kategorie $\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ aller kontravarianten (Ban-)Funktoren $\mathbf{C}^{op} \to \mathrm{Ban}$, die aus allen Funktoren $\mathbf{C}^X$, $X \in \mathbf{C}$ besteht.

Daher ist es klar, daß $H^{\mathbf{C}}$ tatsächlich eine Ban-Kategorie (im Sinne relativer Kategorientheorie) ist, d. h., die Hom-Räume sind Banachräume und die Komposition ist bilinear und kontraktiv.

2.2. **Definition:** Ist eine Semikategorie $\mathbf{C}$ gegeben und ist $H^{\mathbf{C}}$ ihre rechte Zentralisator-Kategorie, dann definieren wir die strikte Topologie in $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$:

$$H^{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Nat}\,(\mathbf{C}^X, \mathbf{C}^Y) \subseteq \Pi\, H\,(\mathbf{C}\,(Z, X), \mathbf{C}\,(Z, Y),$$

wobei Π das Produkt in Ban_1 ist.

Wir betrachten das Tychonov-Produkt der starken Operator-Topologien auf $H\,(\mathbf{C}\,(Z, X), \mathbf{C}\,(Z, Y))$ am Produktraum und die Spur davon am Teilraum $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$. Das ist die (rechts-)strikte Topologie auf $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$.

Ein Netz $\eta^{(i)}$ konvergiert daher gegen η in $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ in der strikten Topologie genau dann, wenn $\|\eta_Z^{(i)}(f) - \eta_Z(f)\|_{\mathbf{C}} \to 0$ für alle $f \in \mathbf{C}\,(Z, X)$, $Z \in \mathbf{C}$. Die strikte Topologie ist eine lokalkonvexe Topologie auf $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$.

2.3. **Proposition:** Wenn die Semikategorie $\mathbf{C}$ links approximierende Einheiten besitzt, dann ist $H^{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Nat}\,(\mathbf{C}^X, \mathbf{C}^Y)$ vollständig in der strikten Topologie.

Beweis: Es sei $\eta^{(i)}$ ein Cauchy-Netz in $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ für die strikte Topologie, dann ist für jedes $f \in \mathbf{C}\,(Z, X)$ das Netz $\eta_Z^{(i)}(f)$ ein Cauchy-Netz in $\mathbf{C}\,(Z, Y)$ in der Norm Topologie und konvergiert daher dort gegen ein $\eta_Z(f) \in \mathbf{C}\,(Z, Y)$. Klarerweise ist die Abbildung $f \mapsto \eta_Z(f)$ linear und erfüllt $\mathbf{C}\,(h, Y)\,\eta_Z(f) = \eta_{Z_1}\,\mathbf{C}\,(h, X)(f)$ für jedes $h \in \mathbf{C}\,(Z_1, Z)$.

Es bleibt also zu zeigen, daß η_Z beschränkt ist für jedes Z und $\sup_Z \|\eta_Z\| < \infty$.

Wenn f_n eine Nullfolge in $\mathbf{C}\,(Z, X)$ ist, d. h. $\|f_n\| \to 0$, dann ist $(f_n) \in c_0\,(\mathbf{C}\,(Z, X))$. Der Raum $\mathbf{C}\,(X, X)$ ist eine Banachalgebra mit beschränkter, links-approximierender Einheit und $\mathbf{C}\,(Z, X)$ ist ein wesentlicher linker Banach-$\mathbf{C}\,(X, X)$-Modul, daher ist $c_0\,(\mathbf{C}\,(Z, X))$ es auch mit komponentenweiser Wirkung. Nach dem Faktorisierungssatz von Cohen-Hewitt (z. B. Cigler [2]) existieren ein $h \in \mathbf{C}(X, X)$ und ein $(g_n) \in c_0(\mathbf{C}(Z, X))$, so daß $(f_n) = (h \circ g_n)$ gilt. Also: $\eta_Z(f_n) = \eta_Z(h \circ g_n) = \eta_Z \mathbf{C}(g_n, X)(h) = \mathbf{C}(g_n, Y)\,\eta_X(h) = \eta_X(h) \circ g_n$, daher ist auch

$$\|\eta_Z(f_n)\|_{\mathbf{C}} = \|\eta_X(h) \circ g_n\|_{\mathbf{C}} \leqslant \|\eta_X(h)\|_{\mathbf{C}}\,\|g_n\| \to 0, \text{ d. h. } \|\eta_Z\| < \infty.$$

Nun sei (u_j) eine links-approximierende Einheit in $\mathbf{C}(X, X)$. Für $f \in \mathbf{C}(Z, X)$ gilt wie oben

$$\eta_Z(u_j \circ f) = \eta_X(u_j) \circ f,$$

daher auch

$$\|\eta_Z(u_j \circ f)\|_{\mathbf{C}} = \|\eta_X(u_j) \circ f\|_{\mathbf{C}} \leqslant \|\eta_X\|\,\|f\|_{\mathbf{C}}.$$

Da $\|u_j \circ f - f\|_{\mathbf{C}} \to 0$, folgt, daß $\|\eta_Z(f)\|_{\mathbf{C}} \leqslant \|\eta_X\|\,\|f\|_{\mathbf{C}}$, d. h. $\|\eta_Z\| \leqslant \|\eta_X\|$. qed.

2.4. **Proposition:** Es sei der Funktor $J : \mathbf{C} \to H^{\mathbf{C}}$ definiert durch $J(X) = X$ und $J(f) = \mathbf{C}^f = \mathbf{C}(\cdot, f)$ für $f \in \mathbf{C}(X, Y)$. Wenn $\mathbf{C}$ rechts approximierende Einheiten besitzt, dann ist J eine Isometrie auf den Morphismenräumen von $\mathbf{C}$, also eine Einbettung von $\mathbf{C}$ in $H^{\mathbf{C}}$.

Beweis: Wenn $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, dann ist

$$J(f)_X(u_j) = \mathbf{C}(X, f)\,u_j = f \circ u_j \text{ in } \|\cdot\|_{\mathbf{C}},$$

daher ist $\|J(f)_X\| \geqslant \|f\|_{\mathbf{C}}$ und alles bewiesen.

2.5. **Proposition:** Wenn $\mathbf{C}$ links approximierende Einheiten besitzt, dann ist $J(\mathbf{C})$ strikt dicht in $H^{\mathbf{C}}$, d. h., $J(\mathbf{C}(X, Y))$ ist strikt dicht in $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathbf{C}$.

Beweis: Sei (u_j) links approximierende Einheit in $\mathbf{C}(X, X)$ und $\eta \in H^{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Nat}(\mathbf{C}^X, \mathbf{C}^Y)$. Für alle $Z \in \mathbf{C}$ und $f \in \mathbf{C}(Z, X)$ ist $J(\eta_X(u_j))_Z(f) = \eta_Z(u_j \circ f)$, wie eine kurze Rechnung zeigt, also ist

$$\|J(\eta_X(u_j))_Z(f) - \eta_Z(f)\|_{\mathbf{C}} = \|\eta_Z(u_j \circ f) - \eta_Z(f)\|_{\mathbf{C}} \to 0,$$

daher $J(\eta_X(u_j)) \to \eta$ strikt.

Bemerkung: Wenn also $\mathbf{C}$ beidseitig approximierende Einheiten besitzt, dann ist $H^{\mathbf{C}}$ die „strikte Vervollständigung" von $\mathbf{C}$.

Wir entwickeln nun eine analoge Theorie für die linke Zentralisator-Kategorie, wobei wir auf Beweise verzichten.

2.6. **Definition:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie. Wir definieren die linke Zentralisator-Kategorie $H_{\mathbf{C}}$ von $\mathbf{C}$: Ihre Objekte seien wieder die von $\mathbf{C}$, und für $X, Y \in \mathbf{C}$ definieren wir $H_{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Nat}(\mathbf{C}_X, \mathbf{C}_Y)$, den Raum aller natürlichen Transformationen $\mathbf{C}(X, \cdot) \to \mathbf{C}(Y, \cdot)$. $H_{\mathbf{C}}$ ist dabei wieder die volle Teilkategorie von $\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}$, die aus allen Funktoren $\mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ der Gestalt $\mathbf{C}(X, \cdot)$ besteht.

Die (links-)strikte Topologie in $H_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ist wieder die Spur der Tychonov-Topologie via der Einbettung

$$H_{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Nat}(\mathbf{C}_X, \mathbf{C}_Y) \subseteq \prod_{Z \in \mathbf{C}} H(\mathbf{C}(X, Z), \mathbf{C}(Y, Z)).$$

2.7. **Proposition:** Wenn die Semikategorie $\mathbf{C}$ rechts approximierende Einheiten besitzt, dann ist $H_{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Nat}(\mathbf{C}_X, \mathbf{C}_Y)$ vollständig in der strikten Topologie für alle $X, Y \in \mathbf{C}$.

2.8. **Proposition:** Der Funktor $J : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to H_{\mathbf{C}}$ sei definiert durch $J(X) = X, J(f) = \mathbf{C}_f = \mathbf{C}(f, \cdot)$.

Wenn $\mathbf{C}$ links approximierende Einheiten besitzt, dann ist J eine Isometrie auf den Morphismenräumen und somit eine Einbettung $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to H_{\mathbf{C}}$.

2.9. **Proposition:** Wenn $\mathbf{C}$ rechts approximierende Einheiten besitzt, dann ist $J(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$ strikt dicht in $H_{\mathbf{C}}$.

Bemerkung: Wenn $\mathbf{C}$ beidseitig approximierende Einheiten besitzt, dann ist $H_{\mathbf{C}}$ die „(links-)strikte Vervollständigung" von $\mathbf{C}$. Einige der folgenden Beispiele zeigen, daß die Existenz von approximierenden Einheiten nicht notwendig ist für diese Eigenschaft von $H^{\mathbf{C}}$, $H_{\mathbf{C}}$. Man konsultiere auch Grosser [7], der die Situation bei Banachmoduln durchleuchtet hat.

2.10. **Beispiel:** Ist $\mathbf{C} = A$, eine Banachalgebra mit approximierenden Einheiten, dann haben wir die Theorie, die in Cigler [2] entwickelt wurde, wiedergewonnen.

2.11. **Beispiel:** Es sei $\mathbf{C}$ das Operatorideal „Normabschluß der endlichdimensionalen Operatoren zwischen Banachräumen", d. h.

$\mathbf{C}(X, Y) = X' \hat{\hat{\otimes}} Y$. Dann ist die rechte Zentralisator-Kategorie $H^{\mathbf{C}}$ gerade Ban, weil $H^{\mathbf{C}}(X, Y) = \operatorname{Nat}((\cdot') \hat{\hat{\otimes}} X, (\cdot') \hat{\hat{\otimes}} Y) = H(X, Y)$ ist, wobei $\eta \in H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ in $\eta_I \in H(X, Y)$ übergehen möge und $f \in H(X, Y)$ in $(\cdot') \hat{\hat{\otimes}} f$. Damit wird J gerade zur Einbettung des Operatorideals in Ban und die strikte Topologie wird erzeugt durch die Seminormen

$$f \to \|f \circ g\|, \; g \in \mathbf{C}(Z, X), \; Z \in \mathbf{C}.$$

Sie stimmt nicht mit der starken Operatortopologie auf $H(X, Y)$ überein, wohl aber auf jeder beschränkten Teilmenge davon nach Schaefer [16] III, 4.5, denn sie ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von X: Jede kompakte Menge von X ist enthalten in der abgeschlossenen konvexen Hülle M einer Nullfolge (x_n) in X nach Schaefer [16] III, 9. 4. Nun wähle $Z = l^1$ und definiere $g: l^1 \to X$ durch $g(e_n) = x_n$, wobei $e_n = (\delta_{nk})_{k \in N} \in l^1$.

Dann ist $g(\circ\, l^1) = M$, $g \in \mathbf{C}(l^1, X)$, da g kompakt ist und l^1 die metrische Approximationseigenschaft hat.

Da X als metrischer Raum kompakt erzeugt ist, ist $H(X, Y)$ vollständig in der strikten Topologie.

2.3 und 2.4 gelten also, obwohl $\mathbf{C}$ im allgemeinen keine approximierenden Einheiten besitzt.

$\mathbf{C}(X, Y)$ ist genau dann strikt dicht in $H(X, Y)$, wenn X' oder Y die Approximationseigenschaft haben.

2.12. **Beispiel:** Nun sei $\mathbf{C}$ das Operatorideal K aller kompakten Operatoren in Ban. Dann gilt wiederum $H^{\mathbf{C}} = \text{Ban}$, da $H^{\mathbf{C}}(X, Y) = \operatorname{Nat}(K^X, K^Y) = H(X, Y)$ via $\eta \to \eta_I$ und $f \mapsto K^f = K(\cdot, f)$. Die strikte Topologie ist wieder die der kompakten Konvergenz auf X.

2.13. **Beispiel:** Es sei $\mathbf{C}$ wieder das Operatorideal „Normabschluß der endlichdimensionalen Operatoren" in Ban, aber nun wollen wir die linke Zentralisator-Kategorie $H_{\mathbf{C}}$ bestimmen. Es gilt $H_{\mathbf{C}}(X, Y) = \operatorname{Nat}(C_X, C_Y) = H(X', Y')$. $H_{\mathbf{C}}$ ist also die volle Teilkategorie von Ban, die aus allen dualen Banachräumen besteht. Damit wird $J: \mathbf{C} \to H_{\mathbf{C}}$ gerade zu $'$; $J(h)_I = \mathbf{C}(h, I) = h'$.

Die strikte Topologie wird durch die Halbnormen der Gestalt $f \to \|f \circ g'\|$, $g \in \mathbf{C}(X, Z)$, $f \in H(X', Y')$, erzeugt. Sie stimmt wieder mit der Topologie der kompakten Konvergenz überein, was man mit einer Methode ähnlich der in 2.11 einsieht, wobei statt l^1 der reflexive Raum l^2 genommen wird.

2.14. **Bemerkung:** Genau dieselben Überlegungen wie in 2.11 und 2.13 zeigen, daß für jedes beliebige Operatorideal $\mathbf{C}$ gilt: $H^{\mathbf{C}}(X, Y) = H(X, Y)$, $H_{\mathbf{C}}(X, Y) = H(X', Y')$.

Nur mit der strikten Topologie muß man etwas achtgeben.

§ 3 Die Doppel-Zentralisator-Kategorie und der Funktor Δ

Hier stellen wir eine Verallgemeinerung der Doppel-Zentralisator-Algebra $\Delta(A)$ von B. E. Johnson [8, 9] vor. Wir geben die Konstruktion zunächst für einen beliebigen Bifunktor. Es sei also $\mathbf{C}$ eine Semikategorie und G: $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ ein Bifunktor. Da wir viel rechnen müssen, wollen wir zunächst die Notation vereinfachen.

3.1. **Bezeichnungsvereinbarung**

Elemente von $\mathbf{C}(X, Y)$ bezeichnen wir mit $f_Y{}^X$ und solche von $G(X, Y)$ mit $g_Y{}^X$; wir schreiben also den kontravarianten Index oben und den kovarianten unten. Weiter schreiben wir:

$$f_{X_1}{}^X g_X{}^Y := G(Y, f_{X_1}{}^X)\, g_X{}^Y$$
$$g_X{}^X f_Y{}^{Y_1} := G(f_Y{}^{Y_1}, X)\, g_X{}^Y.$$

Wir benützen also die Schreibweise, die für Bimoduln üblich ist. Analog werden wir dieselben Vereinbarungen für Funktoren nur einer Variablen verwenden.

3.2. Sind $\mathbf{C}$ und G wie oben gegeben, dann definieren wir einen Bifunktor $\Delta G: \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ wie folgt: Für X, Y $\mathbf{C}$ sei $\Delta G(X, Y)$ der Raum aller

$$(\bar{\varphi}, \bar{\bar{\varphi}}) \in \operatorname{Nat}(\mathbf{C}(\cdot, X), G(\cdot, Y)) \times \operatorname{Nat}(\mathbf{C}(Y, \cdot), G(X, \cdot)),$$

die für alle

$$f_X{}^{Z_1} \in \mathbf{C}(Z_1, X), \quad f_Z{}^Y \in \mathbf{C}(Y, Z)$$

die Bedingung

$$f_Z{}^Y\, \bar{\varphi}(z_1\,(f_X{}^{Z_1})) = (\bar{\bar{\varphi}} z\,(f_Z{}^Y))\, f_X{}^{Z_1} \in G(Z_1, Z) \tag{i}$$

erfüllen. Dabei haben wir die Vereinbarung 3.1 verwendet. In traditioneller Schreibweise würde die Bedingung (i) so aussehen:

$$G(Z_1, f_Z{}^Y)\,\bar{\varphi}_{Z_1}(f_X{}^{Z_1}) = G(f_X{}^{Z_1}, Z)\,\bar{\bar{\varphi}}_Z(f_Z{}^Y).$$

Da die Bedingung (i) noch nicht so symmetrisch ist, wie wir sie gerne haben wollen, führen wir noch eine weitere Bezeichnungsvereinbarung für die Wirkung von $\varphi = (\bar{\varphi}, \bar{\bar{\varphi}}) \in \Delta G(X, Y)$ ein:

$$\begin{aligned}(\varphi\, f_X{}^{Z_1}) &:= \bar{\varphi}_{Z_1}(f_X{}^{Z_1})\\ (f_Z{}^Y\, \varphi) &:= \bar{\bar{\varphi}}_Z(f_X{}^Y).\end{aligned}\tag{ii}$$

In dieser Schreibweise sieht die Natürlichkeit von $\varphi = (\bar{\varphi}, \bar{\bar{\varphi}})$ so aus:

$$\begin{aligned}(\varphi\,(f_X{}^{Z_1}\, f_{Z_1}{}^{Z_2})) &= (\varphi\, f_X{}^{Z_1})\, f_{Z_1}{}^{Z_2}\\ ((f_{Z_1}{}^Z\, f_Z{}^Y)\,\varphi) &= f_{Z_1}{}^Z\,(f_Z{}^Y\,\varphi),\end{aligned}\tag{iii}$$

und die Bedingung (i) wird zu

$$f_Z{}^Y\,(\varphi\, f_X{}^{Z_1}) = (f_Z{}^Y\,\varphi)\, f_X{}^{Z_1}.\tag{i}$$

Diese drei Gleichungen sehen den Bedingungen, die man für einen Bimodul fordert, sehr ähnlich. Da (i) eine stetige lineare Gleichung für φ ist, ist $\Delta G(X, Y)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathrm{Nat}(\mathbf{C}^X, G^Y) \times \mathrm{Nat}(\mathbf{C}_Y, G_X)$ und daher ein Banachraum mit der induzierten Norm $\|\varphi\| = \max(\|\bar{\varphi}\|, \|\bar{\bar{\varphi}}\|)$.

Wir definieren die Wirkung des Bifunktors ΔG auf Morphismen von $\mathbf{C}$ in der naheliegenden Weise, sie ist nämlich die vom Bifunktor $\mathrm{Nat}(\mathbf{C}^X, G^Y) \times \mathrm{Nat}(\mathbf{C}_Y, G_X)$ induzierte Wirkung:

$$\Delta G(u_X{}^{X_1}, Y)\tag{iv)'$$

ist induziert von

$$\mathrm{Nat}(\mathbf{C}(\cdot, u_X{}^{X_1}), G(\cdot, Y)) \times \mathrm{Nat}(\mathbf{C}(Y, \cdot), G(u_X{}^{X_1}, \cdot))$$

und $\Delta G(X, u_{Y_1}{}^Y)$ ist induziert von

$$\mathrm{Nat}(\mathbf{C}(\cdot, X), G(\cdot, u_{Y_1}{}^Y)) \times \mathrm{Nat}(\mathbf{C}(u_{Y_1}{}^Y, \cdot), G(X, \cdot)).$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\mathrm{Nat}(\mathbf{C}^X, G^Y) \times \mathrm{Nat}(\mathbf{C}_Y, G_X)$ damit wirklich ein Bifunktor ist, d. h., daß er bilinear und kontraktiv auf

Morphismen wirkt und daß diese Wirkung den Teilraum $\Delta\, G\,(X,\, Y)$ in den Teilraum $\Delta\, G\,(X_1,\, Y_1)$ überführt.

Wir verwenden die Schreibweise 3.1 auch für den Bifunktor $\Delta\, G$:

$$\varphi \cdot u_X{}^{X_1} = \Delta\, G\,(u_X{}^{X_1},\, Y)\, \varphi$$
$$u_{Y_1}{}^{Y} \cdot \varphi = \Delta\, G\,(X,\, u_{Y_1}{}^{Y})\, \varphi. \tag{v}$$

Wir schreiben hier $\cdot$ für die Bifunktorenwirkung von $\Delta\, G$, um sie von der φ-Wirkung (ii) auf Morphismen zu unterscheiden. Damit entspricht (iv)′ der elementweisen Definition:

$$((\varphi \cdot u_X{}^{X_1})\, f_{X_1}{}^{Z_1} = (\varphi\, (u_X{}^{X_1}\, f_{X_1}{}^{Z_1})) = (\varphi\, u_X{}^{X_1}\, f_{X_1}{}^{Z_1})$$
$$(f_Z{}^{Y}\, (\varphi \cdot u_X{}^{X_1})) = (f_Z{}^{Y}\, \varphi)\, u_X{}^{X_1} = f_Z{}^{Y}\, (\varphi\, u_X{}^{X_1})$$
$$((u_{Y_1}{}^{Y} \cdot \varphi)\, f_X{}^{Z_1}) = u_{Y_1}{}^{Y}\, (\varphi\, f_X{}^{Z_1}) = (u_{Y_1}{}^{Y}\, \varphi)\, f_X{}^{Z_1} \tag{iv}$$
$$(f_Z{}^{Y_1}\, (u_{Y_1}{}^{Y} \cdot \varphi)) = ((f_Z{}^{Y_1}\, u_{Y_1}{}^{Y})\, \varphi) = (f_Z{}^{Y_1}\, u_{Y_1}{}^{Y}\, \varphi),$$

wobei wir (ii) und 3.1 für G verwendet haben. In dieser Form ist es klar, daß $\Delta\, G$ wieder ein Bifunktor ist.

3.3. Ist $\eta : G \to G_1$ eine natürliche Bifunktortransformation, dann ist es auch $\Delta\, \eta : \Delta\, G \to \Delta\, G_1$, gegeben durch $\Delta\, \eta\, (\varphi) = (\eta \circ \bar{\varphi},\, \eta \circ \bar{\bar{\varphi}})$, da die definierende Gleichung (i) für $\Delta\, G\,(X,\, Y)$ wegen der Natürlichkeit mit η vertauscht. Aus naheliegenden Gründen verzichten wir darauf, auch $\Delta\, \eta$ in unser Notationsschema einzubauen.

Klarerweise wird $\Delta : \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}}$ damit zum Funktor.

3.4. Für $\varphi \in \Delta\, G\,(X,\, Y)$ und $u_X{}^{X_1} \in \mathbf{C}\,(X_1,\, X)$ gilt

$$\varphi \cdot u_X{}^{X_1} \in \Delta\, G\,(X,\, Y),\;\; (\varphi\, u_X{}^{X_1}) \in G\,(X_1,\, X),$$

und es erhebt sich die Frage, wann diese beiden Elemente übereinstimmen. Man wird also dazu geführt, eine Abbildung $\widehat{\ } : G\,(X,\, Y) \to \Delta\, G\,(X,\, Y)$ zu betrachten, die klarerweise durch

$$(\widehat{g_Y{}^X}\, f_X{}^{Z_1}) = g_Y{}^X\, f_X{}^{Z_1}$$
$$(f_Z{}^{Y}\, \widehat{g_Y{}^X}) = f_Z{}^{Y}\, g_Y{}^X \tag{vi}$$

für $g_Y{}^X \in G\,(X,\, Y)$ definiert ist.

In traditioneller Schreibweise sieht das so aus:

$$(\widehat{g_Y{}^X})^{-}{}_{Z_1}(f_X{}^{Z_1}) = G(f_X{}^{Z_1}, Y)\, g_Y{}^X$$
$$(\widehat{g_Y{}^X})^{=}{}_{Z}(f_Z{}^{Y}) = G(X, f_Z{}^{Y})\, g_Y{}^X.$$

Um nachzuprüfen, daß $\widehat{g_Y{}^X} \in \Delta G(X, Y)$ ist, haben wir (i) und (iii) zu verifizieren:

$$\begin{aligned}
(\widehat{g_Y{}^X}(f_X{}^{Z_1} f_{Z_1}{}^{Z_2})) &= g_Y{}^X (f_X{}^{Z_1} f_{Z_1}{}^{Z_2}) = (g_Y{}^X f_X{}^{Z_1}) f_{Z_1}{}^{Z_2} = \\
&= ((\widehat{g_Y{}^X} f_X{}^{Z_1}) f_{Z_1}{}^{Z_2}) \\
((f_{Z_1}{}^Z f_Z{}^Y) \widehat{g_Y{}^X}) &= (f_{Z_1}{}^Z f_Z{}^Y) g_Y{}^X = f_{Z_1}{}^Z (f_Z{}^Y g_Y{}^X) = \\
&= (f_{Z_1}{}^Z (f_Z{}^Y \widehat{g_Y{}^X})) \\
f_Z{}^Y (\widehat{g_Y{}^X} f_X{}^{Z_1}) &= f_Z{}^Y (g_Y{}^X f_X{}^{Z_1}) = (f_Z{}^Y g_Y{}^X) f_X{}^{Z_1} = \\
&= (f_Z{}^Y \widehat{g_Y{}^X}) f_X{}^{Z_1}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir nur die Funktoreigenschaft von G verwendet. Daher ist $\widehat{\ }: G(X, Y) \to \Delta G(X, Y)$ eine kontraktive lineare Abbildung. $\widehat{\ }$ ist aber auch eine natürliche Bifunktortransformation, was man aus

$$\begin{aligned}
((u_{Y_1}{}^Y g_Y{}^X)^\wedge f_X{}^{X_1}) &= (u_{Y_1}{}^Y g_Y{}^X) f_X{}^{X_1} = ((u_{Y_1}{}^Y g_Y{}^X) f_X{}^{X_1}) = \\
&= ((u_{Y_1}{}^Y \cdot \widehat{g_Y{}^X}) f_X{}^{X_1})
\end{aligned}$$

und ähnlichen Rechnungen sieht. Wir haben (iv) verwendet. Genauso einfach ist es, nachzuprüfen, daß $\widehat{\ }$ auch natürlich in G ist.

Wir haben die natürliche Transformation $\widehat{\ }$ in der Hoffnung eingeführt, damit $\varphi \cdot u_X{}^{X_1}$ mit $(\varphi\, u_X{}^{X_1})$ und ähnliche Ausdrücke identifiziert werden können. Und das ist auch möglich:

$$\begin{aligned}
(\varphi\, u_X{}^{X_1})^\wedge &= \varphi \cdot u_X{}^{X_1} \\
(u_{Y_1}{}^Y\, \varphi)^\wedge &= u_{Y_1}{}^Y \cdot \varphi.
\end{aligned} \tag{vii}$$

Wir beweisen die erste dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned}
((\varphi\, u_X{}^{X_1})^\wedge f_{X_1}{}^{Z_1}) &= (\varphi\, u_X{}^{X_1}) f_{X_1}{}^{Z_1} = (\varphi\, u_X{}^{X_1} f_{X_1}{}^{Z_1}) = \\
&= ((\varphi \cdot u_X{}^{X_1}) f_{X_1}{}^{Z_1}) \text{ nach (iv).} \\
(f_Z{}^Y (\varphi\, u_X{}^{X_1})^\wedge) &= f_Z{}^Y (\varphi\, u_X{}^{X_1}) = (f_Z{}^Y (\varphi \cdot u_X{}^{X_1})) \text{ nach (iv).}
\end{aligned}$$

Wir können also den Punkt in der $\Delta\, G$-Wirkung auf Morphismen wieder vergessen, wenn wir G als Subfunktor von $\Delta\, G$ auffassen können. Das ist dann der Fall, wenn $\widehat{\ }$ injektiv oder gar isometrisch ist. Klarerweise ist $\widehat{\ }$ genau dann injektiv, wenn G die folgende Bedingung erfüllt:

Ist $0 \neq g_Y{}^X \in G\,(X,\, Y)$, dann existiert ein $f_X{}^{Z_1} \in \mathbf{C}\,(Z_1,\, X)$ oder ein $f_Z{}^Y \in \mathbf{C}\,(Y,\, Z)$, so daß $f_Z{}^Y\, g_Y{}^X \neq 0$ oder $g_Y{}^X\, f_X{}^{Z_1} \neq 0$ gilt.

Im § 7 werden wir dann sagen: G ist $\mathbf{C}$-total, d. h., G wird durch seine Wirkung auf $\mathbf{C}$-Morphismen separiert.

$\widehat{\ }$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für alle $g_Y{}^X \in G\,(X,\, Y)$ gilt:

$$\|g_Y{}^X\| = \sup\,\{\|f_Z{}^Y\, g_Y{}^X\|,\ \|g_Y{}^X\, f_X{}^{Z_1}\| : \|f_Z{}^X\| \leqslant 1,\ \|f_X{}^{Z_1}\| \leqslant 1\}.$$

Im § 7 werden wir dann sagen: G ist $\mathbf{C}$-stark.

3.5. Wir haben auch hier eine strikte Topologie auf $\Delta\, G\,(X,\, Y)$, die offensichtlich die Spur auf $\Delta\, G\,(X,\, Y)$ des Tychonov-Produktes der starken Operator-Topologien auf

$$H\,(\mathbf{C}\,(Z,\, X),\, G\,(Z,\, Y)) \times H\,(\mathbf{C}\,(Y,\, Z),\, G\,(X,\, Z))$$

via der Einbettung

$$\Delta\, G\,(X,\, Y) \subseteq \mathrm{Nat}\,(\mathbf{C}^X,\, G^X) \times \mathrm{Nat}\,(\mathbf{C}_Y,\, G_X) \subseteq$$
$$\subseteq \prod_{Z \in \mathbf{C}} H\,(\mathbf{C}\,(Z,\, X),\, G\,(Z,\, Y) \times \prod_{Z \in \mathbf{C}} H\,(\mathbf{C}\,(Y,\, Z),\, G\,(X,\, Z)) \quad \text{ist.}$$

$\varphi^{(i)}$ konvergiert daher strikt gegen φ in $\Delta\, G\,(X,\, Y)$, wenn

$$\|f_Z{}^Y\,(\varphi^{(i)} - \varphi)\|^G \to 0 \quad \text{und} \quad \|(\varphi^{(i)} - \varphi)\, f_X{}^Z\|^G \to 0$$

für alle $f_Z{}^Y$, $f_X{}^Z$ gilt.

3.6. **Proposition:** Wenn $\mathbf{C}$ beidseitig approximierende Einheiten besitzt, dann ist $\Delta\, G\,(X,\, Y)$ vollständig in der strikten Topologie, und $\widehat{\ }\,(G \cdot (X,\, Y))$ ist dicht.

Beweis: Es sei $\varphi^{(i)}$ ein Cauchy-Netz in $\Delta\, G\,(X,\, Y)$ für die strikte Topologie. Dann sind $(f_Z{}^Y\, \varphi^{(i)})$ und $(\varphi^{(i)}\, f_X{}^{Z_1})$ Cauchy-Netze in $G\,(X,\, Z)$ bzw. $G\,(Z_1,\, Y)$ in der Norm und konvergieren daher gegen Elemente $(f_Z{}^Y\, \varphi)$ und $(\varphi\, f_X{}^{Z_1})$ für alle $f_Z{}^Y$, $f_X{}^{Z_1}$. Die dadurch festgelegte Abbildung φ ist definiert als punktweiser Limes von Elementen $\varphi^{(i)}$ in $\Delta\, G\,(X,\, Y)$, daher sind die Abbildungen $f_Z{}^Y \to (\varphi\, f_X{}^{Z_1})$ alle linear, und die punktweisen Gleichungen (i) und (iii) gelten, da sie für alle $\varphi^{(t)}$ gelten. Also hat φ formal alle Eigenschaften eines Elements von $\Delta\, G\,(X, Y)$, es fehlt nur die Stetigkeit. Doch die folgt, wenn man $\varphi = (\bar{\varphi}, \bar{\bar{\varphi}})$ schreibt und den Beweis von 2.3 auf $\bar{\varphi}$ und einen ähnlichen auf $\bar{\bar{\varphi}}$ anwendet.

Es sei nun $\varphi \in \Delta\, G\,(X, Y)$ gegeben, es sei nun $(e_{(t)X}{}^X)$ eine beidseitig approximierende Einheit in $\mathbf{C}\,(X, X)$ und $(e_{(j)Y}{}^Y)$ eine solche in $\mathbf{C}\,(Y, Y)$. Dann behaupten wir, daß φ ein strikter Häufungspunkt der Menge $\{(e_{(j)Y}{}^Y\, \varphi)^\wedge,\ (\varphi\, e_{(t)X}{}^X)^\wedge\}$ ist. Denn für alle $f_Z{}^Y$ ist

$$\|(f_Z{}^Y\, \varphi) - (f_Z{}^Y\, (e_{(j)Y}{}^Y\, \varphi)^\wedge)\| = \|(f_Z{}^Y - f_Z{}^Y\, e_{(j)Y}{}^Y)\, \varphi\| \to 0,$$

und für alle $f_X{}^{Z_1}$ ist

$$\|(\varphi\, f_X{}^{Z_1}) - ((\varphi\, e_{(t)X}{}^X)^\wedge f_X{}^{Z_1})\| = \|\varphi\, (f_X{}^{Z_1} - e_{(t)X}{}^X\, f_X{}^{Z_1})\| \to 0.$$

3.7. Die Doppel-Zentralisator-Kategorie $\Delta\, \mathbf{C}$ von $\mathbf{C}$

Wir setzen $G = \mathbf{C}$, den Hom-Funktor der Semikategorie $\mathbf{C}$, und erklären $\Delta\, \mathbf{C}$ als den Hom-Funktor unserer neuen Kategorie, die dieselben Objekte hat wie $\mathbf{C}$.

Wir müssen uns nur noch eine geeignete Komposition konstruieren: Es sei $\varphi_Y{}^X \in \Delta\, \mathbf{C}\,(X, Y)$, $\varphi_X{}^Z \in \Delta\, \mathbf{C}\,(Z, X)$. Dann setzen wir für $f_U{}^Y \in \mathbf{C}\,(Y, U)$, $f_Z{}^V \in \mathbf{C}\,(V, Z)$:

$$\begin{aligned} f_U{}^Y\, (\varphi_Y{}^X \circ \varphi_X{}^Z) &:= (f_U{}^Y\, \varphi_Y{}^X)\, \varphi_X{}^Z \\ (\varphi_Y{}^X \circ \varphi_X{}^Z)\, f_Z{}^V &:= \varphi_Y{}^X\, (\varphi_X{}^Z\, f_Z{}^V). \end{aligned} \tag{viii}$$

Dann ist $\varphi_Y{}^X \circ \varphi_X{}^Z \in \Delta\, \mathbf{C}\,(Z, Y)$, da es klarerweise beschränkt ist, und (i) und (iii) gelten:

$$\begin{aligned} f_U{}^Y\, (\varphi_Y{}^X \circ \varphi_X{}^Z))\, f_Z{}^V &= ((f_U{}^Y\, \varphi_Y{}^X)\, \varphi_X{}^Z)\, f_Z{}^V = \\ = (f_U{}^Y\, \varphi_Y{}^X)\, (\varphi_X{}^Z\, f_Z{}^V) &= f_U{}^Y\, (\varphi_Y{}^X\, (\varphi_Y{}^X\, (\varphi_X{}^Z\, f_Z{}^V)) = \\ &= f_U{}^Y\, ((\varphi_Y{}^X \circ \varphi_X{}^Z)\, f_Z{}^V), \\ ((\varphi_Y{}^X \circ \varphi_X{}^Z)\, (f_Z{}^V\, f_V{}^U)) &= \varphi_Y{}^X\, (\varphi_X{}^Z\, (f_Z{}^V\, f_V{}^U)) = \\ = \varphi_Y{}^X\, ((\varphi_X{}^Z\, f_Z{}^V)\, f_V{}^U) &= (\varphi_Y{}^X\, (\varphi_X{}^Z\, f_Z{}^V))\, f_V{}^U = \\ &= ((\varphi_Y{}^X \circ \varphi_X{}^Z)\, f_Z{}^V)\, f_V{}^U, \end{aligned}$$

und der zweite Teil von (iii) kann auf analoge Weise bestätigt werden.

In traditioneller Schreibweise haben wir: Für $\varphi = (\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}})$, $\psi = (\overline{\psi}, \overline{\overline{\psi}})$ ist $\varphi \circ \psi = (\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}, \overline{\overline{\varphi}} \circ \overline{\overline{\psi}})$. Diese Komposition ist klarerweise bilinear und kontraktiv; die Identität in $\Delta\, \mathbf{C}\,(X, X)$ ist gerade $1_X = (1_{\mathbf{C}^X}, 1_{\mathbf{C}_X})$. Auch die Assoziativität der Komposition ist leicht nachzuprüfen, und damit ist $\Delta\, \mathbf{C}$ eine Kategorie. Man nennt sie die Doppel-Zentralisator-Kategorie von $\mathbf{C}$. $\widehat{\ }: \mathbf{C}\,(X, Y) \to \Delta\, \mathbf{C}\,(X, Y)$ wird zur Abbildung $\widehat{f} = (\mathbf{C}^f, \mathbf{C}_f)$.

3.8. **Proposition:** $\widehat{\ }: \mathbf{C} \to \Delta\, \mathbf{C}$ ist die Morphismenabbildung eines Funktors $\mathbf{C} \to \Delta\, \mathbf{C}$, der auf den Objekten identisch wirkt.

Beweis: Klarerweise gilt $(f_Y{}^Z f_Z{}^X)^\wedge = \widehat{f_Y{}^Z} \circ \widehat{f_Z{}^X}$.

3.9. **Beispiel:** Es sei $\mathbf{C}$ ein beliebiges Operatorideal in Ban. Dann behaupten wir, daß $\Delta\, \mathbf{C} = \mathrm{Ban}$ ist.

Sei $\varphi = (\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}}) \in \Delta\, \mathbf{C}\,(X, Y) \subseteq \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(\mathbf{C}^X, \mathbf{C}^Y) \times \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(\mathbf{C}_Y, \mathbf{C}_X)$; dann ist $\overline{\varphi}_I \in H\,(X, Y)$, $\overline{\overline{\varphi}}_I \in H\,(Y', X')$ und für $x \in X$, $y' \in Y'$, d. h. $\widehat{x} \in \mathbf{C}\,(I, X)$, $y' \in \mathbf{C}\,(Y, I)$ gilt nach (i): $y'\,(\varphi\, \widehat{x}) = (y'\, \varphi)\, \widehat{x}$ oder $\mathbf{C}\,(X, y')\, \overline{\varphi}_I\,(\widehat{x}) = \mathbf{C}\,(\widehat{x}, Y)\, \overline{\overline{\varphi}}_I\,(y')$. Somit haben wir $y' \circ \overline{\varphi}_I\,(\widehat{x}) = \overline{\overline{\varphi}}_I\,(y') \circ \widehat{x}$, d. h. $\overline{\overline{\varphi}}_I = (\overline{\varphi}_I)'$. Jedem $f \in H\,(X, Y)$ ordnen wir $(\mathbf{C}^f, \mathbf{C}_f) \in \Delta\, \mathbf{C}\,(X, Y)$ zu; für $f \in \mathbf{C}\,(X, Y)$ ist $\widehat{f} = (\mathbf{C}^f, \mathbf{C}_f)$. Die dazu inverse Abbildung ist $\varphi = (\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}}) \mapsto \overline{\varphi}_I$, und dadurch wird $\Delta\, \mathbf{C}$ mit Ban identifiziert.

3.10. **Beispiel:** Ist $\mathbf{C} = A$, eine Banachalgebra mit approximierenden Einheiten, dann haben wir die Theorie für $\Delta\,(A)$, wie sie etwa in Cigler [2] entwickelt wurde, wiedergewonnen.

3.11. Es sei $\mathbf{C}$ die folgende Semikategorie über Ban: $\mathbf{C}\,(X, Y) = K\,(X, Y)\, \widehat{\otimes}\, A$, wobei K ein Operatorideal und A eine Banachalgebra ist, mit der offensichtlichen Komposition. Die Vermutung liegt nahe, daß $\Delta\, \mathbf{C} = \Delta\, K\, \widehat{\otimes}\, \Delta\,(A) = \mathrm{Ban}\, \widehat{\otimes}\, \Delta\,(A)$ ist.

§ 4 Wesentliche Funktoren und deren Erweiterungen

Hier verallgemeinern wir den Begriff des Funktors vom Typ Σ (siehe Cigler [3] oder Michor [13]) auf den Fall von Funktoren, die auf Semikategorien definiert sind, und wir untersuchen die Möglichkeiten, diese Funktoren auf die verschiedenen Zentralisator-Kategorien auszudehnen.

4.1. **Definition:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie. Ein Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ heißt ($\mathbf{C}$-)wesentlich, wenn für jedes $X \in \mathbf{C}$ der lineare Teilraum von $F(X)$, der durch alle Elemente der Form $F(f) f_Z$, $f \in \mathbf{C}(Z, X)$, $f_Z \in F(Z)$, $Z \in \mathbf{C}$ aufgespannt wird, dicht ist in $F(X)$.

Analog heißt ein kontravarianter Funktor ($\mathbf{C}$-)wesentlich, wenn der Teilraum, der von den Elementen $G(f) g^Z$, $f \in \mathbf{C}(X, Z)$, $g^Z \in G(Z)$, $Z \in \mathbf{C}$ aufgespannt wird, dicht ist in $G(X)$ für alle $X \in \mathbf{C}$.

Ein Bifunktor $G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ heißt ($\mathbf{C}$-)wesentlich, wenn der Teilraum, der von allen Elementen $G(f_U{}^X, f_Y{}^V)\, w : g_V{}^U$ erzeugt wird, in $G(X, Y)$ dicht ist für alle $X, Y \in \mathbf{C}$.

Für jeden beliebigen Funktor definiert der Abschluß des entsprechenden linearen Teilraumes einen isometrischen Teilfunktor, der auch der ($\mathbf{C}$-)wesentliche Teil genannt wird.

Wenn $\mathbf{C} = K_0$ ist, das Operatorideal „Normabschluß der endlichdimensionalen Operatoren", dann sind die Einschränkungen auf K_0 von Funktoren $\mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$ vom Typ Σ K_0-wesentlich. Wir werden zeigen, daß bei Voraussetzung der Approximationsbedingung auch die Umkehrung stimmt: jeder Funktor vom Typ Σ auf Ban ist Erweiterung eines K_0-wesentlichen, und die Zuordnung ist bijektiv.

4.2. **Satz:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Operatoralgebra (vgl. 1.1), für die die endlichdimensionalen Operatoren $X \to Y$ dicht sind in $\mathbf{C}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathbf{C}$. Dann gilt:

(a) $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ist genau dann $\mathbf{C}$-wesentlich, wenn der Teilraum, der von allen Elementen $F(x)\, a$, $x \in X$, $a \in F(I)$ erzeugt wird, dicht ist in $F(X)$ für jedes $X \in \mathbf{C}$.

(b) $G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ban}$ ist genau dann $\mathbf{C}$-wesentlich, wenn der Teilraum, der von allen Elementen $G(x')\, b$, $x' \in X'$, $b \in G(I)$ erzeugt wird, in $G(X)$ dicht ist für jedes $X \in \mathbf{C}$.

(c) $G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ist genau dann $\mathbf{C}$-wesentlich, wenn der Teilraum, der von allen $G(x', \hat{y})\, a$, $x' \in X'$, $y \in Y$, $a \in G(I, I)$ erzeugt wird, in $G(X, Y)$ dicht ist für alle $X, Y \in \mathbf{C}$.

Da für eine Operatoralgebra $\mathbf{C}$ stets $\|f\| \leqslant \|f\|_{\mathbf{C}}$ gilt, sind die Einschränkungen von Funktoren $\mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$ stets Funktoren $\mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$. Der Satz besagt nun, daß eine solche Einschränkung genau dann $\mathbf{C}$-wesentlich ist, wenn der Funktor auf Ban vom Typ Σ ist.

Beweis: Wir zeigen nur (a), die anderen Aussagen können analog bewiesen werden. Wenn der Teilraum, der von den $F(\hat{x})\,a$ erzeugt wird, dicht ist, dann ist es auch der von den $F(f)\,f_Z$ erzeugte, da er den ersteren enthält. Ist umgekehrt F **C**-wesentlich, dann gibt es für jedes $f_X \in F(X)$ und $\varepsilon > 0$ Elemente $f_i \in \mathbf{C}(Y_i, X)$ und f_{Y_i}, $i = 1, \ldots, n$, so daß $\|\sum F(f_i)\,f_{Y_i} - f_X\|_{F(X)} \leqslant \varepsilon/2$. Da die endlichdimensionalen Operatoren dicht sind in $\mathbf{C}(Y_i, X)$, gibt es $\sum_{j=1}^{m_i} \hat{x}_{ji} \circ y_{ji}' : Y_i \to X$, so daß $\|\sum_j \hat{x}_{ji} \circ y_{ji}' - f_i\|_{\mathbf{C}} \leqslant \varepsilon/(2\,n\,\|f_{Y_i}\|_{F(Y_i)})$ gilt. Doch dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|f_X - \sum_i \sum_j F(\hat{x}_{ji})\,(F(y_{ji}')\,f_{Y_i})\|_{F(X)} \leqslant \|f_X - \sum_i F(f_i)\,f_{Y_i}\|_{F(X)} + \\
&+ \|\sum_i F(f_i)\,f_{Y_i} - \sum_{i,j} F(x_{ji})\,F(y_{ji}')\,f_{Y_i}\|_{F(X)} \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/2 + \sum_i \|f_i - \sum_j x_{ji} \circ y_{ji}'{}_{\mathbf{C}}\|\,\|f_{Y_i}\|_{F(Y_i)} \leqslant \varepsilon. \qquad \text{qed.}
\end{aligned}$$

4.3. **Definition:** Es sei **C** eine Semikategorie. Ein Funktor von einer Zentralisator-Kategorie von **C** nach **Ban** heißt strikt, wenn er stetig ist als Morphismenabbildung in der entsprechenden strikten Topologie auf dem Definitionsraum und in der starken Operatortopologie auf dem Bildbereich. Wir betrachten dieselbe Begriffsbildung für Bifunktoren, wobei wir getrennte Stetigkeit verlangen.

4.4. **Proposition:** Es sei **C** eine Semikategorie mit links-approximierenden Einheiten, und es sei $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ **C**-wesentlich. Dann ist $F^s : H^{\mathbf{C}} \to \mathbf{Ban}$ ein strikter Funktor, wobei F^s definiert ist durch $F^s(X) = F(X)$, $F^s(\eta)\,f_X = \lim F(\eta_X(u_j))\,f_X$ in $\|\cdot\|_{F(X)}$, (u_j) eine links-approximierende Einheit in $\mathbf{C}(X, X)$.

Beweis: 1. Der Limes existiert: Sei $f_X \in F(X)$. Da $\mathbf{C}(X, X)$ eine Banachalgebra mit links-approximierenden Einheiten ist und $F(X)$ ein wesentlicher linker Banach-$\mathbf{C}(X, X)$-Modul, gibt es nach dem Faktorisierungssatz von Cohen-Hewitt ein $g \in \mathbf{C}(X, X)$ und $f_X' \in F(X)$ mit $f_X = F(g)\,f_X'$. Dann gilt aber:

$$\begin{aligned}
F^s(\eta)\,f_X &= \lim_j F(\eta_X(u_j))\,F(g)\,f_X' = \lim F(\eta_X(u_j) \circ g)\,f_X' = \\
&= \lim_j F(\eta_X(u_j \circ g))\,f_X' = F(\eta_X(g))\,f_X',
\end{aligned}$$

da $\|u_j\,g - g\|_{\mathbf{C}} \to 0$.

2. $F^s(\eta) f_{Xj}$ hängt nicht von der speziellen Wahl der approximierenden Einheit in $\mathbf{C}(X, X)$ ab: Es sei (v_k) eine weitere.

$$\begin{aligned} F^s(\eta) f_X &= \lim_j F(\eta_X(u_j)) f_X = \lim_j F(\eta_X(u_j)) \lim_k F(v_k) f_X) = \\ &= \lim_j \lim_k F(\eta_X(u_j) \circ v_k) f_X = \lim_k \lim_j F(\eta_X(u_j \circ v_k)) f_X = \\ &= \lim_k F(\eta_X(v_k)) f_X. \end{aligned}$$

Wir müssen nur noch das Vertauschen der Limiten rechtfertigen. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein j_0 und ein k_0 mit

$$\| F^s(\eta) f_X - F(\eta_X(u_j) f_X \|_{F(Y)} < \varepsilon \quad \text{für } j \geqslant j_0 \quad \text{und}$$
$$\| f_X - F(v_k) f_X \|_{F(X)} < \varepsilon \quad \text{für } k \geqslant k_0.$$

Für diese j und k gilt:

$$\begin{aligned} &\| F^s(\eta) f_X - F(\eta_X(u_j)) F(v_k) f_X \|_{F(Y)} \leqslant \| F^s(\eta) f_X - F(\eta_X(u_j)) f_X \| + \\ &+ \| F(\eta_X(u_j)) f_X - F(\eta_X(u_j)) F(v_k) f_X \| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + \| F(\eta_X(u_j)) \| \, \| f_X - F(v_k) f_X \| \leqslant \varepsilon + \| \eta \| \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher existiert der Doppellimes, und wir können nach Belieben vertauschen.

3. $F^s(\eta) : F(X) \to F(Y)$ ist linear, da der Limes (in der starken Operatortopologie) von linearen Operatoren wieder linear ist. $F^s(\eta)$ ist beschränkt, da

$$\begin{aligned} \| F^s(\eta) f_X \|_{F(Y)} &= \| \lim_j F(\eta_X(u_j)) f_X \| \leqslant \\ &\leqslant \sup_j \| F(\eta_X(u_j)) f_X \| \leqslant \| \eta_X \| \, \| f_X \|, \end{aligned}$$

also gilt sogar $\| F^s(\eta) \| \leqslant \| \eta \|$. Klarerweise ist auch die Abbildung $\eta \to F^s(\eta)$ linear.

4. Es sei $\eta \in H^{\mathbf{C}}(X, Y)$, $\varphi \in H^{\mathbf{C}}(Y, Z)$ und (v_k) eine links-approximierende Einheit in $\mathbf{C}(Y, Y)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} &F^s(\varphi) F^s(\eta) f_X = \lim_k F(\varphi_Y(v_k)) \lim_j F(\eta_X(u_j)) f_X = \\ &= \lim_j \lim_k F(\varphi_X(v_k \circ \eta_X(u_j))) f_X = \lim_j F(\varphi_X(\eta_X(u_j))) f_X = \\ &= F^s(\varphi \circ \eta) f_X. \end{aligned}$$

Das Vertauschen der Limiten rechtfertigt man dabei wie oben. Da F C-wesentlich ist, gilt auch

$$F^s(1_{\mathbf{C}X}) f_X = \lim_j F(u_j) f_X = f_X.$$

5. Es bleibt noch zu zeigen, daß F^s strikt ist. Wir betrachten zunächst den Funktor J aus 2.4 und behaupten, daß folgendes gilt: Ist $J(f) = 0$ in $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ für $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, dann ist auch $F(f) = 0$ auf $F(X)$. $J(f) = \mathbf{C}^f = \mathbf{C}(\cdot, f) = 0$ heißt, daß $f \circ h = 0$ ist für alle $h \in \mathbf{C}(Z, X)$. Ist $f_X \in F(X)$, dann gibt es nach dem Faktorisierungssatz ein $g \in \mathbf{C}(X, X)$ und ein $f_X' \in F(X)$ mit $F(g) f_X' = f_X$. Doch dann ist $F(f) f_X = F(f) F(g) f_X' = F(f \circ g) f_X' = F(0) f_X' = 0$. Damit faktorisiert also die F-Wirkung von $\mathbf{C}(X, Y)$ auf $J(\mathbf{C}(X, Y))$ in $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$. Für jedes $f_X \in F(X)$ ist nun die Abbildung $J(f) \to F(f) f_X$ von $J(\mathbf{C}(X, Y))$ nach $F(Y)$ strikt-Norm-stetig, da $J(f_i) \to J(f)$ strikt in $J(\mathbf{C}(X, Y))$ besagt, daß für alle $h \in \mathbf{C}(Z, X)$ gilt: $\|f_i \circ h - f \circ h\|_{\mathbf{C}} \to 0$, somit für $f_X = F(g) f_X'$ wie oben: $\|F(f_i) f_X - F(f) f_X\| = \|F(f_i) F(g) f_X' - F(f) F(g) f_X'\| \leqslant \|f_i \circ g - f \circ g\|_{\mathbf{C}} \|f_X'\| \to 0$. Aus der Definition von F^s sieht man, daß die Abbildung $\eta \to F^s(\eta) f_X$ gerade die eindeutige lineare stetige Fortsetzung von $J(f) \to F(f) f_X$ auf ganz $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ ist [$J(\mathbf{C}(X, Y))$ ist ja strikt dicht in $H^{\mathbf{C}}(X, Y)$ nach 2.5], und sie ist somit auch strikt-Norm-stetig. Das aber heißt gerade, daß F^s strikt ist. qed.

4.5. **Satz:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie mit links-approximierenden Einheiten. Es sei $J : \mathbf{C} \to H^{\mathbf{C}}$ der Funktor von 2.4. Dann definieren die Zuordnungen $F \mapsto F^s$ und $F_1 \mapsto F_1 \circ J$, die zueinander invers sind, eine Bijektion zwischen strikten Funktoren $F_1 : H^{\mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$, die sogar ein invertierbarer Funktor zwischen den beiden Funktorkategorien ist.

Beweis: Es sei $F_1 : H^{\mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$ ein strikter Funktor. Dann ist $F_1 \circ J$ C-wesentlich, da $J(\mathbf{C})$ strikt dicht ist in $H^{\mathbf{C}}$ (nach (2.5) und darüber hinaus $J(u_j)$ strikt gegen $1_{\mathbf{C}X}$ konvergiert (siehe den Beweis von 2.5), daher $\|F_1 \circ J(u_j) f_X - f_X\|_{F(X)} \to 0$. Weiters ist $(F_1 J)^s = F_1$ wegen des Arguments zu 5. im Beweis von 4.4.

Ist umgekehrt $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ C-wesentlich, dann existiert nach 4.4 der Funktor $F^s : H^{\mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$ und ist strikt. Da die F-Wirkung auf dem Kern von J verschwindet (siehe wieder 5. zu 4.4), ist $F^s \circ J = F$. Da

$F_1 \mapsto F_1 \circ J$ ein Funktor ist, ist es auch $F \mapsto F^s$, somit existiert insbesondere $\eta^s : F^s \to F_2{}^s$ für η natürlich $F \to F_2$ (was direkt trivial nachgerechnet werden kann) und $\eta_X{}^s = \eta_X$ als Abbildung. qed.

Wir stellen nun die Resultate für die linke Zentralisator-Kategorie und kontravariante Funktoren zusammen, aber wir verzichten darauf, Beweise anzugeben.

4.6. **Proposition:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie mit rechts-approximierenden Einheiten und $G : \mathbf{C}^{op} \to \mathrm{Ban}$ ein $\mathbf{C}$-wesentlicher Funktor. Es sei $G^s : H_{\mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$ durch $G^s(X) = G(X)$ und $G^s(\eta)\, g^X = \lim\limits_j G(\eta_X(u_j))\, g^X$ in $\|\cdot\|_{G(X)}$ für $g^X \in G^s(X)$ und $\eta \in H_{\mathbf{C}}(X, Y)$ gegeben, wobei (u_j) eine rechts-approximierende Einheit in $\mathbf{C}(X, X)$ ist. Dann ist G_s ein strikter kovarianter Funktor $H_{\mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$.

4.7. **Satz:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie mit rechts-approximierenden Einheiten und $J : \mathbf{C}^{op} \to H_{\mathbf{C}}$ der kontravariante Funktor von 2.8. Dann definieren die Zuordnungen $G \mapsto G^s$ und $F \mapsto F \circ J$, die zueinander invers sind, eine Bijektion zwischen strikten kovarianten Funktoren $F : H_{\mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$ und $\mathbf{C}$-wesentlichen kontravarianten Funktoren $\mathbf{C}^{op} \to \mathrm{Ban}$, die sogar einen invertierbaren Funktor zwischen den beiden Funktorkategorien beschreibt.

4.8. **Beispiel:** Kombiniert man 2.11, 4.2 und 4.5, wobei man für $\mathbf{C}$ das Operatorideal $K\,A$ der kompakten Operatoren über der Kategorie A aller Banachräume mit metrischer Approximationseigenschaft setzt, dann erhält man: Die Funktoren $A \to \mathrm{Ban}$ vom Typ Σ sind gerade die $K\,A$-wesentlichen Funktoren $K\,A \to \mathrm{Ban}$, und die sind wiederum genau die strikten Funktoren $A \to \mathrm{Ban}$, d. h. die, deren Morphismenabbildungen stetig sind von der Topologie der kompakten Konvergenz in die starke Operator-Topologie. Das nächste Ergebnis zeigt, welche Resultate man erwarten darf, wenn man darauf verzichtet, die metrische Approximationsbedingung vorauszusetzen.

4.9. **Proposition:** Sei $F : \mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$ ein Funktor. Ist F als Morphismenabbildung stetig in den starken Operatortopologien, dann ist F vom Typ Σ.

Ein analoger Satz gilt natürlich für kontravariante Funktoren. Man bemerke, daß ein Funktor vom Typ Σ nicht stetig sein muß für die starken Operatortopologien: $X \hat{\otimes} \cdot$ ist ein Beispiel dafür, wenn X die Approximationseigenschaft nicht hat. Wohl aber ist ein Funktor vom Typ Σ stetig auf den Einheitskugeln in den starken Operatortopologien, also auch in der gemischten Topologie von Cooper [4].

Beweis: Für jeden Banachraum X und jeden endlichdimensionalen Teilraum Y gibt es einen endlichdimensionalen Operator $u: X \to X$, der auf Y identisch wirkt: $u(y) = y$ für alle $y \in Y$. Ist (y_i), $i = 1, \ldots, n$ eine Basis von Y, dann wähle $y_i' \in Y'$ mit $\langle y_i, y_j' \rangle = \delta_{ij}$. $u = \sum\limits_i \hat{y_i} \circ y_i'$ erfüllt dann alles. Es gibt also ein Netz (u_j) von endlichdimensionalen Abbildungen $X \to X$, das in der starken Operatortopologie gegen 1_X konvergiert. Da F in diesen Topologien nach Voraussetzung stetig ist, gilt $\| F(u_j) f_X - f_X \| \to 0$, und das Argument aus dem Beweis von 4.2 ist auch hier anwendbar. qed.

Nun stellen wir noch die Resultate für die Doppel-Zentralisator-Kategorie und Bifunktoren zusammen. Wir verzichten wieder auf Beweise, die aus den schon gegebenen leicht zusammengestellt werden können.

4.10. **Proposition:** Es sei **C** eine Semikategorie und $G: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \to \mathbf{Ban}$ ein **C**-wesentlicher Bifunktor (4.1). **C** besitze beidseitig approximierende Einheiten. Definiere $G^s: \Delta\, \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \Delta\, \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ durch $G^s(X, Y) = = G(X, Y)$, $(g_Z{}^X\, \varphi_Y{}^X) = \lim\limits_j g_Z{}^Y\, (e_{(j)Y}{}^Y\, \varphi_Y{}^X)$ und $(\varphi_Y{}^X\, g_X{}^Z) = = \lim\limits_i (\varphi_Y{}^X\, e_{(i)X}{}^X)\, g_X{}^Z$ in $\|\cdot\|_G$ für $\varphi_Y{}^X \in \Delta\, \mathbf{C}(X, Y)$, $g_Y{}^X \in G(X, Y)$, wobei $(e_{(j)Y}{}^Y)$ und $(e_{(i)X}{}^X)$ approximierende Einheiten in $\mathbf{C}(Y, Y)$ und $\mathbf{C}(X, X)$ sind (dabei haben wir die Vereinbarung 3.1 benutzt). Dann ist G^s ein strikter Bifunktor auf $\Delta\, \mathbf{C}$.

4.11. **Satz:** Es sei **C** eine Semikategorie mit beidseitig approximierenden Einheiten. Weiters sei $\hat{\ }: \mathbf{C} \to \Delta\, \mathbf{C}$ die isometrische Einbettung von 3.4. Dann definieren die Zuordnungen $G \mapsto G^s$ und $G_1 \mapsto G_1(\hat{\ }, \hat{\ })$, die zueinander invers sind, eine Bijektion zwischen **C**-wesentlichen Bifunktoren $G: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ und strikten Bifunktoren $G_1: \Delta\, \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \times \Delta\, \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$, die sogar ein invertierbarer Funktor zwischen den entsprechenden Funktorkategorien ist.

4.12. **Bemerkungen:** (a) Klarerweise kann man auch $\mathbf{C}$-wesentliche ko- bzw. kontravariante Funktoren von $\mathbf{C}$ in Ban zu strikten Funktoren auf $\Delta\,\mathbf{C}$ erweitern, auch die Bijektion aus den Sätzen 4.5, 4.7, 4.11 bleibt erhalten.

(b) Beginnt man mit einem beliebigen Funktor $G : \Delta\,\mathbf{C}^{op} \times \Delta\,\mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ und ordnet ihm der Reihe nach die folgenden Bifunktoren zu: $G(\,\hat{}\,,\,\hat{}\,) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$, $G(\,\hat{}\,,\,\hat{}\,)_e : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ (vgl. 4.1), $(G(\,\hat{}\,,\,\hat{}\,)_e)^s : \Delta\,\mathbf{C}^{op} \times \Delta\,\mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$, dann erhält man einen Bifunktor, der mit Fug und Recht der strikte Teilfunktor von G genannt werden könnte. Da man durch Limesübergang leicht sieht, daß $\eta \in \underset{\mathbf{C}^{op}\times\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}(G_1, G_2)$ auch ein Element von $\underset{\Delta\mathbf{C}^{op}\times\Delta\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}(G_1{}^s, G_2{}^s)$ ist und die Umkehrung offensichtlich gilt, und da jede $\Delta\,\mathbf{C}$-natürliche Transformation strikte Teile in strikte Teile abbildet, sieht man, daß für $G, G_1 : \Delta\,\mathbf{C}^{op} \times \Delta\,\mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ mit G strikt gilt: $\underset{\Delta\mathbf{C}^{op}\times\Delta\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}(G, G_1) = \underset{\Delta\mathbf{C}^{op}\times\Delta\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}(G, (G_1(\,\hat{}\,,\,\hat{}\,)_e)^s)$. Diese Gleichung ist klarerweise natürlich in G und G_1, daher definiert $G_1 \to (G_1(\,\hat{}\,,\,\hat{}\,)_e)^s$ einen Rechtsadjungierten zur Einbettung der strikten Bifunktoren in die Kategorie aller zulässigen Bifunktoren.

Dieselbe Bemerkung gilt auch für die anderen Erweiterungstheorien, die wir vorgestellt haben (4.4 und 4.5 sowie 4.6 und 4.7).

Literatur

[1] Buchwalter, H.: Topologies, Bornologies et Compactologies. Thèse Doc. Sc. Math. Fac. Sc. Lyon (1968).

[2] Cigler, J.: Funktoren auf Kategorien von Banachräumen, Vorlesungsskriptum. Wien 1974.

[3] Cigler, J.: Tensor products of functors on categories of Banach spaces. Conference on Categorical Topology, Mannheim 1975. Springer Lecture Notes 540.

[4] Cooper, J. B.: Mixed Topologies. Preprint Linz 1975.

[5] Dubuc, E. J.: Kan extensions in enriched category theory. Springer Lecture Notes **145** (1970).

[6] Fisher-Palmquist, J., and D. C. Newell: Triples on functor categories. J. Algebra **25** (1973), 226—258.

[7] Grosser, M.: Bidualräume und Vervollständigungen von Banachmoduln. Dissertation Universität Wien, 1976.

[8] Johnson, B. E.: An introduction to the theory of centralizers. Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 294—320.

[9] Johnson, B. E.: Cohomology in Banach algebras. Mem. AMS **127** (1972).

[10] MacLane, S.: Categories for the working mathematician. Springer GTM **5** (1972).

[11] Michor, P.: Duality for contravariant functors on Banach spaces. Mh. Math.

[12] Michor, P.: Funktoren zwischen Kategorien von Banach- und Waelbroeck-Räumen. Sb. Österr. Akad. Wiss. II, **182** (1973), 43—65.

[13] Michor, P.: Tensor products, operator ideals and functors on categories of Banach spaces. University of Warwick 1975.

[14] Mitchell, B.: Rings with several objects. Advances in Math. **8** (1972), 1—161.

[15] Pietsch, A.: Adjungierte normierte Operatorenideale. Mathematische Nachrichten **48** (1971), 189—212.

[16] Schaefer, H. H.: Topological vector spaces. Springer GTM **3** (1970).

Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien