Добавление А

Вещественные классические категории и двойственность Хау

А.0. В § V.I мы определили три категории **Sp**, **U**, **SO***, связанные с сериями вещественных классических групп $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{SO}^*(2n)$. Сейчас мы добавим к ним 7 категорий — $\mathbf{GL}(\mathbb{R})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{C})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{H})$, $\mathbf{O}(\mathbb{R})$, $\mathbf{O}(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{H})$, связанные с сериями групп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(p,q)$.

А.1. Категории $\mathbf{O}(\mathbb{R})$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{H})$. Объектами этих категорий являются пространства $V^{p,q}=V_+\oplus V_-=\mathbb{K}^p\oplus\mathbb{K}^q$, где $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, состоящие из векторов

$$x=(x^+,x^-)=(x_1^+,\dots,x_p^+;x_1^-,\dots,x_q^-),$$

снабженные эрмитовой формой

$$M(x,y)=\sum x_\alpha^+\overline{y}_\alpha^+-\sum x_\beta^-\overline{y}_\beta^-. \tag{A.1}$$

Морфизмы $V^{p,q}\to V^{r,s}$ суть линейные отношения $L:V^{p,q}\rightrightarrows V^{r,s}$, удовлетворяющие условиям

1. если $(x,y)\in L$, то $M(x,x)\geqslant M(y,y)$;
2. если $x\in\operatorname{Ker}L$, $x\neq 0$, то $M(x,x)>0$; если $y\in\operatorname{Indef}L$, $y\neq 0$, то $M(y,y)<0$;
3. L имеет максимально возможную размерность, т. е. $\dim L=p+s$.

Мы будем называть линейные отношения $L\in\operatorname{Mor}\bigl(V^{p,q},V^{r,s}\bigr)$ «линейными отношениями, *сжимающими* эрмитову форму M».

А.2. Другие категории. Объекты 7 оставшихся категорий $\mathbf{K}=\mathbf{GL}(\mathbb{R})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{C})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{H})$, $\mathbf{SO}^*$, $\mathbf{Sp}$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}(\mathbb{C})$ устроены следующим образом. Рассматривается пространство $V=V_+\oplus V_-=\mathbb{K}^n\oplus\mathbb{K}^n$, снабженное эрмитовой формой $M=M_V$:

$$M(x,y)=\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^+\overline{y}_\alpha^+-\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^-\overline{y}_\alpha^-.$$

Кроме того, в V вводится невырожденная кососимметричная, симметричная, эрмитова или антиэрмитова форма $\Lambda=\Lambda_V$ так, что пространства V_+ и V_- изотропны относительно Λ (тело $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ и тип формы Λ определяются категорией $\mathbf{K}$).

Морфизмы $V\to W$ суть линейные отношения $L:V\rightrightarrows W$ удовлетворяющие двум условиям:

а) L сжимает форму M;

б) L *«сохраняет»* форму Λ», т. е. M является максимальным изотропным подпространством в $V\oplus W$ относительно формы

$$\Lambda_{V\oplus W}\bigl((v,w),(v',w')\bigr)=\Lambda_V(v,v')-\Lambda_W(w,w').$$

А.3. Список категорий. Список всех категорий, которые могут быть получены таким образом, приведен в таблице на странице 355.

В первом столбце таблицы указано название категории. Во втором — тело $\mathbb{K}$, в третьем столбце стоит объект категории (здесь $p,q,n\in\mathbb{Z}_+$); этот объект во всех случаях снабжен эрмитовой формой M, задаваемой формулой (А.1), а также формой Λ, указанной в 4-м столбце таблицы.

Группа $\mathrm{G}=\mathrm{Aut}(V)$ автоморфизмов объекта V (из третьего столбца) указана в 5-м столбце. Множество $\mathrm{Mor}(0,V)$ является G-однородным пространством G/K, где подгруппа $\mathrm{K}\subset\mathrm{G}$ указана в 6-м столбце. Заметим, что во всех случаях K является максимальной компактной подгруппой в G, и тем самым G/K есть *риманово некомпактное симметрическое пространство*.

Далее, для любого элемента $R\in\mathrm{Mor}(0,V)$ определен угловой оператор $Z=Z(R):V_+\to V_-$ (напомним, что R есть график оператора Z), он удовлетворяет условию $\|Z\|<1$, а также условию из 8-го столбца.

Полугруппа эндоморфизмов объекта V содержит открытую плотную подполугруппу, состоящую из графиков обратимых операторов. Эту подполугруппу мы обозначим через $\mathrm{End}^\circ(V)$. Элементы подполугруппы $\mathrm{End}^\circ(V)$ можно рассматривать как операторы, сохраняющие форму Λ_V, поэтому $\mathrm{End}^\circ(V)$ является подполугруппой с непустой внутренностью в группе $\widetilde{\mathrm{G}}$, указанной в 7-м столбце.

Любой элемент $Q\in\mathrm{Mor}(V,W)$ является графиком оператора

$$H=\begin{pmatrix}K&L\\M&N\end{pmatrix}:V_+\oplus W_-\to V_-\oplus W_+,$$

где H удовлетворяет условиям:

1. $\|H\|\leqslant 1$;
2. $\|K\|<1$, $\|N\|<1$;
3. условию из 9-го столбца.

Во всех 10 категориях определена инволюция. Если $P\in\mathrm{Mor}(V,W)$, то $P^*\in\mathrm{Mor}(W,V)$ есть ортогональное дополнение до P относительно формы

$$M_{V\oplus W}\bigl((v,w),(v',w')\bigr)=M_V(v,v')-M_W(w,w').$$

Замечание. Из таблицы видно, что все 10 классических серий *некомпактных римановых симметрических пространств*

$\mathrm{U}(p,q)/\bigl(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q)\bigr)$; $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$; $\mathrm{SO}^*(2n)/\mathrm{U}(n)$;
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{U}(n)$; $\mathrm{O}(p,q)/\bigl(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)\bigr)$; $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$;
$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})/\mathrm{O}(n)$; $\mathrm{Sp}(p,q)/\bigl(\mathrm{Sp}(p)\times\mathrm{Sp}(q)\bigr)$; $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{Sp}(n)$;
$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(n)$

могут быть реализованы как матричные шары над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$. Пространства

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$; $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(n)$; $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})/\mathrm{Sp}(n)$

являются гиперповерхностями в соответствующих шарах.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Название	Тело	Объект	Форма Λ	G = Aut(V)	K	$\check{G}$	Условие на угловой оператор	Условие на преобразование Потапова $H = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$	«Комплексная оболочка»
U	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$	—	$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q)$	$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$	—	—	$\mathrm{U}\times\mathrm{U}$
Sp	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- - x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$Z = Z^t$	$H = H^t$	$\mathrm{Sp}\times\mathrm{Sp}$
SO*	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- + x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$	$Z = -Z^t$	$K=-K^t, N=-N^t, M=L^t$	$\mathrm{SO}^*\times\mathrm{SO}^*$
GL(ℂ)	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$	$\sum(x_i^+\bar{y}_i^- - x_i^-\bar{y}_i^+)$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{U}(n,n)$	$Z = Z^*$	$H = H^*$	U
O(ℝ)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$	—	$\mathrm{O}(p,q)$	$\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)$	$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})$	—	—	U
GL(ℝ)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- - x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$	$Z = Z^t$	$H = H^t$	Sp
O(ℂ)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- + x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{O}(n,n)$	$Z = -Z^t$	$K=-K^t, N=-N^t, M=L^t$	SO*
Sp(ℍ)	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^p \oplus \mathbb{H}^q$	—	$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\mathrm{Sp}(p)\times\mathrm{Sp}(q)$	$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{H})$	—	—	U
GL(ℍ)	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^n$	$\sum(x_i^+\bar{y}_i^- - x_i^-\bar{y}_i^+)$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{SO}^*(4n)$	$Z = Z^*$	$H = H^*$	SO*
Sp(ℂ)	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^n$	$\sum(x_i^+\bar{y}_i^- + x_i^-\bar{y}_i^+)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{Sp}(n,n)$	$Z = -Z^*$	$K=-K^*, N=-N^*, M=L^*$	Sp

А.4. Двойственность Хау для Sp. Рассмотрим категорию **K** и группу H. Определим категорию **K** × H. Объекты этой категории — те же, что и у категории **K**, а

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}\times \mathrm{H}}(V, W) := \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \times \mathrm{H}.$$

Умножение морфизмов определяется очевидной формулой

$$(p_1, h_1)(p_2, h_2) = (p_1 p_2, h_1 h_2).$$

Пусть R — представление категории **K** × H. Рассмотрим разложение R на неприводимые представления

$$\mathrm{R} = \bigoplus_\sigma (\mathrm{T}_\sigma \otimes \pi_\sigma),$$

где T_σ — неприводимое представление **K**, π_σ — неприводимое представление H, а индекс σ пробегает некоторое множество. Мы скажем, что **K** и H двойственны в R, если $\sigma \neq \sigma'$ влечет $\mathrm{T}_\sigma \neq \mathrm{T}_{\sigma'}$, $\pi_\sigma \neq \pi_{\sigma'}$.

Теперь мы построим канонический функтор

$$\tau_n : \mathbf{Sp} \times \mathrm{O}(n) \to \mathbf{Sp}.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное классическим скалярным произведением. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp} \times \mathbf{O}(n)) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$. Тогда $\tau_n(V) := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$. На V мы имеем кососимметричную форму, а на $\mathbb{R}^n$ — симметричную форму. Поэтому $V \otimes \mathbb{R}^n$ снабжено кососимметричной формой, т. е. $V \otimes \mathbb{R}^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$. Далее, паре $(L, h) \in \mathrm{Mor}(V, W) \times \mathrm{H}$ ставится в соответствие подпространство

$$\tau_n(L, h) \subset (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n) \oplus (W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n)$$

состоящее из векторов вида

$$(v \otimes x) \oplus (w \otimes hx),$$

где $(v, w) \in L$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь представление $\mathrm{W}^{(n)} = \mathrm{We} \circ \tau_n$ категории $\mathbf{Sp} \times \mathbf{O}(n)$, где We — представление Вейля.

Теорема двойственности Хау.

а) **Sp** и $\mathbf{O}(n)$ двойственны в $\mathrm{W}^{(n)}$.

б) В разложении

$$\mathrm{W}^{(n)} = \oplus\left(\mathrm{T}_\lambda^{(n)} \otimes \pi_\lambda^{(n)}\right)$$

представления $\mathrm{W}^{(n)}$ на неприводимые подпредставления представление $\pi_\lambda^{(n)}$ пробегает все неприводимые представления группы $\mathrm{O}(n)$.

в) Если $n \neq m$, то $\mathrm{T}_\lambda^{(n)}$ не эквивалентно $\mathrm{T}_\mu^{(m)}$.

г) Любое *голоморфное* проективное $*$-представление категории **Sp** имеет вид $\mathrm{T}_\lambda^{(n)}$.

Итак, голоморфные проективные $*$-представления категории **Sp** нумеруются парами (n, π), где $n \in \mathbb{Z}^+$, а π — неприводимое представление группы $\mathrm{O}(n)$.

А.5. Теория $*$-представлений вещественных классических категорий. Более-менее очевидным образом строятся естественные функторы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \times \mathrm{U}(n) \arrow[r] & \mathbf{U} \arrow[r] & \mathbf{Sp} \\ \mathrm{SO}^* \times \mathrm{Sp}(n) \arrow[r] & \mathbf{SO}^* \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Оказывается, что для категорий $\mathbf{U}$ и $\mathbf{SO}^*$ выполнена теорема двойственности Хау для представления Вейля (точно такая же, как для $\mathbf{Sp}$). Это дает описание голоморфных проективных $*$-представлений категорий $\mathbf{U}$ и $\mathbf{SO}^*$. Описание неголоморфных представлений дается следующей теоремой.

Теорема А.1. Любое проективное $*$-представление категории $\mathbf{Sp}$ (соответственно $\mathbf{U}$ и $\mathbf{SO}^*$) является произведением голоморфного проективного $*$-представления на антиголоморфное проективное $*$-представление.

Теория $*$-представлений остальных 7 классических категорий устроена примерно следующим образом. Например, в случае $\mathbf{GL}(\mathbb{R})$ очевидным образом строится вложение $\mathbf{GL}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Sp}$ (см. условие на преобразование Потапова). Оказывается, что любое неприводимое проективное $*$-представление категории $\mathbf{GL}(\mathbb{R})$ есть ограничение неприводимого голоморфного $*$-представления категории $\mathbf{Sp}$. Так же обстоит дело и в остальных 6 случаях, соответствующая эрмитова категория указана в последнем столбце таблицы.

А.6. Литературные замечания. Полугруппы типа $\mathrm{End}^\circ(V)$ изучались в работах [Потапов (1955)], [Винберг (1980)], [Ольшанский (1981)], [Paneitz (1981)], см. также [Hilgert, Hoffmann, Lawson (1989)]. Перечисленные выше категории определены в [Неретин (1991.1)]. Ольшанский ([Ольшанский (1981)]) получил описание всех $*$-представлений полугрупп $\mathrm{End}^\circ(V)$; из этого описания (с помощью вычисления спускающего функтора) легко выводятся все утверждения п. А.5.

Теорема двойственности Хау для групп была получена в [Howe (1989)], сформулированная нами теорема из теоремы Хау легко выводится.

Отметим, что теоремы двойственности Хау для групп $\mathrm{C}_n = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{D}_n = \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ могут быть перенесены на категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$.

Добавление В

Шарниры, комплексы Сэмпля и границы симметрических пространств

Рассмотрим полупростую группу G и автоморфизм σ группы G порядка 2, т. е. отображение $g \mapsto g^\sigma$ такое, что

$$g^{\sigma\sigma} = g \qquad (gh)^\sigma = g^\sigma h^\sigma .$$

Обозначим через H подгруппу в G, состоящую из неподвижных точек отображения σ. Однородные пространства вида G/H называются *симметрическими пространствами*.

Простейший пример симметрического пространства — *плоскость Лобачевского* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2)$, которая известным образом отождествляется с единичным кругом $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ действует на круге мебиусовскими преобразованиями). Как известно, к плоскости Лобачевского удобно добавить окружность $|z| = 1$ — так называемый *абсолют*.

Вопрос о том, что является аналогом абсолюта для более сложных симметрических пространств, оказывается неожиданно сложным, а напрашивающиеся в ряде случаев простые ответы не во всех отношениях являются удовлетворительными. Этот вопрос исследовался в связи с самыми различными целями: перечислительные задачи алгебраической геометрии (см. [Study, de Concini, Procesi (1983)]), автоморфные формы и гармонический анализ на симметрических пространствах (см. [Satake (1960)], [Карпелевич (1965)]), бесконечномерные группы (см. [Неретин (1992)]) и др. Загадочным образом все пути приводили к очень похожим ответам, понять которые, однако, довольно сложно.

Самая старая научная традиция здесь связана с пополнением пространства $\mathrm{G}/\mathrm{H} = \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, это пространство очевидным образом отождествляется с пространством всех невырожденных поверхностей второго порядка в $(n-1)$-мерном комплексном проективном пространстве, а «правильная компактификация» пространства $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ называется *полным пространством квадрик* (“complete quadrics”). В случае $n = 3, 4$ это многообразие изучалось в XIX веке Штуди (E. Study), Шубертом (H. Schubert) и др. Изучение n-мерного случая было начато

Сэмплем (I. G. Semple) в 40-е годы. В работах Тиррелла (J. A. Tyrrell), Де Кончини (C. de Concini), Прочези (C. Procesi) и др. была постепенно построена теория "complete symmetric varieties" — «хороших компактификаций» для симметрических пространств G / H таких, что обе группы G и H являются комплексными.

Другая научная традиция — теория границ некомпактных римановых симметрических пространств (1958–1965) (Фюрстенберг (H. A. Furstenberg), Сатаке (I. Satake), Карпелевич, Дынкин, Ольшанецкий, Кушнер и др.), которая была впоследствие расширена Ошимой (T. Oshima) и Секигучи (J. Sekiguchi) на псевдоримановы симметрические пространства.

Цель этого раздела — описание подобных конструкций на языке элементарной линейной алгебры (подробнее см. [Неретин (1997)]).

В.1. Шарниры. Пусть $P : V \rightrightarrows W$ — линейное отношение, а $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Определим линейное отношение $\lambda P : V \rightrightarrows W$ как множество всех векторов $(v, \lambda w) \in V \oplus W$ таких, что $(v, w) \in P$.

Шарниром $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m)$ в $\mathbb{C}^n$ назовем последовательность n-мерных линейных отношений $P_j : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^n$, определенных с точностью до множителя и удовлетворяющих условиям

1. $\operatorname{Ker} P_j = \operatorname{Dom} P_{j+1}$; $\operatorname{Im} P_j = \operatorname{Indef} P_{j+1}$;
2. $\operatorname{Indef} P_1 = 0$; $\operatorname{Ker} P_m = 0$;
3. $P_j \neq \operatorname{Ker} P_j \oplus \operatorname{Indef} P_j$.

Замечание. Главным из этих условий является первое. Заметим, что с точки зрения умножения в категории **GA** (см. § II.7) линейные отношения P_j и P_{j+1} находятся в наихудшем взаимном расположении. Условие 2 является истолкованием условия 1 в случае $j = 0$ и $j = m$. Наконец, условие 3 является чисто техническим, и его можно было бы и не писать.

Пространство всех шарниров в $\mathbb{C}^n$ мы обозначим через Δ_n. Заметим, что группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ действует на Δ_n преобразованиями

$$(g_1, g_2) : (P_1, \dots, P_m) \mapsto \left(g_1^{-1} P_1 g_2, \dots, g_1^{-1} P_m g_2\right).$$

Заметим также, что график *обратимого* оператора является шарниром. Поэтому группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ канонически вкладывается в пространство Δ_n.

В.2. Операторы $\lambda^j(P)$. Пусть $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m)$ — шарнир в $\mathbb{C}^n$. Напомним, что каждому линейному отношению P_k ставится в соответствие линейный оператор $\lambda(P_k)$ в $\Lambda(\mathbb{C}^n) = \Lambda^n$, определенный с точностью до умножения на множитель см. § II.7. Ввиду того, что $\dim P_k = n$, все подпространства $\Lambda^k\mathbb{C}^n \subset \Lambda\mathbb{C}^n$ являются $\lambda(P_k)$-инвариантными. Обозначим через $\lambda^j(P_k)$ ограничение оператора $\lambda(P_k)$ на $\Lambda^j\mathbb{C}^n$.

Пусть $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m) \in \Delta_n$. Рассмотрим последовательность операторов

$$\lambda^j(P_1), \lambda^j(P_2), \dots, \lambda^j(P_m). \tag{B.1}$$

Теорема В.1.

а) Последовательность (В.1) содержит не менее одного и не более двух ненулевых операторов.

б) Если последовательность (В.1) содержит два ненулевых члена, то эти члены стоят рядом, имеют ранг 1 и равны с точностью до умножения на множитель.

Определим оператор $\lambda^j(\mathfrak{P}) : \Lambda^j(\mathbb{C}^n) \to \Lambda^j(\mathbb{C}^n)$ как ненулевой член последовательности (В.1) (этот оператор определен с точностью до умножения на множитель).

В.3. Пространство шарниров Δ_n как пополнение $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$. Обозначим через $\mathrm{Mat}^*(W)$ пространство ненулевых линейных операторов в линейном пространстве W, определенных с точностью до пропорциональности.

Рассмотрим вложение

$$\Delta_n \to \bigtimes_{j=1}^{n-1} \mathrm{Mat}^*(\Lambda^j\mathbb{C}^n),$$

задаваемое формулой

$$\mathfrak{P} \mapsto \left(\lambda^1(\mathfrak{P}), \lambda^2(\mathfrak{P}), \dots, \lambda^{n-1}(\mathfrak{P})\right).$$

Таким образом, Δ_n реализуется как подмножество в прямом произведении проективных пространств.

Теорема В.2.

а) Δ_n является компактным гладким алгебраическим многообразием размерности $n^2 - 1$.

б) Группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ является плотным открытым подмножеством в Δ_n. Более того $\Delta_n \setminus \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ есть объединение $n - 1$ неприводимых алгебраических подмногообразий коразмерности 1.

Замечание. Многообразие Δ_n было построено в [Semple (1951)] как замыкание группы $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ в $\bigtimes_{j=1}^{n-1} \mathrm{Mat}^*(\Lambda^j\mathbb{C}^n)$. Точки этого замыкания называются *комплексами Сэмпля*. Само многообразие называется "*complete collineations*".

В.4. Complete quadrics. Пусть V — комплексное n-мерное линейное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой Λ. Любому симметрическому оператору A в V ставится в соответствие поверхность второго порядка в V задаваемая уравнением $\Lambda(Av, v) = 0$. Понятно, что операторам A и λA, где $\lambda \in \mathbb{C}$, соответствует одна и та же поверхность.

Рассмотрим теперь в $V \oplus V$ кососимметричную билинейную форму

$$\Lambda^\times\left((v, v'), (w, w')\right) = \Lambda(v, w') - \Lambda(v', w). \tag{B.2}$$

Через Σ мы обозначим пространство всех шарниров $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m)$ в V таких, что P_j — максимальные $\Lambda^\times$-изотропные подпространства в V.

Заметим, что однозвенные шарниры $\mathfrak{P} = (P_1) \in \Sigma_n$ суть графики симметрических обратимых операторов. Поэтому пространство S_n невырожденных квадрик канонически вкладывается в Σ_n.

Теорема В.3.

а) Σ_n — гладкое компактное алгебраическое многообразие.

б) $\Sigma_n \setminus S_n$ есть объединение $n - 1$ поверхностей коразмерности 1.

В.5. Граница Сатаке: пример. Пусть V — вещественное n-мерное линейное пространство, снабженное положительно определенной симметричной билинейной формой Λ. Введем в $V \oplus V$ кососимметричную билинейную форму (В.2). Обозначим через Γ_n пространство шарниров $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m)$ в V, состоящих из максимальных $\Lambda^\times$ — изотропных подпространств в $V \oplus V$.

Группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$ действует в Γ_n преобразованиями

$$g : (P_1, \dots, P_m) \to \left(gP_1g^{\mathrm{t}}, \dots, gP_mg^{\mathrm{t}}\right),$$

однозвенные шарниры $\mathfrak{P} = (P) \in \Gamma_n$ соответствуют невырожденным симметрическим операторам в V. Обозначим через M_n^q множество всех невырожденных симметрических операторов в V, имеющих в точности q отрицательных собственных чисел. Легко видеть, что M_n^q является $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$-однородным пространством $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SO}(n-q, q)$.

Теорема В.4.

а) Γ_n есть компактное вещественно аналитическое многообразие.

б) $\Gamma_n \setminus \left(\bigcup M_n^q\right)$ есть объединение конечного числа гиперповерхностей коразмерности 1.

Таким образом, замыкание M_n^q в Γ_n есть некоторая компактификация пространства $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SO}(n-q, q)$.

Не составляет труда явно описать шарниры, лежащие в этом замыкании.

В.6. Замечания. Шарниры можно перемножить, см. [Неретин (1992)]. Компактификации римановых симметрических пространств, построенные Карпелевичем, а также Дынкиным и Ольшанецким, несколько более замысловаты, чем шарнирные компактификации. Подробное описание такого рода конструкций см. [Неретин (1997)]. Отметим два сюжета, родственных только что рассмотренному: работы Путчи (M. Putcha) и Реннера (L. Renner) по алгебраическим моноидам (см. [Renner (1985)]) и работа [Arbarello и др. (1988)] по аффинным алгебрам.

Добавление C

Бозон-фермионное соответствие

С.0. Рассмотрим следующие два пространства Фока:

1. бозонное пространство Фока $F(W_+)$, где W_+ — пространство функций вида $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ со скалярным произведением

$$\left\langle \sum c_k z^k, \sum c_k' z^k \right\rangle = \sum k c_k \overline{c_k'};$$

2. фермионное пространство Фока $\Lambda(\ell_2 \oplus \ell_2)$. Мы будем рассматривать его как пространство функций от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \eta_1, \eta_2, \dots$. Обозначим через $\Lambda^{(k)}$ линейную оболочку всех одночленов вида

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_p} \eta_{j_1} \dots \eta_{j_q}, \tag{C.1}$$

где $q - p = k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Пространство $\Lambda^{(0)}$ можно определить немного иначе. Рассмотрим набор попарно антикоммутирующих переменных $\dots, \zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ Рассмотрим пространство, базис которого образуют всевозможные формальные бесконечные произведения

$$\zeta_{s_1} \zeta_{s_2} \zeta_{s_3} \cdots, \tag{C.2}$$

где $s_1 > s_2 > \dots$ и $s_k = -k$ для больших k. Этому одночлену мы поставим в соответствие элемент (С.1), где индексы $i_1, i_2, \dots, i_p$ — это в точности положительные элементы последовательности $s_1, s_2, \dots$, а $-j_1+1, -j_2+1, \dots, -j_q+1$ — это в точности все неположительные целые числа, отсутствующие в последовательности $s_1, s_2, \dots$

Оказывается, что существует канонический изоморфизм

$$I : F(W_+) \leftrightarrow \Lambda^{(0)}.$$

В пп. С.1–С.5 мы дадим четыре описания этого изоморфизма.

С.1. Соответствие операторов рождения-уничтожения. Рассмотрим в $F(W_+)$ операторы рождения-уничтожения

$$a_n \psi(c) = c_n \psi(c), \quad a_n^* \psi(c) = n \frac{\partial}{\partial c_n} \psi(c).$$

Легко видеть, что

$$[a_i, a_j] = [a_i^*, a_j^*] = 0, \quad [a_j^*, a_i] = j\delta_{i,j}.$$

Изоморфизм I определяется из следующих условий:

1. вакуумный вектор $\psi_0(c) = 1$ в $F(W_+)$ переходит в вакуумный вектор $\varkappa_0(\xi, \eta) = 1$ в $\Lambda^{(0)}$;
2. операторы a_n переходят в

$$A_n = \sum_{j>0} \xi_{n+j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{\alpha+\beta=n+1} \xi_\alpha \eta_\beta + \sum_{j>0} \eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_{n+j}},$$

а операторы a_n^* — в A_n^*.

C.2. Соответствие переполненных систем. Пусть

$$f(u) = \sum_{j>0} p_j u^i.$$

Тогда вектору

$$\exp\Bigl(\sum p_j c_i\Bigr) \in F(W_+)$$

соответствует вектор

$$\exp\Bigl(\sum a_{ij} \xi_i \eta_j\Bigr) \in \Lambda^{(0)},$$

где числа a_{ij} определяются из условия

$$\sum a_{ij} x^{i-1} y^{j-1} = \frac{e^{f(x)-f(y)} - 1}{x - y}.$$

C.3. Соответствие базисов (см. [Pressley, Segal (1986)], глава 10). Отождествим пространство $F(W_+)$ с пространством симметрических функций (см. [Macdonald (1979)], 1.4), поставив в соответствие функции $g(c_1, c_2, \ldots)$ функцию

$$g\Bigl(\sum_{i>0} h_i, \sum_{i>0} h_i^2, \sum_{i>0} h_i^3, \ldots\Bigr),$$

где $h_1, h_2, \ldots$ — бесконечный набор формальных переменных.

Напомним определение функций Шура (см. [Macdonald (1979)], 1.3). Рассмотрим набор $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_k$ натуральных чисел, обозначим этот набор буквой S. *Функция Шура* $\Phi_S(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ определяется из условия

$$\Phi_S(h_1, h_2, \ldots, h_k) = \frac{\begin{vmatrix} h_1^{s_1+k-1} & h_1^{s_2+k-2} & \ldots & h_1^{s_k} \\ h_2^{s_1+k-1} & h_2^{s_2+k-2} & \ldots & h_2^{s_k} \\ \vdots & & & \\ h_k^{s_1+k-1} & h_k^{s_2+k-2} & \ldots & h_k^{s_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1^{k-1} & h_1^{k-2} & \ldots & 1 \\ h_2^{k-1} & h_2^{k-2} & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \\ h_k^{k-1} & h_k^{k-2} & \ldots & 1 \end{vmatrix}}.$$

Положим

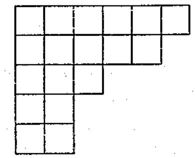
$$c_\alpha = h_1^\alpha + h_2^\alpha + \ldots + h_k^\alpha.$$

Определим функции $\Psi_S(c_1, \ldots, c_k)$ из условия

$$\Psi_S(c_1, \ldots, c_k) := \Phi_S(h_1, \ldots, h_k). \qquad \text{(C.3)}$$

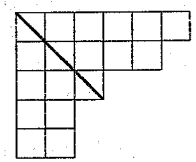
Оказывается, что функции Ψ_S образуют в пространстве $F(W_+)$ ортонормированный базис.

Обычным образом поставим в соответствие каждому набору S диаграмму Юнга, т. е. таблицу вида



у которой в строчке с номером j стоит s_j клеточек. Проведем, далее, в диаграмме Юнга диагональ

α_j



6
5
1

β_j 5 4 1

Пусть α_j — число клеток, лежащих в j-й строке справа от диагонали, а β_j — число клеток в j-м столбце снизу от диагонали; мы считаем, что клетка, лежащая на диагонали, лежит сверху от диагонали и снизу от диагонали (α_j, β_j — это так называемые *координаты Фробениуса*). Тогда функции $\Psi_S \in F(W_+)$ соответствует функция

$$\xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \ldots \eta_{\beta_1} \eta_{\beta_2} \ldots \in \Lambda^{(0)}.$$

C.4. Группа Гейзенберга. Рассмотрим пространство $H = H_0 \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathrm{GA}})$ из § VII.3. Рассмотрим мультипликативную группу G, состоящую из C^∞-гладких функций на окружности, не обращающихся в 0. Эта группа действует в H_0 умножениями на функции. Рассмотрим в G подгруппу G^*, состоящую из функций, по модулю равных 1. В G^* рассмотрим подгруппу $\mathbb{T}$, состоящую из констант; подгруппу Z, состоящую из функций вида $e^{ik\varphi}$; а также подгруппу G_0^*, состоящую из функций вида $\exp(i\alpha(\varphi))$, где $\int_0^{2\pi} \alpha(\varphi)\, d\varphi = 0$.

Предложение C.1.

а) $\mathrm{G} \subset \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$.

б) $\mathrm{G}^* \subset \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$.

Замечание. См. п. IX.7.4.

Итак, мы можем ограничить спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ на группу G. Группа G абелева, однако наше представление группы G оказывается проективным, и оно линеаризуется на некотором неабелевом центральном расширении $\widehat{\mathrm{G}}$ группы G. Соответствующее расширение $\widehat{\mathrm{G}}_0^*$ подгруппы G_0^* оказывается обычной группой Гейзенберга (см. § VI.1).

Опишем вкратце структуру представления группы $\widehat{G}$ в $\Lambda = \oplus\Lambda^{(k)}$. Группа $\mathbb{T}$ действует в $\Lambda^{(k)}$ операторами вида

$$h(e^{i\tau})f(\xi,\eta) = e^{i\tau k}f(\xi,\eta).$$

Элементы $e^{im\varphi} \in Z$ переводят $\Lambda^{(j)}$ в $\Lambda^{(j+m)}$. Наконец, группа $\widehat{G}_0^*$ оставляет пространства $\Lambda^{(i)}$ инвариантными, причем представление $\widehat{G}_0^*$ в $\Lambda^{(j)}$ неприводимо и эквивалентно фоковскому представлению группы Гейзенберга.

По этой причине должен существовать канонический изоморфизм $\Lambda^{(0)}$ и бозонного пространства Фока. Этот изоморфизм и обсуждается в пп. C.1–C.3.

C.5. Другое объяснение. Обозначим через Symm *пространство симметрических функций*, т. е. пространство формальных рядов от переменных $h_1, h_2, \dots$, которые не меняются при любых перестановках переменных $h_1, h_2, \dots$.

Определим также *пространство кососимметрических функций* ASymm. Назовем псевдоодночленом формальное выражение вида

$$h_1^{\infty+a_1}h_2^{\infty+a_2}h_3^{\infty+a_3}\dots,$$

где ∞ — это формальный символ, а $a_k \in \mathbb{Z}$, причем $a_k = -k$, начиная с некоторого места. Кососимметрическая функция есть формальный ряд, составленный из псевдоодночленов, кососимметричный относительно любых финитных перестановок переменных. Определим кососимметрическую функцию Δ, равную

$$\Delta = \sum_{\sigma\in S_\infty^{\mathrm{fin}}} (-1)^\sigma h_{\sigma(1)}^{\infty-1}h_{\sigma(2)}^{\infty-2}h_{\sigma(3)}^{\infty-3}\dots .$$

Канонический изоморфизм $J : \mathrm{Symm} \to \mathrm{ASymm}$ мы определим формулой

$$Jf(h_1, h_2, \dots) = \Delta \cdot f(h_1, h_2, \dots).$$

Пространство Symm мы ранее (см. п. C.3) отождествили с $F(W_+)$. Далее, пространство кососимметрических функций естественным образом отождествляется с пространством $\Lambda^{(0)}$, а именно, вектору $\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\zeta_{i_3}\dots$ (см. (C.2)), мы ставим в соответствие кососимметрическую функцию

$$\sum_{\sigma\in S_\infty^{\mathrm{fin}}} (-1)^\sigma h_{\sigma(1)}^{\infty+i_1}h_{\sigma(2)}^{\infty+i_2}h_{\sigma(3)}^{\infty+i_3}\dots .$$

Таким образом, мы получили последовательность достаточно понятных операторов:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{бозонное}\\ \text{пространство}\\ \text{Фока } F(W_+)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{пространство}\\ \text{симметрических}\\ \text{функций Symm}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{пространство}\\ \text{кососимметри-}\\ \text{ческих функций}\\ \text{Asymm}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{фермионное}\\ \text{пространство}\\ \text{Фока } \Lambda^{(0)}\end{array}\right\}.$$

Бозон-фермионное соответствие есть композиция этих операторов.

C.6. Замечания. Бозон-фермионное соответствие отождествляет бозонные и фермионные конструкции для алгебры Вирасоро, см. § VII.2–3.

О бозон-фермионном соответствии см. также [Frenkel (1981), [Pressley, Segal (1986)], [Kac (1983)].

Добавление D

Однолистные функции и оператор Грунского

D.1. Оператор Грунского. Обозначим через W пространство функций $f = \sum c_n e^{in\varphi}$ на окружности, определенных с точностью до прибавления константы и удовлетворяющих условию $\sum |n|\,|c_n|^2 < \infty$. Введем в W скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\varphi)\overline{g'(\psi)}\,d\varphi\,d\psi,$$

или, что то же самое,

$$\left\langle \sum a_n e^{in\varphi}, \sum b_n e^{in\varphi}\right\rangle = \sum |n| a_n \bar{b}_n.$$

Введем в W кососимметричную билинейную форму

$$\Lambda(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)g'(\varphi)\,d\varphi$$

и знаконеопределенную эрмитову форму

$$M(f, g) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{g'(\varphi)}\,d\varphi.$$

Рассмотрим в W подпространство W_+, состоящее из функций вида $\sum\limits_{n>0} c_n e^{in\varphi}$, и подпространство W_-, состоящее из функций вида $\sum\limits_{n<0} c_n e^{in\varphi}$.

Таким образом, мы снабдили W^+ структурой объекта категории $\overline{\mathbf{Sp}}$.

Замечание. Пространство W несущественным образом отличается от пространства V из § VII.2. Канонический изоморфизм $W \to V$ задается формулой $f \mapsto f'$.

Рассмотрим теперь в диске $D_- : |z| \geqslant 1$ ($D_- \subset \overline{\mathbb{C}}$) однолистную вплоть до границы функцию $r : D_- \to \overline{\mathbb{C}}$, удобно считать, что $r(\infty) = \infty$. Построим по каждой такой функции подпространство $Q(r) \subset W$ по следующему правилу: $f \in Q(z)$, если функция $f \circ (r^{-1})$, определенная на кривой $r(e^{i\varphi})$, голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$.

Замечание. Пара $[\overline{\mathbb{C}}, r]$ является элементом $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(0,1)$. См. конструкции линейных отношений, соответствующих морфизмам категории **Shtan** в § VII.5–6.

Легко написать угловой оператор $\mathrm{Grun}(r): W_+ \to W_-$ подпространства $Q(r)$. Пусть $f \in W_+$. Рассмотрим функцию $q = f \circ r^{-1}$, определенную на кривой $r(e^{i\varphi})$. Представим ее в виде

$$q = \varphi_+ + \varphi_-,$$

где φ_- — функция, голоморфно продолжимая в область $r(D_-)$, а φ_+ голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$. Напомним, что

$$\varphi_\pm(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r(e^{i\varphi})} \frac{q(u)}{z-u}\,du,$$

см. [Hurwitz, Courant (1952)].

Тогда

$$\mathrm{Grun}(r)f = \varphi_- \circ r.$$

Легко написать для этого оператора явное выражение

$$\mathrm{Grun}(r)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \frac{r'(w)f(w)}{r(w)-r(z)}\,dw.$$

Учитывая, что f голоморфна в круге $|w|<1$, а $|z|>1$, мы можем переписать эту формулу в виде

$$\mathrm{Grun}(r)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(\frac{r'(w)}{r(w)-r(z)} - \frac{1}{w-z}\right) f(w)\,dw. \qquad \text{(D.1)}$$

Теорема D.1.

$$Q(r) \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(0, W).$$

Доказательство.

а) *Изотропность.* Пусть $f_1, f_2 \in Q(r)$. Пусть F_1, F_2 — голоморфные продолжения $f_1 \circ (r^{-1})$ и $f_2 \circ (r^{-1})$ в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$. Тогда

$$\Lambda(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|h|=1} f_1\,df_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{r(e^{i\varphi})} F_1\,dF_2 = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus r(D_-)} dF_1 \wedge dF_2 = 0.$$

б) *Положительность.* Пусть $f \in Q(r)$, а F — голоморфное продолжение $f \circ (r^{-1})$ в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$. Тогда

$$M(f,f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|h|=1} f\,d\bar f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r(e^{i\varphi})} F\,d\overline{F} = \int\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus r(D_-)} \frac{1}{2\pi i}\,dF \wedge d\overline{F},$$

и под знаком последнего интеграла стоит явно положительное выражение.

в) *Гильберт-шмидтовость* оператора $\mathrm{Grun}(r)$ очевидна: оператор (D.1) имеет квадратично интегрируемое ядро. ■

D.2. Теорема площадей Грунского. Из теоремы D.1 следует, что

$$\|\,\mathrm{Grun}(r)\| < 1$$

для любой функции r, однолистной в D_- вплоть до границы.

Легко видеть, что выражение (D.1) сохраняет смысл и в случае, когда r однолистна в диске $|w|>1$ (интегрировать в (D.1) надо по контуру $|w| = 1+\varepsilon$). Соображения, связанные с предельным переходом, дают следующую «теорему площадей Грунского»:

Теорема D.2.

а) Для любой функции r, однолистной в диске $|w|>1$, выполнено $\|\,\mathrm{Grun}(r)\| \leqslant 1$.

б) Оператор $\mathrm{Grun}(r)$ унитарен тогда и только тогда, когда мера множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-^0)$ равна нулю (где через D_-^0 обозначен диск $|w|>1$).

D.3. Замечания. «Теорема площадей Грунского» является весьма мощным инструментом в теории однолистных функций. Она получена в [Grunsky (1939)]. Приведенное выше простое доказательство изобретено в [Лебедев, Милин (1951)]. Подробное обсуждение теоремы Грунского см. в [Duren (1983)]. То, что оператор Грунского появляется в теории представлений (он участвует в явных формулах для представления из § VII.4), заметил Д. В. Юрьев. Несколько дополнительных замечаний о связи теории представлений с теорией однолистных функций содержится в [Неретин (1989.1)].

Добавление Е

Характеристическая функция Лифшица

Е.1. Операторные узлы. Термин «операторный узел» служит для обозначения ряда связанных между собой, но все-таки различных понятий. Мы будем понимать под операторным узлом следующий объект. Пусть V_1, V_2, W — гильбертовы пространства, причем W бесконечномерно. *Операторный узел* (operator node) $Q : V_1 \rightsquigarrow V_2$ — это унитарный оператор $Q : V_1 \oplus W \to V_2 \oplus W$, определенный с точностью до эквивалентности

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & U \end{pmatrix}^{-1},$$

где U — унитарный оператор в W. Для любого узла Q существует единственное разложение $W = Y \oplus X$ такое, что оператор Q имеет вид

$$Q = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & L \end{array}\right) : V_1 \oplus Y \oplus X \to V_2 \oplus Y \oplus X,$$

где $L : X \to X$ — унитарный оператор, а оператор D не имеет инвариантных ненулевых подпространств, на которых он был бы унитарен. Мы назовем узел *неразложимым*, если $X = 0$.

Для любых двух узлов $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_1 \rightsquigarrow V_2$ и $R = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} : V_2 \rightsquigarrow V_3$ определено их *произведение* $RQ : V_1 \rightsquigarrow V_3$, заданное формулой

$$RQ := \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} K & 0 & L \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ M & 0 & N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} AK & B & AL \\ \hline CK & D & CL \\ M & 0 & N \end{array}\right). \tag{E.1}$$

Отождествляя произвольным образом бесконечномерные гильбертовы пространства W и $W \oplus W$, мы получаем возможность рассматривать оператор RQ как оператор $V_1 \oplus W \to V_2 \oplus W$.

Е.2. Характеристические функции. Характеристическая функция операторного узла $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — это голоморфная операторнозначная функция в круге $|z| < 1$, задаваемая формулой

$$\chi_Q(z) = A + zB(1 - zD)^{-1}C.$$

Легко видеть, что χ_Q зависит лишь от узла Q, а не от матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Определение можно переформулировать следующим образом:

$$\chi_Q(z)h = v,$$

если существует $p \in W$ такой, что

$$\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ zp \end{pmatrix}. \tag{E.2}$$

Из второго определения легко усматривается (см. § IX.4), что

$$\|\chi_Q(z)\| \leqslant 1$$

при всех z таких, что $|z| < 1$. Легко видеть также (см. рассуждения § IX.4), что

$$\chi_{QP}(z) = \chi_Q(z)\chi_P(z),$$

если $|z| < 1$.

Если рассуждать по аналогии с § IX.4, на первый взгляд может показаться, что функция $\chi_Q(z)$ — *внутренняя* (т. е. некасательные граничные значения функции $\chi_Q(z)$ на окружности $|z| = 1$ являются унитарными операторами), но оказывается, что это выполнено не всегда, а лишь в случае, когда $D^n \to 0$ и $(D^*)^n \to 0$ сильно.

Е.3. Восстановление узла по характеристической функции. Пусть $\varkappa(z)$ — внутренняя функция в круге $|z| \leqslant 1$ со значениями в пространстве операторов из V в V. Сейчас мы построим по ней некоторый неразложимый операторный узел $Q : V \rightsquigarrow V$.

Для гильбертова пространства V через $L^2(S^1, V)$ мы обозначим пространство L^2, состоящее из функций на окружности $|z| = 1$ со значениями в V. Через $H^2(V)$ мы обозначим подпространство в $L^2(S^1, V)$, состоящее из функций, голоморфно продолжимых внутрь круга $|z| \leqslant 1$.

Рассмотрим, далее, оператор умножения на z^{-1} в $L^2(S^1, V)$. Он естественным образом индуцирует оператор

$$Q : H^2(V) \ominus z\varkappa(z)H^2(V) \to z^{-1}H^2(V) \ominus \varkappa(z)H^2(V)$$

(где знак $X \ominus Y$ означает ортогональное дополнение в X до Y). Представим Q в виде блочного оператора:

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \left[\varkappa(z)H^2(V) \ominus z\varkappa(z)H^2(V)\right] \oplus \left[H^2(V) \ominus \varkappa(z)H^2(V)\right] \to$$
$$\to \left[z^{-1}H^2(V) \ominus H^2(V)\right] \oplus \left[H^2(V) \ominus \varkappa(z)H^2(V)\right]$$

(для блоков A, B, C, D легко записать явные выражения). Несложно проверить, что характеристическая функция узла Q совпадает с χ. Более того, оказывается, что Q — единственный неразложимый узел с характеристической функцией $\varkappa(z)$.

E.4. Связь с конструкциями § IX.4. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Uo}}(k, n)$. Тогда

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & A & B & 0 \\ A^* & 0 & 0 & C^* \\ \hline B^* & 0 & 0 & D^* \\ 0 & C & D & 0 \end{array}\right)$$

— это операторный узел в смысле п. E.1.

В частности, в ситуации п. IX.4.1 применима процедура восстановления узла по характеристической функции.

E.5. О спектральной теории. Мы должны сказать несколько слов о том, откуда берутся операторные узлы в теории операторов.

Рассмотрим оператор D в гильбертовом пространстве такой, что $\|D\| \leqslant 1$. Этот оператор можно встроить в узел $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, причем с точностью до разумных эквивалентностей этот узел — единственный. Заметим, далее, что уравнение (E.2) обладает некоторым сходством с уравнением на собственные значения. Сделаем существенно более важное замечание: если узел $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ разлагается в произведение узлов $T = RQ$, то оператор D имеет инвариантное подпространство, см. формулу (E.1). Но $T = RQ$ влечет

$$\chi_T(z) = \chi_R(z)\chi_Q(z).$$

Таким образом, инвариантные подпространства оператора D связаны с делителями функции χ_T в классе аналитических операторнозначных функций.

Характеристическим функциям операторов посвящена огромная литература. Лучше всего обстоит дело в случае, когда

$$\mathrm{rk}(D^*D - E) = \mathrm{rk}(DD^* - E) = 1.$$

Здесь удается построить более-менее законченную теорию, тесно связанную с теорией аналитических функций в круге. Сложнее обстоит дело в случае, когда числа $\mathrm{rk}(D^*D - E)$ и $\mathrm{rk}(DD^* - E)$ конечны. Теория все еще остается содержательной, если операторы $(D^*D - E)$ и $(DD^* - E)$ — ядерные (здесь естественно встает вопрос об операторах $T_s(q)$ из § IX.6; об их спектральных свойствах, кажется, ничего не известно). Условие $\|D\| \leqslant 1$ не так существенно, как это кажется: пространства V_1, V_2 из определения операторного узла могут быть не гильбертовыми пространствами, а пространствами Крейна.

Мы ограничимся ссылками на основополагающие работы [Лифшиц (1946)], [Лифшиц (1954)] и [Потапов (1955)] и монографии [Sz.-Nagy, Foiaş (1967)], [Никольский (1980)], [Bart, Gohberg, Kaashoek (1979)], [Gohberg, Goldberg, Kaashoek (1993)].

Добавление F

Примеры, контрпримеры, замечания

F.1. Можно ли представление разложить на неприводимые представления? Известно, что любое унитарное представление локально-компактной группы может быть разложено в прямой интеграл неприводимых представлений (см., например, [Кириллов (1972)], 8.4). Локальная компактность в этой теореме существенна.

Пример 1. Пусть G — группа измеримых комплекснозначных функций на отрезке $[0, 1]$, по модулю равных 1, определенных с точностью до множества меры 0. Введем на группе G топологию сходимости по мере (та же топология индуцируется на G топологией любого пространства $L^p[0, 1]$ при $0 < p < \infty$). Несложно показать, что группа G вообще не имеет неприводимых унитарных представлений. В то же время приводимые унитарные представления у нее есть: например G действует в $L^2[0, 1]$ операторами

$$T(\varphi)f(x) = \varphi(x)f(x). \tag{F.1}$$

Рассмотрим теперь в G плотную подгруппу H, состоящую из непрерывных функций. Легко видеть, что ограничение представления T на подгруппу H уже является прямым интегралом одномерных унитарных представлений

$$\tau_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Но представления τ_a не определены на всей группе G. Неформально возникающую ситуацию, как мне кажется, лучше всего описать словами: представление T разлагается в прямой интеграл «не совсем настоящих представлений» τ_a.

Пример 2. Снабдим ту же группу топологией существенной равномерной сходимости (т. е. топологией, индуцированной с пространства $L^\infty[0, 1]$). Пространство $L^\infty[0, 1]$ является коммутативной банаховой алгеброй с инволюцией. Поэтому (см., например, [Кириллов (1972)], 4.2) любое $*$-представление алгебры $L^\infty[0, 1]$ раскладывается в прямой интеграл одномерных представлений. Это применимо, в частности, и к естественному представлению

$$\tilde{T}(\varphi)f(x) = \varphi(x)f(x)$$

алгебры $L^\infty[0, 1]$ в $L^2[0, 1]$. Ограничивая представление $\tilde{T}$ на группу G, мы получаем, что представление T группы G разлагается в прямой интеграл одномерных унитарных представлений.

Внешне во втором примере все обстоит благополучно. Однако на самом деле патологичен второй пример, а не первый. Существование одномерных представлений у несепарабельной банаховой алгебры $L^\infty[0, 1]$ обеспечивается аксиомой выбора.

Ни одного такого представления в действительности не удается построить. Поэтому изложенная конструкция приводит к разложению простенького представления (F.1) на неведомые мифические объекты.

Пример 3. Рассмотрим аддитивную группу вещественного гильбертова пространства H. Группа H абелева, поэтому все ее неприводимые представления одномерны. Легко видеть, что все они задаются формулой

$$\varphi_a(h) = \exp(i\langle a, h\rangle), \tag{F.2}$$

где $a \in$ H. Пусть теперь H $= \ell_2$ действует в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ (см. п. VI.1.9) по формуле

$$T(h)f(x) = f(x)\exp\big(i \textstyle\sum h_j x_j\big), \tag{F.3}$$

где $h = (h_1, h_2, \dots) \in \ell_2$, а $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$. Пусть $\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}$ — подгруппа, состоящая из финитных векторов. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^\infty$ формула

$$\varphi_a(h) = \exp(i\langle a, h\rangle)$$

задает одномерное унитарное представление группы H_0, а ограничение представления T на H_0 есть прямой интеграл по $\mathbb{R}^\infty$ всех представлений φ_a. Но, как и в примере 1, представления φ_a при $a \notin \ell_2$ не продолжаются до непрерывных представлений группы H, т. е. мы снова получили разложение представления T группы H в прямой интеграл «не совсем настоящих представлений». Можно показать, что на непрерывные одномерные представления вида φ_a представление T не раскладывается.

Первые два примера были чисто иллюстративными. Третий пример намного серьезнее и служит завязкой важного теоретико-вероятностного сюжета, обсуждаемого в следующем пункте.

Замечание. Группы из этого пункта абелевы и, следовательно, имеют тип I (см., например, [Кириллов (1972)], 8.4), что не мешает их странному поведению. Возникает вопрос, чего ожидать от прочих групп, обсуждаемых в этой книге. Известно, что унитарные представления тяжелых групп, а также групп $\mathrm{O}(p, \infty)$, $\mathrm{U}(p, \infty)$, $\mathrm{Sp}(p, \infty)$ единственным образом раскладываются на неприводимые представления (см. [Ольшанский (1978)]). По-видимому, так же обстоит дело со всеми (или почти всеми) (G, K)-парами, хотя, кажется, это пока ни в одном случае не доказано. Относительно Diff я боюсь высказывать какие-либо предположения.

F.2. Теорема Прохорова.

F.2. Теорема Прохорова. Неприводимая комплекснозначная функция φ на вещественном гильбертовом пространстве называется положительно определенной, если для любых $x_1, \dots, x \in H$ матрица R, составленная из чисел $r_{ij} = \varphi(x_i - x_j)$, неотрицательно определена, т. е.

$$\sum_{j,k} \varphi(x_j - x_k) c_j \bar{c}_k \geqslant 0$$

для любых $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$.

Сразу бросаются в глаза два типа конструкций положительно определенных функций:

Конструкция 1. Пусть T — унитарное представление группы H в некотором гильбертовом пространстве K. Пусть $p \in K$. Тогда функция

$$\varphi(h) = \langle T(h)p, p\rangle$$

положительно определена. Любая положительно определенная функция может быть получена таким способом (см. [Dixmier (1969)], 13.4.5).

Пример. Пусть T — представление из примера 3 предыдущего пункта, в качестве вектора p возьмем тождественную единицу в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$. Тогда

$$\varphi(x) = \exp(-\langle x, x\rangle).$$

Конструкция 2. Пусть ν — конечная мера на H. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int \exp(i\langle x, h\rangle)\, d\nu(h)$$

положительно определена (функция φ называется *преобразованием Фурье* или *характеристическим функционалом* меры ν).

Вторая конструкция является частным случаем первой. А именно, в качестве T следует взять прямой интеграл одномерных представлений $\tau_h(x) : x \mapsto \exp(i\langle x, h\rangle)$ по мере ν, а в качестве вектора p — функцию 1).

Теорема Бохнера (см., например, [Reed, Simon (1975)]). Любая положительно определенная функция на $\mathbb{R}^n$ является преобразованием Фурье конечной меры на $\mathbb{R}^n$.

Теорема Прохорова (см. [Kuo (1975)], § 1.2). Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Положительно определенная функция на H является преобразованием Фурье вероятностной меры на H тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует положительно определенный ядерный оператор S_ε такой, что

$$1 - \operatorname{Re}\varphi(x) \leqslant \langle S_\varepsilon x, x\rangle + \varepsilon.$$

F.3. Группа Гейзенберга.

F.3. Группа Гейзенберга. Вопрос об описании всех представлений канонических коммутационных соотношений и вопрос об описании всех унитарных представлений группы Гейзенберга (эти вопросы чуть-чуть различаются) много обсуждался в литературе. В частности, в работе [Gårding, Wightman (1954)] в некотором (пиквикском) смысле слова была получена полная классификация всех представлений канонических коммутационных соотношений. Эта классификация производит удручающее впечатление, и одним из ее последствий было неверие в возможность расклассифицировать представления более сложных групп, чем группа Гейзенберга. Мне кажется, что на самом деле беда состоит не в том, что группа Гейзенберга слишком сложна, а в том, что она слишком проста. По-видимому разумным объектом является не сама группа Гейзенберга, а группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Spa}}}(.)$ (см. § VI.4), отметим здесь аналогию с группами петель $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, вместо которых естественно рассматривать полупрямые произведения $\mathrm{Diff} \ltimes \mathbb{L}(\mathrm{G})$ (см. § IX.7), а также с группой $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, (см. § X.3).

Попытки разобраться в нефоковских представлениях группы Гейзенберга содержатся в [Березин (1969б)], [Emch (1972)]. О попытках реализовать янг-миллсовский член φ^4 с помощью нефоковских представлений см., например, [Березанский, Кондратьев (1988)]. О некоторых приложениях нефоковских представлений к группам петель см. [Carey, Hannabuss (1992)].

F.4. Индуктивные пределы групп.

F.4. Индуктивные пределы групп. Индуктивные пределы конечных и конечномерных групп обычно имеют чудовищно много представлений (см., например, [Gelfand, Graev (1990)] или [Obata (1987)]). Мы приведем два примера, не лишенных занятности.

Пример 1. Рассмотрим группу S_∞^{fin} финитных подстановок натурального ряда, см. п. VIII.6.1. Пусть S_∞^{fin} действует в ℓ_2 перестановками векторов. Рассмотрим числовую последовательность $y = (y_1, y_2, \dots)$ и рассмотрим выражение

$$\gamma_y(g) = gy - y \in \ell_2,$$

где $g \in S_\infty^{\mathrm{fin}}$, а $gy = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \dots)$. Тогда (см. п. X.1.1) формула

$$A(g)x = gx + \gamma_y(g),$$

где $x \in \ell_2$, задает аффинное действие группы S_∞^{fin} в ℓ_2. Ограничивая представление Exp группы $\mathrm{Isom}(\ell_2)$ (см. п. VI.1.7) на S_∞^{fin}, мы получаем унитарное представление S_∞^{fin}.

Пример 2. Есть много способов доведения до абсурда идеи построения как можно большего запаса представлений групп типа индуктивных пределов (см. например, [Вершик, Гельфанд, Граев (1975)]). В качестве примера приведем следующую конструкцию в духе «У попа была собака». Обозначим через $S^{\mathrm{fin}}(A)$ группу финитных перестановок счетного множества A. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно непересекающиеся счетные множества, а $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ — унитарные неприводимые представления групп $S^{\mathrm{fin}}(A_1), S^{\mathrm{fin}}(A_2), \dots, S^{\mathrm{fin}}(A_n)$ соответственно. Пусть $R(\rho_1, \dots, \rho_n)$ — представление $S^{\mathrm{fin}}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, индуцированное с представления $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$ подгруппы $S^{\mathrm{fin}}(A_1) \times \dots \times S^{\mathrm{fin}}(A_n)$. Тогда представление $R(\rho_1, \dots, \rho_n)$ неприводимо, и, более того, $R(\rho_1, \dots, \rho_n) \simeq R(\rho_1', \dots, \rho_n')$ лишь в случае $\rho_1 = \rho_1', \dots, \rho_n = \rho_n'$ (отсутствие сплетающих операторов и неприводимость доказываются стандартными средствами типа [Кириллов (1972)], 13.5, 16.3).

F.5. Обилие топологий. Индуктивные пределы конечных и конечномерных групп имеют очень много разных пополнений. Мы приведем пару примеров пополнений группы S_∞^{fin}, чтобы показать, сколь огромен тут простор для фантазии.

Пример 1. Пусть группа G состоит из подстановок g натурального ряда $\mathbb{N}$ таких, что расстояние между j и gj, где $j \in \mathbb{N}$, ограничено константой C, зависящей лишь от g. К этой группе применима конструкция примера 1 предыдущего пункта, нужно только выбрать y подходящим образом (например, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots\right)$).

Пример 2. Пусть группа H состоит из всех $g \in S_\infty$, для которых существуют $N = N(g)$ и $C = C(g)$ такие, что расстояние от j до gj не превосходит $C \cdot j^N$.

Я не знаю, есть ли какой-либо смысл в примерах двух последних пунктов.

Замечание. Понятно, что чем сильнее мы возьмем топологию на группе G, тем больше (можно выразиться, богаче) будет запас ее представлений. Наша техника работы с (G, K)-парами очень сильно опирается на выбранные нами топологии, и поэтому есть опасность (вероятность), что мы опираемся на не вполне правильные предпосылки. Ряд доводов в пользу наших топологий был приведен выше. Мы приведем еще один (он не действует для симметрической группы). Оказывается, что если выбирать на группах G более сильные топологии, чем мы рассматриваем, а затем брать какую-нибудь группу G′ и какой-нибудь явно разумный гомоморфизм $G' \to G$, то он, скорее всего, окажется разрывным (если только на G′ не взять дискретную топологию). С другой стороны, интересных теорий представлений, связанных с «сильными» топологиями, вроде нет.

F.6. Категории линейных отношений над полями, отличными от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Здесь все обстоит неплохо. На случай конечных полей и полей конечной характеристики сказанное в главе III обобщается без особого труда. Для конечных полей существует и аналог представления Вейля категории **Sp** (см. [Неретин (1991)]). Для p-адических полей пока известен лишь аналог представления Вейля, см. [Назаров (1993)]; в работе Назарова роль линейных отношений играют решетки в прямой сумме p-адических линейных пространств.

F.7. Аналоги алгебры Вирасоро и группы Diff. Насколько мне известно, каждый специалист по бесконечномерным группам придумал хотя бы один аналог алгебры Вирасоро. После всего этого алгебра Вирасоро и группа Diff остаются единственными в своем роде объектами. Я приведу два примера подобных аналогов

1. Пусть Λ — конечно порожденная (плотная) подгруппа в $\mathbb{R}$. Рассмотрим алгебру Vir_Λ с базисом L_λ, ζ, где $\lambda \in \Lambda$, и соотношениями коммутации

$$[L_\lambda, L_\mu] = (\mu - \lambda)L_{\mu+\lambda} + \frac{1}{12}(\lambda^3 - \lambda)\delta_{\lambda,-\mu}\zeta,$$
$$[L_\lambda, \zeta] = 0.$$

Для этой алгебры и соответствующей группы может быть проведена часть программы §§ VII.2–3, см. [Исмагилов (1993)].

2. Конструкции с почти инвариантными структурами (см. §§ VII.2–3, IX.6) в основном переносятся на группу An_p аналитических диффеоморфизмов p-адической проективной прямой. Например, для An_p существуют аналоги представлений со старшим весом, хотя что значат в этом случае слова «со старшим весом», непонятно. Группа An_p, в свою очередь, вкладывается в несколько более широкую группу «диффеоморфизмов канторовского совершенного множества», для которой тоже существуют почти инвариантные структуры, см. [Неретин (1992)].

F.8. Квазиинвариантные меры. Мы упомянем 3 типа квазиинвариантных мер, по тем или иным причинам не рассмотренных в книге.

1. Меры, построенные в [Pickrell (1987)], квазиинвариантные относительно компактных (G, K)-пар Ольшанского. Конструкция, близкая к конструкции Пикреля, обсуждается ниже в п. F.15.

2. Меры, построенные в [Kerov, Olshanskii, Vershik (1993)], квазиинвариантные относительно (G, K)-пары $(S_\infty \times S_\infty, S_\infty)$, подробнее см. ниже, п. F.14.

Эти два типа мер интересны, в частности, тем, что с ними связан красивый гармонический анализ.

3. Е. Т. Шавгулидзе ([Шавгулидзе (1983), (1997)], см. также [Хафизов (1990)]) построил серию примеров нелинейных квазиинвариантных действий групп диффеоморфизмов многомерных многообразий на пространствах с гауссовой мерой. О нелинейных преобразованиях пространств с гауссовой мерой см. [Ramer (1974)].

F.9. Инфинитезимальные теории. Существует ряд теорий, тесно связанных с теорией бесконечномерных алгебр Ли, но не имеющих видимой связи с категорной идеологией:

а) супералгебры Ли; очень интересны, в частности, супераналоги алгебры Вирасоро, см., например, [Goddard, Kent, Olive (1986)];

б) алгебры Ли над полем конечной характеристики, см. [Кострикин, Шафаревич (1969)], [Кац (1970)], [Strade, Farnsteiner (1988)];

в) квантовые группы, см. [Дринфельд (1989)]; в [Ольшанский (1991)] обсуждается связь между квантовыми группами и обертывающей алгеброй группы $U(\infty)$.

F.10. Fusion and braid categories (см. [Verlinde (1988)], [Tsuchia, Kanie (1988)]). По всей видимости, категория **Shtan**, если следовать букве определения, имеет очень мало представлений. Попытки построить представления категории **Shtan** приводят к многозначным функциям на $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}$, и естественно рассмотреть монодромию этих многозначных функций.

Рассмотрим, например, множество $Z_{m,n}$ морфизмов категории **Shtan** из m в n, топологически эквивалентных сфере с $(m+n)$ дырками. Через Γ^n мы обозначим n-кратное произведение $\Gamma \times \ldots \times \Gamma$, где Γ — полугруппа трубок из § VII.4. Пусть $\rho_1^+, \ldots, \rho_n^+, \rho_1^-, \ldots, \rho_m^-$ — представления Γ, действующие в пространствах $V_1^+, \ldots, V_n^+, V_1^-, \ldots, V_m^-$. Пусть ψ — многозначная функция на $Z_{m,n}$ со значениями в пространстве операторов $V_1^- \otimes \ldots \otimes V_m^- \to V_1^+ \otimes \ldots \otimes V_n^+$, удовлетворяющая условию

$$\psi\big[(\mathfrak{R}_1^+, \ldots, \mathfrak{R}_n^+) \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{R}_1^-, \ldots, \mathfrak{R}_m^-)\big] = \left[\bigotimes_{i=1}^n \rho_i^-(\mathfrak{R}_i^-)\right] \psi(\mathfrak{A}) \left[\bigotimes_{j=1}^m \rho_j^+(\mathfrak{R}_j^+)\right], \qquad \text{(F.4)}$$

где $\mathfrak{A} \in Z_{m,n}$, $(\mathfrak{R}_1^+, \ldots, \mathfrak{R}_n^+) \in \Gamma^n$, $(\mathfrak{R}_1^-, \ldots, \mathfrak{R}_m^-) \in \Gamma^m$.

На инфинитезимальном уровне уравнение (F.4) переписывается как некоторое линейное уравнение с частными производными («уравнение Книжника—Замолодчикова»). Пространство $Z_{m,n}$ гомотопически эквивалентно пространству Δ_{m+n} наборов из $m+n$ попарно различных точек на сфере Римана. Фундаментальная группа $\pi_1(\Delta_{m+n})$, как хорошо известно (см., например, [Шафаревич (1986)]), изоморфна группе кос. Поэтому операторы монодромии уравнения Книжника—Замолодчикова задают представление группы кос.

Более аккуратные рассуждения, связанные с рассмотрением естественного пополнения Δ_{m+n} (пространство модулей), показывают, что в действительности получается представление не группы кос, а «категории кос» (объекты типа «категории кос» обсуждаются, например, в [Reshetihin, Turaev (1991)]).

Основной инструмент для построения функций, удовлетворяющих (F.4) — это fusion-конструкция [Verlinde (1988)].

F.11. Теории поля. Рассмотрим категорию $\mathbf{K}_n$, объекты которой — гладкие $(n-1)$-мерные многообразия (или ориентированные многообразия), а морфизмы $N_1 \to N_2$ — это n-мерные (ориентированные) многообразия L с границей такие, что граница M есть $N_1 \cup N_2$ (причем в ориентированном случае нормаль к N_1 направлена внутрь M, а нормаль к N_2 — вовне).

Топологическая теория поля — это представление категории $\mathbf{K}_n$.

Пример 1. Неориентированный вариант категории $\mathbf{K}_1$ есть категория Брауэра (см. п. VIII.6.7).

Пример 2. Обозначим через $\mathrm{H}_m(L, \mathbb{K})$ группу m-мерных гомологий многообразия L с коэффициентами в поле $\mathbb{K}$. Поставим в соответствие каждому $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}_n)$ группу $\mathrm{H}_m(N, \mathbb{K})$. Построим по каждому $M \in \mathrm{Mor}(N_1, N_2)$ линейное отношение

$$T(M) : \mathrm{H}_m(N_1, \mathbb{K}) \rightrightarrows \mathrm{H}_m(N_2, \mathbb{K}).$$

А именно, $(\psi_1, \psi_2) \in \mathrm{H}_m(N, \mathbb{K}) \oplus \mathrm{H}_m(N, \mathbb{K})$ содержится в $T(M)$, если существует $(m+1)$-мерная $\mathbb{K}$-цепь на M, граница которой есть $\psi_1 - \psi_2$. Итак, мы получили функтор из категории $\mathbf{K}_n$ в категорию линейных отношений (и далее мы можем применять представления категорий линейных отношений).

В размерностях $\leqslant 4$ существуют теории поля, существенно более интересные, чем конструкция примера 2 (см., например, [Reshetihin, Turaev (1991)]).

При желании можно рассматривать категории многообразий, снабженных дополнительными структурами (например, римановы метрики, слоения и т. п.). Представления таких категорий называются *геометрическими теориями поля*.

Пример 3. Представления категории диаграмм из § VIII.6 суть геометрические теории поля.

Пример 4. Представление категории **Shtan** есть двумерная геометрическая теория поля (многообразия снабжены дополнительно конформной структурой).

В размерностях > 2 геометрические теории поля, по-видимому, не известны. В двумерном случае известны лишь конформные теории (в физике они отвечают движению и взаимодействию безмассовых частиц). Кроме конструкций § VIII.6, известно еще несколько более-менее естественных их обобщений, связанных с подключением расслоений на римановых поверхностях (см., например, [Неретин (1989.б)]), а также теория Весса—Зумино—Виттена (для последней, если я не ошибаюсь, не проверена однозначность представлений). Кажется вероятным, что конструкции §§ IX.6–IX.7 связаны с какой-то геометрической теорией поля.

F.12. Свободная теория вероятностей (см. [Voiculescu, Dykema, Nica (1992)]). Рассмотрим фактор Мюррея—фон Неймана $\mathfrak{L}$ типа II_1 (мы нормируем след так, что след единичного оператора равен 1). Обозначим через $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ унитарную группу фактора $\mathfrak{L}$, через $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{L})$ — множество ограниченных самосопряженных операторов фактора $\mathfrak{L}$, а через $\mathfrak{U} \ltimes \mathfrak{S}$ — полупрямое произведение $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$.

Напомним, что единственный инвариант оператора $A \in \mathfrak{S}$ относительно сопряжений $A \mapsto UAU^{-1}$ элементами $U \in \mathfrak{U}$ — это спектральная мера $\sigma = \sigma[A]$ на $\mathbb{R}$; она определяется из условия

$$\mathrm{tr}(f(A)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\sigma(x)$$

для любой L^∞-функции f на $\mathbb{R}$. Отметим, что $\sigma[A]$ является вероятностной мерой с компактным носителем.

Операция сложения $\mu \boxplus \nu$ спектральных мер (*свободная аддитивная свертка*) определяется одним из следующих равносильных способов.

1°. Рассмотрим (некоммутативную) свободную группу F_2 с двумя образующими u, v. Рассмотрим пространство $\ell_2(\mathrm{F}_2)$ и соответствующий фактор, т. е. алгебру операторов, порожденную левыми сдвигами (напомним, что $\mathrm{tr}(A) := \langle A\delta_e, \delta_e \rangle$, где функция $\delta_e(g)$ определяется из условия: δ_e равна 1 в единице группы и равна нулю в остальных точках). Рассмотрим операторы вида $T = \varphi(u)$, $S = \psi(v)$ в $\ell_2(\mathrm{F}_2)$, удовлетворяющие условию $\mu = \sigma[T]$, $\nu = \sigma[S]$. Тогда, по определению, $\mu \boxplus \nu = \sigma[T + S]$.

2°. Рассмотрим свободную группу F_∞ со счетным числом образующих $u_1, u_2, \ldots$ и соответствующий фактор. Рассмотрим произвольные самосопряженные элементы фактора A, B такие, что $\mu = \sigma[A]$, $\nu = \sigma[B]$. Тогда $\mu \boxplus \nu$ есть слабый предел мер $\sigma[A + u_n^{-1} B u_n]$.

3°. *Конструктивное описание*. Рассмотрим функцию

$$G[\mu](\zeta) := \int_{\mathbb{R}} \frac{G(t)\, d\mu(t)}{t - \zeta} = \zeta^{-1} + \sum \zeta^{-k-1} \int_{\mathbb{R}} t^k\, d\mu(t).$$

Рассмотрим обратную функцию $K[\mu(z)] = 1/z + R_\mu(z)$ (т.е $K(G(\zeta)) = \zeta$). Тогда

$$R_{\mu \boxplus \nu} = R_\mu + R_\nu.$$

Неформально идея операции $\boxplus$ состоит в том, что два сопряженных элемента из $\mathfrak{L}$ ставятся в «максимально общее положение» с помощью сопряжения элементами из $\mathfrak{U}$, а потом берется спектральный тип суммы. Описание 2° операции $\boxplus$ вроде бы в точности соответствует умножению (в духе Исмагилова—Ольшанского) двойных классов смежности

$$\mathfrak{U} \setminus (\mathfrak{U} \ltimes \mathfrak{S}) / \mathfrak{U},$$

или, что то же самое, сложению орбит группы $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{S}$.

Как мы видели выше, за мультипликативностью Исмагилова—Ольшанского обычно стоит большая алгебраическая структура, содержащая саму группу. Было бы любопытно понять, нет ли такой структуры и в этом случае.

Наряду со свободной аддитивной сверткой вводится *свободная мультипликативная свертка* $\boxtimes$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ группу обратимых элементов фактора, порожденного F_∞. Двойные классы смежности $\mathfrak{U} \setminus \mathfrak{G} / \mathfrak{U}$ нумеруются спектральным типом $\sigma[|A|]$ (где $A \in \mathfrak{G}$). Возьмем две меры λ и μ на полупрямой $x > 0$ и элементы $A, B \in \mathfrak{G}$ такие, что $\lambda = \sigma[|A|]$, $\mu = \sigma[|B|]$. Тогда, по определению,

$$\lambda \boxtimes \mu = \lim_{j \to \infty} \sigma[|Au_jB|],$$

где u_j — образующие группы F_∞.

Я благодарю К. Дайкему (K. Dykema) и Ленера (F. Lehner) за обсуждение этого сюжета.

F.13. Exchangeability. Пусть группа L действует автоморфизмами на локально компактной абелевой группе N. Рассмотрим полупрямое произведение $\mathrm{G} = \mathrm{L} \ltimes \mathrm{N}$. Обозначим через $\widehat{\mathrm{N}}$ группу, двойственную к N (см. [Кириллов (1972)], 12.1), т.е. группу характеров группы N.

Существует каноническое *соответствие Вигнера—Макки* (см. [Wigner (1939)], [Кириллов (1972)], 13.3) между следующими множествами:

1*. L-инвариантные меры на $\widehat{\mathrm{N}}$;

2*. L-инвариантные положительно определенные функции на N;

3*. пары (ρ, ξ), где ρ — унитарное представление группы G, а ξ — выделенный N-инвариантный вектор.

При этом эргодическим мерам соответствуют неприводимые представления.

Объясним, как это соответствие устроено.

В силу теоремы Бохнера (для локально компактных абелевых групп) положительно определенные функции суть преобразования Фурье от положительных мер, т.е. $1^* \Leftrightarrow 2^*$. Пусть, далее, μ — мера на $\widehat{\mathrm{N}}$, инвариантная относительно L. Построим по μ унитарное представление ρ группы G в $L^2(\widehat{\mathrm{N}}, \mu)$. Группа G действует очевидным образом (она действует на $\widehat{\mathrm{N}}$ преобразованиями, переводящими характер $\chi(n)$ в характер $\chi(g^{-1}ng)$; поэтому G действует и в функциях на $\widehat{\mathrm{N}}$). Группа N действует по формуле

$$\rho(n)f(\chi) = \chi(n)f(\chi),$$

где $n \in \mathrm{N}$, $\chi \in \widehat{\mathrm{N}}$.

Представление ρ построено, вектор ξ есть единичная функция.

Пусть мы теперь имеем данные (ρ, ξ). Тогда $f(n) = \langle \rho(n)\xi, \xi \rangle$ есть L-инвариантная положительно определенная функция на N.

Соответствие построено. Изложенные рассуждения могут работать и для некоторых не локально компактных групп N.

Пусть теперь $\mathrm{N} = \mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$ — пространство финитных последовательностей, $\widehat{\mathrm{N}} = \mathbb{R}^\infty$, а $\mathrm{L} = \mathrm{S}_\infty$, $\mathrm{G} = \mathrm{S}_\infty \ltimes \mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$.

Теорема де Финетти.

а) Любая S_∞-инвариантная мера на $\mathbb{R}^\infty$ есть смесь эргодических мер.

б) Любая S_∞-инвариантная эргодическая мера на $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ есть произведение одинаковых мер μ на множителях $\mathbb{R}$.

Замечание. У де Финетти [де Финетти(1937)] речь шла о $\mathbb{Z}_2^\infty$.

Доказательство теоремы де Финетти — несложное упражнение на теоремы мультипликативности. Двойные классы смежности

$$\Delta = \mathrm{S}_\infty \setminus \mathrm{G} / \mathrm{S}_\infty$$

— это в точности орбиты группы S_∞ на $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$. Эти орбиты нумеруются конечными подмножествами в $\mathbb{R}$ (с учетом кратностей). Умножение в Δ есть просто объединение подмножеств (с учетом кратностей). Образующие полугруппы — одноточечные множества $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Пусть дано унитарное неприводимое представление группы G. Полугруппа Δ действует в пространстве S_∞-неподвижных векторов. Ввиду того, что полугруппа Δ абелева, подпространство S_∞-неподвижных векторов не более чем одномерно.

Теперь каждой образующей x соответствует оператор в одномерном пространстве, т.е. число $a = a(x)$. Функция $a(x)$, очевидно, положительно определена. Ее преобразование Фурье и есть мера μ на $\mathbb{R}$. ∎

Существует обширная литература по обобщениям теоремы де Финетти, см. [Schoenberg (1938)], [Aldous (1985)], [Kallenberg (1992)], [Kallenberg (1995)], [Kingmann (1978)], [Pickrel (1991)]. Любопытно, что во всех случаях в качестве группы L выступает (иногда в слегка замаскированном виде) одна из групп, названных нами тяжелыми, или группа автоморфизмов универсального дерева (см. § VIII.6.8, здесь однако существует несколько однотипных групп).

Приведем три примера решенных задач.

1. Рассмотрим произведение $\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ множества $\mathbb{N}$ в количестве k экземпляров. Группа S_∞ действует на этом произведении по формуле

$$g : (n_1, \ldots, n_k) \mapsto (gn_1, \ldots, gn_k).$$

Все S_∞-инвариантные меры на $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}$ известны.

2. Известны также все $\mathrm{O}_{\mathrm{fin}}(\infty)$-инвариантные меры на $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}$.

3. Описаны также все S_∞-инвариантные меры на пространстве виртуальных перестановок (см. следующий пункт).

F.14. Виртуальные перестановки [Kerov, Olshanskii, Vershik (1993)]. Рассмотрим группу S_n, состоящую из перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Определим каноническую проекцию $\pi_{n+1} : \mathrm{S}_{n+1} \to \mathrm{S}_n$ по следующему правилу: разложим элемент $g \in \mathrm{S}_{n+1}$ в произведение независимых циклов, а затем вычеркнем из разложения элемент $\{n+1\}$.

Пример. Пусть $g = (15367)(24) \in \mathrm{S}_7$. Тогда $\pi_7(g) = (1536)(24) \in \mathrm{S}_6$.

Замечание. Разумеется, отображение π_{n+1} не является гомоморфизмом групп $\mathrm{S}_{n+1} \to \mathrm{S}_n$. Однако для любых $g_1, g_2 \in \mathrm{S}_n$, $q \in \mathrm{S}_{n+1}$ выполнено $\pi_{n+1}(g_1 q g_2) = g_1 \pi_{n+1}(q) g_2$.

Определим *пространство* VIRT *виртуальных перестановок* (или *китайский ресторан*) как проективный предел цепочки

$$\ldots \leftarrow \mathrm{S}_{n-1} \leftarrow \mathrm{S}_n \leftarrow \mathrm{S}_{n+1} \leftarrow \ldots$$

Легко сообразить, что точка q пространства VIRT определяется следующим набором данных:

1°. разбиение множества $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся подмножества $T_1, T_2, \ldots$;

2°. циклическое упорядочение каждого из множеств T_j (мы будем называть эти множества *независимыми циклами*).

Замечание. Мы говорим, что множество T *циклически упорядочено*, если любой (упорядоченной) тройке $a, b, c \in T$ поставлено в соответствие число $\tau(a,b,c) = \pm 1$ и существует инъективное отображение i множества T в окружность такое, что условие $\tau(a,b,c) = +1$ равносильно тому, что точки $i(a), i(b), i(c)$ расположены по «часовой стрелке». Подчеркнем, что, вообще говоря, наши независимые циклы T_j как циклически упорядоченные множества эквивалентны множеству рациональных точек окружности.

Сейчас мы покажем, как из виртуальной перестановки изготовить перестановку любого множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Проекция $\mathrm{VIRT} \to \mathrm{S}_n$ определяется по следующему правилу. Пусть дана виртуальная перестановка VIRT, т. е. набор данных $1° - 2°$. Мы вычеркиваем из множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ все элементы, большие n. В итоге мы получаем разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на циклы, а это интерпретируется как элемент группы S_n.

Произведение двух виртуальных перестановок, вообще говоря, не определено. Однако сейчас мы определим произведение $g \cdot q$ элементов $g \in \mathrm{S}_n \subset \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ и $q \in \mathrm{VIRT}$. Оставим в покое все независимые циклы T_j виртуальной перестановки q, не содержащие ни одного элемента $1, 2, \ldots, n$. В остальных циклах найдем все элементы $i \leqslant n$ и разрежем эти циклы на отрезки $[i, j]$, где $i, j \leqslant n$. Для любого $\alpha \leqslant n$ мы получим ровно один отрезок, начинающийся с α, и ровно один отрезок, кончающийся на α. Теперь любое α, стоящее в начале отрезка, мы заменим на $g \cdot \alpha$, после чего снова склеим отрезки в циклы так, чтобы при склейке следующий отрезок начинался бы с того числа, которым кончается предыдущий. Мы получили разбиение $\mathbb{N}$ на циклически упорядоченные множества, т. е. виртуальную перестановку.

Аналогично определяется произведение $q \cdot g$.

Наконец, полная симметрическая группа S_∞ действует на VIRT перестановками множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Это действие естественно понимать как преобразования вида $q \mapsto g^{-1} \cdot q \cdot g$. Все это вместе взятое дает действие бисимметрической группы (см. § VII.6) на VIRT.

Меры μ_t на VIRT. Фиксируем $t > 0$. На каждой группе S_n мы определим меру μ_t^n из условия: мера точки $g \in \mathrm{S}_n$ равна

$$\frac{t^{[g]}}{t(t+1)\ldots(t+n-1)},$$

где через $[g]$ обозначено число циклов элемента g (знаменатель не зависит от g и выбран так, что мера всей группы S_n равна 1; при $t = 1$ меры всех точек равны между собой). Семейство мер μ_t^n согласовано с проекциями π_n, т. е. проекция меры μ_t^n на группу S_{n-1} совпадает с μ_t^{n-1}. Меру μ_t на пространстве VIRT мы определим как проективный предел мер μ_t^n.

Очевидно, что мера μ_t инвариантна относительно действия диагональной симметрической группы. Менее очевидно, что она квазиинвариантна относительно всей бисимметрической группы. Напишем явное выражение для производной Радона—Никодима преобразования, задаваемого элементом $(g_1, g_2) \in \mathrm{S}_n \times \mathrm{S}_n \subset \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}} \times \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$. Пусть $q \in \mathrm{VIRT}$. Обозначим через $[q]_n$ число циклов в q, содержащих хотя бы один элемент вида $1, 2, \ldots, n$. Тогда производная Радона—Никодима преобразования $q \mapsto g_1 \cdot q \cdot g_2^{-1}$ задается формулой

$$t^{[g_1 \cdot q \cdot g_2^{-1}]_m - [q]_m},$$

где m достаточно велико.

В связи с этим возникает очень любопытный вопрос (о котором сейчас кое-что известно) о явном разложении $L^2(\mathrm{VIRT}, \mu_t)$ под действием бисимметрической группы.

F.15. Виртуальные унитарные матрицы. Обозначим через dX меру Хаара на унитарной группе $\mathrm{U}(n)$. Далее, введем на $\mathrm{U}(n)$ меру

$$\mu_n^s = \sigma_{n,s} \det{}^s (1 - X)\, dX,$$

где $s > -1$, а множитель $\sigma_{n,s}$ выбран так, чтобы мера всей группы была равна 1. Запишем $X \in \mathrm{U}(n+1)$ в виде блочной матрицы $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix}$ размера $(1+n) \times (1+n)$. Рассмотрим отображение $\mathrm{U}(n+1) \to \mathrm{U}(n)$, заданное формулой

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix} \mapsto D + c(1-a)^{-1} b.$$

Можно показать, что образ меры μ_{n+1}^s при этом отображении совпадает с μ_n^s. Рассмотрим проективный предел пространств

$$\ldots \leftarrow \mathrm{U}(n) \leftarrow \mathrm{U}(n+1) \leftarrow \mathrm{U}(n+2) \leftarrow \ldots,$$

снабженных мерами вида μ_n^s. Мы получим некоторое пространство X_s, снабженное некоторой вероятностной мерой μ^s. На X_s действует квазиинвариантно (при $s = 0$ инвариантно) умножениями слева и справа группа $\mathrm{U}_{\mathrm{fin}}(\infty)$.

Снова возникает вопрос о разложении $L^2(X, \mu^s)$. Об этом ничего не известно.

Добавление G

Предварительные сведения

Этот раздел отчасти является словарем, отчасти сборником ответов на элементарные аналитические вопросы, которые мне задавали алгебраисты, и на элементарные алгебраические вопросы, которые мне задавали аналитики.

§ 1. Классические группы

1.1. Формы. Пусть V — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Билинейная форма* на V — это отображение $f(x, y) = \{x, y\}$ из $V \times V$ в $\mathbb{K}$ такое, что

$$\{x_1 + x_2, y\} = \{x_1, y\} + \{x_2, y\},$$
$$\{x, y_1 + y_2\} = \{x, y_1\} + \{x, y_2\},$$
$$\{\alpha x, y\} = \alpha\{x, y\} = \{x, \alpha y\}$$

для любых $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Замечание. Разумного аналога билинейных форм над телом кватернионов $\mathbb{H}$ нет. (Кажущееся естественным кандидатом отображение $(x, y) \mapsto \sum x_j y_j$ из $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$ в $\mathbb{H}$ является спариванием (см. 2.3) левого $\mathbb{H}$-модуля $\mathbb{H}^n$ с правым $\mathbb{H}$-модулем $\mathbb{H}^n$.)

Если $V = \mathbb{K}^n$ — координатное n-мерное пространство, то билинейная форма записывается в виде

$$\{x, y\} = \sum a_{km} x_k x_m = xAy^t, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1 \dots x_n)$, $y = (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{K}^n$ — матрицы-строки (соответственно, транспонированная матрица y^t является матрицей-столбцом), а A — матрица размера $n \times n$ над $\mathbb{K}$, она называется *матрицей билинейной формы*.

Билинейная форма называется *симметричной* (или *ортогональной*), если она удовлетворяет условию

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

для всех $x, y \in V$. В этом случае матрица A симметрична (т. е. $A = A^t$).

Билинейная форма называется *кососимметричной* (или *симплектической*), если

$$\{x, y\} = -\{y, x\} \tag{1.2}$$

для всех $x, y \in V$. В этом случае матрица A кососимметрична (т. е. $A = -A^t$).

Пусть V — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ мы должны уточнить, что V — левое линейное пространство (т. е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$, $x \in V$, выполнено $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$). *Полуторалинейная форма* на V — это отображение $f(x, y) = \langle x, y\rangle$ из $V \times V$ в $\mathbb{K}$, удовлетворяющее условиям

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \qquad \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,$$
$$\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \langle x, y\rangle\bar{\alpha}$$

для всех $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Если $V = \mathbb{K}^n$ — координатное пространство, то полуторалинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ записывается в виде

$$\langle x, y\rangle = \sum x_i a_{ij} \bar{y}_j = xA\bar{y}^t, \tag{1.3}$$

где A — некоторая матрица, которая называется *матрицей полуторалинейной формы*.

Если для всех $x, y \in V$ выполнено

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \tag{1.4}$$

то полуторалинейная форма называется *эрмитовой* (в этом случае $A = A^*$, где $A^* = \bar{A}^t$). Если же для всех $x, y \in V$ выполнено

$$\langle x, y\rangle = -\overline{\langle y, x\rangle}, \tag{1.5}$$

то форма называется *антиэрмитовой*.

Замечание. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ разницы между билинейными и полуторалинейными формами, конечно, нет. Нам, однако, удобно сохранить двойную терминологию (симметричные формы совпадают с эрмитовыми, а кососимметричные — соответственно с антиэрмитовыми). В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ нет существенной разницы между эрмитовыми и антиэрмитовыми формами, а именно, если форма $\langle x, y\rangle$ эрмитова, то $i\langle x, y\rangle$ — антиэрмитова.

Слово «форма» в этом параграфе означает один из 7 типов форм:
над $\mathbb{R}$ — симметричные и кососимметричные;
над $\mathbb{C}$ — симметричные, кососимметричные и эрмитовы;
над $\mathbb{H}$ — эрмитовы и антиэрмитовы.

Форма $B(x, y)$ называется *невырожденной*, если для любого ненулевого вектора $x \in V$ существует вектор $y \in V$ такой, что $B(x, y) = 0$. Это равносильно условию $\det A \neq 0$ (где A — матрица формы; определитель над $\mathbb{H}$ обсуждается в 2.8). *Ядро* (вырожденной) формы $B(x, y)$ — это множество всех $x \in V$ таких, что $B(x, y) = 0$ для всех y.

Пусть W — ядро вырожденной формы B. Пусть $w, w' \in W$. Тогда на факторпространстве V / W канонически определена форма B' из условия

$$B'(x + W, y + W) = B(x, y),$$

(где элементы V / W обозначены через $x + W$, $y + W$).

С каждым из этих типов форм связана некоторая геометрия. Все эти геометрии похожи между собой, и человек, разобравшийся в одной из них, свободно ориентируется и в остальных (к сожалению, евклидов случай, разбираемый в вводных курсах линейной алгебры, не типичен). В книге [Дьедонне (1954)] мастерски излагается абстрактная теория всех этих (и подобных им над другими полями) геометрий сразу (единственный недостаток этой книги — то, что ее невозможно читать, см. также [Бурбаки (1959)]). Текстов, в которых бы излагались все эти геометрии по отдельности, я не знаю. Больше других повезло вещественной симплектической геометрии — она излагается в учебниках по механике (см. [Арнольд (1974)]) и интегральным операторам Фурье (см. [Hörmander (1985)], 21). Ряд геометрий несколько старомодно излагается в книге [Гантмахер (1954)].

1.2. Значение форм на диагонали. Заметим, что условие (1.4) для эрмитовых форм в случае $x = y$ влечет вещественность выражения $\langle x, x\rangle$. Эрмитова форма называется

положительно определенной, если $\langle x, x\rangle > 0$ для всех $x \neq 0$;
неотрицательно определенной, если $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для всех x;
отрицательно определенной, если $\langle x, x\rangle < 0$ для всех $x \neq 0$;
неположительно определенной, если $\langle x, x\rangle \leqslant 0$ для всех x;
знаконеопределенной (*индефинитной*), если $\langle x, x\rangle$ принимает значения разных знаков.

Для кососимметричной формы $\{\cdot,\cdot\}$ условие (1.2) влечет $\{x, x\} = 0$ для всех x. Для антиэрмитовой формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в силу условия (1.5) выражение $\langle x, x\rangle$ чисто мнимо.

1.3. Ортогональное дополнение. Пусть $B(\cdot,\cdot)$ — форма в V одного из 7 типов. Векторы $x, y \in$ называются *ортогональными*, если $B(x,y)=0$. Пусть W — подпространство в V. *Ортогональное дополнение* $W^{\perp}$ — это множество всех $y \in V$, ортогональных всем векторам из W.

Теорема 1.1. Пусть форма B невырождена. Тогда

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V.$$

Следствие 1.2. Если форма B невырождена, то $W^{\perp\perp} = W$.

Заметим, что если форма B невырождена на подпространстве W, то

$$W \cap W^{\perp} = 0. \tag{1.6}$$

Обратно, (1.6) влечет невырожденность B на W. Поэтому, если $B(\cdot,\cdot)$ невырождена на V и W, то в силу теоремы 1.1.

$$W \oplus W^{\perp} = V.$$

1.4. Классификация форм. Две формы B и $\widetilde{B}$ на пространствах V и $\widetilde{V}$ мы назовем *эквивалентными*, если существует линейный обратимый оператор $Q: V \to \widetilde{V}$ такой, что $\widetilde{B}(Qx, Qy) = B(x,y)$ для всех $x, y \in V$. Сейчас мы дадим классификацию форм с точностью до эквивалентности.

Теорема 1.3. Любая невырожденная эрмитова форма $B(\cdot,\cdot)$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_q \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

при этом p равно наибольшей возможной размерности подпространства $W \subset V$, на котором B положительно определена, а q равно наибольшей возможной размерности подпространства $Y \subset V$, на котором B отрицательно определена.

Число p называется *положительным индексом инерции* формы $B(\cdot,\cdot)$, а число q — *отрицательным индексом инерции* ($p+q = \dim V$). Форма положительно определена, если $q=0$, и отрицательно определена, если $p=0$.

Теорема 1.4. Любая невырожденная кососимметричная форма $B(\cdot,\cdot)$ в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Заметим, что размерность пространства при этом обязательно оказывается четной.

Теорема 1.5. Любая невырожденная симметричная форма $B(\cdot,\cdot)$ над $\mathbb{C}$ в некотором базисе имеет матрицу вида

$$A = E.$$

Теорема 1.6. Любая невырожденная антиэрмитова форма над $\mathbb{H}$ в некотором базисе имеет матрицу вида

$$A = iE.$$

Доказательства этих теорем просты и однообразны. Докажем, например, теорему 1.5. Во-первых, заметим, что существует вектор $x \in V$ такой, что $B(x,x) \neq 0$. Иначе

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(B(x+y, x+y) - B(x,x) - B(y,y)\big)$$

было бы тождественным нулем. Выберем в качестве первого базисного вектора вектор $e_1 = \lambda x$ такой, что $B(\lambda x, \lambda x) = 1$. Пусть теперь V' — ортогональное дополнение до e_1. Теперь вопрос сведен к пространству V', имеющему меньшую размерность.

Докажем теперь теорему 1.4. Возьмем 2 вектора x, y такие, что $B(x,y) \neq 0$. Пусть W — подпространство, натянутое на x, y. Теперь вопрос сводится к подпространству $W^{\perp}$, имеющему меньшую размерность. ■

Осталось обсудить вырожденные формы. Пусть $B(\cdot,\cdot)$ — форма в V, а W — ее ядро. Пусть $Y \subset V$ — подпространство такое, что $V = W \oplus Y$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_\alpha$ в W и базис $e_{\alpha+1}, \ldots, e_n$ в Y. Тогда в этом базисе форма B имеет матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$

и теперь вопрос о приведении A к каноническому виду сводится к вопросу о приведении A' к каноническому виду.

Замечания.

а) Пусть B — невырожденная эрмитова форма с индексами инерции (p,q); пусть, например, $p \geqslant q$. Тогда в некотором базисе B имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_{p-q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_q \\ 0 & -E_q & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

б) Пусть B — невырожденная симметричная билинейная форма над $\mathbb{C}$. Тогда в некотором базисе B имеет вид

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Если $\dim V = 2n$, то удобно переставить базисные векторы и записать форму в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

1.5. Классические группы. По определению, оператор $Q: x \mapsto xQ$ в V *сохраняет форму* $B(x,y)$ в V, если

$$B(xQ, yQ) = B(x,y) \tag{1.11}$$

для всех $x, y \in V$. Говорят также, что Q — *изометрия*. Пусть B — билинейная форма в координатном пространстве $\mathbb{K}^n$, а A — ее матрица. Тогда (1.11) равносильно (см. (1.1)) условию

$$QAQ^{t} = A. \tag{1.12}$$

Если же форма B полуторалинейна, то (1.11) равносильно

$$QAQ^{*} = A. \tag{1.13}$$

Классическими группами называются следующие 10 серий групп:

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ — группы всех обратимых матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ соответственно (эти группы называются *полными линейными* группами);

$\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$ — группы матриц соответственно над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, сохраняющих невырожденную эрмитову форму с индексами инерции p, q. Они называются соответственно *псевдоортогональной*, *псевдоунитарной* и *псевдосимплектической* группами. Если $q=0$, то они обозначаются через $\mathrm{O}(p)$, $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{Sp}(p)$, а из названий убирается приставка «псевдо»;

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ — группы преобразований линейного $2n$-мерного пространства над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, сохраняющих невырожденную кососимметричную форму. Эти группы называются *вещественной* и *комплексной симплектическими группами*;

$O(n,\mathbb{C})$ — группа преобразований $\mathbb{C}^n$, сохраняющих невырожденную симметричную форму. Эта группа называется *комплексной ортогональной группой*;

$SO^*(2n,\mathbb{C})$ — группа преобразований $\mathbb{H}^n$, сохраняющих невырожденную антиэрмитову форму. Эта группа названия не имеет.

Кроме того, вводятся еще несколько серий групп, очень слабо отличающихся от только что перечисленных. Они тоже называются классическими. А именно, *специальная линейная группа* $SL(n,\mathbb{K})$ — это группа матриц над $\mathbb{K}$ с определителем 1. Заметим далее, что условие (1.12) влечет $\det Q = \pm 1$, а условие (1.13) влечет $|\det(Q)| = \pm 1$. Оказывается, что для групп $G = Sp(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{K})$, $SO^*(2n)$ выполнено $\det Q = 1$ для всех $Q \in G$. Во всех остальных случаях можно рассмотреть группу преобразований, сохраняющих форму и имеющих определитель 1. Это дает серии групп

$$SO(p,q), SU(p,q), SO(n,\mathbb{C}).$$

Далее, часть классических групп имеет центр, отличный от единицы. Фактор классической группы G по центру обозначается через PG (т.е. PGL, PU, PSL и т.п.).

Все классические группы являются группами Ли.

1.6. Изотропные подпространства. Пусть B — невырожденная форма в V. Ненулевой *вектор* $x \in V$ называется *изотропным*, если $B(x,x) = 0$. Подпространство $W \subset V$ называется *изотропным*, если $B(x,y) = 0$ для любых $x, y \in W$ (или, иначе, $W^\perp \supset W$; если $W^\perp \subset W$, то подпространство называется W *коизотропным*).

Понятно, что если форма положительно определена, то изотропных подпространств быть не может. Во всех остальных случаях они существуют.

Пример 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ (или $\mathbb{C}^{2n}$) кососимметричную билинейную форму с матрицей (1.8). Тогда уравнения $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2n} = 0$ задают изотропное подпространство.

Пример 2. Рассмотрим пространство $\mathbb{K}^{p+q}$ с эрмитовой формой (1.7). Пусть, например, $q \geqslant p$. Тогда уравнения $x_1 = x_{q+1}$, $x_2 = x_{q+2}, \ldots, x_p = x_{q+p}$ задают изотропное подпространство (см. также (1.9)).

Пример 3. Рассмотрим $\mathbb{C}^n$ с симметричной билинейной формой $B(x,y) = \sum x_j y_j$. Тогда уравнения $x_2 = ix_1$, $x_4 = ix_3, \ldots$ задают изотропное подпространство (см. также (1.10)).

Оказывается, во всех трех примерах предъявленное изотропное подпространство имеет наибольшую возможную размерность.

Теорема 1.7. Пусть B — невырожденная форма в V, а $W \subset V$ — изотропное подпространство. Тогда

а) $\dim W \leqslant \frac{1}{2}\dim V$;

б) если B — эрмитова форма с индексами инерции p, q, то $\dim W \leqslant \min(p,q)$.

Доказательство.

а) $W \subset W^\perp$, а $\dim W + \dim W^\perp = n$.

б) Пусть, например, $q \geqslant p$. Рассмотрим q-мерное подпространство Y, на котором B положительно определена. Тогда $Y \cap W = 0$, а значит, $\dim W \leqslant p$. ■

Теорема 1.8.

а) Любое изотропное подпространство содержится в изотропном подпространстве максимальной возможной размерности.

б) Пусть $W_1, W_2 \subset V$ — два изотропных подпространства одной размерности. Тогда существует оператор Q, сохраняющий форму, такой, что $QW_2 = W_1$.

Доказательство. Мы докажем а). Пусть W — изотропное подпространство, имеющее не самую большую размерность. Тогда в $W^\perp / W$ есть изотропное подпространство (в каждом отдельном случае это легко проверяется), что и доказывает теорему. ■

В случае кососимметричных форм максимальные изотропные подпространства называются *лагранжевыми подпространствами*.

1.7. Грассманианы. *Грассманианом* $Gr_n^k(\mathbb{K})$ называется множество всех k-мерных подпространств в $\mathbb{K}^n$. Легко видеть, что $Gr_n^k(\mathbb{K})$ обладает естественной структурой гладкого многообразия. Сейчас мы построим естественный атлас на $Gr_n^k(\mathbb{K})$. Карты этого атласа нумеруются парами подпространств $W, Y \subset \mathbb{K}^n$ таких, что

$$\dim W = k, \quad \dim Y = n-k, \quad \mathbb{K}^n = W \oplus Y.$$

Карта $\mathcal{M}_{W,Y}$ состоит из всех $H \in Gr_n^k$ таких, что $H \cap Y = 0$. Заметим, что тогда проекция H на W вдоль Y есть все W. Поэтому H является графиком некоторого линейного оператора $A_H : W \to Y$ (напомним, что $\mathbb{K}^n$ отождествляется с $W \oplus Y$). Итак, множество $\mathcal{M}_{W,Y}$ параметризуется элементами пространства матриц размера $k \times (n-k)$. Очевидно, что карты $\mathcal{M}_{W,Y}$ покрывают весь грассманиан, а функции перехода легко вычисляются и являются вещественно-аналитическими. Очевидно,

$$\dim Gr_n^k(\mathbb{K}) = k(n-k)\dim(\mathbb{K}).$$

Ясно, что группа $GL(n,k)$ действует на Gr_n^k транзитивно.

Пусть теперь в пространстве $V = \mathbb{K}^n$ введена невырожденная форма B (под словом «форма» мы понимаем одну из 7 форм списка п. 1.1). Пусть G — группа операторов в $\mathbb{K}^n$, сохраняющих B. Орбиты группы G на Gr_n^k описываются *теоремой Витта*, см. [Bourbaki (1958)]:

Теорема 1.9. Пусть W_1, W_2 — подпространства в V равной размерности. Допустим, существует обратимый оператор $A : W_1 \to W_2$ такой, что $B(Ax, Ay) = B(x,y)$ для всех $x, y \in W_1$. Тогда существует оператор $Q \in G$ такой, что $Qx = Ax$ для всех $x \in W_1$.

Пусть, по-прежнему, B — невырожденная форма в $V = \mathbb{K}^n$. Пусть $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ — множество всех k-мерных изотропных подпространств в V. Легко понять, что $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ замкнуто в Gr_n^k. При этом $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ является орбитой группы Ли G (состоящей из всех изометрий формы B). Поэтому $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ — гладкое компактное многообразие. Многообразия $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ мы также будем называть *грассманианами*.

1.8. Примеры из аналитической геометрии.

Пример 1. Пусть $Q(x)$ — однородная квадратичная форма трех переменных. Пусть $B(x,y)$ — билинейная форма такая, что $Q(x) = B(x,x)$. Напомним, что

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big). \tag{1.14}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ поверхность $Q(x) = \alpha$. Пусть l — прямая, проходящая через 0. Рассмотрим всевозможные прямые $\tilde{l}$, параллельные l. Пусть A, B — точки пересечения $\tilde{l}$ с поверхностью $Q(x) = \alpha$. Пусть C — середина отрезка AB. Все полученные таким образом точки C, как известно, лежат на одной плоскости L. Легко видеть, что L — ортогональное дополнение до l относительно формы B.

Пример 2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ квадратичную форму $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Соответствующая билинейная форма B (см. (1.14)) имеет индексы инерции (2, 2), поэтому максимальные B-изотропные подпространства имеют размерность 2. Ясно, что эти подпространства лежат на конической поверхности $Q(x) = 0$. Вспомним, что однородное уравнение в $\mathbb{R}^4$ задает поверхность в трехмерном проективном пространстве. В нашем случае эта поверхность, очевидно, является однополостным гиперболоидом. Двумерным подпространствам, лежащим на гиперповерхности $Q(x) = 0$, соответствуют прямые, лежащие на гиперболоиде. Хорошо известно, что на однополостном гиперболоиде лежат два однопараметрических семейства прямых. Две прямые, содержащиеся в одном семействе, скрещиваются, а две прямые, лежащие в разных семействах, пересекаются. Таким образом, мы видим, что грассманиан $\mathrm{Gr}_4^2(\mathbb{R}, B)$ гомеоморфен несвязному объединению двух окружностей. При этом если $W_1, W_2 \in \mathrm{Gr}_4^2(\mathbb{R}, B)$ лежат в одной компоненте связности, то $W_1 \cap W_2 = 0$, а если в разных, то $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. (См. обсуждение аналогичного грассманиана в п. III.3.2.)

1.9. Алгебры Ли. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ матричной группы G состоит, как известно, из всех матриц X таких, что $\exp(sX) \in \mathrm{G}$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Пусть G — группа преобразований, сохраняющих билинейную форму $B(x, y)$ с матрицей A. Тогда в силу равенства (1.12) для любого $X \in \mathrm{G}$ выполнено

$$\exp(sX) A \exp(sX^{\mathrm{t}}) = A. \tag{1.15}$$

Дифференцируя это равенство по s и подставляя $s = 0$, получаем

$$XA + AX^{\mathrm{t}} = 0. \tag{1.16}$$

Легко убедиться, что, обратно, (1.16) влечет (1.15), поэтому алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц X, удовлетворяющих (1.16).

В случае полуторалинейной формы $B(x, y)$ мы получаем уравнение

$$XA + AX^* = 0.$$

Далее, известно, что

$$\frac{\partial}{\partial s} \det(sX)\Big|_{s=0} = \mathrm{tr}\, X.$$

Поэтому алгебра Ли группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ при $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ состоит из матриц X, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{tr}\, X = 0.$$

В случае $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$ это условие заменяется на $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, X = 0$.

1.10. Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Некоторые из перечисленных в п. 1.5 классических групп в действительности являются изоморфными. Сейчас нас интересует, какие группы изоморфны $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Прежде всего, очевидно, $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ совпадает с $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Построим чуть менее очевидные изоморфизмы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}(1, 1)$ и $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(2, 1)$.

Группа $\mathrm{SU}(1, 1)$ состоит из комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Эти матрицы сохраняют вещественное подпространство V в $\mathbb{C}^2$, состоящее из векторов вида $(x, \bar{x})$, и, таким образом, мы получаем действие $\mathrm{SU}(1, 1)$ в V. Легко видеть, что $\mathrm{SL}(V) = \mathrm{SU}(1, 1)$.

Построим гомоморфизм $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SO}(2, 1)$ с ядром $\pm E$.

Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ сохраняет кососимметричную билинейную форму B с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим действие $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ в симметричной степени $\mathrm{S}^2\mathbb{R}^2$ (см. ниже п. 4.10). Форме B в $\mathbb{R}^2$ соответствует симметричная форма в $\mathrm{S}^2\mathbb{R}^2$ с индексами инерции $(1, 2)$, и эта форма, естественно, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-инвариантна.

§ 2. *Структуры линейной алгебры*

Параграф содержит несколько более-менее тривиальных схоластических замечаний по линейной алгебре. Слова «линейное пространство» означают (если не сказано обратного) конечномерные линейные пространства над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

2.1. Операторы. Пусть V — линейные пространства над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *Линейный оператор* (или просто *оператор*) $V \to W$ — это отображение, удовлетворяющее условиям

$$A(v + v') = Av + Av', \quad A(\alpha v) = \alpha A v \tag{2.1}$$

для всех $v, v' \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Через $\mathrm{Ker}\, A$ мы будем обозначать ядро оператора A (т. е. множество всех $h \in V$ таких, что $Ah = 0$), а через $\mathrm{Im}\, A$ — образ A.

Отображение $A: V \to W$ называется *антилинейным оператором*, если

$$A(v + v') = Av + Av', \quad A(\alpha v) = \bar{\alpha} A v. \tag{2.2}$$

Естественно, в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ эти понятия совпадают.

Линейным (соответственно, *антилинейным*) *функционалом* на V называется линейный (соответственно, антилинейный) оператор $V \to \mathbb{K}$.

2.2. Двойственное и антидвойственное пространство. *Двойственным пространством* V' к (конечномерному) линейному пространству V называется пространство линейных функционалов на V.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Тогда существует базис $f_1, \ldots, f_n$ в пространстве V' такой, что

$$f_\alpha(e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ называются *двойственными*.

Хотя V и V' имеют одну размерность, канонического изоморфизма между ними нет. Кажущееся естественным отождествление $e_\alpha \leftrightarrow f_\alpha$ зависит от выбора базиса. Однако существует каноническое отождествление V с V'' (т. е. с пространством линейных функционалов на V'). Каждому вектору $v \in V$ при этом ставится в соответствие линейный функционал $F_v(f) = f(v)$ на V'.

Антидвойственное пространство V° к V — это пространство антилинейных функционалов на V. Существует канонический антилинейный оператор $I: V' \to V^\circ$, устанавливающий биекцию между ними, а именно, $(If)v = \overline{f(v)}$. Однако этот оператор антилинеен, и поэтому V' и V° приходится считать разными линейными пространствами.

Пример. Пусть V — линейное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной формой B. Пусть V_+ и V_- — максимальные изотропные подпространства, причем $V = V_+ \oplus V_-$. Тогда V_+ отождествляется с $(V_-)'$. Действительно, каждому $v_+ \in V_+$ ставится в соответствие линейный функционал $f_{v_+}(v_-) = B(v_+, v_-)$ на V_-.

2.3. Спаривание. Пусть V и W — линейные пространства над $\mathbb{K}$. *Билинейное спаривание* $Q(\cdot\,, \cdot): V \times W \to \mathbb{K}$ — это отображение, удовлетворяющее условиям

$$Q(v + v', w) = Q(v, w) + Q(v', w), \quad Q(v, w + w') = Q(v, w) + Q(v, w'), \tag{2.3}$$

$$Q(\alpha v, w) = Q(v, \alpha w) = \alpha Q(v, w). \tag{2.4}$$

Полуторалинейное спаривание $Q(\cdot\,, \cdot): V \times W \to \mathbb{K}$ — это отображение, удовлетворяющее условию (2.3) и условию

$$Q(\alpha v, w) = \alpha Q(v, w),$$
$$Q(v, \alpha w) = \bar{\alpha} Q(v, w).$$

Пример 1. Билинейная (полуторалинейная) форма на V является билинейным (полуторалинейным) спариванием $V \times V \to \mathbb{K}$.

Пример 2. Формула

$$Q(f, v) = f(v) \tag{2.5}$$

задает билинейное спаривание $V \times V' \to \mathbb{K}$. Она же задает полуторалинейное спаривание $V \times V^\circ \to \mathbb{K}$.

Пусть $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ — спаривание. Пусть Y — подпространство в V. Тогда *аннулятор* $\operatorname{Ann} Y$ — это подпространство в W, состоящее из всех векторов $w\in W$, удовлетворяющих условию $Q(y,w)=0$ для всех $y\in Y$. Аналогично определяется аннулятор подпространства $X\subset W$. Ясно, что $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} Y)\supset Y$.

Пример 3. В условиях примера 1 аннулятор есть ортогональное дополнение.

Спаривание $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ann} V=0$, $\operatorname{Ann} W=0$.

Пример 4. Спаривание (2.5) из $V\times V'$ в $\mathbb{K}$ невырождено. Сейчас мы увидим, что это по существу единственный пример невырожденного спаривания.

Теорема 2.1. Пусть $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ — невырожденное спаривание. Тогда
а) $\dim V=\dim W$;
б) $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} X = X$ для всех подпространств $X\subset V$;
с) $\dim X+\dim\operatorname{Ann} X=\dim V$.

Далее, пусть $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ — билинейное (соответственно, полуторалинейное) спаривание. Тогда определен канонический оператор $L_Q: V\to W'$ (соответственно, $V\to W^\circ$), задаваемый формулой

$$(L_Q v)(w)=Q(v,w).$$

Обратно, любой оператор $A: V\to W'$ определяет спаривание $V\times W\to\mathbb{K}$ по формуле $Q(v,w)=(Av)(w)$.

Легко видеть, что в случае, когда спаривание невырождено, оператор L_Q является биекцией $V\to W'$ (или $V\to W^\circ$).

В частности, невырожденная билинейная (соответственно, полуторалинейная) форма на V устанавливает канонический изоморфизм $V\to V'$ (соответственно, $V\to V^\circ$).

Далее, если спаривание $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ невырождено, то для любого базиса v_j в V найдется двойственный базис w_j в W такой, что

$$Q(v_j,w_i)=\delta_{ji}.$$

Пример 4. Пусть $B(\cdot,\cdot)$ — невырожденная симметричная, кососимметричная или эрмитова форма на V. Пусть H_1,H_2 — изотропные подпространства в V, причем $V=H_1\oplus H_2$ (это возможно во всех случаях, когда в V есть изотропное подпространство половинной размерности). Определим спаривание

$$(h_1,h_2)\mapsto B(h_1,h_2)$$

из $H_1\times H_2$ в $\mathbb{K}$. Легко видеть, что это спаривание невырождено. Поэтому существует канонический изоморфизм $H_1\to H_2'$ (или $H_1\to H_2^\circ$, если спаривание эрмитово). Кроме того, существует базис $p_1,\dots,p_m,q_1\dots,q_m$ в V такой, что $p_j\in H_1$, $q_j\in H_2$, а

$$B(p_i,q_j)=\delta_{ij},\quad B(p_i,p_j)=B(q_i,q_j)=0.$$

2.4. Транспонированный и сопряженный операторы. Пусть $A: V\to W$ — линейный оператор. *Транспонированный оператор* $A^{\mathrm t}: W'\to V'$ определяется формулой

$$(A^{\mathrm t}g)(v)=g(Av)$$

для всех $g\in W'$, $v\in V$.

Если V и W снабжены невырожденными билинейными формами $B_V(\cdot,\cdot)$ и $B_W(\cdot,\cdot)$, то V отождествляется с V', а W с W', поэтому $A^{\mathrm t}$ можно рассматривать как оператор $W\to V$. Тогда $A^{\mathrm t}$ определяется из формулы

$$B_V(v,A^{\mathrm t}w)=B_W(Av,w). \tag{2.6}$$

Далее, если A — оператор $V\to V'$, то $A^{\mathrm t}$ тоже является оператором $V\to V'$. В частности, в этом случае имеет смысл понятие *симметрического* ($A=A^{\mathrm t}$) и *кососимметрического* ($A=-A^{\mathrm t}$) *оператора* A. В частности, это замечание может быть применено в ситуации только что разобранного примера (т. е. к дополнительным изотропным подпространствам).

Пусть, далее, $A: V\to W$ — линейный оператор. Выберем в V и V' двойственные базисы $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_n$, а в W и W' выберем двойственные базисы $p_1,\dots,p_m$ и $q_1,\dots,q_m$. Пусть $\{a_{ij}\}$ — матричные элементы A в базисах $e_1,\dots,e_n;p_1,\dots,p_m$. Тогда матричные элементы $A^{\mathrm t}$ в базисах $q_1,\dots,q_m;f_1,\dots,f_n$ суть a_{ji}. Таким образом, матрица $A^{\mathrm t}$ действительно получается из матрицы A транспонированием. Конечно, здесь важно то, что мы выбрали двойственные базисы.

Пусть, далее, $A: V\to W$ — линейный оператор. *Сопряженный* к A *оператор* $A^*: W^\circ\to V^\circ$ определяется формулой

$$(A^*g)(v)=g(Av),$$

где $g\in W^\circ$, $v\in V$. Если канонически (антилинейно!) отождествить V° с V', а W° с W', то A^* отождествится с $A^{\mathrm t}$, т. е.

$$A^*f=\overline{A^{\mathrm t}\overline{f}}.$$

Если V и W снабжены невырожденными полуторалинейными формами B_V и B_W, то V° отождествляется с V, а W° — с W. Поэтому A^* оказывается оператором $W\to V$, он определяется равенством

$$B_V(v,A^*w)=B_W(Av,w). \tag{2.7}$$

Наконец, если A — оператор $V\to V^\circ$, то A^* тоже действует из V в V°.

2.5. Комплексификация и оператор вещественной структуры. Пусть V — вещественное линейное пространство. Определим *комплексификацию* $V_{\mathbb C}$ вещественного пространства V. Положим $V_{\mathbb C}=V\oplus V$, причем умножение на i в $V_{\mathbb C}$ вводится формулой

$$i(v,v')=(-v',v).$$

Элементы $w=(v,v')\in V\oplus V=V_{\mathbb C}$ удобно записывать в виде $w=v+iv'$.

В пространстве $V_{\mathbb C}$ канонически определен антилинейный *оператор комплексного сопряжения* $w\mapsto\overline{w}$, действующий по формуле

$$\overline{v+iv'}=v-iv'.$$

Очевидно, $\overline{\overline{w}}=w$.

Пусть теперь W — линейное пространство над $\mathbb C$. Пусть в W фиксирован антилинейный оператор J такой, что $J^2=E$. Такие операторы мы будем называть *операторами вещественной структуры*. Покажем, что W отождествляется с комплексификацией $V_{\mathbb C}$ некоторого канонически определенного пространства V. Оператор J является вещественно-линейным оператором. В силу равенства $J^2=E$ собственные числа J равны ±1, а жордановы клетки у J отсутствуют. Пусть V — множество всех $v\in W$ таких, что $Jv=v$, а Y — множество всех y таких, что $Jv=-v$. Далее, пусть $v\in V$. Тогда

$$iv=iJv=-J(iv),$$

т. е. $iv\in Y$. Мы видим, что W является комплексификацией своего подпространства V, при этом $Y=iV$, а оператор J оказывается оператором комплексного сопряжения.

Пусть, далее, V, W — линейные пространства над $\mathbb R$, а $A: V\to W$ — линейный оператор. Тогда канонически определен следующий $\mathbb C$-линейный оператор $V_{\mathbb C}\to W_{\mathbb C}$, также обозначаемый через A:

$$v+iv'\mapsto Av+iAv'$$

для всех $v,v'\in V$. Полученные таким образом операторы мы назовем *вещественными*. Ясно, что любой оператор S в $V_{\mathbb C}$ представим в виде

$$S=A+iB,$$

где A и B — вещественные операторы.

Если $B(\cdot,\cdot)$ — симметричная или кососимметричная билинейная форма в V, то в $V_{\mathbb{C}}$ канонически определены две формы, совпадающие с $B(\cdot,\cdot)$, на V: билинейная форма

$$Q(v+iv', w+iw') = B(v,w) - B(v',w') + i\big(B(v,w') + B(v',w)\big) \tag{2.8}$$

и полуторалинейная форма

$$R(v+iv', w+iw') = B(v,w) + B(v',w') + i\big(B(v',w) - B(v,w')\big).$$

Эти две формы связаны соотношением

$$R(v,w) = Q(v,\bar{w}). \tag{2.9}$$

Замечание. Это равенство влечет забавные связи между геометриями форм R и B. Допустим, что $V_{\mathbb{C}}$ содержит изотропное относительно Q подпространство H половинной размерности. Пусть $\overline{H}$ — множество всех векторов вида $\bar{h}$, где $h \in H$ (отметим, что $\overline{H}$ тоже Q-изотропно). В силу (2.9) H и $\overline{H}$ являются R-ортогональными, а так как $\dim H = \frac{1}{2}\dim V_{\mathbb{C}}$, мы получаем, что $\overline{H}$ есть R-ортогональное дополнение до H.

2.6. Овеществление и оператор комплексной структуры. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Тогда его же можно рассматривать как пространство над $\mathbb{R}$. Полученное таким образом вещественное пространство W называется *овеществлением пространства* V (обозначение $W = V_{\mathbb{R}}$). Заметим, что в W канонически определен оператор I умножения на i. Естественно, $I^2 = -1$.

Обратно, пусть W — вещественное линейное пространство, и в W определен линейный оператор I такой, что $I^2 = -1$. Тогда W можно рассматривать как комплексное пространство; умножение на скаляр $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ задается формулой

$$(\alpha + i\beta)w = (\alpha E + \beta I)w. \tag{2.10}$$

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, а W — его овеществление. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — базис в V. Тогда $e_1,\dots,e_n$, $ie_1,\dots,ie_n$ — базис в W. Рассмотрим в V оператор Q с матрицей $S = A + iB$ в базисе $e_1,\dots,e_n$, где A и B — вещественные матрицы. Тогда матрица оператора Q в базисе $e_1,\dots,e_n, ie_1,\dots,ie_n$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$, при этом

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = |\det(A+iB)|^2. \tag{2.11}$$

Пусть, далее, $Q(\cdot,\cdot)$ — эрмитова форма в V. Тогда в W определены две формы — симметричная билинейная форма

$$T(w,w') = \operatorname{Re} Q(w,w') \tag{2.12}$$

и кососимметричная билинейная форма

$$S(w,w') = \operatorname{Im} Q(w,w'). \tag{2.13}$$

Эти две формы связаны тождеством

$$S(w,w') = T(w, Iw'),$$

где I — оператор комплексной структуры (та же операция применима к билинейным формам в V).

2.7. Дважды комплексное пространство. Пусть W — вещественное пространство, снабженное оператором J комплексной структуры, $J^2 = -1$. Рассмотрим пространство $W_{\mathbb{C}}$. Из равенства $J^2 = -1$ вытекает, что собственные числа оператора J суть $\pm i$, причем J не имеет жордановых клеток. Пусть $W_{\pm}$ — это подпространства в $W_{\mathbb{C}}$, состоящие из векторов w таких, что $Jw = \pm iw$. Тогда $W_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$.

Заметим, что операция комплексного сопряжения $w \mapsto \bar{w}$ переставляет подпространства W_+ и W_-, при этом само пространство W состоит из векторов вида $(w,\bar{w}) \in W_+ \oplus W_-$.

Пусть теперь A — вещественно-линейный оператор в W. Обозначим через $\tilde{A}$ соответствующий оператор в $W_{\mathbb{C}}$. Тогда матрица $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} : W_+ \oplus W_- \to W_+ \oplus W_-. \tag{2.14}$$

Дважды комплексные пространства дают очень удобные матричные реализации для некоторых классических групп. Нас интересуют группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ и $\mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$.

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство V, снабженное положительно определенной эрмитовой формой Q. Пусть W — его овеществление. Рассмотрим группу G (вещественно) линейных операторов в W, сохраняющих $\operatorname{Im} Q$ (см. п. 2.6). Ясно, что $\mathrm{G} = \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Теперь, переходя в $W_{\mathbb{C}}$, мы реализуем $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ как некоторую группу матриц вида (2.14), при этом элементы $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ сохраняют в $W_{\mathbb{C}}$ уже две формы (см. п. 2.5). Одна из этих форм — кососимметричная форма с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, а другая — антиэрмитова форма с матрицей $\begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix}$ (конечно, удобнее говорить об эрмитовой форме с матрицей $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$).

Рассмотрим теперь в W группу $\mathrm{G}' \simeq \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$ операторов, сохраняющих форму $\operatorname{Re} Q$. Тогда $\mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$ реализуется как группа операторов в $W_{\mathbb{C}}$ вида (2.14), сохраняющих симметричную билинейную форму с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ и эрмитову форму с матрицей $\begin{pmatrix} E & \\ & -E \end{pmatrix}$.

2.8. Кватернионная алгебра. Тело кватернионов $\mathbb{H}$ состоит из выражений вида

$$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k,$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$, а i, j, k удовлетворяют таблице умножения

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \tag{2.15}$$

Напомним, что сопряженный кватернион есть $\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$; напомним также, что $q\bar{q} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, а $q^{-1} = (q\bar{q})^{-1}\bar{q}$.

(Левое) кватернионное линейное пространство — это левый $\mathbb{H}$-модуль (слово «левое» мы будем опускать).

Пример. Пусть $\mathbb{H}^n$ — пространство последовательностей $(z_1\dots,z_n)$, где $z_j \in \mathbb{H}$. В нем вводится покомпонентное сложение

$$(z_1,\dots,z_n) + (u_1,\dots,u_n) = (z_1+u_1,\dots,z_n+u_n)$$

и умножение на скаляры $\alpha \in \mathbb{H}$ слева (!)

$$\alpha(z_1,\dots,z_n) = (\alpha z_1,\dots,\alpha z_n).$$

Любое конечномерное кватернионное линейное пространство изоморфно $\mathbb{H}^n$.

Линейные операторы определяются условиями (2.1). Любой линейный оператор $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$ есть оператор умножения $z \mapsto zA$ строки $z = (z_1\dots z_n)$ на кватернионную матрицу A размера $n \times m$.

Пусть A — линейный оператор $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$. Заметим, что $\mathbb{H}^n$ очевидным образом отождествляется с $\mathbb{R}^{4n}$, поэтому A можно рассматривать как оператор $\mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}$. *Определитель* $\det(A)$ оператора A есть корень четвертой степени из определителя A как оператора $\mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}$; отметим, что $\det(A)$ — неотрицательное вещественное число.

2.9. Забывание и восстановление кватернионной структуры. Пусть V — кватернионное линейное пространство. Так как $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, мы можем рассматривать V как комплексное линейное пространство вдвое большей размерности. Обозначим это комплексное пространство через W. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — кватернионный базис в V. Тогда $e_1,\dots,e_n$,

$je_1, \dots, je_n$ — комплексный базис в W. В этом базисе кватернионно-линейные операторы имеют (комплексные) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix},$$

где Φ и Ψ — комплексные матрицы размера $n \times n$.

Пусть, далее, $\Omega(\cdot,\cdot)$ — эрмитова (соответственно, антиэрмитова) форма в V. Любой кватернион z представим в виде $z = a + jb$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Поэтому форма $\Omega(\cdot,\cdot)$ однозначно представима в виде

$$\Omega(v, v') = M(v, v') + jL(v, v'),$$

где L и M — комплекснозначные выражения. Таким образом, из кватернионной формы Ω в пространстве V получаются две формы в пространстве W — эрмитова форма M и кососимметричная (соответственно, симметричная) форма L. Итак, мы получили реализации групп $\mathrm{Sp}(p,q)$ и $\mathrm{SO}^*(2n)$ как групп комплексных матриц, сохраняющих пару форм (ср. с п. 2.7).

Заметим, что в комплексном пространстве W присутствует еще антилинейный оператор умножения на j.

Рассмотрим теперь комплексное пространство Y, в котором фиксирован антилинейный оператор J такой, что $J^2 = -E$. Тогда операторы вида

$$(\alpha + i\beta)E + (\gamma + i\delta)J, \tag{2.16}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, перемножаются и складываются как кватернионы. Таким образом, мы можем объявить Y кватернионным линейным пространством, положив, что умножение на скаляр $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ есть оператор (2.16).

§ 3. Пространства с мерой

Мы предполагаем известной обычную теорию интегрирования по Лебегу, см. [Колмогоров, Фомин (1981)]. Основная цель этого раздела — дать сводку результатов по основаниям теории меры ([Halmos, Neumann (1942)], [Рохлин (1947)]), обычно не включаемым в курсы функционального анализа (эти утверждения часто включаются в курсы теории вероятностей, см., например, [Ширяев (1980)], глава II, [Parthasarathy (1980)]).

3.1. σ-алгебры. Пусть M — множество. Семейство Σ подмножеств множества M называется *σ-алгеброй*, если

1. для любого $A \in \Sigma$ дополнение до A тоже лежит в Σ;
2. для любого конечного или счетного набора $A_1, A_2 \ldots \in \Sigma$ множества $\bigcap A_j, \bigcup A_j$ тоже лежат в Σ;
3. $\varnothing \in \Sigma$, $M \in \Sigma$.

Если $A \in \Sigma$, говорят, что A *измеримо* относительно Σ.

Мы будем говорить, что σ-алгебра Σ разделяет точки, если для любых $x_1, x_2 \in M$ найдется $A \in \Sigma$ такое, что $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$.

Пусть M — множество, а S — некоторое семейство подмножеств в M. Рассмотрим все Σ-алгебры, содержащие S, и рассмотрим их пересечение $\Sigma(S)$. Ясно, что $\Sigma(S)$ будет σ-алгеброй. Таким образом, для любого семейства S подмножеств множества M найдется наименьшая σ-алгебра $\Sigma(S)$, содержащая S. Мы будем говорить, что $\Sigma(S)$ *порождена семейством S*.

Мы будем говорить, что σ-алгебра Σ имеет *счетную базу*, если она может быть порождена счетным семейством множеств. Рассмотрим σ-алгебру Σ_1 на M_1 и σ-алгебру Σ_2 на M_2. Мы скажем, что Σ_1 и Σ_2 изоморфны, если существует биекция $M_1 \to M_2$, переводящая Σ_1 в Σ_2.

Пусть I — промежуток прямой. *Борелевской σ-алгеброй* $\mathscr{B}$ называется σ-алгебра на I, порожденная всеми интервалами $J \subset I$. Ясно, что $\mathscr{B}$ имеет счетную базу.

Если M — полное сепарабельное метрическое пространство, то *борелевской σ-алгеброй* $\mathscr{B}$ на M называется σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (в качестве

счетного семейства множеств, порождающего $\mathscr{B}$, можно выбрать шары с рациональными радиусами и центрами в точках счетного всюду плотного множества, поэтому $\mathscr{B}$ имеет счетную базу). Можно показать, что все борелевские σ-алгебры (для всех полных несчетных сепарабельных метрических пространств) изоморфны между собой. Более того, во всех разумных случаях σ-алгебра со счетной базой, разделяющая точки, на континуальном множестве оказывается изоморфна борелевской. Обсуждение борелевских структур см. в [Arveson (1976)].

3.2. Меры. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра на M. *Мерой* μ на Σ называется функция на Σ со значениями в $\mathbb{R} \cup (+\infty)$, удовлетворяющая условиям

1. $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \Sigma$;
2. если $A_j \in \Sigma$ — конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся множеств, то

$$\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) = \sum \mu(A_j). \tag{3.1}$$

Основными инструментами построения мер являются теорема Каратеодори о продолжении меры (см. [Колмогоров, Фомин (1981)], § V.3, [Ширяев (1980)], § II.3) и теорема Колмогорова о проективных пределах мер (см. [Parthasarathy (1980)], § 27, [Ширяев (1980)], § II.9).

Пусть μ — мера на пространстве M с σ-алгеброй Σ.

Мера называется

— *конечной*, если $\mu(M) < \infty$;

— *вероятностной*, если $\mu(M) = 1$;

— *σ-конечной*, если M представимо в виде объединения счетного семейства множеств конечной меры;

— *непрерывной*, если любая точка из M измерима и мера любой точки равна 0;

— *борелевской*, если она определена на борелевской σ-алгебре.

3.3. Полные меры. На промежутке I прямой, кроме борелевской σ-подалгебры $\mathscr{B}$, есть ещё одна естественная σ-алгебра $\mathscr{L}$, состоящая из измеримых по Лебегу множеств. Напомним, что множество $A \subset I$ *измеримо по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество B_ε такое, что $A \triangle B_\varepsilon$ покрывается счетным набором интервалов общей длины $< \varepsilon$. Алгебра $\mathscr{L}$ больше чем $\mathscr{B}$, и с формально-логической точки зрения существенно больше: $\mathscr{B}$ содержит лишь континуум подмножеств, а мощность $\mathscr{L}$ равна мощности множества подмножеств континуума. На практике, однако, различие между $\mathscr{B}$ и $\mathscr{L}$ почти неуловимо, оно происходит скорее из недостатков формально-схоластических оснований математики, чем из содержания понятий.

Мера μ, определенная на σ-алгебре Σ, называется *полной*, если любое подмножество множества меры 0 измеримо и (следовательно) имеет меру 0.

Пусть μ — неполная мера, определенная на некоторой σ-алгебре Σ на множестве M. Рассмотрим σ-алгебру $\widetilde{\Sigma}$, состоящую из множеств $A \subset M$, для которых существует $B \in \Sigma$ такое, что $A \triangle B$ является подмножеством множества меры 0. При этом полагаем, что $\mu(A) := \mu(B)$. Построенная мера μ на $\widetilde{\Sigma}$ уже полна. Эта процедура называется *пополнением меры*.

Например, σ-алгебра $\mathscr{L}$ на промежутке прямой является пополнением борелевской алгебры $\mathscr{B}$.

3.4. Лебеговские пространства. Пусть даны два пространства X_1, X_2 с мерами μ_1, μ_2, определенными на σ-алгебрах Σ_1, Σ_2. *Изоморфизмом* $X_1 \to X_2$ называется взаимнооднозначное отображение $f : X_1 \setminus E_1 \to X_2 \setminus E_2$, где E_1, E_2 — множества нулевой меры, переводящее измеримые множества в измеримые и сохраняющее меру множеств.

Оказывается, что различных «разумных» пространств с мерой очень немного, и они допускают классификацию с точностью до изоморфизма. Пространство M с мерой называется *лебеговским*, если оно изоморфно промежутку прямой, пустому, конечному или бесконечному (снабженному мерой Лебега, определенной на измеримых по Лебегу множествах), к которому добавлено пустое, конечное или счетное множество точек, имеющих ненулевую меру.

Оказывается, что почти все пространства с мерой, встречающиеся в анализе, являются лебеговскими, и, более того, изоморфизм со стандартным лебеговским пространством обычно может быть построен явно (обсуждение этого см. в п. VIII.4.1). Полезна следующая аксиоматическая характеризация лебеговских пространств, полученная в [Halmos, Neumann (1942)] (см. также [Рохлин (1947)]):

Теорема 3.1. Пусть M — пространство с полной мерой, определенной на σ-алгебре Σ. Пусть Σ содержит некоторую σ-алгебру Θ, изоморфную борелевской σ-алгебре, причем для любого $A \in \Sigma$ существует $B \in \Theta$ такое, что $A \supset B$ и $\mu(A \setminus B) = 0$. Тогда пространство M — лебеговское.

3.5. Образ меры. Пусть M — пространство с σ-алгеброй Σ, а N — пространство с σ-алгеброй Θ. Отображение $\psi : M \to N$ называется (Σ, Θ)-*измеримым*, если прообраз любого Θ-измеримого множества Σ-измерим. Функция $M \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если она $(\Sigma, \mathscr{B})$-измерима (здесь $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра; класс $(\Sigma, \mathscr{L})$-измеримых функций оказывается совершенно бессмысленным).

Пусть $\psi, \psi' : M \to N$ — измеримые отображения, а μ — мера на M. Обычно отображения, совпадающие почти всюду (т. е. кроме множества меры 0), считаются одинаковыми.

Пусть теперь M — пространство с σ-алгеброй Σ, а N — пространство с σ-алгеброй Θ. Возьмем (Σ, Θ)-измеримое отображение $\psi : M \to N$ и конечную меру μ на Σ. Определим на Θ меру ν из условия

$$\nu(A) = \mu\big(\psi^{-1}(A)\big), \tag{3.2}$$

где $A \in \Theta$. Мера ν называется *образом меры* μ при отображении ψ. При этом

$$\int_N f(n)\, d\nu(n) = \int_M f\big(\psi(m)\big)\, d\mu(m)$$

для любой функции f, интегрируемой на N.

Пусть теперь M — пространство с σ-алгеброй Σ и мерой ν, а N — множество. Пусть $\psi : M \to N$ — сюръективное отображение. Оказывается, что в этом случае тоже можно определить образ меры μ. Для этого определим на N σ-алгебру Θ, состоящую из множеств $A \subset N$ таких, что $\psi^{-1}(A) \in \Sigma$. Мера ν на Θ определяется из условия (3.2).

Однако при применении последней конструкции есть реальная опасность получить патологическую σ-алгебру Θ (см. пример неизмеримого разбиения в следующем пункте).

3.6. Разбиения (см. [Рохлин (1947)]). *Разбиением* $\mathfrak{h}$ лебеговского пространства M с мерой μ называется представление M в виде объединения $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ семейства попарно непересекающихся множеств.

Пусть сначала семейство M_α счетно. Тогда разбиение называется *измеримым*, если все M_α измеримы.

Пусть теперь семейство M_α несчетно. Тогда разбиение M_α называется *измеримым*, если существует счетное семейство измеримых множеств $B_j \subset M$, удовлетворяющих условию:

1. B_j составлены из множеств M_α;
2. для любых $M_\alpha \neq M_\beta$ существует B_j такое, что $B_j \supset M_\alpha$, $B_j \not\supset M_\beta$.

Измеримость разбиения $M = \bigcup M_\alpha$ влечет измеримость всех множеств M_α. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $M = [0, 1]$, а разбиение проводится по отношению эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y$ рационально.

Пример 2. Пусть $f : M \to [0, 1]$ — измеримая функция. Тогда линии уровня f (т. е. множества M_α, состоящие из решений уравнения $f(m) = \alpha$) образуют измеримое разбиение множества M. Легко понять, что все измеримые разбиения могут быть получены таким способом.

Пусть $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ — измеримое разбиение лебеговского пространства. Рассмотрим факторпространство $M/\mathfrak{h}$ пространства M по этому разбиению. Иными словами, рассмотрим множество индексов A. Тогда в $A = M/\mathfrak{h}$ канонически определена σ-алгебра Θ, состоящая из множеств $B \subset A$ таких, что $\bigcup_{\alpha \in B} M_\alpha$ измеримо. На σ-алгебре Θ канонически определена мера ξ из условия $\xi(B) = \mu\big(\bigcup_{\alpha \in B} M_\alpha\big)$. Оказывается, что пространство A с мерой ξ также является лебеговским пространством.

Теорема Рохлина [Рохлин (1947)]. Пусть $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ — измеримое разбиение лебеговского пространства M с мерой μ. Пусть ξ — каноническая мера на факторпространстве $A = M/\mathfrak{h}$. Тогда на почти всех (по мере ξ) множествах M_α существуют меры ν_α, удовлетворяющие условиям

а) M_α — пространства Лебега;

б) для любого измеримого $C \subset M$ подмножества $C \cap M_\alpha \subset M_\alpha$ являются ν_α-измеримыми для почти всех $\alpha \in A$. При этом

$$\mu(C) = \int_A \nu_\alpha\big(C \cap M_\alpha\big)\, d\xi(\alpha).$$

Система мер ν_α удовлетворяет также свойству: для любой измеримой функции f на M

$$\int_M f(m)\, d\mu = \int_A \bigg(\int_{M_\alpha} f(m)\, d\nu_\alpha \bigg) d\xi(\alpha).$$

Меры ν_α называются *условными мерами*.

Важно заметить, что эта теорема верна не только в «лебеговском», но и в «борелевском» варианте (см. [Parthasarathy (1980)], § 46). А именно, пусть разбиение $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ измеримо относительно борелевской σ-алгебры. Тогда на каждом множестве M_α определена σ-алгебра Λ_α, состоящая из пересечений вида $M_\alpha \cap S$, где S — борелевские множества в M. Оказывается, что для почти всех α пространство M_α может быть взаимно однозначно отображено на стандартное лебеговское пространство с сохранением меры так, что Λ_α переходит в борелевскую σ-алгебру.

3.7. Производная Радона—Никодима.

Теорема 3.2. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра на M. Пусть на Σ определены две вероятностные меры μ и ν. Пусть условие $\mu(A) = 0$ влечет $\nu(A) = 0$. Тогда существует неотрицательная интегрируемая относительно меры μ функция ψ такая, что для любого $B \in \Sigma$ выполнено

$$\nu(B) = \int_B \psi(m)\, d\mu(m).$$

Эта функция ψ называется *плотностью* меры ν относительно μ.

Пусть теперь $g : M \to M$ — измеримое биективное почти всюду отображение лебеговского пространства (M, μ). Говорят, что g *сохраняет меру*, если для любого измеримого множества $A \subset M$ выполнено $\mu(gA) = \mu(A)$. Говорят, что g *оставляет меру квазиинвариантной*, если g (а также g^{-1}) переводит множества нулевой меры в множества нулевой меры.

Для отображения g, оставляющих меру μ квазиинвариантной, определена так называемая *производная Радона—Никодима* $g'(m)$. Это измеримая функция на M, определяемая условием

$$\int_A g'(m)\, d\mu(m) = \mu(gA)$$

для любого измеримого множества A.

Пример. Пусть M — область в $\mathbb{R}^n$, а μ — мера Лебега. Пусть $g: M \to M$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда $g'(m)$ — это якобиан отображения g.

3.8. Действия групп. Пусть G — группа. *Инвариантным действием* группы G на пространстве M с мерой μ называется набор сохраняющих меру отображений $\gamma(g): M \to M$, определенных для любого $g \in \mathrm{G}$, таких, что

$$\gamma(g_1 g_2)m = \gamma(g_1)\gamma(g_2)m \tag{3.3}$$

почти всюду на M. Подчеркнем, что это не означает, что группа G действует на множестве M, потому что равенство (3.3) выполнено, вообще говоря, не всюду, а почти всюду (существуют очень важные действия, для которых никаким «исправлением» пространства M и преобразований $\gamma(g)$ нельзя добиться того, чтобы равенство (3.3) было выполнено всюду).

Аналогично определяется действие группы G преобразованиями, оставляющими меру квазиинвариантной.

В случае, если G — топологическая группа, нужно еще определить *непрерывное действие*. В § VIII.4 на группе Ams всех преобразований пространства с мерой, оставляющих меру инвариантной, вводится слабая топология. Инвариантное действие G естественно назвать непрерывным, если гомоморфизм $\gamma: \mathrm{G} \to \mathrm{Ams}$ непрерывен. На группе преобразований, оставляющих меру квазиинвариантной, есть несколько более-менее разумных топологий (в особенности в случае бесконечной меры), поэтому непрерывности действия в этом случае мы не определяем (и следствий из непрерывности тоже не извлекаем).

Рассмотрим квазиинвариантное действие группы G на множестве M. Измеримое подмножество $N \subset M$ называется *инвариантным*, если для любого $g \in N$ мера множества $gN \triangle N$ равна 0.

Действие называется *эргодическим*, если любое инвариантное множество имеет меру 0 или является дополнением до множества меры 0.

§ 4. Линейные операторы

В этом параграфе ссылка [КФ] обозначает [Колмогоров, Фомин (1981)], [RS] — [Reed, Simon (1972)], [RSN] — [Riesz, Sz.-Nagy (1965)].

4.1. Пространства Фреше. Топологическое векторное пространство V над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — это линейное пространство, в котором введена топология так, что отображения $(x, y) \mapsto x + y$ из $V \times V$ в V и отображение $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ из $\mathbb{K} \times V \to V$ непрерывны (см. [КФ], III.5.1). В действительности нам такая общность не нужна, и мы имеем дело с существенно более узкими классами пространств.

Пусть V — линейное пространство. *Полунорма* p (см. [RS], V.1, [КФ], III.5.2) — это неотрицательная функция $V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$$

Счетно-нормированное пространство V (см. [КФ], III.5.3) — это линейное пространство, в котором введено счетное семейство полунорм $p_1, p_2, \dots$ такое, что для любого $x \in V$ существует полунорма p_j такая, что $p_j(x) \neq 0$. В счетно-нормированном пространстве определяется топология — слабейшая топология, в которой все функции p_j непрерывны. Подмножества в V, выделяемые набором условий вида $p_1(x) < \alpha_1, \dots, p_k(x) < \alpha_k$ образуют в V фундаментальную систему окрестностей нуля. Последовательность x_n сходится к x в этой топологии, если $P_j(x_n - x) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ для всех j.

Счетно-нормированные пространства метризуемы, метрику можно задать формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \min\bigl(p_j(x-y), 1\bigr).$$

Эта метрика, впрочем, никогда не используется.

Последовательность x_α в V называется *фундаментальной*, если для любого j выполнено $p_j(x_\alpha - x_\beta) \to 0$ при $\alpha, \beta \to \infty$. Пространство V называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится. *Пространствами Фреше* называются полные счетно-нормированные пространства ([RS], V.2).

Напомним, что *норма* — это полунорма, положительная на всех ненулевых векторах. Норма обычно обозначается через $\|\cdot\|$; пространство, снабженное нормой, называется *нормированным*, метрика в нем вводится по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Полные нормированные пространства называются *банаховыми*.

Термин *«ограниченный оператор»* $V \to W$ (где V, W — топологические векторные пространства) обозначает всюду определенный непрерывный линейный оператор.

Пусть V — счетно-нормированное пространство. Допустим, что полунормы p_j удовлетворяют условиям

$$p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant p_3(x) \leqslant \dots$$

(это ограничение не обременительно, в противном случае можно ввести семейство полунорм $p'_j(x) = \max\bigl(p_1(x), \dots, p_j(x)\bigr)$, определяющее ту же топологию). Всюду определенный линейный оператор A в V ограничен тогда и только тогда, когда для любой полунормы p_j существует полунорма p_N и постоянная C такие, что

$$p_j(Ax) \leqslant C p_N(x). \tag{4.1}$$

Если на плотном подпространстве $Y \subset V$ определено линейное отображение $A: Y \to W$, удовлетворяющее (4.1), то оно продолжается до ограниченного линейного оператора $V \to W$.

4.2. Ограниченные операторы в гильбертовом пространстве (см. [RS], VI; [КФ], IV.5; [RSN], VII). Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, а $A: H_1 \to H_2$ — ограниченный оператор. *Норма* $\|A\|$ оператора A определяется формулой

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle Ax, y\rangle,$$

где $x \in H_1$, $y \in H_2$. Она действительно является нормой в пространстве ограниченных операторов $H_1 \to H_2$. Если $\|A\| \leqslant 1$, то говорят, что A — *сжимающий оператор* (или *сжатие*).

Для любого ограниченного оператора $A: H_1 \to H_2$ однозначно определен *сопряженный* оператор $A^*: H_2 \to H_1$, задаваемый равенством

$$\bigl\langle Ah_1, h_2\bigr\rangle_{H_2} = \bigl\langle h_1, A^* h_2\bigr\rangle_{H_1}.$$

При этом $\|A\| = \|A^*\|$.

Ограниченный оператор $A: H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$. Мы считаем известной спектральную теорему для самосопряженных операторов (см. [RS], VII; [RSN], VII.1).

Оператор $U: H_1 \to H_2$ называется *унитарным*, если U биективен и

$$\bigl\langle Ux, Uy\bigr\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1}. \tag{4.2}$$

Унитарность равносильна паре равенств

$$U^*U = E, \quad UU^* = E.$$

Оператор, удовлетворяющий лишь первому из этих равенств, называется *изометричным*. Он удовлетворяет (4.2), но, вообще говоря, не биективен (в этом случае U — оператор изометричного вложения $H_1 \to H_2$).

Самосопряженный оператор B называется *положительным*, если

$$\langle Bx, x\rangle \geqslant 0$$

для всех x (обозначение: $B \geqslant 0$). Положительность оператора B равносильна неотрицательной определенности эрмитовой формы $Q(x, y) = \langle Bx, y\rangle$.

Пример. Оператор A^*A положителен для любого A.

Из любого положительного оператора B однозначно извлекается положительный квадратный корень $C = \sqrt{B}$, т. е. существует единственный положительный оператор C такой, что $C^2 = B$ (см. [RS], VI.4).

Пусть $A : H \to H$ — ограниченный оператор. Тогда A однозначно представим в виде

$$A = US, \tag{4.3}$$

где S — самосопряженный оператор, а U — унитарное отображение $(\operatorname{Ker} A)^\perp \to \operatorname{Im} A$. Если A обратим, то U — унитарный оператор $H \to H$. Представление A в виде (4.3) называется *полярным разложением* (см. [RS], VI.4). Если K_1, K_2 — подпространства в H, то унитарные операторы $L : K_1 \to K_2$ называются *частичными изометриями* в H. Легко видеть (из (4.3)), что $S = \sqrt{A^*A}$. Оператор S обычно обозначается через $|A|$.

Имеет место тождество (см. [RS], VI.2)

$$\|A\|^2 = \|A^*A\|. \tag{4.4}$$

Таким образом, $\|A\|^2$ равна спектральному радиусу оператора A^*A, это сводит задачу о вычислении нормы A к задаче о вычислении спектра A^*A (см. [RS], теорема VI.6; более простых формул для нормы нет даже в конечномерном случае).

4.3. Топологии в пространстве ограниченных операторов (см. [RS], VI.1). Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Мы имеем дело с тремя топологиями в пространстве $\mathscr{L}(H_1, H_2)$ всех ограниченных операторов $H_1 \to H_2$.

а) *Равномерная топология* — это топология банахова пространства $\mathscr{L}(H_1, H_2)$, норма в $\mathscr{L}(H_1, H_2)$ есть норма оператора.

б) *Сильная топология*. Пусть A — оператор $H_1 \to H_2$. Пусть $k > 0$, пусть $x_1, \ldots, x_k \in H_1$, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ — положительные числа. Окрестность $U(x_1, \ldots, x_k; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ оператора A в сильной топологии состоит из всех $S \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ таких, что

$$\|(S - A)x_j\| < \varepsilon_j$$

для всех j. По определению, окрестности вида $U(\ldots)$ образуют фундаментальную систему окрестностей. Последовательность A_k сходится в сильной топологии к A (обычно говорят, что A_k *сильно сходится к* A), если для любого $x \in H_1$ выполнено $\|(A_k - A)x\| \to 0$.

в) *Слабая топология*. Пусть $x_1, \ldots x_k \in H_1$, а $y_1, \ldots y_k \in H_2$, пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$. Окрестность $W(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots y_k; \varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_k)$ оператора A состоит из всех операторов S таких, что

$$\langle (S - A)x_k, y_k \rangle < \varepsilon_k.$$

Эти окрестности образуют фундаментальную систему окрестностей оператора A. Подробное обсуждение слабой топологии см. § I.4.1.

На группе U всех унитарных операторов гильбертова пространства сильная и слабая топологии совпадают. При этом U оказывается топологической группой.

Замечание. Конечно, U является топологической группой и относительно равномерной топологии. Но равномерная топология на U не очень естественна. Например, большинство разумных гомоморфизмов из топологических групп в группу U, снабженную равномерной топологией, разрывно.

4.4. Фредгольмовы операторы (см., например, [Hörmander (1985)], 19.1). Пусть V, W — гильбертовы пространства. Ограниченный оператор $A : V \to W$ называется *фредгольмовым*, если $\operatorname{Im} A$ замкнут, а пространства $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A^\perp$ конечномерны.

Число

$$\operatorname{Index} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Im} A^\perp$$

называется *индексом* оператора A.

Множество всех фредгольмовых операторов фиксированного индекса открыто относительно равномерной топологии в пространстве всех операторов. Если оператор A — фредгольмов, а K — компактен, то $A + K$ — фредгольмов оператор того же индекса.

Если A — фредгольмов оператор, то существует фредгольмов оператор B такой, что $AB - E$ и $BA - E$ — компактные операторы. Это свойство характеризует фредгольмовы операторы.

4.5. Операторы Гильберта—Шмидта и ядерные операторы (см. [RS], VI.6, [Dunford, Schwartz (1963)], [Kuo (1975)], § 1). Пусть $0 < p < \infty$. Говорят, что компактный оператор A лежит в *классе Шаттена* $\mathscr{L}_p$, если его сингулярные числа $\mu_1, \mu_2 \ldots$ удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^p < \infty.$$

Напомним, что *сингулярные числа* оператора A суть собственные числа оператора $|A|$.

Если $A, B \in \mathscr{L}_p$, то $A + B \in \mathscr{L}_p$. Если $A \in \mathscr{L}_p$, то $XA \in \mathscr{L}_p$, $AY \in \mathscr{L}_p$ для любых ограниченных операторов X, Y.

Если $p \geqslant 1$, то множество всех операторов $H_1 \to H_2$ класса $\mathscr{L}_p$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum \mu_j^p}, \tag{4.5}$$

где μ_j — сингулярные числа A.

Из классов $\mathscr{L}_p$ в действительности важны два: $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_1$.

Пусть A — оператор $H_1 \to H_2$, пусть $e_1, e_2, \ldots$ и $f_1, f_2, \ldots$ — ортонормированные базисы в H_1 и H_2 соответственно. Оператор A называется *оператором Гильберта—Шмидта*, если ряд

$$\sigma = \sum_i \sum_j \left|\langle Ae_i, f_j \rangle\right|^2$$

сходится. Легко видеть, что это определение не зависит от выбора базисов, более того, от выбора базисов не зависит и сумма ряда σ. Число

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j \left|\langle Ae_i, f_j \rangle\right|^2}$$

называется *гильберт-шмидтовской нормой* оператора. Выбирая базисы так, что матрица оператора в этих базисах диагональна, мы получаем, что гильберт-шмидтовская норма оператора совпадает с (4.5) при $p = 2$. Итак, операторы Гильберта—Шмидта суть в точности операторы класса $\mathscr{L}_2$. Рассмотрим, далее, интегральный оператор

$$Af(m) = \int_N K(m, n) f(n)\, d\nu(n)$$

из $L^2(N, \nu)$ в $L^2(M, \mu)$. Пусть $e_i(n)$ — ортонормированный базис в $L^2(N, \nu)$, а $f_j(m)$ — ортонормированный базис в $L^2(M, \mu)$. Тогда функции $e_i(n) f_j(m)$ образуют ортонормированный базис в $L^2(M \times N, \mu \times \nu)$. Числа $\langle Ae_i, f_j \rangle$ — это не что иное, как коэффициенты разложения функции $K(m, n)$ по базису $e_i(m) f_j(n) \in L^2(M \times N, \mu \times \nu)$. Поэтому

$$\|A\|_2 = \sqrt{\int_M \int_N |K(m, n)|^2\, d\mu(m)\, d\nu(n)}.$$

В частности, A является оператором Гильберта—Шмидта тогда и только тогда, когда подкоренной интеграл сходится, т. е. $K(m, n) \in L^2(M \times N, \mu \times \nu)$.

Операторы класса $\mathscr{L}_1$ называются *ядерными операторами*. Пусть $A : H \to H$ — ядерный оператор. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в H. Можно показать, что в этом случае ряд $\sum \langle Ae_i, e_i \rangle$ абсолютно сходится и его сумма не зависит от выбора базиса e_i. *След* ядерного оператора A, по определению, есть

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ae_j, e_j \rangle. \tag{4.6}$$

Замечание. Только для ядерных операторов такое определение следа корректно. Стоит подчеркнуть, что если для оператора A ряд (4.6) сходится, это еще не означает, что оператор A — ядерный (например, при смене базиса ряд может стать расходящимся или сумма его может стать другой).

Мы видели, что гильберт-шмидтовость — легко проверяемое условие. Проверять ядерность несравненно сложнее, хороших критериев ядерности нет. Иногда полезен следующий признак: если в некотором ортонормированном базисе e_i выполнено

$$\sum_i \sum_j \left| \langle Ae_i, e_j \rangle \right| < \infty,$$

то оператор A — ядерный (утверждение вытекает из полноты $\mathscr{L}_1$ по ядерной норме $\|\cdot\|_1$, см. (4.5)).

След ядерного оператора обладает обычными свойствами следа. Например, для любого ограниченного оператора B и ядерного A выполнено

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA. \tag{4.7}$$

Легко проверить, что произведение операторов Гильберта—Шмидта есть ядерный оператор. Равенство (4.7) остается в силе для операторов Гильберта—Шмидта A и B.

Обозначим через $\mathscr{L}_2(H_1, H_2)$ пространство операторов Гильберта—Шмидта $H_1 \to H_2$. Пусть $X, Y \in \mathscr{L}_2(H_1, H_2)$. Положим

$$S(X, Y) = \operatorname{tr} XY^*$$

Легко видеть, что $S(X, Y)$ — положительно определенная эрмитова форма, при этом

$$\|X\|_2^2 = S(X, X).$$

Таким образом, мы получили в $\mathscr{L}_2(H_1, H_2)$ естественную структуру гильбертова пространства.

4.6. Определители. Обозначим через G_p множество обратимых операторов $A : H \to H$ таких, что $A - E \in \mathscr{L}_p$. Легко видеть, что G_p образует группу. Фиксируем в H ортонормированный базис. Пусть X — финитная матрица (т. е. матрица, у которой лишь конечное число элементов отлично от 0). Тогда очевидным образом определен *определитель* $\det(1 + X)$.

Оказывается, что функция $\det(1 + X)$ продолжается по непрерывности на группу G_1. Из соображений непрерывности выполнены тождества

$$\det\big((1 + X)(1 + Y)\big) = \det(1 + X)\det(1 + Y),$$
$$\det(1 + AXA^{-1}) = \det(1 + X)$$

для любых ядерных X, Y и любого ограниченного обратимого A. Чуть менее очевидно тождество

$$\det(1 + AB) = \det(1 + BA),$$

где A — ограниченный оператор, а B — ядерный. Последнее тождество остается в силе, если A и B — операторы Гильберта—Шмидта.

Отметим также равенство

$$\frac{d}{ds}\big(\det(1 + sX)\big)\Big|_{s=0} = \operatorname{tr} X,$$

где X — ядерный оператор, а $s \in \mathbb{C}$.

Замечание. Некоторые аналоги определителя существуют и на группах, существенно бо́льших, чем G_1, см. §§ IX.1–2.

4.7. Неограниченные операторы (см. [RS], VIII.1; [RSH], VIII.1). Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. *Оператором* $A : H_1 \to H_2$ называется линейное отображение из некоторого подпространства $V \subset H_1$ в H_2. Подпространство V называется *областью определения оператора* A и обозначается через $D(A)$. Никакой непрерывности A не предполагается.

Здесь удобно перейти с языка линейных отображений к языку графиков. Напомним, что *графиком* Γ_ψ отображения $\psi : M_1 \to M_2$ называется подмножество в $M_1 \times M_2$ состоящее из точек вида $(m, \psi(m)) \in M_1 \times M_2$.

График Γ_A оператора является линейным подпространством в $H_1 \oplus H_2$, и на это подпространство накладывается одно-единственное условие: $\Gamma_A \cap H_2 = 0$. Проекция Γ_A на H_1 есть $D(A)$. На самом деле обычно рассматриваются операторы с плотной областью определения.

Замечание. Понятно, что сложение двух операторов и умножение двух операторов — не очень хорошо определенные операции. Например, сумма двух операторов с плотной областью определения может иметь нулевую область определения.

Оператор $B : H_1 \to H_2$ называется *расширением оператора* $A : H_1 \to H_2$, если $D(B) \supset D(A)$, а на $D(A)$ эти операторы совпадают. Иными словами, $\Gamma_B \supset \Gamma_A$.

Оператор $A : H_1 \to H_2$ называется *замкнутым*, если условия

1. $h_j \in D(A)$;
2. $h_j \to h$ в H_1;
3. $Ah_j \to z$ в H_2

влекут $h \in D(A)$ и $Ah = z$. Проще сказать, что график Γ_A оператора A замкнут.

Согласно *теореме о замкнутом графике* (см. [RS], теорема III.12) всюду определенный замкнутый оператор ограничен.

Оператор $B : H_1 \to H_2$ называется *замыканием* оператора $A : H_1 \to H_2$, если Γ_B есть замыкание Γ_A. Отметим, что не любой оператор A имеет замыкание (может оказаться, что замыкание графика Γ_A пересекается с H_2); существование у оператора замыкания можно рассматривать как ослабленную форму непрерывности.

4.8. Самосопряженность (см. [Reed, Simon (1975)], VIII.1; [RSN], VIII–IX). Оператор A в H называется *симметрическим*, если область определения $D(A)$ плотна в H и

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

для любых $x, y \in D(A)$. Переведем это определение на язык графиков. Введем в $H \oplus H$ эрмитову форму M по правилу

$$M\big((h_1, h_2), (h_1', h_2')\big) = \langle h_1', h_2 \rangle - \langle h_1, h_2' \rangle.$$

Плотно определенный оператор A является симметрическим тогда и только тогда, когда его график изотропен относительно формы M.

Обозначим через W° ортогональное дополнение в $H \oplus H$ до W относительно M.

Оператор B называется *сопряженным* к оператору A, если $\Gamma_B = \Gamma_A^\circ$ (обозначение: $B = A^*$). Заметим, что может случиться, что $\Gamma_A^\circ \cap (0 \oplus H) \neq 0$. Тогда оператор A^* не определен. Может также случиться, что $D(A)$ не плотна в H.

Стоит отметить, что оператор A^* всегда замкнут.

Оператор A называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. $\Gamma_A^\circ = \Gamma_A$.

Оператор A называется *существенно самосопряженным*, если A^* есть замыкание A (или, что то же самое, замыкание оператора A есть самосопряженный оператор).

График самосопряженного оператора является максимальным изотропным подпространством в $H \oplus H$. Однако может оказаться, что график симметрического несамосопряженного оператора тоже является максимальным изотропным подпространством, это ничему не противоречит.

Главная причина, по которой самосопряженными неограниченными операторами приходится заниматься — это следующая *теорема Стоуна*, (см. [Reed, Simon (1975)], VIII.4; [RSN], X.1).

Теорема 4.1.

а) Пусть A — существенно самосопряженный оператор. Тогда существует единственная слабо непрерывная функция $t \mapsto U(t)$ на $\mathbb{R}$ со значениями в ограниченных операторах такая, что

$$\frac{d}{dt}U(t)h = U(t)Ah, \quad U(0) = E \tag{4.8}$$

для любого $h \in D(A)$. При этом операторы $U(t)$ унитарны и

$$U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) \tag{4.9}$$

для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Кроме того, если A самосопряжен, то

$$U(t)A = AU(t)$$

(равенство предполагает и совпадение областей определения).

б) Пусть $U(t)$ — семейство унитарных операторов, слабо непрерывно зависящее от t и удовлетворяющее (4.9). Тогда $U(t)$ является решением задачи Коши (4.8) для некоторого самосопряженного оператора A.

Семейства унитарных операторов $U(t)$, удовлетворяющие (4.9), называются *однопараметрическими группами*, а самосопряженный оператор A — *генератором* однопараметрической группы $U(t)$.

Выяснение того, является ли данный оператор самосопряженным, обычно является непростой задачей, и для ее решения развита разнообразная техника (см. [RS], X). По счастью, в этой книге нам почти во всех случаях будет достаточно следующего *признака Карлемана* (см. [Березин (1965)]).

Теорема 4.2. Пусть $H_1, H_2, H_3, \dots$ — гильбертовы пространства, пусть C_j — существенно самосопряженные операторы в H_j. Рассмотрим блочный оператор

$$Q = \begin{pmatrix} C_1 & A_1 & B_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1^* & C_2 & A_2 & B_2 & 0 & 0 & \dots \\ B_1^* & A_2^* & C_3 & A_3 & B_3 & 0 & \dots \\ 0 & B_2^* & A_3^* & C_3 & A_4 & B_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

в $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$, где A_j, B_j — ограниченные операторы, причем

$$\sum_n \frac{1}{\max\bigl(\|B_n\|, \|B_{n+1}\|, \|A_{n+1}\|\bigr)} = \infty.$$

Тогда оператор Q существенно самосопряжен на множестве D, состоящем из векторов вида $(h_1, h_2, \dots)$, где $h_j \in D(C_j)$ и все h_j, кроме конечного числа, равны 0.

4.9. Тензорные произведения (см. [RS], II.4). Пусть V, W — гильбертовы пространства. Выберем ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ в V и ортонормированный базис $f_1, f_2, \dots$ в W. *Тензорное произведение* $V \otimes W$ — это гильбертово пространство, ортонормированный базис которого составляют формальные выражения $e_i \otimes f_j$. Если $v = \sum \alpha_j e_j \in V$, $w = \sum \beta_j f_j \in W$, то через $v \otimes w$ мы обозначим вектор

$$v \otimes w := \sum \alpha_i \beta_j e_i \otimes f_j \in V \otimes W.$$

Легко видеть, что

$$\langle v \otimes w, x \otimes y \rangle_{V \otimes W} = \langle v, x\rangle_V \cdot \langle w, y\rangle_W.$$

Легко видеть, что конструкция пространства $V \otimes W$ не зависит от выбора базисов в V, W.

Пусть, далее, $A : V_1 \to V_2$, $B : W_1 \to W_2$ — ограниченные операторы. Через $A \otimes B$ мы обозначим ограниченный оператор $V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$, определяемый условием

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw$$

для всех $v \in V$, $w \in W$. Легко видеть, что

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Если $V = L^2(M)$, а $W = L^2(N)$, то $L^2(M) \otimes L^2(N)$ канонически отождествляется с $L^2(M \times N)$. А именно, вектору $f(m) \otimes g(n) \in L^2(M) \otimes L^2(N)$ ставится в соответствие функция $f(m)g(n) \in L^2(M \times N)$.

Далее, пространство $V' \otimes W$ канонически отождествляется с гильбертовым пространством $\mathscr{L}_2(V, W)$ операторов Гильберта—Шмидта $V \to W$. При этом вектору $f \otimes w \in V \otimes W$ ставится в соответствие оператор $A : V \to W$, заданный формулой

$$Av = f(v)w.$$

Определим, наконец, многократные тензорные произведения:

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 := (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3;$$
$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4 := (V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \otimes V_4$$

и т.д. Тензорное произведение пустого семейства сомножителей, по определению, есть одномерное пространство.

4.10. Симметрические и внешние степени. Рассмотрим n-*ю тензорную степень* $V^{\otimes n}$ пространства V:

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ раз}}.$$

Группа S_n всех перестановок из n элементов действует в $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей.

Определим n-*ю симметричную степень* $S^n V$ *пространства* V как подпространство в $V^{\otimes n}$, состоящее из всех S_n-неподвижных векторов.

Пусть $p_1, \dots, p_n \in V$. Определим вектор

$$s(p_1, \dots, p_n) = \sum_{\sigma \in S_n} p_{\sigma(1)} \otimes p_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам σ множества $1, 2, \dots, n$. Легко видеть, что $s(p_1, \dots, p_n) \in S^n V$. Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортонормированный базис в V. Тогда векторы вида $s(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n$, образуют в $S^n V$ ортогональный (но не нормированный) базис.

Пусть A — ограниченный оператор $V \to W$. Тогда оператор

$$A^{\otimes n} := \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{n \text{ раз}} : V^{\otimes n} \to W^{\otimes n} \tag{4.10}$$

переводит $S^n V$ в $S^n W$. Ограничение этого оператора на $S^n V$ обозначается через $S^n A$ и называется *n-й симметричной степенью оператора* A. Оператор $S^n A$ можно также определить равенством

$$(S^n A)s(p_1, \dots, p_n) = s(Ap_1, \dots, Ap_n).$$

Легко видеть, что

$$S^n(AB) = S^n A \cdot S^n B, \quad \|S^n A\| = \|A\|^n.$$

Пусть V, для простоты, конечномерно. Тогда $S^n V'$ канонически отождествляется с пространством однородных многочленов степени k на V. Действительно, пусть $f_1, \dots, f_n \in V'$. Тогда каждому элементу $s(f_1, \dots, f_n)$ ставится в соответствие функция

$$f_1(v) \cdot f_2(v) \cdot \ldots \cdot f_n(v)$$

на V, далее отображение продолжается по линейности.

Определим теперь *внешнюю степень* $\Lambda^n V$ пространства V. Она состоит из векторов $h \in V^{\otimes n}$ таких, что оператор перестановки сомножителей в $V^{\otimes n}$, соответствующий элементу $\sigma \in S_n$, переводит h в $(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} h$, где $\operatorname{sgn}\sigma$ — четность перестановки σ.

Пусть $p_1, \ldots, p_n \in V$. Определим вектор

$$p_1 \wedge \ldots \wedge p_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} p_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma(n)}.$$

Легко видеть, что

$$\langle p_1 \wedge \ldots \wedge p_n, q_1 \wedge \ldots \wedge q_n \rangle = \det M,$$

где M — матрица с матричными элементами $m_{ij} = \langle p_i, q_j \rangle$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — базис в V. Тогда векторы вида $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, образуют ортонормированный базис в $\Lambda^n V$.

Пусть A — ограниченный оператор $V \to W$. Оператор $\Lambda^n A : \Lambda^n V \to \Lambda^n W$ (*n-я внешняя степень оператора* A) определяется из равенства

$$(\Lambda^n A)(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) = Ap_1 \wedge \ldots \wedge Ap_n;$$

легко видеть, что

$$\Lambda^n(AB) = \Lambda^n A \cdot \Lambda^n B, \quad \|\Lambda^n A\| \leqslant \|A\|^n.$$

4.11. Бесконечные тензорные произведения (см. [Neumann (1938)]). Пусть $V_1, V_2, \ldots$ — гильбертовы пространства, причем в каждом V_α отмечен вектор e_0^α единичной длины. Определим тензорное произведение

$$W = \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (V_\alpha, e_0^\alpha)$$

пространств V_α с отмеченными векторами e_0^α. Выберем в каждом V_α по ортонормированному базису $e_0^\alpha, e_1^\alpha, \ldots$ (первый элемент базиса — всегда e_0^α). Тогда W — это гильбертово пространство, ортонормированный базис которого составляют выражения вида

$$r_{i_1 i_2 \ldots} = e_{i_1}^1 \otimes e_{i_2}^2 \otimes \ldots, \tag{4.11}$$

при этом лишь конечное число сомножителей в этом произведении отлично от e_0^α.

Пусть $v_\alpha = \sum c_k^\alpha e_k^\alpha \in V_\alpha$ — последовательность векторов такая, что

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| \langle v_\alpha, v_\alpha \rangle - 1 \right| < \infty, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| \langle v_\alpha, e_0^\alpha \rangle - 1 \right| < \infty.$$

Тогда мы определим вектор

$$\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha = \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\sum c_k^\alpha e_k^\alpha \Big) := \sum_{i_1, i_2, \ldots} \left[\Big(\prod_{\alpha=1}^{\infty} c_{i_\alpha}^\alpha \Big) r_{i_1 i_2 \ldots} \right],$$

где $r_{i_1 i_2 \ldots}$ — векторы (4.11). Легко видеть, что $\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha \in W$, при этом

$$\Big\langle \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha, \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v'_\alpha \Big\rangle_W = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \langle v_\alpha, v'_\alpha \rangle_{V_\alpha}.$$

Возьмем теперь в каждом V_α по ограниченному оператору A_α так, что

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| \langle Ae_0^\alpha, Ae_0^\alpha \rangle - 1 \right| < \infty, \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| \langle Ae_0^\alpha, e_0^\alpha \rangle - 1 \right| < \infty, \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| \|A_\alpha\| - 1 \right| < \infty.$$

Тогда корректно определен ограниченный оператор $\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$ в пространстве W такой, что

$$\Big(\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \Big) \Big(\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha \Big) = \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (A_\alpha v_\alpha).$$

Пример. Пусть M_α — пространства с вероятностной мерой, пусть $V_\alpha = L^2(M_\alpha)$, а e_α^0 — единичная функция. Тогда

$$\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (V_\alpha, e_0^\alpha) = L^2 \Big(\prod_{\alpha=1}^{\infty} M_\alpha \Big).$$

Замечание. Пусть V_α^0 — ортогональное дополнение до e_0^α в V_α. Тогда существует очевидный изоморфизм

$$\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (V_\alpha, e_0^\alpha) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Big[\bigoplus_{\alpha_1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k} \big(V_{\alpha_1}^0 \otimes V_{\alpha_2}^0 \otimes \ldots \otimes V_{\alpha_k}^0 \big) \Big].$$

§ 5. Терминология теории представлений

В этом параграфе ссылка [K] обозначает [Кириллов (1972)].

5.1. Конечномерные представления ([K], § 7). *Линейное представление* ρ группы G в конечномерном линейном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ — это гомоморфизм группы G в группу $GL(V)$ обратимых линейных преобразований пространства V. Иными словами, каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие оператор $\rho(g)$ в V такой, что

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \quad \rho(e) = E \tag{5.1}$$

для всех $g_1, g_2 \in G$ (e — единица группы G). *Размерностью представления* называется размерность пространства V.

Если вместо (5.1) выполнено

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1),$$

то ρ называется *антипредставлением*. Существенной разницы между представлениями и антипредставлениями нет: если $\rho(g)$ — представление, то $\rho'(g) := \rho(g^{-1})$ — антипредставление, и наоборот. Мы, допуская некоторую неточность терминологии, будем иногда называть антипредставления словом «представление».

Если G — топологическая группа, мы, естественно, требуем чтобы гомоморфизм ρ был непрерывен.

Если в V введено скалярное произведение, а операторы $\rho(g)$ унитарны, то представление ρ называется *унитарным*.

Пример (α). Группа $G = S_n$ перестановок из n элементов действует в $V = \mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов.

Пример (β). Пусть Q — группа собственных движений куба. Пусть V — пространство функций на множестве вершин куба (пусть вершины — точки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, где $\varepsilon_j = \pm 1$). Можно считать, что на каждой вершине куба написано число. Когда куб вращается, числа переставляются. Таким образом, мы получили представление группы Q в 8-мерном пространстве функций на множестве вершин куба.

Представление называется *точным*, если $\rho(g) \neq e$ для любого $g \neq e$.

Представление ρ такое, что $\rho(g) = E$ для всех g, мы называем *тривиальным*.

Если группа G определяется как группа линейных операторов (например, если G — классическая группа), то мы можем поставить в соответствие каждому оператору сам этот оператор. Полученное представление мы будем называть *тождественным* представлением.

5.2. Подпредставления. Пусть ρ — линейное представление группы G в пространстве V. Пусть $W \subset V$ — подпространство, инвариантное относительно всех операторов $\rho(g)$. Тогда определено представление G в пространстве W (а именно, операторы представления — ограничения операторов $\rho(g)$ на W). В таком случае мы будем говорить, что W — *подпредставление* в V.

Пример (α) (продолжение). Прямая $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ инвариантна относительно S_n. Плоскость $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ тоже инвариантна.

Пример (β) (продолжение). Пространство четных функций инвариантно относительно Q (функцию $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,)$ мы называем четной, если $f(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3,) = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$). Пространство нечетных функций — тоже.

Представление называется *неприводимым*, если оно не содержит нетривиальных (отличных от самого себя и нуля) подпредставлений. Для многих групп описание всех неприводимых представлений является разумной и красивой задачей.

Если у нас есть представления ρ_1 и ρ_2 группы G в пространствах V_1 и V_2, то определена их прямая сумма, а именно: G действует в $V_1 \oplus V_2$ операторами вида $\rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$.

Представление называется ***вполне приводимым***, если любое G-инвариантное подпространство имеет G-инвариантное дополнение. Для конечномерных представлений это означает, что представление разлагается в прямую сумму неприводимых подпредставлений.

Теорема 5.1 (см. [K], § 8.1).
а) Унитарные представления вполне приводимы.
б) Представления конечных групп вполне приводимы.
в) Представления компактных групп вполне приводимы.

Доказательство.

а) Если V — подпредставление, то легко проверяется, что $V^\perp$ — ортогональное дополнение до V — тоже подпредставление.

б) Пусть $\langle v, w\rangle$ — некоторое скалярное произведение в пространстве представления ρ. Тогда скалярное произведение $\{v, w\} = \sum_{g\in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle$ инвариантно (и тем самым утверждение б) сводится к а)). В самом деле,

$$\{\rho(h)v, \rho(h)w\} = \sum_{g\in G} \langle \rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w\rangle = \sum_{g\in G} \langle \rho(gh)v, \rho(gh)w\rangle = \sum_{g\in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle = \{v, w\}.$$

в) доказывается аналогично, только суммирование заменяется на интегрирование по мере Хаара. ∎

Пусть ρ — представление G в пространстве V. Пусть $v \in V$. Линейная оболочка W множества векторов $\rho(g)v$, где $g \in G$, называется *циклической оболочкой* вектора v. Циклическая оболочка является, очевидно, подпредставлением в V. Вектор v называется *циклическим*, если его циклическая оболочка совпадает с V.

Замечание. Циклическая оболочка вектора v — наименьшее подпредставление, содержащее v.

Пример (α) (продолжение). Циклическая оболочка любого базисного вектора в $V = \mathbb{C}^n$ совпадает с $\mathbb{C}^n$.

Пример (β) (продолжение). Впишем в куб тетраэдр. Пусть f — функция, равная 1 в вершинах тетраэдра и равная 0 в остальных вершинах куба. Легко видеть, что ее циклическая оболочка двумерна.

5.3. Сплетающие операторы.

Представления ρ_1, ρ_2 группы G в пространствах V_1, V_2 называются *эквивалентными*, если существует обратимый оператор $U : V_1 \to V_2$ такой, что для всех $g \in G$ выполнено

$$\rho_2(g)U = U\rho_1(g).$$

Определим морфизм представлений — *сплетающий оператор* (см. [K], § 7). Пусть ρ_1, ρ_2 — представления группы G в пространствах V_1 и V_2. Линейный оператор $A : V_1 \to V_2$ называется сплетающим, если

$$\rho_2(g)A = A\rho_1(g)$$

для всех g.

Пример (α) (продолжение). Все S_n-сплетающие операторы в $\mathbb{C}^n$ имеют матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta \\ \beta & \ldots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Пример (β) (продолжение). Матрицу оператора в V естественно рассматривать как функцию $\mu(A, B)$ на множестве пар вершин. Оператор в V является сплетающим, если функция $\mu(A, B)$ инвариантна под действием Q. Группа Q имеет на множестве пар вершин 4 орбиты, поэтому пространство сплетающих операторов 4-мерно.

Сумма сплетающих операторов $A, B : V_1 \to V_2$ является сплетающим оператором. Произведение сплетающих операторов $A : V_1 \to V_2$, $B : V_2 \to V_3$ является сплетающим оператором.

Теорема 5.2 (*лемма Шура*, см. [K], 8.2).

а) Пусть ρ_1, ρ_2 — неэквивалентные неприводимые представления группы G в пространствах V_1, V_2, а $A : V_1 \to V_2$ — сплетающий оператор. Тогда $A = 0$.

б) Пусть ρ — неприводимое представление группы G в пространстве V, а $A : V \to V$ — сплетающий оператор. Тогда $A = \lambda E$ (где $\lambda \in \mathbb{C}$).

Доказательство.

а) Пусть $A \neq 0$. Легко видеть, что $\operatorname{Ker} A$ — подпредставление в V_1, а $\operatorname{Im} A$ — подпредставление в V_2 ($Av = 0 \Rightarrow \rho_2(g)Av = A\rho(g_1)v = 0$). Так как ρ_1, ρ_2 неприводимы, то $\operatorname{Ker} A = 0$, $\operatorname{Im} A = 0$, т. е. A обратим, а значит, ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

б) Пусть μ — собственное число A. Если оператор A — сплетающий, то оператор $A - \mu E$ — тоже сплетающий. Значит, $\operatorname{Ker}(A - \mu E)$ — подпредставление, при этом $\operatorname{Ker}(A - \mu E) \neq 0$, значит, $\operatorname{Ker}(A - \mu E) = V$, т. е. $A = \mu E$. ∎

Следствие 5.3. Любое неприводимое представление абелевой группы одномерно.

Доказательство. Пусть ρ неприводимо. Операторы $\rho(g)$ — сплетающие, поэтому в силу леммы Шура $\rho(g) = \lambda E$. Следовательно, любое подпространство является подпредставлением. ∎

Пример. Пусть ρ_1, ρ_2 — неприводимые и неэквивалентные представления группы G в V_1 и V_2, пусть ρ_1 и ρ_2 неприводимы и не эквивалентны. Тогда любой сплетающий оператор в $V_1 \oplus V_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & \mu E \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. В самом деле, естественные вложения $V_i \to V_1 \oplus V_2$ и естественные проекции $V_1 \oplus V_2 \to V_i$ являются сплетающими операторами. Поэтому сплетающими операторами являются и композиции $V_i \to V_1 \oplus V_2 \to V_j$. Теперь применяем лемму Шура.

Пример. Пусть ρ — неприводимое представление группы G в V. Тогда любой сплетающий оператор в $V \oplus V$ имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_{11}E & \lambda_{12}E \\ \lambda_{21}E & \lambda_{22}E \end{pmatrix}$.

Задача. Пусть $V_1, \ldots, V_k$, $W_1, \ldots, W_n$ — неприводимые представления. Описать сплетающие операторы $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \to W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ (см. [K], 8.3).

Пример (α). Представление S_n содержит ровно 2 неприводимых представления — иначе сплетающих операторов было бы больше.

Пример (β). На сколько и на какие подпредставления разлагается V?

5.4. Операции над представлениями. Пусть ρ — представление группы G в пространстве V. Пусть V' — двойственное пространство, а $\rho(g)^t$ — оператор, транспонированный к $\rho(g)$. Тогда $g \mapsto \rho(g^{-1})^t$ является представлением G в V'. Это представление называется *двойственным* (или *контраградиентным*) к ρ.

Если ρ_1, ρ_2 — представления G в V_1 и V_2, то определено их *тензорное произведение* $\rho_1 \otimes \rho_2$, а именно, группа G действует $V_1 \otimes V_2$ операторами $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.

Если ρ — представление G в V, то определены его *внешние степени* $\Lambda^k \rho$, а именно, группа G действует в k-й внешней степени $\Lambda^k V$ пространства V операторами $\Lambda^k \rho(g)$.

Аналогично определяются *симметричные степени* представления.

Пусть ρ — представление группы G в пространстве V, пусть W — подпредставление. Тогда очевидным образом определено представление G в факторпространстве V/W, оно называется *факторпредставлением*.

Пусть, далее, ρ_1 — представление группы G_1 в пространстве V_1, а ρ_2 — представление группы G_2 в пространстве V_2. *Тензорное произведение* представлений ρ_1, ρ_2 группы $G_1 \times G_2$ действует в $V_1 \otimes V_2$ линейными операторами $\rho_1(g)_1 \otimes \rho_2(g_2)$, где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$.

Пусть H — подгруппа в G. Пусть ρ — представление группы G. Тогда для любого $h \in$ H определен оператор $\rho(h)$, и тем самым мы получаем представление подгруппы H. Это представление называется *ограничением* представления группы G на подгруппу H.

5.5. Бесконечномерные представления (см. [K], § 7). Пусть V — пространство Фреше, а G — топологическая группа. Представление G в пространстве V — это функция $\rho(g)$ на G, значения которой являются ограниченными обратимыми операторами в V, удовлетворяющая условиям

а) $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in$ G;

б) $\rho(e) = E$;

в) функция $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ из $G \times V$ в V непрерывна по совокупности переменных.

Определения *подпредставления* и *факторпредставления* остаются теми же (только подпространство W должно быть замкнутым).

Ко всем остальным понятиям нужно относиться с осторожностью (см. [K], [Литвинов (1972)]). В частности, совсем не просто определить эквивалентность представлений.

5.6. Унитарные представления. Представление ρ топологической группы G в гильбертовом пространстве H называется *унитарным*, если операторы $\rho(g)$ унитарны. Непрерывность ρ в этом случае можно понимать следующим образом: гомоморфизм ρ из G в группу унитарных операторов, снабженную слабой (= сильной) топологией, должен быть непрерывен.

На унитарные представления все сказанное в пп. 1.1–1.4 переносится с небольшими оговорками:

а) доказательство *леммы Шура* несколько усложняется;

б) вполне приводимость нужно понимать в следующем смысле: если V — подпредставление, то $V^\perp$ — тоже подпредставление. Но неверно, что представление разлагается в прямую сумму неприводимых подпредставлений: неприводимых подпредставлений может не быть вообще.

Пример. Пусть аддитивная группа $\mathbb{R}$ действует в $L^2(\mathbb{R})$ по формуле

$$T(a)f(x) = f(x)e^{iax}.$$

Рассмотрим измеримое подмножество Δ ненулевой меры в $\mathbb{R}$ и подпространство $L(\Delta) \subset L^2(\mathbb{R})$, состоящее из всех функций, равных 0 вне Δ. Легко видеть, что $L(\Delta)$ — подпредставление. Менее очевидно, что других подпредставлений здесь нет. В частности, нет и неприводимых подпредставлений.

Здесь, впрочем, нет ничего страшного: просто дискретные прямые суммы представлений заменяются на так называемый прямой интеграл; мы не хотим касаться этого более подробно (см. [K], 8.4).

5.7. Сферические представления. Пусть ρ — унитарное представление группы G в пространстве W, а K — подгруппа G. Представление ρ называется K-*сферическим*, если в W содержится единственный K-неподвижный вектор w (т. е. $\rho(h)w = w$ для всех $h \in$ K). Вектор w называется *сферическим вектором*, а функция

$$\varphi(g) = \langle \rho(g)w, w\rangle$$

— *сферической функцией*. Легко видеть, что для любых $h_1, h_2 \in$ K выполнено $\varphi(h_1 g h_2) = \varphi(g)$, т. е. f постоянна на двойных классах смежности. Рассмотрим, далее, семейство векторов $w_g = \rho(g)w \in W$. На самом деле, конечно, эти векторы нумеруются не элементами группы G, а элементами однородного пространства G / K, потому что $w_{gh} = w_g$ для любого $h \in$ K. Легко видеть, что

$$\langle w_{g_1}, w_{g_2}\rangle = \big\langle \rho(g_1)w, \rho(g_2)w\big\rangle = \big\langle \rho(g_2)^{-1}\rho(g_1)w, w\big\rangle = \varphi(g_2^{-1}g_1). \tag{5.4}$$

Система векторов w_g образует своего рода «переполненный базис» в W. Конечно, базисом в буквальном смысле слова она не является (векторы w_g линейно зависимы), но при работе в конкретных пространствах система w_g часто играет роль базиса.

Теорема 5.4. Два K-сферических представления группы G эквивалентны тогда и только тогда, когда их сферические функции совпадают.

Доказательство. Пусть W и W' — пространства этих представлений. Пусть w_g и w'_g — «переполненные базисы» в W и W'. Тогда в силу (5.4) мы имеем

$$\langle w_{g_1}, w_{g_2}\rangle = \langle w'_{g_1}, w'_{g_2}\rangle.$$

Поэтому существует унитарный оператор $U : W \to W'$ такой, что $U : w_g \mapsto w'_g$ для всех g. Легко видеть, что этот оператор является G-сплетающим. Теорема доказана. ∎

Обсудим теперь разложение вектора по «переполненному базису» w_g. Пусть $v \in W$. Определим функцию

$$f_v(g) = \langle v, w_g\rangle$$

на G / K. Тогда

$$f_{\rho(p)v}(g) = \big\langle v, \rho(p)\rho(g)w\big\rangle = f(pg).$$

Таким образом, мы получили вложение $I : v \mapsto f_v$ пространства W в пространство функций на G / K, при этом операторам $\rho(g)$ в W соответствуют сдвиги $f(g) \mapsto f(pg)$ в пространстве функций.

Опять-таки, в конкретных случаях здесь возникает много вопросов: как описать образ оператора I (обычно он состоит из решений некоторой системы дифференциальных уравнений с частными производными или решений некоторых интегральных уравнений)? как описать скалярное произведение в $I(W)$? как записать обратный оператор?

Отметим, что анализ в пространствах Фока основан именно на работе с подобными «переполненными базисами».

5.8. Одна лемма. Для доказательства неприводимости представлений мы очень часто используем следующую тривиальную лемму.

Лемма 5.5. Расмотрим вполне приводимое представление ρ группы G в пространстве V. Пусть K — подгруппа в G. Предположим, что V содержит ровно один (с точностью до пропорциональности) K-неподвижный вектор w. Тогда G-циклическая оболочка вектора w является неприводимым представлением группы G.

Доказательство. Пусть W — циклическая оболочка вектора w. Разложим W в прямую сумму двух подпредставлений: $W = W_1 \oplus W_2$. Пусть w_1 и w_2 — проекции w на W_1 и W_2. В силу леммы Шура w_1 и w_2 являются K-неподвижными векторами. Поэтому один из них, скажем, w_2, равен 0. Но тогда $w \in W_1$, а поэтому $W_1 = W$, а значит, $W_2 = 0$. ∎

5.9. Проективные представления (см. [K], § 14). *Проективным представлением* группы G в пространстве V называется набор операторов $\rho(g)$ такой, что для любых $g_1, g_2 \in$ G выполнено

$$\rho(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\rho(g_1)\rho(g_2),$$

где $c(g_1, g_2) \in \mathbb{C}$, а $\rho(e) = E$ (через e обозначена единица группы G). Функция $c(g_1, g_2)$ не предполагается непрерывной.

Если все операторы $\rho(g)$ унитарны, то проективное представление называется унитарным. Обозначим через PU группу всех унитарных операторов (снабженную слабой топологией), профакторизованную по (одномерной) группе, состоящей из операторов вида $e^{i\psi}E$. Тогда унитарное проективное представление группы G можно рассматривать как гомоморфизм G → PU. Если G — топологическая группа, то мы должны еще потребовать, чтобы представление было непрерывным, т. е. чтобы был непрерывным гомоморфизм G → PU.

Проективное представление ρ называется *линеаризуемым*, если некоторая замена вида

$$\rho'(g) = \lambda(g)\rho(g),$$

где $\lambda(g) \in \mathbb{C}^*$, делает это представление линейным, т. е.

$$\rho'(g_1 g_2) = \rho'(g_1)\rho'(g_2)$$

для всех g_1, g_2. В этом случае

$$c(g_1, g_2) = \frac{\lambda(g_1 g_2)}{\lambda(g_1)\lambda(g_2)}.$$

Пример. Рассмотрим абелеву группу G из четырех элементов 1, a, b, ab, причем $a^2 = b^2 = 1$. Рассмотрим следующее проективное представление ρ группы G в $\mathbb{C}^2$:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если бы оно было линеаризуемо, то в силу абелевости G оно раскладывалось бы в сумму одномерных представлений. Но легко видеть, что это представление неприводимо.

Пусть ρ и ρ' — проективные представления группы G в пространствах V и V'. Оператор $A : V \to V'$ называется *сплетающим*, если для любого $g \in$ G существует постоянная $\sigma(g) \in \mathbb{C}^*$ такая, что

$$\rho'(g)A = \sigma(g)A\rho(g)$$

для всех g.

Унитарные проективные представления ρ и ρ' группы G в пространствах V и V' называются *эквивалентными*, если существует унитарный сплетающий оператор $V \to V'$.

5.10. Центральные расширения групп. Пусть G — группа, а A — абелева группа. Группу $\widetilde{G}$ называют *центральным расширением группы* G с помощью A, если центр группы $\widetilde{G}$ содержит подгруппу A$'$, изоморфную A, а факторгруппа $\widetilde{G}$ / A$'$ изоморфна G. Центральное расширение $\widetilde{G}$ называется *нетривиальным*, если $\widetilde{G}$ не разлагается в прямое произведение G × A$'$.

Пусть $\widetilde{G}$ — центральное расширение группы G. Пусть ρ — представление группы $\widetilde{G}$. Для любого $g \in$ G фиксируем некоторый элемент $\tilde{g} \in \widetilde{G}$ такой, что образ $\tilde{g}$ в G есть g (конечно, функция $g \mapsto \tilde{g}$ из G в $\widetilde{G}$ определена не однозначно). Далее, для любого $g \in$ G определим оператор $\rho'(g) = \rho(\tilde{g})$. Тогда $g \mapsto \rho'(g)$ является проективным представлением G.

Итак, линейные представления группы $\widetilde{G}$ можно рассматривать как проективные представления G. Пусть теперь ρ — проективное представление группы G. Естественно встает вопрос, существует ли такое центральное расширение $\widetilde{G}$ группы G, что ρ линеаризуется на G (т. е. ρ эквивалентно представлению, полученному описанной только что процедурой из некоторого представления группы $\widetilde{G}$)? Ответ на этот вопрос обычно положителен.

Пример. Рассмотрим пример из предыдущего пункта. Тогда ρ линеаризуется на неабелевой группе $\widetilde{G}$ из 8 элементов с образующими a, b, c и соотношениями

$$a^2 = b^2 = c^2 = \varepsilon; \quad \begin{matrix} a\varepsilon = \varepsilon a, & ab = c = ba\varepsilon, \\ b\varepsilon = \varepsilon b, & bc = a = cb\varepsilon, \\ c\varepsilon = \varepsilon c; & ca = b = ac\varepsilon; \end{matrix}$$

(замечание: см. формулы (2.15)).

Пусть теперь G — связная односвязная простая группа Ли. Тогда оказывается, что любое унитарное проективное представление G линеаризуется (на ней самой). Далее, если G — связная простая группа, то любое ее унитарное представление линеаризуется на универсальной накрывающей группы G (два последних высказывания, конечно, равносильны). Аналогичные высказывания верны и для конечномерных представлений простых групп Ли (см. [K], 14.3).