Michor P.

Banach-Semikategorien III

Von

P. Michor

Aus den
Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 185. Bd., 4. bis 7. Heft, 1976

Wien 1976

In Kommission bei Springer-Verlag, Wien-New York
Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien

Banach-Semikategorien III

Von

P. Michor

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 18. März 1976 durch das w. M. E. Hlawka)

Dieser Artikel ist die Fortsetzung der gleichlautenden Arbeiten [17] und [18]; die Numerierung der Abschnitte und des Literaturverzeichnisses werden fortgeführt.

§ 8 Semikategorien und deren Banachalgebren

Wir haben den Begriff Semikategorien eingeführt als eine gemeinsame Verallgemeinerung von Banachalgebren, Banach-Operator-Idealen und Kategorien von Banachräumen: Wir können Banachalgebren als einen Spezialfall von Semikategorien auffassen und Banachmoduln als Funktoren.

Es erhebt sich die Frage: kann man diesen Vorgang umkehren, kann man jede Semikategorie in gewisser Weise als Banachalgebra auffassen? Das Prinzip der Antwort stammt von Mitchell [14], der den algebraischen Fall von additiven Kategorien behandelte und jeder solchen einen Ring von unendlichen Matrizen zuordnete. In diesem Paragraphen wenden wir Mitchells Idee auf Semikategorien an und erhalten tiefere und speziellere Ergebnisse als Mitchell, da wir mehr Struktur und Maschinerie (Normen und Stetigkeit) zur Hand haben.

Wir entwickeln hier die Funktoren $\amalg$, Π, c_0, $[\cdot]$, $[[\cdot]]$, die Funktoren, Bifunktoren und Semikategorien in Moduln und Banachalgebren überführen. Wir haben die Methode gewählt, die am schnellsten zu typischen Resultaten führt, und dabei manchmal den natürlichen Zugang geopfert. Wir versuchen, das mit motivierenden und erklärenden Bemerkungen auszugleichen.

8.1. Der Funktor $[[\cdot]]$: Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie und $G : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \to \mathbf{Ban}$ ein Bifunktor. Will man mengentheoretisch sauber bleiben, so möge man annehmen, daß $\mathbf{C}$ klein ist bezüglich $\mathbf{Ban}$. Mit $|\mathbf{C}|$ bezeichnen wir die Menge aller Objekte von $\mathbf{C}$. Der Banachraum $[[G]]$ ist dann der Raum aller $|\mathbf{C}| \times |\mathbf{C}|$-Matrizen der Form $[g_Y{}^X]_{X, Y \in |\mathbf{C}|}$, wobei X der Zeilenindex und Y der Spaltenindex ist, jedes $g_Y{}^X \in G(X, Y)$ und folgendes gilt:

$$\|[g_Y{}^X]\| = \sup_{Z \in |\mathbf{C}|} \{ \sum_{U \in |\mathbf{C}|} \|g_Z{}^U\|, \sum_{V \in |\mathbf{C}|} \|g_V{}^Z\| \} < \infty, \tag{i}$$

und wir statten diesen Raum mit ebendieser Norm aus. Die lineare Struktur auf $[[G]]$ ist die elementweise. Nachzuprüfen, daß $[[G]]$ damit ein Banachraum ist, ist Routinesache, die wir dem Leser überlassen.

Ist eine natürliche Transformation $\varphi : G \to G_1$ von Bifunktoren auf $\mathbf{C}$ gegeben, dann liegt es nahe, eine Abbildung $[[\varphi]] : [[G]] \to [[G_1]]$ elementweise zu definieren, und zwar durch $[[\varphi]]\, [g_Y{}^X] = [\varphi\, g_Y{}^X]$ (wobei wir der Einfachheit halber die Indizes von φ unterdrückt haben). Es ist klar, daß $[[\cdot]] : \mathbf{Ban}^{\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}} \to \mathbf{Ban}$ damit zum Funktor wird. Es ist leicht einzusehen, daß der Teilraum aller spalten- und zeilenendlichen Matrizen $[g_Y{}^X]$ (d. h. für festes X ist $g_Y{}^X \neq 0$ nur für endlich viele Y und für festes Y nur für endlich viele X) von $[[G]]$ dicht ist.

Um die Wahl der Norm (i) zu begründen, bemerken wir noch, daß sie am Raum der $n \times n$-Matrizen gerade das Maximum der Normen $\|\cdot\|_{H(l_n{}^1, l_n{}^1)}$ und $\|\cdot\|_{H(l_n{}^\infty, l_n{}^\infty)}$ ist; sie hat also ein günstiges Verhältnis zu Produkten und Koprodukten in $\mathbf{Ban}_1$.

8.2. Der Funktor $[\cdot]$: Sind wieder $\mathbf{C}$ und G wie in 8.1, dann betrachten wir den Normabschluß des Teilraumes aller Matrizen $[g_Y{}^X]$, für die $g_Y{}^X \neq 0$ nur für endlich viele (X, Y) gilt (später gemeinhin endliche Matrizen genannt), in $[[G]]$ und nennen ihn $[G]$.

Klarerweise definiert $[\cdot] : \mathbf{Ban}^{\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}} \to \mathbf{Ban}$ einen Teilfunktor von $[[\cdot]]$ mit der induzierten Wirkung auf Morphismen.

Proposition: $[G]$ ist der Raum aller Matrizen $[g_Y{}^X]$ mit $g_Y{}^X \in G(X, Y)$, die folgendes erfüllen:

(a) $\|[g_Y{}^X]\| < \infty$.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $A_\varepsilon \subseteq \mathbf{C}$, so daß $\sup\limits_{X \in A}\{\sum\limits_{Y \in |\mathbf{C}| \setminus A_\varepsilon} \|g_Y{}^X\|, \sum\limits_{Y \in |\mathbf{C}| \setminus A_\varepsilon} \|g_X{}^Y\|\} < \varepsilon$

und $\sup\limits_{X \in |\mathbf{C}| \setminus A_\varepsilon} \{\sum\limits_{Y \in |\mathbf{C}|} \|g_Y{}^X\|, \sum\limits_{Y \in |\mathbf{C}|} \|g_X{}^Y\|\} < \varepsilon$ gelten.

Beweis: Eine kurze Rechnung zeigt, daß der Raum aller Matrizen $[g_Y{}^X]$, die (a) und (b) erfüllen, abgeschlossen ist in $[[G]]$, und aus (b) ersieht man leicht, daß der Raum der endlichen Matrizen darin dicht ist.

qed.

Bemerkung: Es ist durchaus möglich, noch weitere Teilfunktoren von $[[\cdot]]$ zu finden, etwa durch die folgende Bedingung: Die Mächtigkeit aller $g_Y{}^X \neq 0$ in einer Matrix sei kleiner oder gleich einer gegebenen Kardinalzahl $\alpha \leqslant |\mathbf{C}|$.

Wir begnügen uns damit, $[[\cdot]]$ und $[\cdot]$ zu studieren.

8.3. Die Banachalgebren $[[\mathbf{C}]]$ und $[\mathbf{C}]$: Wir spezialisieren 8.1 und 8.2 auf den Fall, daß G gerade der Homfunktor von $\mathbf{C}$ ist, den wir wieder mit $\mathbf{C}$ bezeichnen.

Das Produkt von $f = [f_Y{}^X]$ mit $g = [g_Y{}^X]$ in $[[\mathbf{C}]]$ ist durch formale Matrixmultiplikation gegeben:

$$f \cdot g = [f_Y{}^X] \cdot [g_Y{}^X] = [\sum_Z f_Y{}^Z \circ g_Z{}^X]_Y{}^X. \tag{ii}$$

Für feste X und Y konvergiert die Reihe $\sum\limits_Z f_Y{}^Z \circ g_Z{}^X$ absolut in $\mathbf{C}(X, Y)$:

$$\|\sum_{Z \in |\mathbf{C}|} f_Y{}^Z \circ g_Z{}^X\|_{\mathbf{C}} \leqslant \sum_Z \|f_Y{}^Z\|_{\mathbf{C}} \|g_Z{}^X\|_{\mathbf{C}} \leqslant$$
$$\leqslant \sup \|f_Y{}^U\|_{\mathbf{C}} \cdot \sum_Z \|g_Z{}^X\|_{\mathbf{C}} \leqslant \|[f_Y{}^X]\| \cdot \|[g_Y{}^X]\|,$$

und definiert daher ein Element $\sum\limits_Z f_Y{}^Z \circ g_Z{}^X \in \mathbf{C}(X, Y)$. Die folgenden Rechnungen zeigen, daß $\|f \cdot g\| \leqslant \|f\| \, \|g\|$, daß also $f \cdot g \in [[\mathbf{C}]]$ ist und daher $[[\mathbf{C}]]$ eine Banachalgebra, da die Multiplikation (als Verallgemeinerung der Matrizenmultiplikation) klarerweise assoziativ und bilinear ist.

$$\sum_Y \| \sum_Z f_Y{}^Z \circ g_Z{}^X \| \leqslant \sum_Y \sum_Z \|f_Y{}^Z\| \, \|g_Z{}^X\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_U \sum_Y \|f_Y{}^U\| \cdot \sum_Z \|g_Z{}^X\| \leqslant \|[f_Y{}^X]\| \cdot \|[g_Y{}^X]\|.$$
$$\sum_X \| \sum_Z f_Y{}^Z \circ g_Z{}^X \| \leqslant \sum_Z \sum_X \|f_Y{}^Z\| \, \|g_Z{}^X\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_Z \|f_Y{}^Z\| \cdot \sup_U \sum_X \|g^{UX}\| \leqslant \|[f_Y{}^X]\| \cdot \|[g_Y{}^X]\|.$$

8.4. **Satz:** [**C**] ist ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in der Banachalgebra [[**C**]], insbesondere daher selbst eine Banachalgebra.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $f \cdot g$, $g \cdot f \in [\mathbf{C}]$ für jede spalten- und zeilenendliche Matrix $f = [f_Y{}^X]$ und jede endliche Matrix $g = [g_Y{}^X]$, der Rest folgt dann aus der Stetigkeit des Produkts und der Dichtheit der entsprechenden Teilräume. Es sei $A = \{X \in |\mathbf{C}| :$ es gibt $Y \in |\mathbf{C}|$ mit $g_Y{}^X \neq 0$ oder $g_X{}^Y \neq 0\}$. Dann ist A eine endliche Teilmenge von $|\mathbf{C}|$ und $g_Y{}^X = 0$, wenn $X \notin A$ oder $Y \notin A$. Weiters sei $B = \bigcup_{X \in A} \{Y \in |\mathbf{C}| : f_Y{}^X \neq 0\}$. Dann ist auch B eine endliche Teilmenge von $|\mathbf{C}|$, da f spaltenendlich ist. Wenn $X \notin A$, dann ist $\sum_Z f_Y{}^Z \circ g_Z{}^X = 0$, da alle $g_Z{}^X = 0$, und wenn $Y \notin B$, dann ist $\sum_Z f_Y{}^Z g_Z{}^X = 0$, da $f_X{}^Z = 0$, wann immer $g_Z{}^X \neq 0$, daher ist $f \cdot g$ eine endliche Matrix. Ein ähnliches Argument trifft für $g \cdot f$ zu. qed.

8.5. Die Banachalgebra [**C**] ist in folgendem Sinn gefiltert: Ist $B \subseteq |\mathbf{C}| \times |\mathbf{C}|$, dann sei $[\mathbf{C}]_B$ der abgeschlossene lineare Teilraum aller $[g_Y{}^X]$, so daß $g_Y{}^X = 0$ für $(X, Y) \notin B$. Klarerweise ist $[\mathbf{C}]_B \subseteq [\mathbf{C}]_D$ für $B \subset D \subseteq |\mathbf{C}| \times |\mathbf{C}|$ und $[\mathbf{C}]_B \cdot [\mathbf{C}]_D \subset [\mathbf{C}]_{B \circ D}$, wobei $B \circ D = \{(X, Y):$ es gibt ein $Z \in \mathbf{C}$ mit $(X, Z) \in B$, $(Z, Y) \in D\}$ ist. Wenn B alle endlichen Teilmengen von $|\mathbf{C}| \times |\mathbf{C}|$ durchläuft, dann ist $\bigcup_B [\mathbf{C}]_B$ dicht in [**C**], und auf diese Weise erhält man eine Filtrierung von [**C**] durch Matrix-Teilalgebren. Nimmt man an, daß alle B von der Form $|\mathbf{C}| \times A$, $A \subseteq |\mathbf{C}|$ sind, dann erhält man eine Filtrierung durch abgeschlossene Rechtsideale $[\mathbf{C}]|_{|\mathbf{C}| \times A}$, oder auch durch abgeschlossene Linksideale $[\mathbf{C}]_{A \times |\mathbf{C}|}$. Wir werden diese Tatsache nicht benützen.

8.6. **Definition:** Es sei F ein ko- oder kontravarianter Funktor von $\mathbf{C}$ in Ban und G ein kontra-kovarianter Bifunktor $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$. Wir definieren die folgenden Banachräume: $\Pi F = \prod_{X \in \mathbf{C}} F(X)$, wobei Π das Produkt in Ban_1 ist, $\amalg F = \coprod_{X \in \mathbf{C}} F(X)$, wobei $\amalg$ das Koprodukt in Ban_1 ist. $c_0 F$, der Abschluß des Raumes der endlichen Folgen in ΠF. $\Pi G = \prod_{X,Y} G(X, Y)$. $\amalg G = \coprod_{X,Y} G(X, Y)$, $c_0 G$, wiederum der Abschluß des Raumes der endlichen Folgen in ΠG.

Die Wirkung von Π, $\amalg$, c_0 auf natürliche Transformationen ist klarerweise komponentenweise gegeben, z. B. $\Pi \eta\, (f_X)_X = (\eta f_X)_X$.

Dadurch sind Funktoren definiert: c_0, Π, $\amalg$: $\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}$ bzw. $\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ bzw. $\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$.

8.7. **Proposition:** Es seien $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$, $\bar{F} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ban}$ und $G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ Funktoren. Dann sind $\amalg F$, ΠF, $c_0 F$ linke Banach-[[C]]-Moduln, $\amalg \bar{F}$, $\Pi \bar{F}$, $c_0 \bar{F}$ rechte Banach-[[C]]-Moduln und ΠG, $\amalg G$, $c_0 G$, $[G]$, $[[G]]$ sind Banach-[[C]]-Bimoduln. Π, $\amalg$, c_0 $[\cdot]$, $[[\cdot]]$ (die beiden letzteren nur für Bifunktoren) sind Funktoren:

$$\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}^{[[\mathbf{C}]]}$$

$$\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Ban}^{[[\mathbf{C}]]^{\mathrm{op}}}$$

$$\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}^{[[\mathbf{C}]]^{\mathrm{op}} \times [[\mathbf{C}]]}.$$

Dieselben Aussagen gelten natürlich auch für die Teilalgebra [C].

Beweis: Die Modulwirkung ist immer dadurch gegeben, daß man die Wirkung einer Matrix auf einen Vektor (oder auf eine andere Matrix) imitiert. Bevor wir sie niederschreiben, erinnern wir den Leser an die Bezeichnungsvereinbarung 3.1, die wir hier der Einfachheit halber wieder verwenden:

$u_Y{}^X \in \mathbf{C}(X, Y)$, $f_X \in F(X)$, $\bar{f}^Y \in \bar{F}(Y)$, $g_Y{}^X \in G(X, Y)$, dann sei $u_Y{}^X f_X = F(u_Y{}^X) f_X$, $\bar{f}^Y u_Y{}^X = \bar{F}(u_Y{}^X) \bar{f}^Y$, $u_Y{}^X g_X{}^Z = G(Z, u_Y{}^X) g_X{}^Z$, $g_Z{}^Y u_Y{}^X = G(u_Y{}^X, Z) g_Z{}^Y$.

Ein oberer Index ist also immer kontravariant und ein Spaltenindex, ein unterer ist kovariant und ein Zeilenindex.

ΠF, $\amalg F$, $c_0 F$ können daher als Räume von Spaltenvektoren (nur Zeilenindizes) aufgefaßt werden und $\Pi \bar{F}$, $\amalg \bar{F}$, $c_0 \bar{F}$ als Räume von Zeilenvektoren.

Nun sei $u = [u_Y{}^X] \in [[\mathbf{C}]]$. Dann sind die verschiedenen Wirkungen von u gegeben durch:

$$u \cdot f = [u_Y{}^X] \cdot [f_X] = [\sum_X u_Y{}^X f_X]_Y \text{ für } f = [f_X] \in \Pi F,\ \amalg F,\ c_0 F;$$

$$\bar{f} \cdot u = [\bar{f}^Y] \cdot [u_Y{}^X] = [\sum_Y \bar{f}^Y u_Y{}^X]^X \text{ für } \bar{f} = [\bar{f}^Y] \in \Pi \bar{F},\ \amalg \bar{F},\ c_0 \bar{F},$$

$$u \cdot g = [u_Y{}^X] \cdot [g_Y{}^X] = [\sum_X u_Y{}^X g_X{}^Z]_Y{}^Z,$$

$$g \cdot u = [g_Y{}^X] \cdot [u_Y{}^X] = [\sum_Y g_Z{}^Y u_Y{}^X]_Z{}^X,$$

für $g = [g_Y{}^X] \in \Pi G$, $\amalg G$, $c_0 G$, $[G]$, $[[G]]$.

Daß alle diese Wirkungen bilinear und Modulwirkungen sind, ist klar durch ihre Ähnlichkeit mit Matrix- und Vektormanipulationen. Wir haben noch die Normungleichungen nachzuprüfen:

$$\|u \cdot f\|_{\pi F} = \sup_Y \|\sum_X u_Y{}^X f_X\|_{F(Y)} \leqslant \sup_Y \sum_X \|u_Y{}^X\|_{\mathbf{C}} \cdot \|f_X\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_Y \sum_X \|u_Y{}^X\|_{\mathbf{C}} \cdot \sup_Z \|f_Z\| \leqslant \|u\|_{[[\mathbf{C}]]} \cdot \|f\|_{\pi F}.$$
$$\|u \cdot f\|_{\amalg F} = \sum_Y \|\sum_X u_Y{}^X f_X\|_{F(Y)} \leqslant \sum_X (\sum_Y \|u_Y{}^X\|_{\mathbf{C}}) \|f_X\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_X \sum_Y \|u_Y{}^X\|_{\mathbf{C}} \cdot \sum_Z \|f_Z\| \leqslant \|u\|_{[[\mathbf{C}]]} \cdot \|f\|_{\amalg F}.$$

Um das Resultat für $c_0 F$ zu zeigen, genügt es, nachzuweisen, daß $u \cdot f$ eine endliche Folge ist, wenn u zeilen- und spaltenendlich ist und f eine endliche Folge, denn dann kann man die Stetigkeit der Wirkung in ΠF verwenden. Diese Tatsache wieder ist leicht einzusehen durch ein Argument ähnlich dem im Beweis von 8.4. Die Normungleichungen für $\Pi \bar{F}$, $\amalg \bar{F}$, $c_0 \bar{F}$ können analog abgeleitet werden, und zusammen mit den eben gezeigten ergeben sie auch die für ΠG, $\amalg G$, $c_0 G$. Die Rechnungen für $[G]$ und $[[G]]$ haben wir im Prinzip schon in 8.3 durchgeführt.

Ist $\eta : F \to F_1$ eine natürliche Transformation, dann sind $\Pi\,\eta$, $\amalg\,\eta$ und $c_0\,\eta$ [[C]]-Modulhomomorphismen wegen:

$$\Pi\,\eta\,(u \cdot f) = \Pi\,\eta\,[\sum_X u_Y{}^X f_X]_Y = [\eta \sum_X u_Y{}^X f_X]_Y =$$
$$= [\sum_X u_Y{}^X (\eta\, f_X)]_Y = u \cdot (\Pi\,\eta\,(f)).$$

Ähnlich zeigt man das für $\overline{F}$ und G. qed.

8.8. **Bemerkung:** Wenn C eine Semikategorie mit approximierenden Einheiten irgendeiner Art (1.5) ist, dann hat [C] eine approximierende Einheit derselben Art: Man verteile approximierende Einheiten auf endlich viele Stellen der Hauptdiagonale einer Matrix. Das gilt nicht für [[C]], wenn C unendlich ist. Ist C eine Kategorie, dann besitzt [C] approximierende Einheiten jeder Art, und [[C]] ist eine Banachalgebra mit Identität.

8.9. Der Funktor T: Wir entwickeln nun eine Methode, Funktoren aus gegebenen [[C]]- und [C]-Moduln zu konstruieren. Da jeder [[C]]-Modul auch ein [C]-Modul ist, genügt es, das für [C]-Moduln durchzuführen. Zunächst etwas Notation: ist $u_Y{}^X \in \mathbf{C}\,(X, Y)$ gegeben, dann kann man diesen Morphismus auch als Element von [C] auffassen, nämlich als die Matrix, deren einziges nichtverschwindendes Element gerade $u_Y{}^X$ an der Stelle (X, Y) ist. Wir bezeichnen diese Matrix mit demselben Symbol $u_Y{}^X$ (ohne Klammer). Es sei V, $\overline{V}$ jeweils ein rechter bzw. linker Banach-[C]-Modul und W ein Banach-[C]-Bimodul. Wir werden folgende Funktoren konstruieren: $T\,V : \mathbf{C} \to \to \mathrm{Ban}$, $T\,\overline{V} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ban}$, $T\,W : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$.

(a) Ist $X \in \mathbf{C}$, dann definieren wir $T\,V\,(X)$ als den abgeschlossenen linearen Teilraum von V, der von allen Elementen der Form $u_X{}^Z \cdot v$, $u_X{}^Z \in \mathbf{C}\,(Z, X)$, $Z \in \mathbf{C}$, $v \in V$ erzeugt wird, d. h., $T\,V\,(X)$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $[\mathbf{C}]_{\{X\} \times |\mathbf{C}|} \cdot V$ (Bezeichnung aus 8.5). Dazu gibt es eine isometrische Einbettung $i_X{}^V : T\,V\,(X) \to V$.

$T\,\overline{V}\,(X)$ ist definiert als die abgeschlossene lineare Hülle von $\overline{V} \cdot [\mathbf{C}]_{|\mathbf{C}| \times \{X\}}$, d. h. der abgeschlossene lineare Teilraum, der von allen Elementen der Form $\bar{v} \cdot u_Z{}^X$, $u_Z{}^X \in \mathbf{C}\,(X, Z)$, $Z \in \mathbf{C}$, $\bar{v} \in \overline{V}$ erzeugt wird. Auch hier bezeichnen wir die isometrische Einbettung mit $i_X{}^{\overline{V}} : T\,\overline{V}\,(X) \to \overline{V}$.

$T\,W\,(X, Y)$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $[\mathbf{C}]_{\{Y\}\times|\mathbf{C}|}\cdot$ $\cdot\, W\cdot[\mathbf{C}]_{|\mathbf{C}|\times\{X\}}$, und die isometrische Einbettung ist $i_{XY} : T\,W\,(X, Y) \to W$.

(b) Ist $f_Y{}^X \in \mathbf{C}\,(X, Y)$, dann ist die Abbildung $T\,V\,(f_Y{}^X) : T\,V\,(X) \to$ $\to T\,V\,(Y)$ gegeben durch ihre Wirkung auf die erzeugenden Elemente von $T\,V\,(X) : T\,V\,(f_Y{}^X)\;(u_X{}^Z \cdot v) = f_Y{}^X \cdot u_X{}^Z \cdot v \in T\,V\,(Y)$, d. h., $T\,V\,(f_Y{}^X)$ ist die Wirkung der einpunktigen Matrix $f_Y{}^X$ auf V, eingeschränkt auf den Teilraum $T\,V\,(X)$, und führt diesen über in den Teilraum $T\,V\,(Y)$, da $f_Y{}^X$ das Rechtsideal $[\mathbf{C}]_{\{X\}\times|\mathbf{C}|}$ in das Rechtsideal $[\mathbf{C}]_{\{Y\}\times|\mathbf{C}|}$ überführt. Formal schreiben wir

$$i_Y{}^V \circ T\,V\,(f_Y{}^X) = f_Y{}^X \circ i_X{}^V.$$

In genau derselben Art seien die Abbildungen $T\,\overline{V}\,(f_Y{}^X) : T\,\overline{V}\,(Y) \to$ $\to T\,\overline{V}\,(X)$ und $T\,W\,(f_Y{}^X, h_U{}^Z) : T\,W\,(Y, Z) \to T\,W\,(X, U)$ definiert.

(c) $T\,V$, $T\,\overline{V}$, $T\,W$ sind Funktoren, da sie Restriktionen der Modul-Wirkungen sind, daher assoziativ, wenn definiert, und linear und kontraktiv auf den Morphismenräumen.

(d) Ist $\varepsilon : V \to V_1$ ein $[\mathbf{C}]$-Modulhomomorphismus, dann sei $T\,\varepsilon : T\,V \to T\,V_1$ gegeben durch $(T\,\varepsilon)_X\,(u_X{}^Z \cdot v) = \varepsilon\,(u_X{}^Z \cdot v) = u_X{}^Z\,\cdot$ $\cdot\,\varepsilon\,(v) \in T\,V_1\,(X)$ für ein erzeugendes Element von $T\,V\,(X)$. $(T\,\varepsilon)_X$ ist also die Restriktion von ε auf den Teilraum $T\,V\,(X)$ und bildet diesen in den Teilraum $T\,V_1\,(X)$ von V_1 ab. Dadurch ist eine natürliche Transformation $T\,\varepsilon : T\,V \to T\,V_1$ bestimmt, wie man leicht nachrechnet. Ebenso ist klar, daß $T\,(\varepsilon \circ \eta) = T\,\varepsilon \circ T\,\eta$ ist. Dieselben Überlegungen gelten für $\overline{V}$ und W.

8.10. **Bemerkung:** Ist $\mathbf{C}$ eine Kategorie (hat Einheiten), dann hat Mitchell [14] eine einfachere Methode angegeben, $T\,V$ zu konstruieren, die auch in unserem Fall funktioniert und auf dem folgenden Lemma beruht.

Lemma: Ist X ein Banachraum und $\alpha \in H\,(X, X)$ ein idempotenter Morphismus, d. h. $\alpha^2 = \alpha$, dann können wir α wie folgt faktorisieren: $(X \xrightarrow{\alpha} X) = (X \xrightarrow{\pi} U \xrightarrow{\iota} X)$, wobei $\pi \circ \iota = 1_U$ gilt, π eine Quotientenabbildung ist und $\|\iota\| \leqslant \|\alpha\|$.

Beweis: Es sei $U = X/\alpha^{-1}(0)$. Wir betrachten die kanonische Faktorisierung von α in Ban_1 (vgl. Buchwalter [1] oder Cigler [2]):

$$(X \xrightarrow{\alpha} X) = (X \xrightarrow{\pi} X/\alpha^{-1}(0) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \overline{\alpha(X)} \xrightarrow{\mathrm{im}\,\alpha} X).$$

Dabei ist $\pi = \mathrm{coim}\,\alpha$ und $\tilde{\alpha}$ injektiv mit dichtem Bild (ein Bimorphismus). Da $\alpha^2 = \alpha$, gilt auch

$$\mathrm{im}\,\alpha \circ \tilde{\alpha} \circ \pi \circ \mathrm{im}\,\alpha \circ \tilde{\alpha} \circ \pi = \mathrm{im}\,\alpha \circ \tilde{\alpha} \circ \pi,$$

also

$$\tilde{\alpha} \circ \pi \circ \mathrm{im}\,\alpha \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \quad \text{und} \quad \pi \circ \mathrm{im}\,\alpha \circ \tilde{\alpha} = 1_{X/\alpha^{-1}(0)},$$

$$\tilde{\alpha} \circ \pi \circ \mathrm{im}\,\alpha = 1_{\overline{\alpha(X)}}, \quad \text{d. h.} \quad \tilde{\alpha}^{-1} = \pi \circ \mathrm{im}\,\alpha,$$

somit ist insbesondere $\alpha(X)$ abgeschlossen in X. Weiters gilt

$$\pi \circ (\mathrm{im}\,\alpha \circ \tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}^{-1} \circ \alpha = 1_{X/\alpha^{-1}(0)}.$$

Definieren wir $\iota = \mathrm{im}\,\alpha \circ \alpha$, so erhalten wir $\pi \circ \iota = 1_U$ und $\iota \circ \pi = \alpha$. qed.

Benützt man dieses Lemma, so sieht man leicht, daß man $T\,V$ in 8.9 wie folgt definieren kann:

$$(V \xrightarrow{1_X} V) = (V \xrightarrow{\pi_X^V} T\,V(X) \xrightarrow{i_X^V} V),$$

wobei 1_X die idempotente Einpunktmatrix in [C] ist. Für $T\,V(f_Y{}^X)$ haben wir den weiteren Ausdruck $T\,V(f_Y{}^X) \circ \pi_X{}^V = \pi_Y{}^V \circ f_Y{}^X$, und für einen Modulhomomorphismus $\varepsilon : V \to V_1$ gilt $(T\,\varepsilon)_X \circ \pi_X{}^V = \pi_X{}^{V_1} \circ \varepsilon$, wie man leicht nachprüft. $T\,V(X)$ ist ein direkter Summand in V.

8.11. Wir geben nun einige Eigenschaften der Funktoren an, die wir konstruiert haben. Wir verwenden die in 8.7 und 8.9 verwendeten Bezeichnungen. $|\mathbf{C}|$ sei unendlich, um triviale Fälle auszuschließen.

(a) $T\,V$, $T\,\bar{V}$, $T\,W$ sind immer C-wesentliche Funktoren (vgl. 4.1) nach Konstruktion.

F ist genau dann C-wesentlich, wenn $\amalg\,F$ oder $c_0\,F$ [C]-wesentlich ist, oder wenn äquivalent dazu $\Pi\,F$ oder $\amalg\,F$ oder $c_0\,F$ [[C]]-wesentlich ist. Dieselben Aussagen gelten für $\bar{F}$. G ist genau dann C-wesentlich, wenn $\Pi\,G$ oder $c_0\,G$ oder $[G]$ [C]-wesentlich ist, oder wenn äquivalent dazu eines (und damit alle) von $\Pi\, G$, $\amalg\, G$, $c_0\, G$, $[G]$, $[[G]]$ ein $[[\mathbf{C}]]$-wesentlicher Modul ist.

(b) Alle Funktoren T, Π, $\amalg$, c_0, $[\cdot]$, $[[\cdot]]$ sind exakt, d. h., sie führen kurze exakte Folgen in ebensolche über. Es gibt zwei Möglichkeiten, Exaktheit in Ban zu interpretieren: das Bild eines Morphismus ist dicht im Kern des nächsten; oder das Bild stimmt mit dem Kern überein. Die Aussage gilt für beide Interpretationen. Der Beweis ist für T etwas umständlich, für die anderen Funktoren nahezu trivial. Wir verzichten aus Platzgründen darauf, ihn vorzuführen.

(c) Für die Begriffe, die in 7.1 vorgestellt wurden, gilt: $\amalg$ triv $F =$ $=$ triv $\amalg\, F$ und $\amalg$ tot $F =$ tot $\amalg\, F$, dasselbe gilt für Π, c_0, $[\cdot]$, $[[\cdot]]$ und für $\bar{F}$ und G.

Für triv F ist das klar, wegen (b) folgt es dann auch für tot F.

(d) V ist genau dann $\mathbf{C}$-trivial, wenn $T\, V = (0)$ ist.

§ 9 Adjungiertheitsrelationen

9.1. **Satz:** Die Gleichung $\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(\amalg\, F, V) = \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(F, T\, V)$ gilt natürlich für $V \in \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}$ und $\mathbf{C}$-wesentliche $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$; d. h. der Funktor $\amalg : (\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}})_{\mathrm{ess}} \to \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}$ ist linksadjungiert zum Funktor $T : \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]} \to (\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}})_{\mathrm{ess}}$. $T \circ \amalg$ ist die Identität auf $(\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}})_{\mathrm{ess}}$, und T und $\amalg$ sind beide völlig treu.

Genau dieselben Resultate gelten für Rechtsmoduln $\bar{V}$ bzw. Bimoduln W und kontravariante $\mathbf{C}$-wesentliche Funktoren bzw. $\mathbf{C}$-wesentliche Bifunktoren G und auch, wenn man $[\mathbf{C}]$ durch $[[\mathbf{C}]]$ ersetzt. Die Beweise dafür sind analog dem folgenden.

Beweis: Da F $\mathbf{C}$-wesentlich ist, gilt $T\, \amalg\, F = F$ nach Konstruktion von T, und man überlegt sich auch leicht, daß auf den Morphismenräumen T und $\amalg$ völlig treu wirken.

Nun definieren wir Abbildungen

(a) $\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(\amalg\, F, V) \underset{\theta}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(F, T\, V)$.

Ist $\varphi \in \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(\amalg\, F, V)$ und $j_X{}^F : F(X) \to \amalg\, F$ die kanonische Injektion, dann behaupten wir, daß im $(\varphi \circ j_X{}^F) \subseteq T\, V(X)$: Da F $\mathbf{C}$-wesentlich ist, existieren für jedes $f_X \in F(X)$ Abbildungen $u_X{}^{Z_i} \in$ $\in \mathbf{C}(Z_i, X)$ und $f_{Z_i} \in F(Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, so daß $\| \Sigma u_X{}^{Z_i} f_{Z_i} - f_X \|_{F(X)} < \varepsilon$.

(Wir haben die Konvention 3.1 verwendet.) Dann gilt $\varphi\,(\Sigma\, u_X{}^{Z_i} f_{Z_i}) = \Sigma\, u_X{}^{Z_i}\, \varphi\,(f_{Z_i}) \in T\, V\,(X)$ und $\|\varphi\,(\Sigma\, u_X{}^{Z_i} f_{Z_i}) - \varphi\,(f_X)\|_V \leqslant \|\varphi\| \cdot \varepsilon$, also ist $\varphi\,(f_X)$ ein Häufungspunkt und damit ein Element von $T\, V\,(X)$. Die folgende Definition ist daher sinnvoll:

(b) $i_X{}^V \circ \Psi\,(\varphi)_X = \varphi \circ j_X{}^F : F\,(X) \to T\, V\,(X)$.

$\Psi\,(\varphi)$ definiert eine natürliche Transformation $F \to T\, V$, da für $f_Y{}^X \in \mathbf{C}\,(X, Y)$ gilt:

$$i_Y{}^V \circ T\, V\,(f_Y{}^X) \circ \Psi\,(\varphi)_X = f_Y{}^X \circ i_X{}^V \circ \Psi\,(\varphi)_X = f_Y{}^X \circ \varphi \circ j_X{}^F =$$
$$= \varphi \circ f_Y{}^X \circ j_X{}^F = \varphi \circ j_X{}^F \circ F\,(f_Y{}^X) = i_Y{}^V \circ \Psi\,(\varphi)_Y \circ F\,(f_Y{}^X),$$

und da $i_Y{}^V$ ein Monomorphismus ist. Darüber hinaus gilt

$$\|\Psi\,(\varphi)\| = \sup_X \|\Psi\,(\varphi)_X\| \leqslant \sup_X \|\varphi\|\, \|j_X{}^F\| \leqslant \|\varphi\|.$$

Sei nun umgekehrt $\tau \in \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}\,(F, T\, V)$. Dann definieren wir

$$(\Theta\, \tau) : \coprod F \to V$$

durch

(c) $(\Theta\, \tau) = \coprod\limits_X (i_X{}^V \circ \tau_X) : \coprod\limits_X F\,(X) = \coprod F \to V$, wobei wir die universelle Eigenschaft des Koprodukts in Ban_1 verwenden. Es gilt also $\|\Theta\, \tau\| \leqslant \sup\limits_X \|\tau_X\| = \|\tau\|$, und $\Theta\, \tau$ ist charakterisiert durch

(d) $(\Theta\, \tau) \circ j_X{}^F = i_X{}^V \circ \tau_X$.

Wir behaupten, daß $\Theta\, \tau$ ein $[\mathbf{C}]$-Modulhomomorphismus ist: Sei $u = [u_Y{}^X] \in [\mathbf{C}]$ und $f = [f_X] \in \coprod F$, dann ist

$$(\Theta\, \tau)\, (u \cdot f) = (\Theta\, \tau)\, [(\sum_Z u_X{}^Z f_Z)_X] =$$
$$= (\Theta\, \tau) \sum_X j_X{}^F\, (\sum_Z F\,(u_X{}^Z)\, f_Z) = \sum_X \sum_Z i_X{}^V \circ \tau_X \circ F\,(u_Y{}^X)\, f_Z =$$
$$= \sum_X \sum_Z i_X{}^V \circ T\, V\,(u_X{}^Z)\, \tau_Z\,(f_Z) = u \cdot (\sum_Z i_Z{}^V\, \tau_Z\,(f_Z)) =$$
$$= u \cdot (\sum_Z (\Theta\, \tau)\, j_Z{}^F\,(f_Z)) = u \cdot ((\Theta\, \tau)\,(f)).$$

Nun zeigen wir, daß $\Psi^{-1} = \Theta$ ist: Sei $\varphi \in \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}\,(\coprod F, V)$, dann ist $\Theta\, \Psi\,(\varphi) \circ j_X{}^F = i_X{}^V \circ \Psi\,(\varphi)_X = \varphi \circ j_X{}^F$, und aus der universellen Eigenschaft des Koproduktes folgt, daß $\Theta\, \Psi\,(\varphi) = \varphi$. Ist umgekehrt

$\tau \in \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(F, T\,V)$, dann ist $i_X{}^V \circ \Psi\,\Theta\,(\tau)_X = (\Theta\,\tau)_X \circ j_X{}^F = i_X{}^V \circ \tau_X$, also $(\Psi\,\Theta\,\tau)_X = \tau_X$, da $i_X{}^V$ ein Monomorphismus ist.

Nun zeigen wir noch, daß Ψ natürlich in F und V ist. Sei $\varepsilon : V \to V_1$ ein [C]-Modulhomomorphismus und $\eta : F_1 \to F$ eine natürliche Transformation C-wesentlicher Funktoren. Wir haben nachzuweisen, daß für $\varphi \in \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(\Pi\, F, V)$ gilt: $\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(\eta, T\,\varepsilon)\,\Psi\,(\varphi) = \Psi\,(\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(\Pi\,\eta, \varepsilon)\,(\varphi))$.

$$i_X{}^{V_1} \circ (\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(\eta, T\,\varepsilon)\,\Psi\,(\varphi))_X = i_X{}^{V_1} \circ (T\,\varepsilon)_X \circ \Psi\,(\varphi)_X \circ \eta_X =$$
$$= \varepsilon \circ i_X{}^V \circ \Psi\,(\varphi)_X \circ \eta_X = \varepsilon \circ \varphi \circ j_X{}^F \circ \eta_X = \varepsilon \circ \varphi \circ \Pi\,\eta \circ j_X{}^{F_1} =$$
$$= i_X{}^{V_1} \circ \Psi\,(\varepsilon \circ \varphi \circ \Pi\,\eta)_X = i_X{}^{V_1} \circ \Psi\,(\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(\Pi\,\eta, \varepsilon)\,\varphi)_X,$$

und da $i_X{}^{V_1}$ mono ist, ist Ψ natürlich. qed.

9.2. **Satz:** Es sei C eine Semikategorie. Dann gilt die Gleichung $\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(V, \Pi\, F) = \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,V, F)$ natürlich für C-wesentliche linke Banach-[C]-Moduln und $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$.

Bemerkung: Diese Gleichung gilt auch für Rechtsmoduln bzw. Bimoduln und die entsprechenden Funktoren und wenn man [C] durch [[C]] ersetzt. Da $\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(V, \Pi\, F) = \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(V, (\Pi\, F)_e)$ ist und $(\Pi\, F)^{[\mathbf{C}]}{}_{-e} = c_0\,(F_{\mathbf{C}-e})$, ist also der Funktor $F \to c_0\,(F_{\mathbf{C}-e})$ rechtsadjungiert zum Funktor $T : (\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]})_{\mathrm{ess}} \to (\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}})_{\mathrm{ess}}$. Es gibt noch andere Möglichkeiten, Adjunktionen aus der obigen Gleichung herzustellen. Die Situation ist hier unsymmetrisch und komplizierter als in 9.1, da $\Pi\, F$ nicht automatisch [C]-wesentlich ist.

Beweis: Wir definieren wieder die folgenden Abbildungen:

$$\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(V, \Pi\, F) \underset{\Theta}{\overset{\Psi}{\leftrightarrows}} \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,V, F).$$

Sei zunächst $\eta \in \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,V, F)$. Dann definieren wir $\Theta\,\eta : V \to \Pi\, F$ auf Elementen der Gestalt $u \cdot v \in V$, $u = [u_Y{}^X] \in [\mathbf{C}]$, $v \in V$ durch $(\Theta\,\eta)\,(u \cdot v) = [\eta_Y\,(\sum_X u_Y{}^X \cdot v)]_{Y \in \mathbf{C}} \in \prod_Y F\,(Y)$.

Da nach Voraussetzung endliche Linearkombinationen solcher Elemente dicht sind in V, die Summe $\sum_X u_Y{}^X \cdot v$ in $T\,V\,(Y)$ absolut konvergiert und $\|\Theta\,\eta\| \leqslant \|\eta\|$ ist, kann $\Theta\,\eta$ auf ganz V fortgesetzt werden.

Man kann diese Konstruktion auch so ausdrücken: Durch

$\pi_Y^V(u \cdot v) = \sum_X u_Y{}^X \cdot v \in T\ V(Y)$ ist vermittels stetigen Fortsetzens eine Projektion $\pi_Y^V : V \to T\ V(Y)$ definiert, und nun ist

$$\Theta\,\eta = \prod_Y (\eta_Y \circ \pi_Y^V) : V \to \Pi\ F.$$

$\Theta\,\eta$ ist also charakterisiert durch $p_X^F \circ (\Theta\,\eta) = \eta_X \circ \pi_X^V$, wobei $p_X^F : \Pi\ F \to F(X)$ die kanonische Projektion ist.

Man überlegt sich leicht, daß die Projektion π_X^V alle Eigenschaften der gleichnamigen Projektion aus 8.10 hat: $T\ V(u_Y{}^X) \circ \pi_X^V = \pi_Y^V \circ u_Y{}^X$, $\pi_X^V \circ i_X^V = 1_{T\ V(X)}$; $i_X^V \circ \pi_X^V$ ist aber nicht durch eine Wirkung aus $[\mathbf{C}]$ gegeben, denn diese wäre ja 1_X.

Wir behaupten nun, daß $\Theta\,\eta$ ein $[\mathbf{C}]$-Modulhomomorphismus ist. Sei $u = [u_Y{}^X] \in [\mathbf{C}]$. Dann ist für $v \in V$:

$$\begin{aligned} p_X^F(u \cdot (\Theta\,\eta)\,v) &= \sum_Z F(u_X{}^Z)\, p_Z^F(\Theta\,\eta)\,v = \\ = \sum_Z F(u_X{}^Z)\,\eta_Z\,\pi_Z^V(v) &= \sum_Z \eta_X\, T\ V(u_X{}^Z)\,\pi_Z^V(v) = \\ = \sum_Z \eta_X\,\pi_X^V\,u_X{}^Z \cdot v &= \eta_X\,\pi_X^V(u \cdot v) = p_X^F(\Theta\,\eta)\,(u \cdot v). \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $\varphi\ \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(V, \Pi\ F)$, dann sei

$$\Psi(\varphi)_X = p_X^F \circ \varphi \circ i_X^V : T\ V(X) \to F(X).$$

Klarerweise gilt $\|\Psi\,\varphi\| \leqslant \|\varphi\|$, und für $f_Y{}^X \in \mathbf{C}(X, Y)$ errechnen wir: $(\Psi\,\varphi)_Y \circ T\ V(f_Y{}^X) = p_Y^F \circ \varphi \circ i_Y^V \circ T\ V(f_Y{}^X) = p_Y^F \circ \varphi \circ f_Y{}^X \circ i_X^V = p_Y^F \circ f_Y{}^X \circ \varphi \circ i_X^V = F(f_Y{}^X) \circ p_X^F \circ \varphi \circ i_X^V = F(f_Y{}^X) \circ (\Psi\,\varphi)_X$. Daher ist $\Psi\,\varphi$ eine natürliche Transformation $T\ V \to F$. Nun zeigen wir, daß Θ und Ψ zueinander invers sind: Sei $\varphi \in \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(V, \Pi\ F)$, dann ist

$$\begin{aligned} \Theta\,\Psi(\varphi)\,(u \cdot v) &= [\Psi(\varphi)_Y (\sum_X u_Y{}^X \cdot v)]_{Y \in \mathbf{C}} = \\ &= [p_Y^F \circ \varphi \circ i_Y^V (\sum_X u_Y{}^X \cdot v)]_{Y \in \mathbf{C}} = \\ &= [p_Y^F \circ i_Y^{\pi F} \circ (T\,\varphi)_Y (\sum_X u_Y{}^X \cdot v)]_{Y \in \mathbf{C}} = \\ &= [(T\,\varphi)_Y (\sum_X u_Y{}^X \cdot v)]_{Y \in \mathbf{C}} = \varphi\,(u \cdot v). \end{aligned}$$

Für $\eta \in \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,V, F)$ hingegen haben wir

$$(\Psi\,\Theta\,\eta)_X = p_X{}^F \circ (\Theta\,\eta) \circ i_X{}^V = \eta_X \circ \pi_X{}^V \circ i_X{}^V = \eta_X.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß Θ natürlich ist in V und F. Sei also $\eta \in \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,V, F)$, $\varphi : V_1 \to V$ ein [C]-Modulhomomorphismus und $\varepsilon : F \to F_1$ eine natürliche Transformation. Dann haben wir zu zeigen, daß $\mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(\varphi, \Pi\,\varepsilon)(\Theta\,\eta) = \Theta\,(\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,\varphi, \varepsilon)\,\eta)$ gilt:

$$\begin{aligned} p_X{}^{F_1} \circ \mathrm{Ban}^{[\mathbf{C}]}(\varphi, \Pi\,\varepsilon)\,(\Theta\,\eta)) &= p_X{}^{F_1} \circ (\Pi\,\varepsilon) \circ (\Theta\,\eta) \circ \varphi = \\ &= \varepsilon_X \circ p_X{}^F \circ (\Theta\,\eta) \circ \varphi = \varepsilon_X \circ \eta_X \circ \pi_X{}^V \circ \varphi = \\ &= (\varepsilon \circ \eta)_X \circ (T\,\varphi)_X \circ \pi_X{}^{V_1} = (\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,\varphi, \varepsilon)\,\eta)_X \circ \pi_X{}^{V_1} = \\ &= p_X{}^{F_1} \circ \Theta\,(\mathrm{Ban}^{\mathbf{C}}(T\,\varphi, \varepsilon)\,\eta). \end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen des Satzes sind klar. qed.

9.3. **Lemma:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie und $G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ein Bifunktor, Z ein Banachraum.

(a) Ist G $\mathbf{C}$-wesentlich, dann ist

$$\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G, Z) = \underset{[\mathbf{C}]}{\mathrm{Dinat}}\,(\amalg\,G, Z) = \underset{[[\mathbf{C}]]}{\mathrm{Dinat}}\,(\amalg\,G, Z)$$

natürlich in Z und G.

(b) Ist G $\mathbf{C}$-total (7.1), dann ist

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, G) &= \underset{[\mathbf{C}]}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, \Pi\,G) = \underset{[[\mathbf{C}]]}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, \Pi\,G) \\ &= \underset{[\mathbf{C}]}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, [[G]]) = \underset{[[\mathbf{C}]]}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, [[G]]) \end{aligned}$$

natürlich in Z und G.

Bemerkung: Es genügt, vorauszusetzen, daß ein Komponentenfunktor von G $\mathbf{C}$-wesentlich bzw. $\mathbf{C}$-total ist, da im Beweis nicht mehr verwendet wird.

Beweis: Wir führen den Beweis nur für [C]; für [[C]] kann er wortwörtlich übernommen werden.

(a) Ist $\alpha \in \underset{[\mathbf{C}]}{\mathrm{Dinat}}\,(\amalg\,G, Z)$ und $j^G : G \to \amalg\,G$ die Injektion $j_X{}^G : G\,(X, X) \to \amalg\,G$, so ist $\alpha \circ j^G : G \to Z$ offensichtlich $\mathbf{C}$-dinatürlich, und es gilt $\|\alpha \circ j^G\| \leqslant \|\alpha\|$. Der Abbildung $\alpha \to \alpha \circ j^G$ ist auch sofort anzusehen, daß sie natürlich in Z und G ist.

Ist umgekehrt $\beta \in \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G, Z)$, so betrachten wir die Abbildung $\hat{\beta}: \Pi\, G \to Z$, definiert durch

$$\Pi\, G = \prod_{X, Y \in \mathbf{C}} G(X, Y) \to \prod_{X \in \mathbf{C}} G(X, X) \xrightarrow{\amalg \beta_X} Z,$$

d. h. durch $\hat{\beta}([g_Y{}^X]) = \sum\limits_X \beta_X(g_X{}^X) \in Z$. Dann ist $\|\hat{\beta}\| \leqslant \|\beta\|$. Wir behaupten, daß $\hat{\beta}$ [C]-dinatürlich ist (manche Autoren, etwa Cigler [2], nennen das [C]-balanziert), d. h., daß für alle $g = [g_Y{}^X] \in \Pi\, G$ und $u = [u_Y{}^X] \in [\mathbf{C}]$ die Gleichung $\hat{\beta}(u \cdot g) = \hat{\beta}(g \cdot u)$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(u \cdot g) &= \hat{\beta}([\sum_X u_Y{}^X g_X{}^Z]_Y{}^Z) = \sum_Y \beta_Y (\sum_X u_Y{}^X g_X{}^Y) = \\ &= \sum_Y \sum_X \beta_Y (u_Y{}^X g_X{}^Y) = \sum_X \sum_Y \beta_X (g_X{}^Y u_Y{}^X) = \\ &= \sum_X \beta_X (\sum_Y g_X{}^Y u_Y{}^X) = \hat{\beta}(g \cdot u). \end{aligned}$$

Aus der Konstruktion ergibt sich, daß $\hat{\beta} \circ j^G = \beta$ ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß für α wie oben $(\alpha \circ j^G)\hat{} = \alpha$ ist, also $\alpha(g) = \sum\limits_X \alpha(j_{XX}(g_X{}^X))$ für alle $g = [g_Y{}^X] \in \Pi\, G$. Da klarerweise $\alpha = \sum\limits_{X, Y} \alpha \circ j_{XY}$ gilt, haben wir also zu zeigen, daß für $X \neq Y$ in $\mathbf{C}$ gilt: $\alpha \circ j_{XY} = 0$. Für ein Element der Gestalt $u_Y{}^Z g_Z{}^X$ in $G(X, Y)$ gilt nun $\alpha(u_Y{}^Z g_Z{}^X) = \alpha(g_Z{}^X u_Y{}^Z) = \alpha(0) = 0$, da $X \neq Y$, und da Elemente dieser Form dicht sind in $G(X, Y)$, verschwindet α auf $j_{XY}(G(X, Y))$.

(b) Ist $\alpha \in \underset{[\mathbf{C}]}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, \Pi\, G)$ und $p^G: \Pi\, G \to G$ die Projektion $p_X{}^G: \Pi\, G \to G(X, X)$, so ist $p^G \circ \alpha$ offensichtlich $\mathbf{C}$-dinatürlich und $\|p^G \circ \alpha\| \leqslant \|\alpha\|$. Auch der Abbildung $\alpha \to p^G \circ \alpha$ sieht man an, daß sie natürlich in G und Z ist.

Ist umgekehrt $\beta \in \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, G)$, so betrachten wir $\hat{\beta}: Z \to \Pi\, G$, das durch $Z \xrightarrow{\pi \beta_X} \prod\limits_x G(X, X) \to \prod\limits_{X, Y} G(X, Y)$ gegeben ist. Dann ist $\|\hat{\beta}\| \leqslant \|\beta\|$, und klarerweise ist $p^G \circ \hat{\beta} = \beta$. $\hat{\beta}$ ist zudem [C]-dinatürlich, da $u \cdot \widehat{\beta}(z) = [u_Y{}^X \beta_X(z)]_Y{}^X = [\beta_Y(z) u_Y{}^X]_Y{}^X = \widehat{\beta}(z) \cdot u$ gilt. Es bleibt also noch zu zeigen, daß für α wie oben $(p^G \circ \alpha) = \alpha$ ist, und da $(\prod\limits_{X,Y} p^G_{XY}) \circ \alpha = \alpha$ ist, genügt es zu zeigen, daß für $X \neq Y$ in **C** gilt: $p^G_{XY} \circ \alpha = 0$. Für jedes beliebige $u_V{}^Y \in \mathbf{C}(Y, V)$ gilt nun für $z \in Z$:

$$0 = u_V{}^Y \cdot \alpha(z) - \alpha(z) \cdot u_V{}^Y =$$

$$= [u_V{}^Y [\alpha(z)]_Y{}^R \cdot \delta_{YW} - [\alpha(z)_W{}^V u_V{}^Y \delta_{YR}]_W{}^R.$$

Setzt man darin $R = X$ und $W = Y$, dann erhält man

$$0 = u_V{}^Y [\alpha(z)]_Y{}^X - [\alpha(z)]_Y{}^V u_V{}^Y \delta_{XY} = u_V{}^Y [\alpha(z)]_Y{}^X.$$

Da G **C**-total ist, kann man daraus schließen, daß

$$[\alpha(z)]_Y{}^X = p^G_{XY} \alpha(z) = 0$$

ist. Damit ist die Aussage (b) für $\prod G$ bewiesen. Für $[[G]]$ bemerken wir nur, daß $\prod G(X, X)$ isometrisch in $[[G]]$ eingebettet ist, also sind alle vorgeführten Konstruktionen auch in diesem Fall anwendbar.

qed.

9.4. **Satz:** Es sei **C** eine Semikategorie und $G: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ein Bifunktor.

(a) Ist G **C**-wesentlich, dann ist

$$\int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X) = \int^{[\mathbf{C}]} \amalg G = \int^{[[\mathbf{C}]]} \amalg G$$

natürlich in G.

(b) Ist G **C**-total, dann ist natürlich in G

$$\int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X) = \int_{[\mathbf{C}]} \prod G = \int_{[[\mathbf{C}]]} \prod G = \int_{[\mathbf{C}]} [[G]] = \int_{[[\mathbf{C}]]} [[G]].$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus 9.3. Man verwende entweder den Beweisgedanken von 5.6 bzw. 6.6 oder benütze 9.3 zum Hin- und Hertransportieren der universellen Eigenschaft. qed.

Bemerkung: Es genügt wieder, **C**-wesentlich oder **C**-total von nur einem Komponentenfunktor zu verlangen.

9.5. **Satz:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie (mit Identitäten). Dann ist

(a) $H^{[\mathbf{C}]} = H_{[\mathbf{C}]} = [[\mathbf{C}]]$.

(b) $\Delta([\mathbf{C}]) = [[\mathbf{C}]]$.

Bemerkung: Vermutlich gilt sogar für eine Semikategorie mit beidseitig approximierenden Einheiten $H^{[\mathbf{C}]} = [[H^{\mathbf{C}}]]$, $H_{[\mathbf{C}]} = [[H_{\mathbf{C}}]]$ und $\Delta([\mathbf{C}]) = [[\Delta\, \mathbf{C}]]$.

Beweis: (a) $H^{[\mathbf{C}]}$ ist der Raum der Rechtsmodulhomomorphismen $[\mathbf{C}] \to [\mathbf{C}]$ (vgl. 2.1). Ist $u \in [[\mathbf{C}]]$, dann ist $v \to u \cdot v$ klarerweise ein Element von $H^{[\mathbf{C}]}$ mit kleinerer Norm als $\|u\|$. Ist umgekehrt $\varphi \in H^{[\mathbf{C}]}$, dann ist φ festgelegt durch seine Wirkung auf endliche Matrizen, da diese dicht sind in $[\mathbf{C}]$. Sei also f eine endliche Matrix in $[\mathbf{C}]$, und es sei $A \subseteq |\mathbf{C}|$ eine endliche Teilmenge, die so groß ist, daß $f_Y{}^X \neq 0$ nur für $X, Y \in A$ gilt. Dann ist $u_A \cdot f = f$, wobei $[u_A]_X{}^X = 1_X$ für $X \in A$ und $[u_A]_Y{}^X = 0$ sonst (vgl. 8.8). Somit gilt:

$$\varphi(f) = \varphi(u_A \cdot f) = \varphi(u_A) \cdot f = \Big(\sum_{X \in A} \varphi(1_X)\Big) \cdot f.$$
$$0 = \varphi(0) = \varphi(1_X\, 1_Y) = \varphi(1_X) \cdot 1_Y.$$

Daher ist $[\varphi(1_X)]_U{}^Y = 0$ für alle $Y \neq X$ in $\mathbf{C}$.

Also ist $\varphi(1_X)$ nur in der Spalte mit Index X nicht identisch 0, und diese Spalte ist summierbar. Wir betrachten jetzt die Matrix $\sum_{X \in \mathbf{C}} \varphi(1_X)$, deren X-te Spalte eben die X-te Spalte von $\varphi(1_X)$, und wir bezeichnen diese Matrix mit $\varphi(1)$. Dann ist jede Spalte von $\varphi(1)$ summierbar und

$$\sum_X \|[\varphi(1_X)]_Z{}^X\| = \|\varphi(1_X)\| \leqslant \|\varphi\|\, \|1_X\| = \|\varphi\|,$$

also $\sup_X \sum_Z \|[\varphi(1_X)]_Z{}^X\| \leqslant \|\varphi\|$. Nun ist noch zu zeigen, daß auch die Zeilensummen gleichmäßig beschränkt sind:

Für jede endliche Teilmenge $A \subseteq |\mathbf{C}|$ ist

$$\sum_Z \|[\varphi(u_A)]_Y{}^Z\| = \sum_Z \Big\| \sum_{X \in A} [\varphi(1_X)]_Y{}^Z \Big\| =$$
$$= \sum_{X \in A} \|[\varphi(1_X)]_Y{}^X\|, \text{ da für } Z \neq X \text{ gilt } [\varphi(1_X)]_Y{}^Z = 0.$$

Der letzte Ausdruck wiederum ist gerade die Summe der Normen über die Zeile Y von $\varphi(u_A)$ und ist daher kleiner oder gleich als $\|\varphi(u_A)\| \leqslant \|\varphi\|\,\|u_A\| = \|\varphi\|$, und zwar unabhängig von Y oder von der Wahl der endlichen Teilmenge $A \subseteq |\mathbf{C}|$, also ist $\sum\limits_X \|[\varphi(1)]_Y{}^X\| \leqslant \|\varphi\|$ für alle Y, also $\varphi(1) \in [[\mathbf{C}]]$ und $\|\varphi(1)\| \leqslant \|\varphi\|$.

Nun sieht man leicht, daß für jede endliche Matrix f in $[\mathbf{C}]$ und A wie oben gilt: $\varphi(f) = (\sum\limits_{X \in A} \varphi(1_X)) \cdot f = (\sum\limits_X \varphi(1_X)) \cdot f = \varphi(1) \cdot f$, und zusammen mit der Überlegung am Anfang des Beweises ergibt das $H^{[\mathbf{C}]} = [[\mathbf{C}]]$. Die Gleichung $H_{[\mathbf{C}]} = [[\mathbf{C}]]$ beweist man genauso.

(b) Sei $(\bar{f}, \bar{\bar{f}}) \in \Delta[\mathbf{C}] \subseteq H^{[\mathbf{C}]} \times H_{[\mathbf{C}]}$ (vgl. 3.2). Dann wissen wir bereits, daß $\bar{f} \in [[\mathbf{C}]]$ via Linkstranslation ist und $\bar{\bar{f}} \in [[\mathbf{C}]]$ via Rechtstranslation nach (a), und wir müssen nur noch zeigen, daß $\bar{f} = \bar{\bar{f}}$ in $[[\mathbf{C}]]$ gilt: Seien $u, v \in [\mathbf{C}]$, dann ist $u \cdot (\bar{f} \cdot v) = (u \cdot \bar{\bar{f}}) \cdot v$; setzt man nun $u = u_A$ aus der approximierenden Einheit (8.8) von $[\mathbf{C}]$, dann folgt: $\bar{f} \cdot v = \lim u_A \cdot (\bar{f} \cdot v) = \lim (u_A \cdot \bar{\bar{f}}) \cdot v = \bar{\bar{f}} \cdot v$ für alle $v \in [\mathbf{C}]$, also $\bar{f} = \bar{\bar{f}}$ in $[[\mathbf{C}]]$ in den entsprechenden Identifizierungen. qed.

Literatur

[18] Michor, P.: Banach-Semikategorien II. Sb. Österr. Akad. Wiss.

Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien