Ю. А. Неретин

Категории симметрий и бесконечномерные группы

Эдиториал УРСС
Москва
1998

Оглавление

Неретин Юрий Александрович
Категории симметрий и бесконечномерные группы
М.: Эдиториал УРСС, 1998. — 432 с.

Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(*проект* № 96-01-14034)

Книга содержит систематическое изложение теории бесконечномерных групп, их представлений, а также полугрупповых и категорных оболочек. Подробно рассматриваются группа диффеоморфизмов окружности, бесконечномерные аналоги классических групп, группы преобразований пространств с мерой и некоторые группы токов. Обсуждаются также бесконечные аналоги симметрических групп и группы петель. Ряд разделов книги посвящен связанным с конечномерными группами Ли явлениям, которые стали известны лишь благодаря появлению теории бесконечномерных групп.

Изложение основано на категорной версии метода вторичного квантования.

Для математиков и математических физиков, так или иначе имеющих дело с бесконечномерными группами, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Группа подготовки издания:

Директор *Доминго Марин Рикой*
Заместители директора *Наталья Финогенова, Ирина Макеева*
Компьютерный дизайн *Василий Подобед, Виктор Романов*
Верстка *Василий Подобед*
Подготовка текста *Наталия Бекетова, Дмитрий Соколов, Анна Тюрина*
Технические редакторы *Наталья Аринчева, Елена Логвинова*

Издательство «Эдиториал УРСС»
113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к. пр.

Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Подписано к печати 12.09.98 г.
Формат 70 × 100/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 27. Заказ № 320.

Отпечатано в АООТ «Политех-4»
129110, г. Москва, Б. Переяславская, 46

ISBN 5-901006-71-2

Предисловие

Термин «бесконечномерная группа» не имеет строгого определения и, к тому же, не слишком точен. Он означает примерно «очень большая группа». К таким группам относятся, например, следующие классы групп:

(1) группы диффеоморфизмов многообразий;

(2) группы, связанные с алгеброй Вирасоро и алгебрами Каца—Муди;

(3) бесконечные аналоги симметрической группы;

(4) различные группы операторов в гильбертовом пространстве (например группы автоморфизмов канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений);

(5) группы токов (т. е. группы каких-нибудь функций на чем-нибудь со значениями в какой-нибудь группе);

(6) группы автоморфизмов пространств с мерой;

Представления различных групп перечисленных типов стали изучаться в разное время, начиная примерно с 1950 г. Долгое время эти теории развивались независимо и по расходящимся направлениям, и с течением времени становилось все меньше надежды на построение какой-либо связной картины. Однако с начала 80-х годов эта картина начала составляться (что очень трудно понять по существующей литературе), и сейчас, наконец, появилась возможность эту картину описать. Это — одна из целей нашей книги.

Другая цель, тесно связанная с первой, — явное построение «скрытых структур» (мантий и шлейфов), связанных с бесконечномерными группами. Оказывается, что (по крайней мере, с точки зрения теории представлений) «главными действующими лицами» являются не группы (из списка (1)–(6)), а значительно бо́льшие объекты, включающие в себя эти группы. Это немного похоже на взаимоотношения вещественных и комплексных чисел; вещественные числа есть и сами по себе, но вещественная алгебра и вещественный анализ становятся понятными лишь после выхода в комплексную область.

Эти скрытые структуры тоже имеют довольно долгую историю (начиная с 60-х годов), многие занимались ими явно, а многие — не сознавая, по-видимому, что они занимаются «скрытыми структурами». В течение сравнительно продолжительного времени описать эти структуры в удобных терминах не удавалось, положение стало проясняться лишь с конца 1987 года, и, как мне кажется, сейчас в основном прояснилось.

«Скрытые» структуры дали новую неожиданную точку зрения на ряд старых областей теории представлений. Например, оказалось, что серии классических комплексных групп $A_n \simeq SL(n,\mathbb{C})$, $B_n \simeq SO(2n+1,\mathbb{C})$, $C_n \simeq Sp(2n,\mathbb{C})$, $D_n \simeq SO(2n,\mathbb{C})$ естественным образом объединяются в четыре категории $\mathbf{GA}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, и теория конечномерных представлений классических групп в каком-то смысле оказывается теорией представлений 4-х «классических» категорий $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathbf{D}$. Подобные явления происходят и с бесконечномерными представлениями групп $U(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ со старшим весом, и с некоторыми сериями конечных групп. Мы ограничиваемся рассмотрением категорий, связанных с комплексными классическими группами (глава III).

Наконец, еще одна цель книги (которой я добиваюсь лишь в меру возможности) — явное описание конструкций неприводимых представлений для бесконечномерных групп; мне кажется, что в существующей (мало-мальски доступной для чтения) литературе в этом месте серьезный пробел.

С другой стороны, рассмотрение большого числа разных групп вынудило меня быть крайне жестким в отборе материала. В книге почти отсутствует целый ряд естественных сюжетов, таких как классификация представлений (исключение составляют главы III и VIII), комбинаторное строение представлений, асимптотическая теория, теория сферических функций, гармонический анализ. Не рассматриваются и аффинные алгебры.

Все это, конечно, обедняет содержание, но имеет и положительную сторону, так как резко снижает требования к подготовке читателя — специальных познаний по теории представлений для чтения книги не требуется. Ряд вспомогательных вопросов и технически несложных рассуждений представлены в виде задач. Звездочка у задачи ставилась в том случае, когда я не был уверен в том, что задача достаточно проста. Как правило, такие задачи снабжены ссылками на литературу.

Две ключевые конструкции с точки зрения излагаемой теории — спинорное представление ортогональной категории (главы II, IV) и «представление Вейля» симплектической категории (главы V, VI). В этих главах сосредоточены основные технические сложности, изложение в них довольно полно в том смысле, что мне удалось сказать в них бо́льшую часть из того, что, на мой взгляд, заслуживает быть сказанным. Для обеих конструкций мы сначала рассматриваем их «конечномерную часть» (главы II и V), отчасти потому, что это представляет самостоятельный интерес, отчасти потому, что переход к бесконечномерному случаю связан со значительными аналитическими сложностями, и изложение будет более понятным, если сначала отделить «алгебраическую часть».

В заключение я должен поблагодарить всех людей, с которыми мне пришлось обсуждать бесконечномерные группы в Москве 80-х годов: Г. И. Ольшанского, Р. С. Исмагилова, А. А. Кириллова, А. М. Вершика, А. В. Карабегова, М. Л. Концевича, Д. Б. Фукса, В. Ф. Молчанова, М. Л. Назарова, А. Г. Реймана, Е. Т. Шавгулидзе, Д. В. Юрьева. Все они в большей или в меньшей степени оказали влияние на меня, а следовательно, и на эту книгу. В особенности я благодарю Г. И. Ольшанского за многолетнее сотрудничество.

Москва, 1991–1993

Русское издание книги отличается от английского (выпущенного издательством Oxford University Press в 1996 г.) в основном редакционными изменениями. Кроме того, включены предварительные сведения (добавление G), а также несколько новых пунктов в добавлении F и в § IX.6.

Я благодарю Российский фонд фундаментальных исследований и издательство Эдиториал УРСС за русское издание книги.

Москва, 1998

Обозначения

Символы

$\delta_{k,l}$	символ Кронекера; $\delta_{k,k} = 1$, $\delta_{k,l} = 0$ при $k \neq l$
$A \Leftrightarrow B$	высказывание «A» равносильно высказыванию «B»
$x \mapsto y$	x отображается в y
$\psi : A \to B$	ψ отображает A в B или ψ — морфизм $A \to B$
$x_j \to x$	последовательность x_j сходится к x
$P : A \rightrightarrows B$	линейное отношение; *с. 51*
$\varphi := \psi$	правая часть есть определение левой
$\oplus$, $\otimes$	прямая сумма, тензорное произведение
Λ^k, S^k	внешние и симметрические степени; *с. 25, 68, 405–406, 410*
$A \setminus B$	множество всех $a \in A$ таких, что $a \notin B$
$A \triangle B$	симметрическая разность множеств A и B: $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$H_1 \setminus G / H_2$	двойные классы смежности; *с. 12*
G / H	однородное пространство
dim	размерность

Множества

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$	натуральные, целые, вещественные, комплексные числа и кватернионы
$\mathbb{Z}_+$	неотрицательные целые числа
$\overline{\mathbb{C}}$	сфера Римана; $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$
$\mathbb{C}^*$	группа комплексных чисел по умножению; $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$

Пространства

$L^2(M)$	(гильбертово) пространство функций f на пространстве M, удовлетворяющих условию $\int_M \lvert f(m)\rvert^2 dm < \infty$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_M f(m)\overline{g(m)}\, dm$
ℓ^2	(гильбертово) пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum \lvert x_j\rvert^2 < \infty$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum x_j \overline{y_j}$
L^1, L^∞, C^∞	стандартные функциональные пространства, см. [Reed, Simon (1972)]
Λ_n	грассманова алгебра; *с. 24*
$\Lambda, \overline{\Lambda}$	фермионное пространство Фока; *с. 99–100*
$F, F(\cdot)$	бозонное пространство Фока; *с. 136, 151*
V'	обычно пространство, двойственное к V
Gr	грассманианы; *с. 387*

Векторы и операторы

A^*, A^t	сопряженный оператор, транспонированный оператор; *с. 390–391, 399, 403*

$\lvert A\rvert = \sqrt{A^*A}$	*с. 400*
$b[\,\cdot\,]$	*с. 144, 162*
$B[\ ]$	*с. 141, 162, 175*
$\mathrm{spin}(\cdot)$	*с. 35, 55, 120*
$\mathscr{L}_p$	классы Шаттена; *с. 401*
$\hat{a}(\cdot)$	операторы рождения-уничтожения; *с. 30, 101, 140, 154*
tr	след оператора
$1, E, E_n$	единичный оператор

Линейные отношения

$P : A \rightrightarrows B$, $\mathrm{Ker}\,P$, $\mathrm{Im}\,P$, $\mathrm{Dom}\,P$, $\mathrm{Indef}\,P$, $P^{\square}$	*см. § II.4, с. 51–52*
null	*с. 54*

Группы и полугруппы

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$,	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$, $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{O}(p)$, $\mathrm{Sp}(p)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}^*(2n)$ и др. классические группы; *с. 385–386*
Diff	группа диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию; *с. 192, 214*
$\mathrm{Isom}(H)$	группа аффинных изометрий гильбертова пространства; *с. 155*
End, $\mathrm{Aut}(\cdot)$, $\mathrm{Aut}^*(\cdot)$	*с. 51, 68*
Γ	полугруппа трубок; *с. 214*
$M(\mathrm{G})$	*с. 328*
$\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$	*с. 245, 274*
S_n, S_∞, $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$	симметрические группы; *с. 234, 263*
$\big(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\big)$	(G,K)-пары Ольшанского; *с. 274*
Ams, Ams_∞	*с. 251, 258*

Категории

$\mathrm{Mor}(\cdot,\cdot)$, $\mathrm{End}(\cdot)$, $\mathrm{Aut}(\cdot)$, $\mathrm{Ob}(\cdot)$	*с. 50–51*
Aut^*	*с. 68*

Категории обозначаются жирными буквами, в т. ч.

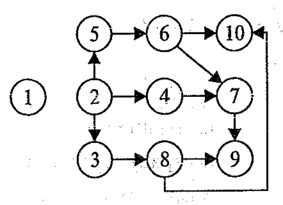
A, B, C, D	*с. 85–86*
$\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}$	*с. 122, 247*
GA, $\overline{\mathbf{GA}}$	*с. 62, 111*
GD, $\overline{\mathbf{GD}}$	*с. 53, 119*
Sp, $\overline{\mathbf{Sp}}$, $\overline{\mathbf{Spa}}$	*с. 127–128, 161, 174*
U	*с. 124*
$\mathbf{SO}^*$	*с. 129*
Shtan	*с. 224*
Mar, $\overline{\mathbf{Mar}}$	*с. 250*
G-Mar, **G-**$\overline{\mathbf{Mar}}$	*с. 335–336*
Uo	*с. 285*
PB, $\overline{\mathbf{PB}}$	*с. 235*

Представления

spin	спинорное представление; *с. 55, 120*
we	представление Вейля; *с. 42, 163*
$\widetilde{\mathrm{we}}$	*с. 175*
Exp	*с. 155*
$M(h,c)$, $L(h,c)$	модули со старшим весом над алгеброй Вирасоро; *с. 197–198*

Представления категорий (а также функторы) обозначаются рублеными буквами (A, S, T, и т. п.), пространства представления — большими латинскими буквами, операторы представления — греческими строчными буквами; *см. с. 52*

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ГЛАВ



Глава I

Видимые и невидимые структуры на бесконечномерных группах

Эта глава представляет из себя что-то вроде введения, и ниже на нее нет формальных ссылок. Читателю, совсем не знакомому с предметом, эту главу лучше пропустить: глава является комментарием к теории, который без некоторого знакомства с самой теорией не слишком интересен.

Точка зрения на бесконечномерные группы, излагаемая в книге, а также техника работы с ними, по-видимому, покажется странной даже части специалистов. Она, возможно, покажется странной и людям, знакомым с теорией представлений групп Ли. Цель этой главы — на простых примерах объяснить, почему с бесконечномерными группами происходят явления, не знакомые нам по обычной теории групп Ли, излагаемой в учебниках.

Мы хотим дать априорное оправдание следующим двум высказываниям, хотя a posteriori они вполне оправдываются основным текстом книги (и поэтому априорное оправдание в итоге оказывается ненужным).

0.1. Принцип полугруппового продолжения (Г.И. Ольшанский). Пусть G — «бесконечномерная» группа, имеющая некоторый запас унитарных представлений. Тогда G — не группа, а лишь видимая часть некоторой невидимой невооруженным глазом полугруппы $\Gamma \supset G$. При этом любое представление G продолжается однозначно до представления полугруппы Γ. Есть веские основания думать, что G плотна в Γ. Есть также некоторые основания думать, что Γ компактна, однако последнее высказывание может быть оспорено.

Сделанное нами утверждение ни в каком смысле не является теоремой, и оно ни в каком смысле не описывает полугруппу Γ. Тем не менее, в каждом частном случае оно оказывается истинным, в том числе оказывается истинным и утверждение о «невидимости»: за исключением учебных примеров, ответ всегда оказывается неожиданным. Эту полугруппу мы будем называть *мантией* (*mantle*) группы G.

0.2. Принцип категорного продолжения. Пусть, по-прежнему, G — бесконечномерная группа. Тогда G является лишь видимой частью некоторой невидимой невооруженным глазом категории **K**. Более точно, существует некоторая кате-

$|A| = \sqrt{A^*A}$ *с. 400*
$b[\cdot]$ *с. 144, 162*
$B[\ ]$ *с. 141, 162, 175*
$\mathrm{spin}(\cdot)$ *с. 35, 55, 120*
$\mathscr{L}_p$ классы Шаттена; *с. 401*
$\hat{a}(\cdot)$ операторы рождения-уничтожения; *с. 30, 101, 140, 154*
tr след оператора
$1, E, E_n$ единичный оператор

Линейные отношения

$P : A \rightrightarrows B$, $\mathrm{Ker}\, P$, $\mathrm{Im}\, P$, $\mathrm{Dom}\, P$, $\mathrm{Indef}\, P$, $P^{\square}$ *см. § II.4, с. 51–52*
null *с. 54*

Группы и полугруппы

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$, $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{O}(p)$, $\mathrm{Sp}(p)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}^*(2n)$ и др. классические группы; *с. 385–386*
Diff группа диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию; *с. 192, 214*
$\mathrm{Isom}(H)$ группа аффинных изометрий гильбертова пространства; *с. 155*
End, $\mathrm{Aut}(\cdot)$, $\mathrm{Aut}^*(\cdot)$ *с. 51, 68*
Γ полугруппа трубок; *с. 214*
$M(\mathrm{G})$ *с. 328*
$\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$ *с. 245, 274*
S_n, S_∞, $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ симметрические группы; *с. 234, 263*
$(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty))$ (G, K)-пары Ольшанского; *с. 274*
Ams, Ams_∞ *с. 251, 258*

Категории

$\mathrm{Mor}(\cdot,\cdot)$, $\mathrm{End}(\cdot)$, $\mathrm{Aut}(\cdot)$, $\mathrm{Ob}(\cdot)$ *с. 50–51*
Aut^* *с. 68*

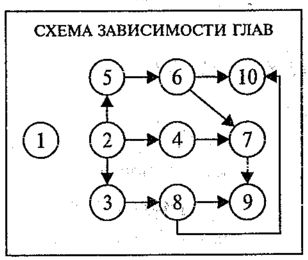
Категории обозначаются жирными буквами, в т. ч.

A, **B**, **C**, **D** *с. 85–86*
$\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}$ *с. 122, 247*
GA, $\overline{\mathbf{GA}}$ *с. 62, 111*
GD, $\overline{\mathbf{GD}}$ *с. 53, 119*
Sp, $\overline{\mathbf{Sp}}$, $\overline{\mathbf{Spa}}$ *с. 127–128, 161, 174*
U *с. 124*
SO* *с. 129*
Shtan *с. 224*
Mar, $\overline{\mathbf{Mar}}$ *с. 250*
G-Mar, **G-$\overline{\mathbf{Mar}}$** *с. 335–336*
Uo *с. 285*
PB, $\overline{\mathbf{PB}}$ *с. 235*

Представления

spin спинорное представление; *с. 55, 120*
we представление Вейля; *с. 42, 163*
$\widetilde{\mathrm{we}}$ *с. 175*
Exp *с. 155*
$M(h,c)$, $L(h,c)$ модули со старшим весом над алгеброй Вирасоро; *с. 197–198*

Представления категорий (а также функторы) обозначаются рублеными буквами (A, S, T, и т. п.), пространства представления — большими латинскими буквами, операторы представления — греческими строчными буквами; *см. с. 52*



Глава I

Видимые и невидимые структуры на бесконечномерных группах

Эта глава представляет из себя что-то вроде введения, и ниже на нее нет формальных ссылок. Читателю, совсем не знакомому с предметом, эту главу лучше пропустить: глава является комментарием к теории, который без некоторого знакомства с самой теорией не слишком интересен.

Точка зрения на бесконечномерные группы, излагаемая в книге, а также техника работы с ними, по-видимому, покажется странной даже части специалистов. Она, возможно, покажется странной и людям, знакомым с теорией представлений групп Ли. Цель этой главы — на простых примерах объяснить, почему с бесконечномерными группами происходят явления, не знакомые нам по обычной теории групп Ли, излагаемой в учебниках.

Мы хотим дать априорное оправдание следующим двум высказываниям, хотя a posteriori они вполне оправдываются основным текстом книги (и поэтому априорное оправдание в итоге оказывается ненужным).

0.1. Принцип полугруппового продолжения (Г.И. Ольшанский). Пусть G — «бесконечномерная» группа, имеющая некоторый запас унитарных представлений. Тогда G — не группа, а лишь видимая часть некоторой невидимой невооруженным глазом полугруппы $\Gamma \supset \mathrm{G}$. При этом любое представление G продолжается однозначно до представления полугруппы Γ. Есть веские основания думать, что G плотна в Γ. Есть также некоторые основания думать, что Γ компактна, однако последнее высказывание может быть оспорено.

Сделанное нами утверждение ни в каком смысле не является теоремой, и оно ни в каком смысле не описывает полугруппу Γ. Тем не менее, в каждом частном случае оно оказывается истинным, в том числе оказывается истинным и утверждение о «невидимости»: за исключением учебных примеров, ответ всегда оказывается неожиданным. Эту полугруппу мы будем называть *мантией* (*mantle*) группы G.

0.2. Принцип категорного продолжения. Пусть, по-прежнему, G — бесконечномерная группа. Тогда G является лишь видимой частью некоторой невидимой невооруженным глазом категории **K**. Более точно, существует некоторая категория $\mathbf{K}$ (*шлейф* (*train*) группы G) такая, что сама группа является группой автоморфизмов некоторого объекта V этой категории, а полугруппа Γ — полугруппой эндоморфизмов того же объекта. При этом каждое представление ρ группы G в пространстве H продолжается до представления категории $\mathbf{K}$. Иными словами, по каждому объекту W категории $\mathbf{K}$ строится линейное пространство $T(W)$, а по каждому морфизму $P : W \to W'$ строится линейный оператор $\tau(P) : T(W) \to T(W')$ так, что для любых морфизмов $P : W \to W'$, $Q : W' \to W''$ выполнено

$$\tau(QP) = \tau(Q)\tau(P);$$

при этом $T(V) = H$, а для всех $g \in \mathrm{G}$ операторы $\tau(g)$ и $\rho(g)$ совпадают.

Еще раз отметим, что все пространства $T(W)$ и все операторы $\tau(P)$ «вырастают» из одного-единственного представления ρ группы G в одном-единственном пространстве H.

§ 1. Топология

1.1. Что такое группа $\mathrm{GL}(\infty)$**?** Более точно, что является бесконечномерным аналогом групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с точки зрения теории представлений? Два возможных ответа приходят в голову мгновенно:

а) $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$ — это индуктивный предел групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (т.е. группа обратимых бесконечных матриц A таких, что $A - E$ имеет конечное число ненулевых матричных элементов);

б) $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$ — это группа всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве;

По небольшом размышлении приходят в голову еще несколько ответов:

в) индуктивный предел групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ можно строить по-разному. Например, можно рассмотреть группу $\mathrm{G} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{GL}(2^n, \mathbb{C})$, где вложение $\mathrm{GL}(2^n, \mathbb{C})$ в $\mathrm{GL}(2^{n+1}, \mathbb{C})$ устроено как

$$g \to \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix};$$

г) Пусть $\mathscr{L}_p$ — *шаттеновский идеал*, т.е. множество всех операторов A в гильбертовом пространстве таких, что след $\mathrm{tr}(A^*A)^{p/2}$ конечен $(0 < p < \infty)$ (подробнее см. Предварительные сведения, § 4). Через $\mathscr{L}_\infty$ мы обозначим идеал всех компактных операторов. Обозначим временно через $\mathrm{GL}^p(\infty, \mathbb{C})$ группу операторов вида $1 + A$, где $A \in \mathscr{L}_p$, снабженную естественной топологией.

Ясно, что этот список можно продолжать дальше и дальше (и в п. 1.3 мы его продолжим).

Можно подумать, что каждая такая группа имеет свою теорию представлений. Похоже, однако, что это не так.

1.2. Теорема о сферических представлениях [Нессонов (1986)], [Ольшанский (1990)], [Pickrell (1990)]. Обозначим через $\mathrm{U}^p(\infty)$ подгруппу в $\mathrm{GL}^p(\infty, \mathbb{C})$, состоящую из унитарных матриц. Назовем неприводимое унитарное представление ρ группы $\mathrm{GL}^p(\infty, \mathbb{C})$ *сферическим*, если оно содержит ненулевой вектор v такой, что $\rho(g)v = v$ для всех $g \in \mathrm{U}^p(\infty) \subset \mathrm{GL}^p(\infty, \mathbb{C})$.

Теорема 1.1.

а) Пусть $1 < p \leqslant 2$. Тогда все группы $\mathrm{GL}^p(\infty, \mathbb{C})$ имеют один и тот же запас сферических представлений (т.е. любое сферическое представление $\mathrm{GL}^p(\infty, \mathbb{C})$ при $1 < p < 2$ продолжается до представления группы $\mathrm{GL}^2(\infty)$).

б) При $0 < q \leqslant 1$ все группы $\mathrm{GL}^q(\infty, \mathbb{C})$ имеют один и тот же запас сферических представлений. При этом любое сферическое представление группы $\mathrm{GL}^q(\infty, \mathbb{C})$ имеет вид

$$\tilde{\rho}(g) = |\det(g)|^\alpha\, e^{in \arg\det(g)} \rho(g); \quad \alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z},$$

где ρ — представление группы $\mathrm{GL}^2(\infty, \mathbb{C})$.

в) Пусть $p > 2$. Тогда группа $\mathrm{GL}^p(\infty, \mathbb{C})$ вообще не имеет непрерывных унитарных представлений.

Замечание. Последнее утверждение не должно вызывать особого удивления: унитарная группа не столь велика, чтобы в нее можно было вложить все что угодно.

1.3. Группа $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Эта группа состоит из ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, представимых в виде $A = U(1 + T)$, где U — унитарный оператор, а T — *оператор Гильберта—Шмидта* (т.е. $T \in \mathscr{L}_2$, подробнее см. Предварительные сведения, 4.5; о группе $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$ см. главу IX).

Теорема 1.2. Любое сферическое представление группы $\mathrm{GL}^2(\infty, \mathbb{C})$ продолжается до представления группы $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Замечание. Группа $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ является одним из примеров (G, K)-пар Ольшанского (см. главу IX).

Мне кажется (хотя я понимаю, что это мнение можно оспаривать), что (G, K)-пары являются правильным бесконечномерным аналогом классических групп. Теоремы пп. 1.1—1.2 дают один из аргументов в пользу (G, K)-пар.

Опишем естественную (*шейловскую*) топологию на $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$; эта топология типична для операторных групп (см. [Shale (1962)]). Любой ограниченный обратимый оператор A в гильбертовом пространстве представим в виде $A = U_A T_A$, где U_A — унитарный оператор, а T_A самосопряжен (см. Предварительные сведения, 4.2). Если $A \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, то $T_A - 1$ — оператор Гильберта—Шмидта. Последовательность операторов $A_n \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ сходится к оператору A, если $U_{A_n} \to U_A$ в слабой операторной топологии (см. ниже п. 4.1), а $T_{A_n} - 1$ сходится к $T_A - 1$ в смысле естественной сходимости на пространстве операторов Гильберта—Шмидта.

Мы продолжим это обсуждение в § 1 главы IX. В главах VIII—X без каких-либо пояснений я ввожу топологии на различных группах, и далее эти топологии очень существенно используются. Я ни в коей степени не настаиваю на том, что эти топологии являются единственно разумными, но отмечу, что они являются итогом длительной работы (проводившейся многими людьми), которую я лишь в слабой степени смог отразить в этой книге. Безусловно, в будущем точка зрения на эти топологии может измениться.

1.4. Равномерная структура. Я не знаю работ по бесконечномерным группам, в которых равномерная структура играла бы сколь-нибудь существенную роль. Мы, однако, скажем о ней несколько слов.

Пусть $\mathbb{G}$ — топологическая группа. Тогда с ней связаны 3 равномерных структуры — левая, правая и двусторонняя (см. [Bourbaki (1942)]):

а) левая: последовательность g_i фундаментальна, если $g_j^{-1}g_i$ стремится к 1 при $i, j \to \infty$;

б) правая: последовательность g_i фундаментальна, если $g_i g_j^{-1} \to 1$ при $i, j \to \infty$;

в) двусторонняя: g_i фундаментальна, если $g_i g_j^{-1} \to 1$, $g_j^{-1} g_i \to 1$ при $i, j \to \infty$.

В качестве типичного примера мы приведем полную унитарную группу $\mathrm{U}(\infty)$, снабженную слабой топологией. Эта группа полна в двусторонней равномерной структуре. Ее пополнение в правой равномерной структуре состоит из операторов U, удовлетворяющих условию $U^*U = 1$ (эти операторы изометрично отображают гильбертово пространство H на некоторое подпространство K, вообще говоря, отличное от H). Пополнение по левой равномерной структуре состоит из операторов, удовлетворяющих условию $UU^* = 1$.

Задача. Проверьте эти высказывания.

§ 2. *Алгебры Ли*

Здесь встречаются три ситуации.

2.1. Бывает, что алгебра Ли играет действительно важную роль, как в случае алгебры Вирасоро и афинных алгебр. Этот случай в особых комментариях не нуждается. Правда, я должен заметить, что теоремы, доказанные для алгебр Ли, очень часто с формальной точки зрения не влекут соответствующих теорем для групп. С содержательной точки зрения, конечно, алгебры Ли и группы Ли — разные ипостаси при одной сущности, но на сегодняшний день теоремы для групп Ли и алгебр Ли часто приходится доказывать параллельно.

2.2. Бывают случаи, когда алгебры Ли просто отсутствуют. Например, бесконечная симметрическая группа по своему поведению является типичной бесконечномерной («*большой*» в терминологии А. М. Вершика) группой (см. главу VIII), но никакой алгебры Ли у нее нет.

2.3. Наконец, бывают случаи, когда алгебра Ли существует, но в пиквикском смысле слова. Типичный пример — группа $\mathrm{U}(\infty)$ всех унитарных операторов гильбертова пространства. Сначала возникает желание назвать алгеброй Ли этой группы алгебру всех ограниченных кососамосопряженных операторов. Но хорошо известно, что это плохо, потому что однопараметрические подгруппы в $\mathrm{U}(\infty)$ редко имеют ограниченные генераторы.

По теореме Стоуна любая однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{U}(\infty)$ имеет вид $\exp(itX)$, где X — самосопряженный, вообще говоря, неограниченный, оператор. Мы предпочитаем думать, что «алгеброй Ли» этой группы является множество $\mathfrak{g}$ всех, вообще говоря, неограниченных, операторов вида iX, где X самосопряжен. Для некоторых элементов $X, Y \in \mathfrak{g}$ определена их сумма $X + Y$ (вообще говоря, сумма операторов из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ не лежит и может даже иметь нулевую область определения). Точно так же, для некоторых пар $X, Y \in \mathfrak{g}$ определен их коммутатор $[X, Y] = XY - YX$.

Мы предпочитаем думать, что «алгеброй Ли» является именно это множество с частично определенными операциями, а не какая-нибудь алгебра, подходящая под формальное определение алгебры Ли. Дело в том, что здесь мы сталкиваемся с некоторой действительной трудностью, и она не исчезнет оттого, что мы захотим ее замаскировать.

§ 3. *Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского*

3.1. Мультипликативность Тома. Одной из самых ранних работ по бесконечномерным группам была работа Э. Тома́ [Thoma (1964)], посвященная описанию характеров бесконечной симметрической группы $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$. Группа $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ состоит из всех финитных подстановок множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ (биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ содержится в $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$, если $\sigma n = n$ для достаточно больших n). Что такое характер $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$, в данный момент нас не очень интересует (см. п. VIII.6.6). Мы ограничимся обсуждением одного наблюдения, связанного с этой работой.

Пусть Γ — множество классов сопряженных элементов в $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$. Эти классы, как и в обычной симметрической группе S_n (см. любой учебник алгебры), нумеруются набором длин независимых циклов, т. е. набором натуральных чисел $(n_1, n_2, \dots, n_s, 1, 1, \dots)$ (пусть для определенности все $n_i \neq 1$). Мы обозначим через $R[n_1, \dots, n_s]$ множество всех элементов $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ с длинами независимых циклов $(n_1, \dots, n_s, 1, 1, \dots)$. Пусть

$$g_1 \in R[n_1, \dots, n_s], \quad g_2 \in R[m_1, \dots, m_t].$$

Какому классу сопряженности принадлежит $g_1 g_2$? Понятно, что при разных $g_1 \in R[n_1, \dots, n_s]$, $g_2 \in R[m_1, \dots, m_t]$ ответы будут разными. Однако по небольшом размышлении ясно, что почти наверняка

$$g_1 g_2 \in R[n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_t].$$

Действительно, почти наверняка множество A всех i таких, что $g_1 i \neq i$, и множество B всех j таких, что $g_2 j \neq j$, не пересекаются. Конечно, смысл слов «почти наверняка» не слишком ясен.

Задача. Обозначим через Q_{ij} множество элементов $g \in \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ таких, что $gi = j$ (где $i, j \in \mathbb{N}$). Мы скажем, что подмножество $\Delta \in \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ имеет *нулевую емкость*, если Δ покрывается *конечным* числом множеств Q_{ij}. Пусть $g_1 \in R[n_1, \dots, n_t]$, $g_2 \in R[m_1, \dots, m_s]$. Покажите, что множество всех $h \in \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$, для которых

$$h^{-1} g_1 h g_2 \notin R[n_1, \dots, n_t, m_1, \dots, m_s],$$

имеет нулевую емкость.

Задача* [Ольшанский (1980)]. Через $R[n_1, \dots, n_s]$ мы по-прежнему будем обозначать множество элементов в S_N с длинами циклов $R[n_1, \dots, n_s, 1, \dots, 1]$. Пусть A_N — число элементов S_N, лежащих в $R[n_1, \dots, n_s]$, а B_N — число элементов множества всех элементов S_N, лежащих в $R[m_1, \dots, m_t]$. Пусть C_N — число пар $(g_1, g_2) \in \mathrm{S}_N$ таких, что $g_1 \in R[n_1, \dots, n_s]$, $g_2 \in R[m_1, \dots, m_t]$, $g_1 g_2 \in R[n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_t]$. Покажите, что

$$\lim_{N \to \infty} \frac{C_N}{A_N B_N} = 1.$$

Итак мы получили естественное умножение на множестве классов сопряженных элементов:

$$R[n_1,\dots,n_s]\cdot R[m_1,\dots,m_t]=R[n_1,\dots,n_s,m_1,\dots,m_t].$$

3.2. Алгебра Гекке. Пусть G — группа, а K_1 и K_2 — ее подгруппы. Напомним, что *двойными классами смежности* называется подмножество в G, состоящее из всех элементов вида k_1gk_2, где $g\in\mathrm{G}$ фиксировано, элемент k_1 пробегает K_1, а k_2 пробегает K_2. Множество всех двойных классов смежности обозначается через $\mathrm{K}_1\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}_2$.

Пусть теперь группа G конечна, а $\mathrm{K}_1=\mathrm{K}_2=\mathrm{K}\subset\mathrm{G}$ — некоторая подгруппа. Рассмотрим в пространстве F функций на G операцию *свертки*

$$(f_1*f_2)(g)=\sum_{h\in G}f_1(h)f_2(h^{-1}g)$$

Алгебра F с определенным таким образом умножением называется *групповой алгеброй*. Для любого представления ρ группы G и для любой функции $f\in F$ определен оператор

$$\rho(f)=\sum_{g\in\mathrm{G}}f(g)\rho(g);$$

при этом, как легко видеть,

$$\rho(\alpha f)=\alpha\rho(f),\quad \rho(f_1+f_2)=\rho(f_1)+\rho(f_2),\quad \rho(f_1*f_2)=\rho(f_1)\rho(f_2),$$

где $\alpha\in\mathbb{C}$, т. е. $\rho(f)$ — представление алгебры F.

Обозначим через F_{K} множество функций f на G таких, что $f(k_1gk_2)=f(g)$ для любых $k_1,k_2\in\mathrm{K}$, т. е. F_{K} — множество функций, постоянных на двойных классах смежности $\mathrm{K}\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}$.

Задача. Покажите, что если $f_1,f_2\in F_{\mathrm{K}}$, то $f_1*f_2\in F_{\mathrm{K}}$.

Множество F_{K} с введенной таким образом операцией умножения мы будем называть *алгеброй Гекке.*

Пусть теперь ρ — унитарное представление группы G в пространстве H. Пусть H^{K} — множество K-инвариантных векторов в H, а P_{K} — проектор на H^{K}.

Задача. Покажите, что для любой $f\in F_{\mathrm{K}}$ и любого вектора $v\in H^{\mathrm{K}}$ выполнено $\rho(f)v\in H^{\mathrm{K}}$.

Таким образом, мы получаем естественное представление алгебры F_{K} в пространстве H^{K}.

Опишем это же представление чуть-чуть по-иному. Пусть $\gamma\in\mathrm{K}\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}$. Пусть $|\gamma|$ — число элементов в γ. Рассмотрим функцию $f_\gamma\in F_{\mathrm{K}}$, равную $|\gamma|^{-1}$ на γ и равную нулю вне γ. Ясно, что функции f_γ образуют базис в F_{K}, в этом базисе

$$f_{\gamma_1}*f_{\gamma_2}=\sum_{\gamma_3}c^{\gamma_3}_{\gamma_1\gamma_2}f_{\gamma_3},\tag{3.1}$$

где $c^{\gamma_3}_{\gamma_1\gamma_2}$ — некоторые числа.

Пусть ρ — представление группы G. По каждому $\gamma\in\mathrm{K}\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}$ мы определим оператор $\rho(\gamma)$ в H^{K} по формуле

$$\rho(\gamma)v:=P_{\mathrm{K}}\rho(g)v,\tag{3.2}$$

где $g\in\gamma$.

Задача. Проверьте, что правая часть (3.2) не зависит от выбора $g\in\gamma$.

Задача. Покажите, что $\rho(\gamma)$ совпадает с ограничением оператора $\rho(f_\gamma)$ на H^{K}.

Если умножение (3.1) удается явно описать, алгебра Гекке становится мощным средством для изучения представлений группы G. Предпринятая Исмагиловым попытка применения подобной техники к бесконечномерным группам привела к неожиданным последствиям.

3.3. Работа Исмагилова [Исмагилов (1970)] посвящена группе $\mathrm{GL}(n,F)$, где F — неархимедово нормированное поле, имеющее бесконечное поле вычетов (например, F может быть полем формальных лорановских рядов, т. е. рядов вида $\sum_{k=-N}^{\infty}a_kt^k$). Пусть K — подгруппа матриц с целыми коэффициентами в $\mathrm{GL}(n,F)$. При попытке описания алгебры Гекке F_{K} оказалось, что на множестве $\mathrm{K}\setminus\mathrm{GL}(n,F)/\mathrm{K}$ существует естественное умножение, чем-то похожее на умножение из п. 3.1.

Сама по себе группа $\mathrm{GL}(n,F)$ выглядит довольно странно, и после работ Исмагилова (1967–1970) ее представления в литературе (насколько я знаю) не обсуждались.

Тем не менее, у статьи нашелся один читатель, а именно — Ольшанский использовал ее в работе [Ольшанский (1980)], посвященной группе $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ автоморфизмов дерева, у которого из каждой вершины выходит счетное число ребер. Сама по себе эта группа выглядит чудовищным порождением человеческого разума и тоже более в теории представлений не обсуждалась, однако шлейф этой группы является вполне безобидной категорией, ничем не напоминающей своей ужасной прародительницы (см. VIII.6.8; об этой группе см. также [Aldous (1985)]), а упомянутые работы Исмагилова и Ольшанского по сути посвящены «раскопкам» этого шлейфа.

Около 1979 г. Ольшанский применил развитую при исследовании $\mathrm{GL}_n(F)$ и $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ технику к более естественным группам. Сейчас мы приведем пример использования этой техники (мы следуем [Olshanskii (1985)] с небольшими эстетическими усовершенствованиями из [Neretin (1991)]), подробное изложение см. в главе VIII.

3.4. Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского для бесконечной симметрической группы (подробнее см. VIII.1). Обозначим через S_∞ группу всех перестановок множества $\mathbb{N}$. Через S^n_∞ мы обозначим подгруппу в S_∞, состоящую из всех $g\in\mathrm{S}_\infty$ таких, что $gi=i$ для всех $i\leqslant n$. Введем в S_∞ топологию, положив, что подгруппы S^n_∞ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы.

Рассмотрим двойные классы смежности $\mathrm{S}^n_\infty\setminus\mathrm{S}_\infty/\mathrm{S}^m_\infty$.

Задача. Докажите, что $g_1,g_2\in\mathrm{S}_\infty$ лежат в одном классе смежности $\mathrm{S}^n_\infty\setminus\mathrm{S}_\infty/\mathrm{S}^m_\infty$ тогда и только тогда, когда условие

$$g_1i=j\quad\text{при } j\leqslant n,\ i\leqslant m$$

равносильно условию

$$g_2i=j\quad\text{при } j\leqslant n,\ i\leqslant m.$$

В силу этой задачи двойные классы смежности $\gamma\in\mathrm{S}^n_\infty\setminus\mathrm{S}_\infty/\mathrm{S}^m_\infty$ нумеруются частично определенными инъективными отображениями φ_γ множества $1,2,\dots,m$ в $1,2,\dots,n$.

Пусть $\gamma_1 \in S^n_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty$, $\gamma_2 \in S^k_\infty \setminus S_\infty / S^n_\infty$. Мы утверждаем, что если $g_1 \in \gamma_1$, а $g_2 \in \gamma_2$, то произведение $g_2 g_1$ «почти наверняка» попадает в один и тот же двойной класс смежности $S^k_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty$. Этот двойной класс смежности мы будем называть произведением γ_2 и γ_1.

Задача. Сформулируйте и докажите аналоги утверждений, сформулированных в задачах п. 3.i.

Итак, мы получили для любых m, n, k естественное умножение

$$S^k_\infty \setminus S_\infty / S^n_\infty \times S^n_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty \to S^k_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty.$$

На языке частично определенных отображений это — естественное умножение частично определенных отображений (т.е. $\varphi_{\gamma_2\gamma_1} i = j$ тогда и только тогда, когда существует $l \in 1, \dots, n$ такое, что $\varphi_{\gamma_1} i = l$, $\varphi_{\gamma_2} l = j$).

Пусть теперь ρ — непрерывное унитарное представление группы S_∞ в гильбертовом пространстве H. Обозначим через H_n пространство векторов, инвариантных относительно S^n_∞, а через P_n — проектор на H_n.

Теорема 3.1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ плотно в H.

Далее, для любого $\gamma \in S^n_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty$ определим оператор $\rho(\gamma) : H_m \to H_n$ по формуле

$$\rho(\gamma)v = P_n \rho(g) v,$$

где $v \in H_m$, а $g \in \gamma$.

Замечание. См. формулу (3.2).

Теорема 3.2. Пусть $\gamma_1 \in S^n_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty$, $\gamma_2 \in S^k_\infty \setminus S_\infty / S^n_\infty$. Тогда

$$\rho(\gamma_2 \gamma_1) = \rho(\gamma_2)\rho(\gamma_1).$$

Теперь определим категорию **PB**, объектами которой являются конечные множества $1, 2, \dots, n$, а морфизмами — частично определенные инъективные отображения. Только что мы изложили конструкцию, которая каждому унитарному представлению группы S_∞ ставит в соответствие представление категории **PB**.

Оказывается, что подобные конструкции применимы к очень многим бесконечномерным группам (но есть и много исключений: группа диффеоморфизмов окружности, группы, связанные с аффинными алгебрами и др.), см. главы VIII–X книги.

3.5. Еще об умножении двойных классов смежности. Группу S_∞ можно рассматривать как группу матриц размера $\infty \times \infty$, состоящих из нулей и единиц, причем в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна единица. Ее подгруппа S^n_∞ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} E_n & \\ & g \end{pmatrix}$, где g — матрица размера $n \times n$, состоящая из нулей и единиц, а E_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Пусть $\gamma_1 \in S^n_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty$, $\gamma_2 \in S^k_\infty \setminus S_\infty / S^n_\infty$. Пусть $g_1 \in \gamma_1$, а $g_2 \in \gamma_2$. Выберем элемент $h \in S^n_\infty$ «общего положения» и посмотрим, в каком двойном классе смежности лежит произведение $g_2 h g_1$. Для этого сначала необходимо понять, что такое элемент «общего положения».

Пусть

$$h = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & q_{11} & q_{12} & \dots \\ & & & q_{21} & q_{22} & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \infty \end{matrix}$$

Среди элементов $q_{11}, q_{12}, q_{13}, \dots$ есть ровно одна единица, а все остальные элементы равны 0. Совершенно невероятно, чтобы единственная единица стояла на первом месте. Поэтому можно «с уверенностью» сказать, что $q_{11} = 0$ для «общей» матрицы $h \in S^n_\infty$. Конечно, по тем же причинам и все $q_{ij} = 0$. Поэтому «общий» элемент $h \in S^n_\infty$ равен $h = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$. Конечно же, такого элемента h в группе S^n_∞ нет. Рассмотрим, однако, произвольную последовательность $h_j \in S^n_\infty$ вида

$$h_j = \begin{pmatrix} E_n & & \\ & 0 & * \\ & * & * \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}j \\ \}\infty \end{matrix} \tag{3.3}$$

Эта последовательность в каком-то смысле слова сходится к $h = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

Задача. Рассмотрим двойной класс смежности $\delta_j \in S^k_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty$, содержащий $g_2 h_j g_1$. Покажите, что последовательность δ_j с некоторого места стабилизируется, т.е., начиная с некоторого места, δ_j равно одному и тому же элементу γ_3.

Построенный в задаче элемент γ_3 разумно объявить произведением $\gamma_3 = \gamma_2\gamma_1$. Конечно же, оно совпадает с произведением, построенным ранее.

Замечание. Безусловно, это рассуждение является повторением рассуждения с «емкостью», только на другом языке. Однако, в отличие от малосодержательного понятия «емкости», последнее рассуждение, как мы увидим в главах VIII–X, является весьма общим.

§ 4. *Предельные элементы групп*

С предельными элементами групп мы успели встретиться в главе I уже трижды (где?), но прежде, чем перейти к их непосредственному обсуждению, мы обсудим слабую операторную топологию.

4.1. Слабая сходимость. Последовательность ограниченных операторов A_n в гильбертовом пространстве H называется *слабо сходящейся* к оператору A, если для любых векторов $v, w \in H$ выполнено

$$\langle A_n v, w\rangle \to \langle Av, w\rangle.$$

Следующие утверждения очень просты.

Лемма 4.1.

а) Если $A_n \to A$ слабо, то $\|A\| \leqslant \liminf \|A_n\|$.

б) Если $A_n \to A$ слабо, то $A_n^* \to A_n$ слабо.

в) Если $A_n \to A$ слабо, B — ограниченный оператор, то $A_n B \to AB$, $BA_n \to BA$ слабо.

(Утверждение а) следует из принципа равномерной ограниченности, остальное очевидно.)

Критерий слабой сходимости (см. [Reed, Simon (1972)] § VI.1). Пусть L — тотальное множество в H (т. е. конечные линейные комбинации элементов из L плотны в H). Тогда следующие условия равносильны:

а) $A_n \to A$ слабо;

б) числа $\|A_n\|$ равномерно ограничены, и для любых $v, w \in L$ выполнено $\langle A_n v, w\rangle \to \langle Av, w\rangle$.

Применяя этот критерий к пространству ℓ_2 и к множеству L, состоящему из базисных векторов, мы получаем

Следствие 4.2. Пусть A_n — последовательность ограниченных операторов в ℓ_2 (т. е. последовательность матриц). Тогда следующие условия равносильны:

а) $A_n \to A$ слабо;

б) $\|A_n\|$ равномерно ограничены, и для любых i, j выполнено $a_{ij}^{(n)} \to a_{ij}$ (где через $a_{ij}^{(n)}$, a_{ij} обозначены матричные элементы матриц A_n и A соответственно).

Задача. Покажите, что если $A_n \to A$, $B_n \to B$ слабо, то не обязательно $A_nB_n \to AB$ слабо.

Пусть $\mathscr{B}$ — множество операторов в H с нормой $\leqslant 1$.

Теорема 4.3. Множество $\mathscr{B}$ компактно относительно слабой сходимости.

Доказательство достаточно провести в пространстве ℓ_2. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность в $\mathscr{B}$, пусть $a_{ij}^{(n)}$ — матричные элементы A_n. Так как $\|A_n\| \leqslant 1$, мы имеем $|a_{ij}^{(n)}| \leqslant 1$. Стандартное диагональное рассуждение (см. [Reed, Simon (1972)], § I.5) показывает, что существует подпоследовательность A_{n_k} такая, что для любых i, j последовательность $a_{ij}^{(n_k)}$ сходится при $k \to \infty$. В силу критерия слабой сходимости последовательность A_{n_k} сходится слабо. ■

Задача. Покажите, что слабая сходимость в $\mathscr{B}$ метризуема.

Поэтому мы будем всегда говорить лишь о «сходящихся последовательностях» и никогда — о «сходящихся направленностях».

Задача. Покажите, что в ℓ_2 сфера $\|x\| = 1$ плотна в шаре $\|x\| \leqslant 1$ относительно слабой сходимости в гильбертовом пространстве (последовательность x_n *сходится слабо*, если для любого $y \in \ell_2$ последовательность $\langle x_n, y\rangle$ сходится к $\langle x, y\rangle$).

Теорема 4.4. Унитарная группа слабо плотна в $\mathscr{B}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{B}$. Пусть a_{ij} — ее матричные элементы. Пусть сначала $a_{ij} = 0$ при всех $i > n$ и при всех $j > n$, т. е. $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где X имеет размеры $n \times n$. Пусть J_k — матрица размера $k \times k$ с единицами по побочной диагонали, а остальные ее матричные элементы — нули. Рассмотрим последовательность блочных унитарных матриц

$$U_k = \begin{pmatrix} X & 0 & -(1 - XX^*)^{1/2} & 0 \\ 0 & J_k & 0 & 0 \\ (1 - X^*X)^{1/2} & 0 & X^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

размера $(n+k+n+\infty) \times (n+k+n+\infty)$. По критерию слабой сходимости $U_k \to A$ слабо.

Далее, пусть $A \in \mathscr{B}$ произвольна, пусть A_n — матрица с матричными элементами $a_{ij}^{(n)}$ такими, что $a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$ при $i \leqslant n$, $j \leqslant n$, и $a_{ij}^{(n)} = 0$ в противном случае. Тогда $A_n \to A$ слабо (см. следствие 4.2). ■

4.2. Пусть G — «большая» (бесконечномерная) группа, и мы построили некоторое унитарное представление ρ группы G. После этого мы должны задать себе вопрос: «Представление какой группы мы построили?» Мы уже столкнулись с этим в п. 1.3, когда узнали, что сферические представления групп $\mathrm{GL}^2(\infty, \mathbb{C})$ и $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ — это одно и то же.

Первый раз подобный вопрос, а именно, вопрос о естественной области определения «представления Вейля» и спинорного представления, возник довольно давно (точнее — в 50-е годы, см. книгу [Friedrichs (1953)]). Хотелось бы уметь формулировать его четко. Следующая формализация этого вопроса не идеальна, но разумна: «Описать слабое замыкание множества $\rho(\mathrm{G})$ в полной унитарной группе».

Это слабое замыкание вкладывается в объект, описанный в следующем пункте.

4.3. Пусть G — большая группа, а $\overline{\mathrm{G}}$ — ее пополнение по правой равномерной структуре (подчеркнем, что $\overline{\mathrm{G}}$, вообще говоря, является полугруппой, а не группой). Пусть ρ — унитарное представление G в пространстве H, $\mathrm{U}(H)$ — унитарная группа пространства H, а $\overline{\mathrm{U}}(H)$ — ее пополнение по правой равномерной структуре (см. п. 1.4). Представление $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{U}(H)$ является равномерно непрерывной функцией, а поэтому продолжается до гомоморфизма $\overline{\rho} : \overline{\mathrm{G}} \to \overline{\mathrm{U}}(H)$.

На самом деле полугруппа $\overline{\mathrm{G}}$ является ничтожной частью настоящей мантии (полугрупповой оболочки) группы G.

4.4. Двойные классы смежности как бесконечно удаленные элементы группы. Вернемся к обозначениям п. 3.4. Безусловно, рассуждения п. 3.5 вызывают желание добавить к группе S_∞ элементы $h_n = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$. При этом естественно думать, что последовательность (3.3) сходится к h_n, т. е. h_n является «предельным элементом» группы S_∞. Вместе с элементами h_n придется добавить к S_∞ и произведения $h_n g h_m$, т. е. возможные матрицы из нулей и единиц вида

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} q & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}n \\ \}\infty \end{array} \\ \;\;\underbrace{}_{m}\;\;\underbrace{}_{\infty} \end{array}$$

а множество таких матриц находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\mathrm{S}_\infty^n \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}_\infty^m$.

Итак, вроде бы получается, что двойные классы смежности $\gamma \in \mathrm{S}_\infty^n \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}_\infty^m$ являются «предельными элементами» группы S_∞.

В связи с этим встает вопрос: что такое вообще «предельные элементы» групп и как их искать?

4.5. Вопрос Ольшанского о слабом замыкании. Пусть G — группа, а ρ — ее неприводимое унитарное представление. Требуется описать слабое замыкание $\Gamma(G,\rho)$ множества $\rho(G)$ в множестве всех операторов.

Пусть $\mathscr{B}$ — по-прежнему полугруппа всех операторов с нормой $\leqslant 1$.

Лемма 4.5. $\Gamma(G,\rho)$ — замкнутая компактная подполугруппа в $\mathscr{B}$.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь то, что $\Gamma(G,\rho)$ — полугруппа. Пусть $\rho(g_i) \to A$, $\rho(h_i) \to B$ слабо. Не следует думать, что $\rho(g_i h_i) \to AB$, здесь нужно более аккуратное рассуждение. При фиксированном i мы имеем $\rho(h_i)\rho(h_j) \to \rho(h_i)B$ слабо. Значит, $\rho(h_i)B \in \Gamma(G,\rho)$. Но $\rho(h_i)B \to AB$ слабо. Значит, $AB \in \Gamma(G,\rho)$. ∎

Итак, $\Gamma(G,\rho)$ — некоторая компактификация группы G. Обсудим сначала случай, когда G — группа Ли.

Теорема 4.6 ([Howe, Moore (1979)], [Ruppert (1984)]).

а) Пусть G — полупростая группа Ли с конечным центром. Тогда множество $\Gamma(G,\rho) \setminus \rho(G)$ состоит из нулевого оператора (т. е. $\Gamma(G,\rho)$ — одноточечная компактификация группы G).

б) Пусть G — полупростая группа Ли с бесконечным центром A, пусть ρ — ее точное представление (т. е. $\rho(g) \neq \rho(h)$ при $g \neq h$). Тогда $\Gamma(G,\rho)$ состоит из нуля и всех операторов вида $\lambda\rho(g)$, где $g \in G$, а λ — комплексное число, по модулю равное 1.

Итак, мы видим, что в случае конечномерных групп ничего интересного не происходит, полугруппа $\Gamma(G,\rho)$ почти не отличается от G. Но ясно, что «большую» (бесконечномерную) группу так просто не компактифицируешь!

Вообще, компактификация топологического пространства — операция опасная, здесь легко наткнуться на объекты совершенно необозримые. Однако оказывается, что полугруппы $\Gamma(G,\rho)$ никогда не являются патологическими объектами. Сейчас мы не можем привести действительно красивых примеров, но можем показать, что от полугруппы $\Gamma(G,\rho)$ можно ожидать любых неожиданностей.

Пример. Пусть $G = \mathrm{Diff}$ — группа диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Пусть Diff действует в L^2 на окружности по формуле

$$\rho(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))q'(\varphi)^{1/2} \tag{4.1}$$

Тогда полугруппа $\Gamma(G,\rho)$ содержит все операторы вида

$$Xf(\varphi) = A(\varphi)f(\varphi), \tag{4.2}$$

где $A(\varphi)$ — измеримая функция на окружности, такая, что $0 \leqslant A(\varphi) \leqslant 1$.

Задача. Пусть q_j, q такие же, как на рис. 1. Покажите, что $\rho(q_j) \to \rho(q)$, где ρ задано формулой (4.1).

Задача. Пусть q_j — такие же, как на рис. 2, а угол α не зависит от j. Куда сходится $\rho(q_j)$?

Задача. Покажите, что операторы (4.2) действительно содержатся в $\Gamma(\mathrm{Diff},\rho)$.

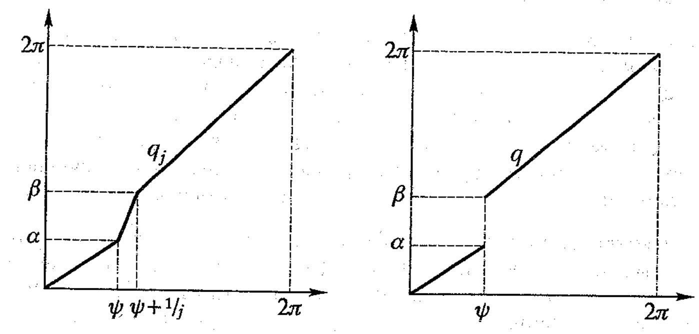


Рис. 1

Задача*. Опишите $\Gamma(\mathrm{Diff},\rho)$.

Задача. Пусть H — группа, а π — унитарное представление группы H в пространстве V. Пусть $\widetilde{H}$ — группа измеримых функций на [0, 1] со значениями в H. Пусть $\widetilde{H}$ действует в $L^2([0,1],V)$ по формуле

$$\tilde{\pi}(A)f(x) = \pi(A(x))f(x). \tag{4.3}$$

а) Пусть $\mathbb{Z}_2$ — группа из двух элементов, а π — ее точное одномерное представление. Опишите $\Gamma(\widetilde{\mathbb{Z}}_2,\tilde{\pi})$.

б) Пусть $\mathbb{Z}_3$ — группа из трех элементов, а π — ее точное одномерное представление. Опишите $\Gamma(\widetilde{\mathbb{Z}}_3,\tilde{\pi})$.

в) Опишите $\Gamma(\widetilde{G},\tilde{\pi})$ в общем случае.

Указание. В вопросе а) полугруппа $\Gamma(\mathbb{Z}_2,\pi)$ состоит из всех вещественнозначных функций по модулю $\leqslant 1$.

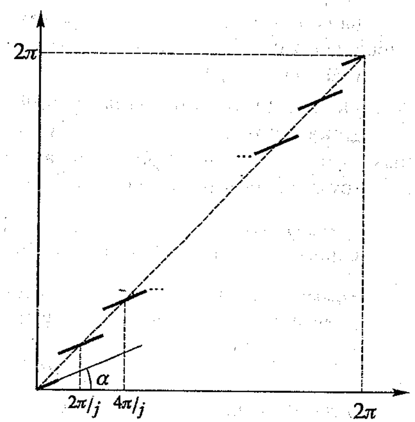


Рис. 2

4.6. Как связаны полугруппы $\Gamma(G,\rho)$ при разных ρ? Здесь возможен хороший случай и сложный случай. Начнем с хорошего.

Пусть $G = S_\infty$. Ее простейшее представление π реализуется в ℓ_2, группа S_∞ действует перестановками базисных элементов. Иными словами, S_∞ реализуется как группа бесконечных матриц, состоящих из 0 и 1, причем в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна единица. Полугруппа $\Gamma = \Gamma(S_\infty,\pi)$ — это полугруппа матриц, состоящих из 0 и 1, у которых в каждой строке и каждом столбце стоит не более одной единицы.

Теорема 4.7 (см. теорему VIII.1.4). Любое унитарное представление ρ группы S_∞ продолжается до представления $\tilde{\rho}$ полугруппы Γ, причем $\Gamma(S_\infty,\rho) = \tilde{\rho}(\Gamma)$.

Пусть $G = U(\infty)$ — полная унитарная группа, снабженная слабой топологией, а $\mathscr{B}$ — полугруппа всех сжатий (т. е. операторов с нормой 1).

Теорема 4.8 (см. § VIII.3). Любое унитарное представление ρ группы $U(\infty)$ продолжается до представления $\tilde{\rho}$ полугруппы $\mathscr{B}$, причем $\Gamma(U(\infty),\rho) = \rho(\mathscr{B})$.

Так бывает часто, но так бывает не всегда. Бывает, что полугруппы $\Gamma(G,\rho)$ для разных ρ различны. Мы склонны верить, что эти полугруппы связаны между собой примерно следующим образом. Существует некоторая полугруппа Γ такая, что G плотна в Γ, любое представление ρ группы G продолжается до представления $\bar\rho$ полугруппы Γ, и множество $\bar\rho(\Gamma)$ «чуть-чуть меньше», чем $\Gamma(G,\rho)$.

Здесь возникает соблазн применить универсализацию из следующего пункта, эта идея разумна, но буквальное следование ей иногда опасно.

4.7. Попытка универсализации (см. [Olshanskii (1991)]). Пусть ρ_α — некоторый набор унитарных представлений группы G (α пробегает некоторое множество A, например, множество $\widehat{G}$ всех унитарных представлений группы G). Пусть H_α — пространство представления ρ_α, а $\mathscr{B}(H_\alpha)$ — полугруппа сжатий в H_α. Пусть $\mathscr{B}_A$ — произведение полугрупп $\mathscr{B}(H_\alpha)$; ясно, что $\mathscr{B}_A$ — компактная полугруппа. Рассмотрим естественное «диагональное» отображение $R: G\to\mathscr{B}_A$ (группа G вкладывается посредством отображения ρ в каждую из полугрупп $\mathscr{B}(H_\alpha)$, а значит, определено и отображение G в их произведение).

Обозначим через $\Gamma(G,A)$ замыкание G в $\mathscr{B}_A$; легко видеть, что $\Gamma(G,A)$ — компактная полугруппа. Полугруппу $\Gamma(G,\widehat{G})$ мы обозначим через $\Gamma(G)$.

Доказательство компактности континуального прямого произведения компактных топологических пространств основано на аксиоме выбора, поэтому наша конструкция иногда приводит к нежелательным последствиям.

Пример. Пусть G — локально компактная абелева группа. Тогда $\Gamma(G)$ — это в точности боровская компактификация G [Dixmier (1969), § 16].

Пример. Пусть G — простая группа Ли с бесконечным центром Z (например, G — универсальная накрывающая группы $SL(2,\mathbb{R})$). Рассмотрим диагональное вложение $Z\to G\times\Gamma(Z)$ (т. е. $z\mapsto z\times z$). Тогда $\Gamma(G)$ состоит из нуля и факторгруппы $(G\times\Gamma(Z))\,/\,Z$ (см. [Howe, Moore (1979)]).

Задача*. Опишите полугруппу $\Gamma(Z)$ в случае, когда G — группа Гейзенберга (ответ содержится в [Ruppert (1984)]).

В перечисленных примерах рассматривать в качестве основного объекта полугруппу $\Gamma(G)$ вместо G, мягко говоря, неразумно. Бесконечномерный пример, приводящий к патологии, приведен в следующей задаче.

Задача*. Постройте универсальную полугруппу для представлений $\tilde\pi$ группы $\tilde{\mathbb{R}}$ (см. (4.3)), где π — пробегает все одномерные унитарные представления аддитивной группы $\mathbb{R}$.

§ 5. *Голоморфные продолжения*

В сущности, эта глава посвящена предмету довольно скучному — как, зная операторнозначную функцию ρ, найти ее истинную область определения. Один подобный способ, по крайней мере, для числовых функций, хорошо известен — голоморфное продолжение.

5.1. Пусть G — вещественная группа Ли, $G_{\mathbb{C}}$ — ее комплексная оболочка (см., например, [Желобенко (1970)]), а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Пусть ρ — унитарное представление G. Как любая уважающая себя функция, операторнозначная функция ρ является аналитической, и, естественно, встает вопрос о продолжении ρ в

комплексную область. Если ρ — конечномерно, то, как хорошо известно, ρ продолжается до голоморфной функции на группе $G_{\mathbb{C}}$. На этом основан знаменитый унитарный трюк Германа Вейля (см., например, [Желобенко (1970)] или ниже § III.1).

В случае, когда ρ бесконечномерно, положение резко меняется. Элементы из малой окрестности единицы группы G записываются в виде $g=\exp(tX)$, где $X\in\mathfrak{g}$, а $t\in\mathbb{R}$. Элементы из малой окрестности единицы группы $G_{\mathbb{C}}$ записываются в виде $g=\exp(tX)\exp(isY)$, где $X,Y\in\mathfrak{g}$, а $t,s\in\mathbb{R}$. Голоморфное продолжение представления ρ должно записываться в виде

$$\begin{aligned}\rho(g)&=\rho(\exp(tX)\exp(isY))=\\&=\rho(\exp(tX))\rho(\exp(isY))=\\&=\exp(t\rho(X))\exp(is\rho(Y)),\end{aligned}\tag{5.1}$$

представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы обозначаем той же буквой ρ, что и соответствующее представление группы Ли. Операторы $i\rho(X)$ и $i\rho(Y)$ самосопряжены и, вообще говоря, не ограничены. Поэтому первый сомножитель — $\exp(-it(i\rho(X)))$ — это обычный унитарный оператор. Но что такое экспонента от неограниченного самосопряженного оператора $is\rho(Y)$ и произведение (5.1), совершенно непонятно.

Здесь возможны 3 случая, которые мы обсудим на примерах. Первый из них наиболее типичен.

5.2. Первый случай. Пусть группа $SL(2,\mathbb{R})$ реализована как группа матриц вида $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\bar\beta&\bar\alpha\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, причем $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$. Пусть эта группа действует в L^2 на окружности $|z|=1$ (где $z\in\mathbb{C}$) унитарными преобразованиями

$$\rho\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\bar\beta&\bar\alpha\end{pmatrix}f(z)=f\Big(\frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\Big)\,\big|\bar\beta z+\bar\alpha\big|^{-1}\tag{5.2}$$

Группа $SL(2,\mathbb{C})$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, где $ad-bc=1$. Формальное аналитическое продолжение формулы (5.2) дает выражение

$$\rho\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}f(z)=f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)(cz+d)^{-1/2}\,(b\bar z+a)^{-1/2}\tag{5.3}$$

Формула производит впечатление совершенно бессмысленной, потому что функция f определена лишь на окружности $|z|=1$, а точка $\frac{az+b}{cz+d}$ на окружности не лежит. Следующий пример, однако, покажет, что в подобных оценках следует быть более осторожным. Формуле же (5.3) можно придать смысл, если матрица $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ лежит в малой окрестности группы $SL(2,\mathbb{R})$. Тогда формула (5.3) задает неограниченный оператор в L^2, область определения которого содержит функции f, голоморфно продолжимые в кольцо $(1+\varepsilon)^{-1}<|z|<1+\varepsilon$. Ничего большего здесь сделать нельзя.

5.3. Второй случай. Рассмотрим группу Гейзенберга, т. е. группу матриц вида

$$A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&a&c\\&1&b\\&&1\end{pmatrix}$$

Эта группа действует в $L^2(\mathbb{R})$ по формуле

$$T(A(a,b,c))f(x) = f(x+a)e^{i(bx+c)} \tag{5.4}$$

Пусть H — пространство целых функций (т. е. функций, голоморфных на $\mathbb{C}$), имеющих не более чем экспоненциальный рост. Ясно, что формула (5.4) задает корректно определенный оператор в H при любых $a, b, c \in \mathbb{C}$.

В чем же все-таки разница между первым и вторым примером? Напомним, что вектор v называется *аналитическим* ([Nelson (1959)]; [Кириллов (1972)], § 10) для унитарного представления группы Ли ρ, если для любого X из алгебры Ли существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\exp(tX)v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(X^k v) \tag{5.5}$$

при $|t| < \varepsilon$. (В обоих примерах, рассмотренных выше, аналитические векторы в L^2 — это вещественно-аналитические функции.) По известной теореме Нельсона для любого неприводимого унитарного представления группы Ли множество аналитических векторов всюду плотно. Определим *целый вектор* v [Goodman (1969)] как вектор, для которого ряд (5.5) сходится при всех $t \in \mathbb{C}$. Во втором примере пространство H целых векторов плотно в $L^2(\mathbb{R})$, и в нем-то и действует группа $G_{\mathbb{C}}$. В первом же примере целые векторы отсутствуют.

Пример с группой Гейзенберга обобщается на любые нильпотентные группы Ли ([Литвинов (1968), (1972)]; [Goodman (1969)]). Нам нечто подобное встретится (неявно) в главе IV, когда мы будем работать со спинорным представлением бесконечномерной комплексной ортогональной группы.

5.4. Третий случай (см. [Граев (1958)]), самый редкий и самый интересный для нас. Пусть H_n — пространство голоморфных функций, в круге $|z| < 1$ со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_{|z|<1} f(z)\overline{g(z)}\left(1-|z|^2\right)^{n-2} dz\, d\bar{z},$$

где $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ действует в H_n по формуле

$$T_n\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} f(z) = f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}\right)\left(\bar{\beta}z+\bar{\alpha}\right)^{-n} \tag{5.6}$$

Группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ действует на сфере Римана (т. е. на пополненной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$) дробно-линейными преобразованиями $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Ее подгруппа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из преобразований, взаимно однозначно отображающих круг $D : |z| < 1$ на себя. Пусть $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ — подполугруппа, состоящая из преобразований, отображающих круг D в себя. Легко видеть, что представления T_n группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ продолжаются до голоморфных представлений полугруппы Γ (а именно, продолжение по-прежнему задается той же формулой (5.6)):

$$T_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-n}.$$

Задача. Докажите, что операторы $T_n(g)$, где $g \in \Gamma$, ограничены.

Задача. Почему доводы против ограниченности из п. 5.1 здесь не действуют?

Указание. Генератор R группы вращений окружности в представлении T_n действует по формуле $i\left(z\frac{\partial}{\partial z} + n\right)$. Какой у него спектр? При каких $s \in \mathbb{C}$ оператор $\exp(sR)$ ограничен?

5.5. Еще раз предельные элементы. На последнем примере можно заметить еще одно явление природы. Пусть $\overline{\Gamma}$ — полугруппа отображений круга D в себя, состоящая из полугруппы Γ и отображений, переводящих весь круг D в точку. Представления T_n полугруппы Γ продолжаются до непрерывных *проективных* представлений полугруппы $\overline{\Gamma}$. А именно, пусть q_u отображает D в точку $u \in D$. Тогда

$$T_n(q_u)f(z) = f(u).$$

Это явление, столь ничтожное в случае $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, оказывается, однако, нетривиальным в бóльших размерностях (кстати, как описать q_u в терминах матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?).

Глава II

Спинорное представление

В главе разбирается одна из основных конструкций книги — спинорное представление ортогональной категории. В полной общности спинорное представление изучается в главе IV, здесь же рассматривается лишь его «конечномерная часть».

§ 1. Анализ по внешней алгебре

1.1. Грассманова алгебра. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — набор формальных антикоммутирующих переменных, т. е. переменных, удовлетворяющих соотношениям

$$\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$$

для всех i, j. В частности, при $i = j$ мы получаем $\xi_i^2 = 0$. *Грассманова алгебра* Λ_n — это алгебра формальных ассоциативных многочленов с комплексными коэффициентами от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Элементы $f(\xi) := f(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Lambda_n$ мы будем называть *функциями*, зависящими от антикоммутирующих переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Легко видеть, что одночлены вида $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, образуют в Λ_n базис. В частности, размерность алгебры Λ_n равна 2^n.

Через Λ_n^k мы обозначим пространство многочленов в Λ_n степени k. Его размерность равна $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. В частности, $\dim \Lambda_n^0 = \dim \Lambda_n^n = 1$. Пространство Λ_n^0 состоит из констант (из одночленов степени 0). Одночлен $f(\xi) = 1$ мы будем называть *вакуумным вектором*. Пространство Λ_n^n состоит из одночленов вида $c\xi_1\xi_2 \dots \xi_n$, где $c \in \mathbb{C}$.

Если $f \in \Lambda_n^\alpha$, $g \in \Lambda_n^\beta$, то, как легко видеть,

$$fg = (-1)^{\alpha\beta} gf.$$

Задача. Покажите, что для любого $f \in \Lambda$ выполнено $\xi_j f(\xi) = f(-\xi)\xi_j$.

Элементы f подпространства $\bigoplus_j \Lambda_n^{2j}$ мы будем называть *четными функциями* ($f(\xi) = f(-\xi)$), а элементы из $\bigoplus_j \Lambda_n^{2j+1}$ — *нечетными функциями* ($f(\xi) = -f(-\xi)$).

Задача. Пусть функция f четна. Тогда для любой функции g выполнено равенство $fg = gf$.

Пусть функция f нечетна. Тогда для любой функции g выполнено равенство $f(\xi)g(\xi) = g(-\xi)f(\xi)$.

Пример. Пусть ξ_j, η_j — антикоммутирующие переменные. Тогда

$$\begin{aligned}\xi_1 \dots \xi_n\eta_n \dots \eta_1 &= \xi_1 \dots \xi_{n-1}(\xi_n\eta_n)\eta_{n-1} \dots \eta_1 = \\ &= \xi_1 \dots \xi_{n-1}\eta_{n-1} \dots \eta_1(\xi_n\eta_n) = \\ &= (\xi_1\eta_1) \dots (\xi_n\eta_n);\end{aligned} \tag{1.1}$$

порядок сомножителей в последнем произведении не существенен.

1.2. Экспонента. Для любой *четной* функции f мы определим функцию $\exp(f)$ при помощи обычной формулы:

$$\exp(f) = 1 + f + \frac{f^2}{2!} + \frac{f^3}{3!} + \dots$$

Задача. Докажите, что

$$\exp(f + g) = \exp(f)\exp(g).$$

В частности, если f — одночлен степени > 0, то $f^2 = 0$, а значит,

$$\exp(f) = 1 + f.$$

Если $f = \sum g_i$, где g_i — попарно различные одночлены положительной четной степени, то

$$\exp(f) = \exp\left(\sum g_i\right) = \prod(1 + g_i). \tag{1.2}$$

1.3. Замены переменной. Пусть Λ_n — грассманова алгебра функций, зависящих от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, а Λ_m — грассманова алгебра функций, зависящих от переменных $\eta_1, \dots, \eta_m$. Пусть A — матрица размера $m \times n$. Определим оператор линейной замены переменной $\Lambda_m \to \Lambda_n$, переводящий функцию $f(\eta)$ в

$$f(A\xi) = f(a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n, \dots, a_{m1}\xi_1 + \dots + a_{mn}\xi_n). \tag{1.3}$$

Задача. Докажите, что любой элемент из Λ_n^2 с помощью линейной замены переменной приводится к виду $\xi_1\xi_2 + \dots + \xi_{2k-1}\xi_{2k}$.

Задача. Докажите, что любой ненулевой элемент $f \in \Lambda_n^{n-1}$ приводится с помощью линейной замены переменной к виду $\xi_1\xi_2 \dots \xi_{n-1}$.

1.4. Функториальное определение. Пусть H — комплексное n-мерное линейное пространство. Тогда *внешняя алгебра* $\Lambda(H)$ — это ассоциативная алгебра с образующими a_h, где $h \in H$, и соотношениями

$$a_{\alpha h + \beta h'} = \alpha a_h + \beta a_{h'}, \qquad a_h \wedge a_{h'} = -a_{h'} \wedge a_h,$$

где $h, h' \in H$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; умножение во внешней алгебре принято обозначать знаком $\wedge$. Очевидно, такой набор образующих является избыточным, и алгебра $\Lambda(H)$ порождена образующими a_{e_j}, где e_j — некоторый базис в H. Обозначая a_{e_i} через ξ_i, мы получаем грассманову алгебру Λ_n. Таким образом, фиксирование базиса в H приводит к отождествлению $\Lambda(H)$ и Λ_n.

Подпространство в $\Lambda(H)$, порожденное одночленами степени k (по образующим a_h), мы будем обозначать через $\Lambda^k(H)$; это не что иное, как *k-я внешняя степень пространства H*. При отождествлении $\Lambda(H)$ с Λ_n подпространство $\Lambda^k(H)$ отождествляется с Λ_n^k.

Опишем на инвариантном языке операторы замены переменной. Пусть $A: H \to \widetilde{H}$ — линейный оператор. Тогда определен оператор $\Lambda(A): \Lambda(H) \to \Lambda(\widetilde{H})$ по правилу

$$\Lambda(A)\big[a_{h_1} \wedge \ldots \wedge a_{h_k}\big] = a_{Ah_1} \wedge \ldots \wedge a_{Ah_k}.$$

В частности, этот оператор переводит $\Lambda^k H$ в $\Lambda^k \widetilde{H}$. Полученное отображение k-х внешних степеней называется *k-й внешней степенью оператора A* и обозначается через $\Lambda^k A$.

Мы почти всегда будем предпочитать неинвариантный язык п. 1.1.

1.5. Разложение на линейные множители.

Задача. Докажите, что если a_{ij} — матричные элементы квадратной матрицы A, то

$$(a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n)(a_{21}\xi_1 + \ldots + a_{2n}\xi_n)\ldots(a_{n1}\xi_1 + \ldots + a_{nn}\xi_n) = \det(A)\xi_1 \ldots \xi_n. \quad (1.4)$$

Лемма 1.1. Пусть $l \in \Lambda_n^1$, $f \in \Lambda_n$. Тогда следующие условия равносильны:
1. $lf = 0$;
2. функция f представима в виде $f = lg$.

Доказательство. С помощью подходящей замены переменной можно добиться того, чтобы $l(\xi) = \xi_1$, и тогда утверждение становится очевидным. ■

Следствие 1.2. Пусть $g \in \Lambda_n$. Пусть $l_1, \ldots, l_p \in \Lambda_n^1$ линейно независимы и $l_j g = 0$ для всех j. Тогда g представим в виде

$$g = l_1 \ldots l_p r.$$

Следствие 1.3. Пусть $g \in \Lambda_n^{n-1}$. Тогда g раскладывается на линейные множители.

Доказательство. Пусть $g = \sum a_j \xi_1 \ldots \xi_{j-1}\xi_{j+1} \ldots \xi_n$. Пусть $l(\xi) = \sum s_i \xi_i$. Тогда

$$lg = \left(\sum (-1)^{j-1} s_j a_j\right)\xi_1 \ldots \xi_n.$$

Отсюда мы видим, что существуют линейно независимые элементы $l'_1, \ldots, l'_{n-1} \in \Lambda_n^1$ такие, что $l'_j g = 0$. Теперь мы можем применить предыдущее следствие. ■

Задача. Докажите, что $\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4$ не раскладывается на линейные множители.

Пусть теперь $g = l_1 \ldots l_k$, где $l_j \in \Lambda_n^1$. Легко видеть, что это разложение не единственно:

$$(a_{11}l_1 + \ldots + a_{1n}l_n)\ldots(a_{n1}l_1 + \ldots + a_{nn}l_n) = \det(A) \cdot l_1 \ldots l_n.$$

И последнее замечание. Пусть L — подпространство размерности k в $\Lambda_n^1 \simeq \mathbb{C}^n$. Выберем в L базис $l_1, \ldots, l_k$ и рассмотрим вектор

$$q(L) = l_1 l_2 \ldots l_k \in \Lambda_n^k.$$

Легко видеть, что отображение $q: L \mapsto q(L)$ устанавливает биекцию между множеством Gr_n^k всех k-мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$ и множеством функций в Λ_n^k, разложимых на линейные множители и определенных с точностью до пропорциональности. Это так называемое *плюккерово вложение* Gr_n^k в проективное пространство размерности $C_n^k - 1$.

1.6. Дифференцирование.

Левая производная $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ — это линейный оператор в Λ_n, определяемый условиями

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\xi_j f(\xi)) = f(\xi), \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi) = 0,$$

где $f(\xi)$ — функция, не зависящая от ξ_j (то есть f — многочлен от $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n$).

Пример. $\frac{\partial}{\partial \xi_2}(\xi_1\xi_2) = \frac{\partial}{\partial \xi_2}(-\xi_2\xi_1) = -\xi_1$.

Несложно проверить следующие формулы

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(f(\xi)g(\xi)) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_j} g(\xi) + f(-\xi)\frac{\partial g}{\partial \xi_j}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^2 f(\xi) = 0. \quad (1.6)$$

В частности, применяя (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\exp(f(\xi)) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(1 + f + \frac{f^2}{2!} + \ldots\right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\left(1 + f + \frac{f^2}{2!} + \ldots\right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\exp(f(\xi)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Задача. Иногда вводятся также *правые производные* $\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_j}$, определяемые условиями

$$\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_j}(f(\xi)\xi_j) = f(\xi); \qquad \frac{\partial_r}{\partial_r \xi_j} f(\xi) = 0,$$

где $f(\xi)$ не зависит от ξ_j. Докажите, что

$$\frac{\partial_r f(\xi)}{\partial_r \xi_j} = \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(-\xi).$$

1.7. Интеграл Березина.

Интегралом Березина [Березин (1967)]

$$(\mathscr{B})\int f(\xi)\, d(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

называется линейный функционал на Λ_n, равный 1 на $\xi_1 \ldots \xi_n$ и равный 0 на всех остальных произведениях $\xi_{i_1}\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Задача. Как ведет себя интеграл Березина при линейных заменах переменных?

Задача. Легко видеть, что

$$(\mathscr{B})\int \frac{\partial}{\partial \xi} g(\xi)\, d(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Вывести отсюда аналог формулы интегрирования по частям.

1.8. Интеграл по гауссовой мере. Пусть теперь $\xi_1, \ldots, \xi_n, \bar\xi_1, \ldots, \bar\xi_n$ — набор антикоммутирующих переменных ($\bar\xi_j$ — это просто другие переменные). Интегралом

$$\int g(\xi, \bar\xi)\, d\mu(\xi, \bar\xi)$$

мы назовем линейный функционал на Λ_{2n}, определяемый условиями:

$$\int \prod_{\alpha=1}^{k} (\bar\xi_{j_\alpha} \xi_{j_\alpha})\, d\mu(\xi, \bar\xi) = 1$$

для любых наборов $j_1 < \ldots < j_k$; интегралы от всех остальных базисных одночленов равны 0.

Лемма 1.4.

$$\int g(\xi, \bar\xi)\, d\mu(\xi, \bar\xi) = (\mathscr{B}) \int g(\xi, \bar\xi) \exp\Bigl(\sum \bar\xi_j \xi_j\Bigr) d(\xi_1, \bar\xi, \ldots, \xi_n, \bar\xi_n).$$

Доказательство мы оставляем в качестве упражнения. ■

Сразу отметим, что мы будем работать почти исключительно со вторым интегралом (также введенным Березиным), а не с интегралом Березина из п. 1.7.

1.9. Операторы и их ядра. Пусть Λ_n — грассманова алгебра от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а Λ_m — грассманова алгебра от переменных $\eta_1, \ldots, \eta_m$. Пусть $K(\xi, \bar\eta)$ — функция, зависящая от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n, \bar\eta_1, \ldots, \bar\eta_m$ (все переменные $\xi_i, \eta_j, \bar\eta_k$ попарно антикоммутируют). Поставим в соответствие функции K оператор $A_K : \Lambda_m \to \Lambda_n$, задаваемый формулой

$$A_K f(\xi) = \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.9}$$

Мы будем называть функцию $K(\xi, \eta)$ *ядром* оператора A_K.

Замечание. Мы считаем, что «постоянные», т. е. множители, не зависящие от $\eta, \bar\eta$, выносятся из-под знака интеграла слева:

$$\int f(\xi) g(\eta, \bar\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) := f(\xi) \int g(\eta, \bar\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta).$$

Теорема 1.5. Отображение $K \mapsto A_K$ является биекцией множества функций $K(\xi, \bar\eta) \in \Lambda_{m+n}$ на множество линейных операторов $\Lambda_m \to \Lambda_n$.

Доказательство. Высказывание является тавтологией. Нужно лишь понять, что утверждается. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \delta_1, \ldots, \delta_m} a^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\delta_1 \ldots \delta_m} \xi_1^{\varepsilon_1} \ldots \xi_n^{\varepsilon_n} \bar\eta_m^{\delta_m} \ldots \bar\eta_1^{\delta_1},$$

где ε_i, δ_j равны 0 или 1. Тогда $a^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\delta_1 \ldots \delta_m}$ — просто матричные коэффициенты оператора A в стандартном базисе. ■

Задача. Докажите, что ядро единичного оператора равно $\exp\bigl(\sum \xi_j \bar\eta_j\bigr)$.

Задача. Докажите, что оператор замены переменной имеет ядро вида $\exp\bigl(\sum a_{ij} \xi_i \bar\eta_j\bigr)$.

Задача. Описать оператор с ядром $\sum b_k \bigl(\sum \xi_i \bar\eta_j\bigr)^k$.

Задача. Описать оператор с ядром $\prod_{j=1}^{n} (\xi_j + \bar\eta_j)$.

Пусть, далее, $A : \Lambda_m \to \Lambda_n$ — оператор с ядром $K(\xi, \bar\eta)$, а $B : \Lambda_m \to \Lambda_n$ — оператор с ядром $L(\zeta, \bar\xi)$. Тогда, как легко видеть, ядро оператора BA вычисляется по формуле

$$M(\zeta, \bar\eta) = \int L(\zeta, \bar\xi) K(\xi, \bar\eta)\, d\mu(\xi, \bar\xi). \tag{1.10}$$

Приведем еще несколько несложных формул, иллюстрирующих работу с операторами в грассмановых алгебрах. Очевидно,

$$\int \lambda(\xi) K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \lambda(\xi) \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.11}$$

В частности, вспоминая формулу для ядра единичного оператора, получаем, что оператор умножения на функцию $\lambda(\xi)$ имеет ядро

$$\lambda(\xi) \exp\Bigl(\sum \xi_j \bar\eta_j\Bigr). \tag{1.12}$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int \frac{\partial K(\xi, \bar\eta)}{\partial \xi_j} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.13}$$

Пусть теперь $\varphi(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n) \in \Lambda_n$ — функция, зависящая от антикоммутирующих переменных $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$. Тогда (см. (1.6)) корректно определен оператор $\varphi\bigl(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\bigr)$. Применяя (1.13) получаем

$$\varphi\Bigl(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\Bigr) \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int \Bigl[\varphi\Bigl(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\Bigr) K(\xi, \bar\eta)\Bigr] f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.14}$$

В частности, сам оператор $\varphi\bigl(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\bigr)$ имеет ядро

$$\varphi\Bigl(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\Bigr) \exp\Bigl(\sum \xi_j \bar\eta_j\Bigr) = \exp\Bigl(\sum \xi_j \bar\eta_j\Bigr) \varphi(\bar\eta_1, \ldots, \bar\eta_n). \tag{1.15}$$

Далее, легко видеть, что

$$\int K(\xi, \bar\eta) \eta_j f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int \frac{\partial K(\xi, \bar\eta)}{\partial \bar\eta_j} (-\xi, -\bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.16}$$

Аналогично

$$\int K(\xi, \bar\eta) \bar\eta_j f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int K(\xi, \bar\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_j} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.17}$$

Отсюда следует, что

$$\int K(\xi, \bar\eta) \bar\eta_{i_1} \ldots \bar\eta_{i_\alpha} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int K(\xi, \bar\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial \eta_{i_\alpha}} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta).$$

Поэтому

$$\int K(\xi, \bar\eta) \lambda(\bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int K(\xi, \bar\eta) \lambda\Bigl(\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \eta_m}\Bigr) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.17a}$$

1.10. Операторы рождения-уничтожения. Рассмотрим пространство

$$V_{2n} = V_{2n}^+ \oplus V_{2n}^- := \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$$

с координатами $(v_1^+, \dots, v_n^+, v_1^-, \dots, v_n^-)$. Введем в V_{2n} симметричную билинейную форму

$$L(v, w) = \sum (v_i^+ w_i^- + v_i^- w_i^+). \tag{1.18}$$

Поставим в соответствие каждому вектору $v \in V$ линейный оператор $\hat{a}(v)$ по формуле

$$\hat{a}(v) f(\xi) = \left(\sum v_i^+ \xi_i + \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) f(\xi). \tag{1.19}$$

Замечание. По терминологии, заимствованной из квантовой механики, операторы $\hat{a}(v_+, 0)$ называются *операторами рождения*, а операторы $\hat{a}(0, v_-)$ — *операторами уничтожения*. Термины математического происхождения: операторы *внешнего* и *внутреннего умножения*. Мы будем называть операторы $\hat{a}(v)$ *операторами рождения-уничтожения*.

Введем операторы

$$a_i^+ f(\xi) = \xi_i f(\xi),$$
$$a_i^- f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi). \tag{1.20}$$

Тогда, очевидно (см. (1.5)–(1.6)),

$$a_i^+ a_j^+ + a_j^+ a_i^+ = 0,$$
$$a_i^- a_j^- + a_j^- a_i^- = 0, \tag{1.21}$$
$$a_i^+ a_j^- + a_j^- a_i^+ = \delta_{ij} E.$$

Эту систему равенств («*канонические антикоммутационные соотношения*») можно переписать в виде

$$\hat{a}(v)\hat{a}(w) + \hat{a}(w)\hat{a}(v) = L(v, w) \cdot E. \tag{1.22}$$

Задача. Найти ядро оператора $\hat{a}(v)$. Как найти ядра операторов $\hat{a}(v)A$ и $A\hat{a}(v)$, зная ядро оператора A?

Теорема 1.6. Алгебра операторов в Λ_n, порожденная всеми операторами рождения-уничтожения совпадает с полной алгеброй операторов в Λ_n.

Доказательство. Легко видеть, что проектор на подпространство Λ_n^0 задается формулой

$$Q = a_1^- a_2^- \dots a_n^- a_n^+ \dots a_2^+ a_1^+. \tag{1.23}$$

Пусть оператор A имеет ядро

$$K(\xi, \overline{\eta}) = \sum c_{\delta_1 \dots \delta_n}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \xi_1^{\varepsilon_1} \dots \xi_n^{\varepsilon_n} \overline{\eta}_n^{\delta_n} \dots \overline{\eta}_1^{\delta_1}.$$

Тогда легко видеть, что

$$A = \sum c_{\delta_1 \dots \delta_n}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} (a_1^+)^{\varepsilon_1} \dots (a_n^+)^{\varepsilon_n} Q (a_n^-)^{\delta_n} \dots (a_1^-)^{\delta_1} \tag{1.24}$$

■

1.11. Виковские символы. Нам виковские символы не понадобятся, но в литературе они используются несравненно чаще, чем ядра $K(\xi, \overline{\eta})$, и поэтому их стоит обсудить.

Мы только что видели, что любой оператор в Λ_n может быть представлен как алгебраическое выражение от a_j^+, a_j^-. Коммутационные соотношения (1.21) позволяют переставить символы a_j^+, a_j^- так, чтобы операторы рождения a_j^+ стояли впереди операторов уничтожения a_i^-.

Пример.

$$\begin{aligned} a_1^- a_2^- a_2^+ a_1^+ &= a_1^- (1 - a_2^+ a_2^-) a_1^+ = \\ &= a_1^- a_1^+ - a_1^- a_2^+ a_2^- a_1^+ = \\ &= (1 - a_1^+ a_1^-) - a_2^+ a_1^- a_1^+ a_2^- = \\ &= 1 - a_1^+ a_1^- - a_2^+ (1 - a_1^+ a_1^-) a_2^- = \\ &= 1 - a_1^+ a_1^- - a_2^+ a_2^- + a_2^+ a_1^+ a_1^- a_2^- \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем любой оператор A в Λ_n записать как дифференциальный оператор вида

$$\sum v_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_{j_l}},$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $j_1 < j_2 < \dots < j_l$.

Функция

$$V(\xi, \eta) = \sum v_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \overline{\eta}_{j_1} \dots \overline{\eta}_{j_l}$$

называется *виковским символом* оператора A.

Теорема 1.7. Пусть A — оператор в Λ_n. Тогда его ядро $K(\xi, \overline{\eta})$ и виковский символ $V(\xi, \overline{\eta})$ связаны соотношением

$$V(\xi, \overline{\eta}) = K(\xi, \overline{\eta}) \exp\left(-\sum \xi_i \overline{\eta}_i\right). \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть Q — проектор на Λ_n^0; он задается формулой (1.23).

$$\begin{aligned} Q &= a_1^- \dots a_n^- a_n^+ \dots a_1^+ = \\ &= a_1^- \dots a_{n-1}^- a_{n-1}^+ \dots a_1^+ (a_n^- a_n^+) = \\ &= (a_1^- a_1^+) \dots (a_n^- a_n^+) = \\ &= (1 - a_1^+ a_1^-) \dots (1 - a_n^+ a_n^-). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Легко видеть, что виковский символ этого оператора равен

$$(1 - \xi_1 \overline{\eta}_1)(1 - \xi_2 \overline{\eta}_2) \dots (1 - \xi_n \overline{\eta}_n) = \exp\left(-\sum \xi_j \overline{\eta}_j\right) \tag{1.27}$$

Чтобы убедиться в этом, раскроем скобки (1.26) и (1.27). Элементы a_j^+ в (1.26) уже стоят впереди a_j^-, а правила перестановки элементов a_j^+ и a_i^- при $i \neq j$ в точности совпадают с правилами перестановки ξ_j и η_i (см. (1.21)).

Случай общего оператора $A : \Lambda_n \to \Lambda_n$ сводится к только что рассмотренному с помощью формулы (1.24). ■

1.12. Каноническая билинейная форма в Λ_n. Определим линейный оператор $f \mapsto f^\sigma$ в алгебре Λ_n из условия

$$\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_k} \mapsto \xi_{i_k}\dots\xi_{i_2}\xi_{i_1}$$

(для любого базисного одночлена). Легко видеть, что

$$(fg)^\sigma = g^\sigma f^\sigma.$$

Задача. Доказать, что в случае $f \in \Lambda_n^{4k}$ или $f \in \Lambda_n^{4k+1}$ выполнено $f^\sigma = f$. Если же $f \in \Lambda_n^{4k+2}$ или $f \in \Lambda_n^{4k+3}$, то $f^\sigma = -f$.

Билинейную форму $B(f,g)$ в Λ_n мы определим по формуле:

$$B(f,g) = (\mathscr{B})\int f(\xi)^\sigma g(\xi)\, d(\xi_1,\dots,\xi_n).$$

Задача. Доказать, что при $n = 4l$ и $n = 4l+1$ форма B симметрична, а при $n = 4l+2$, $n = 4l+3$ — кососимметрична.

Лемма 1.8. Для любого $v \in V$ выполнено

$$B\big(\hat{a}(v)f, g\big) = B\big(f, \hat{a}(v)g\big).$$

Доказательство очевидно. ■

Следствие 1.9. Пусть $L(v,v) = 2$. Тогда оператор $\hat{a}(v)$ сохраняет форму $B(\cdot,\cdot)$.

Доказательство. Учитывая (1.22) получаем

$$\begin{aligned} B(\hat{a}(v)f, \hat{a}(v)g) &= B(f, \hat{a}(v)^2 f) = \\ &= B(f, \tfrac{1}{2}L(v,v)g) = \\ &= B(f,g). \end{aligned}$$

■

1.13. Скалярное произведение в Λ_n. Скалярное произведение в Λ_n вводится по формуле

$$\langle f, g\rangle = \int \overline{g^\sigma(\xi)}\, f(\xi)\, d\mu(\xi,\bar{\xi}). \tag{1.28}$$

По существу, выражение (1.28) — лишь красивая запись того, что одночлены $\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}$ образуют в Λ_n ортонормированный базис.

Легко видеть, что $(a_j^+)^* = a_j^-$, а следовательно,

$$\hat{a}(v^+, v^-) = \hat{a}(\bar{v}^-, \bar{v}^+).$$

Задача. Вывести формулу для ядра сопряженного оператора.

Задача. Мы определили билинейную форму B и скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ в грассмановой алгебре Λ_n. Корректно ли они определены во внешней алгебре $\Lambda(H)$ (иными словами, зависят ли они от выбора базиса в H)?

1.14. Литературные замечания. Нечетный (грассманов) анализ впервые появляется, кажется, в статье [Onsager (1944)], имевшей чисто статфизические цели. Эта работа многократно переизлагалась (например, [Березин (1969.1)]). В книге [Березин (1965)] нечетный анализ имел уже вполне развитый вид.

§ 2. Спинорные функции

В нечетном анализе важное значение имеют аналоги гауссовых функций $\exp\big(\sum a_{ij}x_ix_j\big)$. На первый взгляд кажется, что такими аналогами должны быть выражения $\exp\big(\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\big)$, в действительности положение чуть-чуть сложней.

2.1. Спинорные функции. *Спинорными функциями* мы будем называть функции вида

$$\lambda \prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_s b_{js}\xi_s\Big)\cdot \exp\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j\Big), \tag{2.1}$$

где $\lambda, b_{js}, a_{ij} \in \mathbb{C}$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Для сокращения записи мы будем пользоваться обозначением

$$\xi A\xi^t := \sum a_{ij}\xi_i\xi_j; \tag{2.2}$$

при этом мы рассматриваем $\xi = (\xi_1 \ \dots\ \xi_n)$ как матрицу-строку, а знак ^{t} обозначает транспонирование матрицы.

Множество всех спинорных функций в Λ_n мы будем обозначать через Car_n. Через $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$ мы обозначим множество $\mathrm{Car}_n \setminus 0$, профакторизованное по умножению на константы. Иными словами, $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$ — это множество ненулевых спинорных функций, определенных с точностью до умножения на константы.

Мы хотим выяснить строение множества $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$. Обозначим через Car_n^k подмножество Car_n, состоящее из всех функций вида (2.1), имеющих ровно k линейных сомножителей. На первый взгляд кажется, что множества Car_n^k являются, в каком-то смысле, компонентами Car_n. Но это — «обман зрения». Действительно,

$$\xi_1\xi_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\xi_1\xi_2\right).$$

Задача. Вывести отсюда, что Car_n^{k+2} содержится в замыкании Car_n^k.

Таким образом, $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$ состоит из двух компонент связности.

2.2.

Теорема 2.1. Пусть f — спинорная функция, а $\hat{a}(v)$ — оператор рождения-уничтожения. Тогда $\hat{a}(v)f$ — спинорная функция.

Сама теорема и ее доказательство довольно странны и не имеют аналогов в обычном анализе.

Доказательство. Итак, нам нужно вычислить

$$\Big(\sum \alpha_j\xi_j + \sum \beta_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}\Big) l_1(\xi)\dots l_p(\xi)\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\}, \tag{2.3}$$

где A — кососимметричная матрица, $l_j \in \Lambda_n^1$. Заметим, что формы l_j можно считать линейно независимыми, иначе их произведение было бы равно 0. Выражение (2.3)

2 Зак. 320

равно

$$\Big\{\left(\sum \alpha_j\xi_j\right) l_1\dots l_p + \Big[\sum_{\alpha=1}^{p} c_\alpha l_1\dots l_{\alpha-1}l_{\alpha+1}\dots l_p\Big]+ \\ +(-1)^p l_1\dots l_p \sum \beta_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^{t})\Big\} \exp\left\{\tfrac12 \xi A\xi^{t}\right\}, \tag{2.4}$$

где через c_α обозначены числа $c_\alpha = (-1)^{\alpha-1}\sum\left(\beta_j \frac{\partial}{\partial\xi_j} l_\alpha(\xi)\right)$.

Дальше возможны два случая:

а) Сумма в квадратных скобках равна 0. Тогда (2.4) равно

$$(-1)^p l_1\dots l_p \left(\sum \alpha_j\xi_j + \sum\beta_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^{t})\right)\exp\left\{\tfrac12\xi A\xi^{t}\right\},$$

и мы получаем выражение вида (2.1).

б) Пусть сумма в квадратных скобках в (2.4) отлична от 0. Тогда (см. п. 1.5) эта сумма представляется в виде

$$[\dots] = \varkappa_1(\xi)\dots\varkappa_{p-1}(\xi),$$

где линейные функции $\varkappa_j(\xi)$ имеют вид

$$\varkappa_j(\xi) = \sum d_{jk} l_k$$

($d_{jk}\in\mathbb{C}$). Далее, выберем форму $\varkappa_p \in \Lambda_n^1$ так, чтобы формы $\varkappa_1,\dots,\varkappa_p$ образовывали базис в линейной оболочке форм $l_1,\dots,l_p$. Тогда

$$l_1\dots l_p = \sigma\varkappa_1\dots\varkappa_p,$$

где $\sigma\in\mathbb{C}^*$. Теперь (2.4) переписывается в виде

$$\varkappa_1\dots\varkappa_{p-1}\left[1+(-1)^p\sigma\varkappa_p\left(\sum\alpha_j\xi_j+\sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^{t})\right)\right]\exp\left\{\tfrac12\xi A\xi^{t}\right\} =$$

$$=\varkappa_1\dots\varkappa_{p-1}\exp\left\{(-1)^p\sigma\varkappa_p\left(\sum\alpha_j\xi_j+\sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^{t})\right)\right\}\exp\left\{\tfrac12\xi A\xi^{t}\right\} =$$

$$=\varkappa_1\dots\varkappa_{p-1}\exp\left\{(-1)^p\sigma\varkappa_p\left(\sum\alpha_j\xi_j+\sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^{t})\right)+\tfrac12\xi A\xi^{t}\right\}.$$

Теорема доказана. ■

2.3. Описание многообразия $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$. Рассмотрим линейное пространство V_{2n}, определенное в п. 1.10, и симметричную билинейную форму L в V_{2n}, заданную формулой (1.18). Пусть H — максимальное изотропное подпространство в V_{2n} (см. Предварительные сведения, § 1). Обозначим через $\mathscr{H}_H$ следующую систему дифференциальных уравнений в Λ_n

$$\left\{\hat a(v)f = 0 \quad \text{для всех } v\in H\right\}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.2.

а) Для любого максимального изотропного подпространства $H\subset V_{2n}$ система $\mathscr{H}_H$ имеет единственное с точностью до пропорциональности ненулевое решение. Это решение является спинорной функцией.

б) Обозначим решение системы $\mathscr{H}_H$, определенное с точностью до пропорциональности, через spin_H. Тогда отображение

$$H\mapsto \mathrm{spin}_H$$

является биекцией грассманиана Gr_{2n} максимальных изотропных подпространств в V_{2n} и многообразия $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$.

Мы дадим два доказательства этой теоремы (см. теоремы 2.6 и 2.7); для понимания дальнейшего достаточно более слабой теоремы 2.5.

Задача. Пусть $f=\xi_1\xi_2\dots\xi_k$. Найдите соответствующее подпространство в V_{2n}. Какое отношение имеет рассматриваемая конструкция к плюккерову вложению (см. п. 1.5)?

Задача. Пусть $v_1,\dots,v_p$ — набор векторов в V_{2n}. Когда система уравнений

$$\left\{a(v_j)f=0\right\}$$

имеет ненулевое решение? Когда это решение единственно?

Указание. Пусть $L(v,\bar v)\neq 0$. Тогда система из двух уравнений $\hat a(v)f=0$, $\hat a(\bar v)=0$ имеет лишь нулевое решение. Действительно,

$$L(v,\bar v)\cdot f = \left(\hat a(v)\hat a(\bar v)+\hat a(\bar v)\hat a(v)\right)f = 0.$$

Следующий вопрос более сложен.

Задача*. Пусть $v_j\in V_{2n}$, $c_j\in\mathbb{C}$. Когда система уравнений

$$\left\{a(v_j)f=c_jf\right\}$$

имеет ненулевое решение f? Когда это решение единственно?

2.4. Явная формула для соответствия $H\mapsto \mathrm{spin}_H$: простейший случай.

Предложение 2.3. Пусть W — линейное $2n$-мерное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}$. Пусть W_+ и W_- — максимальные изотропные подпространства в W, причем $W=W_+\oplus W_-$. Пусть подпространство $L\subset W$ является графиком оператора $A: W_-\to W_+$. Тогда следующие условия равносильны:

1. L является максимальным изотропным подпространством.
2. $A=-A^{t}$.

Замечание. Инвариантный смысл операции транспонирования обсуждается в § 2 Предварительных сведений. Читатель, не желающий вникать в инвариантные построения, может считать, что в W_+ и W_- фиксированы базисы $w_1^+,\dots,w_n^+$ и $w_1^-,\dots,w_n^-$ такие, что $\{w_i,w_j\}=\delta_{ij}$. Тогда ^{t} обозначает обычное транспонирование матриц.

Доказательство. Пусть $w_-, w'_- \in W_-$. Тогда $Aw_-, Aw'_- \in W_+$. Следовательно,

$$\{w_- + Aw_-, w'_- + Aw'_-\} = \{w_-, Aw'_-\} + \{w'_-, Aw_-\} = \tag{2.6}$$

(мы использовали изотропность W_+ и W_-)

$$= \{w_-, Aw'_-\} + \{w_-, A^{\mathrm{t}} w'_-\} = \{w_-, (A + A^{\mathrm{t}}) w'_-\}.$$

Если $A + A^{\mathrm{t}} = 0$, то L изотропно. Обратно, если L изотропно, т. е. (2.6) равно 0, то $A + A^{\mathrm{t}} = 0$. Предложение доказано. ■

Задача. Получите аналог этого утверждения для кососимметричной билинейной формы.

Предложение 2.4. Пусть W, W_+, W_- — те же что и выше. Следующие условия на максимальное изотропное подпространство $H \subset W$ равносильны:

а) H — график оператора $W_- \to W_+$;

б) $H \cap W_+ = 0$;

в) проекция H на W_- вдоль W_+ совпадает с W_-.

Доказательство. Достаточно проверить, что б) $\Leftrightarrow$ в). Пусть v — ненулевой вектор в $H \cap W_+$. Тогда в силу изотропности H для любого $(w_+, w_-) \in H$ выполнено

$$0 = \big\{(v, 0), (w_+, w_-)\big\} = \{v, w_-\}, \tag{2.7}$$

т. е. любой вектор w_- из проекции H на W_- удовлетворяет уравнению (2.7), поэтому в) не выполнено.

Обратно, пусть $N \subset W_-$ — проекция H на W_-, причем $N \neq W_-$. Тогда $(N \oplus W_+)^{\perp}$ является подпространством в W_+ (т. к. $N \oplus W_+ \supset W_+ = W_+^{\perp}$). Учитывая, что $H \subset N \oplus W_-$, мы получаем, что $H = H^{\perp} \supset (N \oplus W_+)^{\perp}$. ■

Задача. Пусть L — максимальное изотропное подпространство в W. Тогда размерность $L \cap W_+$ равна коразмерности в W_- проекции L на W_-.

Пусть V_{2n} — то же, что в п. 1.10.

Теорема 2.5. Пусть H — максимальное изотропное подпространство в V_{2n}, причем H является графиком оператора $A : V_- \to V_+$. Тогда система уравнений $\mathscr{Z}_H$ (см. (2.5)) имеет единственное с точностью до пропорциональности ненулевое решение

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $v = (v_1^+, \ldots, v_n^+, v_1^-, \ldots, v_n^-) \in H$.

$$\left(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} = \tag{2.9}$$

$$= \left(\sum v_j^+ \xi_j + \sum\sum v_j^- a_{jk}\xi_k\right) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} = \left[\sum\left(v_j^+ - \sum a_{j\alpha} v_\alpha^-\right)\xi_j\right] \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}.$$

Отсюда видно, что (2.8) удовлетворяет системе $\mathscr{Z}_H$.

Докажем единственность. Пусть $q(\xi)$ — другое решение системы $\mathscr{Z}_H$. Пусть

$$q(\xi) = r(\xi) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}.$$

Тогда

$$\left(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) q(\xi) = \left(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) r(\xi) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} =$$

$$= \left[\left(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}\right] r(\xi) + \left(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} r(\xi)\right) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} = 0.$$

Учитывая, что выражение в квадратных скобках равно 0, получаем

$$\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} r(\xi) = 0.$$

Но набор чисел v_j^- может быть любым. Поэтому $r(\xi) = \mathrm{const}$, что и требовалось доказать. ■

2.5. Первая общая формула для соответствия $H \mapsto \operatorname{spin} H$.

Теорема 2.6. Пусть H — максимальное изотропное подпространство в V_{2n}. Пусть $H \cap V_+ = P$, а $u_k = (b_{k1}, \ldots, b_{kn}) \in V_+$ — некоторый базис в P. Пусть H_0 — некоторое дополнение в H до P, а $\widetilde{H} \supset H_0$ — некоторое максимальное изотропное подпространство, являющееся графиком оператора $A : V_- \to V_+$. Тогда существует единственное с точностью до пропорциональности ненулевое решение системы $\mathscr{Z}_H$; оно задается формулой

$$f(\xi) = \prod_{k=1}^{\dim P} \left(\sum b_{kj}\xi_j\right) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} \tag{2.10}$$

Доказательство. Проверим условия (2.5). Пусть сначала вектор v лежит в подпространстве P, $v = (v_1^+, \ldots, v_n^+, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$\hat{a}(v) f(\xi) = \left[\left(\sum v_j^+ \xi_j\right) \prod_{k=1}^{\dim P} \left(\sum b_{kj}\xi_j\right)\right] \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}.$$

Выражение в квадратных скобках равно 0, т. к. это произведение линейно зависимых элементов из Λ_n^1.

Далее, пусть $v \in H_0$, $v = (v_1^+, \ldots, v_n^+, v_1^-, \ldots, v_n^-)$. Вычислим

$$\left(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \prod_{k=1}^{\dim P} \left(\sum b_{kj}\xi_j\right) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}. \tag{2.11}$$

При этом векторы $v^- = (v_1^-, \ldots, v_n^-)$ не произвольны. Вектор v ортогонален любому вектору из P, а это значит, что

$$\sum b_{ij} v_j^- = 0 \tag{2.12}$$

для всех i. Иными словами,

$$\Big(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\big(\sum b_{kj}\xi_j\big) = 0,$$

поэтому (2.11) равно

$$\Big((-i)^{\dim P}\prod_{k=1}^{\dim P}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\Big)\Big[\Big(\sum v_j^+\xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\exp\big\{\tfrac{i}{2}\xi A\xi^t\big\}\Big]$$

В силу вычислений (2.9) выражение в квадратных скобках равно 0.

Докажем единственность. Пусть $g(\xi)$ — решение системы $\mathscr{H}_H$. Тогда при $v \in P$ условие (2.5) дает

$$\big(\sum_j b_{ij}\xi_j\big)g(\xi) = 0,$$

поэтому $g(\xi)$ делится на $\sum b_{ij}\xi_j$ для всех i, а значит, $g(\xi)$ имеет вид

$$g(\xi) = \prod_i\big(\sum b_{ij}\xi_j\big)\cdot q(\xi).$$

Далее, представим $q(\xi)$ в виде $q(\xi) = r(\xi)\exp\big\{\frac{1}{2}\xi A\xi^t\big\}$. Тогда $r(\xi)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\Big(\sum v_j^+\xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\Big(\prod\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\big\}\, r(\xi)\Big) = 0,$$

где $v = (v_1^+,\dots,v_n^+,v_1^-,\dots,v_n^-) \in H_0$. Повторяя только что проделанные вычисления, мы получаем в левой части

$$(-1)^{\dim P}\prod\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\Big[\Big(\sum v_j^+\xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\big\}\cdot r(\xi) + \\ + \Big(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) r(\xi)\cdot \exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\big\}\Big].$$

Далее, в силу вычислений (2.9) первое слагаемое в квадратных скобках равно 0. Поэтому $r(\xi)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\prod_{k=1}^{\dim P}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\Big(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) r(\xi) = 0 \qquad (2.13)$$

для всех $v_- = (v_1^-,\dots,v_n^-)$, удовлетворяющих (2.12).

Делая подходящую линейную замену переменной $\varkappa = H\xi$, мы можем перевести подпространство $P \subset V_+$ в подпространство, натянутое на первые $m := \dim P$ базисных векторов. Тогда система (2.13) перепишется в виде

$$\varkappa_1\dots\varkappa_m \frac{\partial}{\partial \varkappa_{m+\alpha}} r(\varkappa) = 0,$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$. Поэтому $r(\varkappa)$ имеет вид

$$r(\varkappa) = a + \sum_{k=1}^{m}\varkappa_k\psi_k(\varkappa),$$

где $a \in \mathbb{C}$, а $\psi_j(\varkappa_1,\dots,\varkappa_n)$ — некоторые функции. Возвращаясь к старым переменным, мы получаем

$$r(\xi) = a + \sum_{k=1}^{m}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\cdot\psi_k\big(\sum h_{1j}\xi_j,\dots,\sum h_{nj}\xi_j\big).$$

Поэтому

$$\prod_{k=1}^{m}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)r(\xi) = a\prod_{k=1}^{m}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big),$$

что и доказывает теорему. ■

Задача. Пусть

$$l_1 l_2\dots l_k \exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\big\} = m_1 m_2\dots m_p \exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi B\xi^t\big\}$$

— две равные ненулевые спинорные функции (l_i, m_i — линейные формы). Докажите, что $l_1\dots l_k = m_1\dots m_p$ (в частности $k = p$), а $\xi B\xi^t$ имеет вид

$$\xi A\xi^t + \sum l_i(\xi)\mu_i(\xi),$$

где $\mu_i(\xi) \in \Lambda_n^1$.

2.6. Вторая общая формула. Пусть Gr_{2n} — грассманиан (см. Предварительные сведения, § 1) максимальных изотропных подпространств в V_{2n}. Сейчас мы построим атлас из 2^n карт на многообразии Gr_{2n}.

Пусть $e_1^+,\dots,e_n^+,e_1^-,\dots,e_n^-$ — стандартный базис в V_{2n}. Пусть числа $\delta_1,\dots,\delta_n$ пробегают значения ± 1. Обозначим через $V_+^{\delta_1\dots\delta_n}$ подпространство, натянутое на базисные векторы $e_1^{\delta_1},\dots,e_n^{\delta_n}$ (т.е. $e_j^{\delta_j} = e_j^+$, если $\delta_j = +1$, и $e_j^{\delta_j} = e_j^-$, если $\delta_j = -1$), а через $V_-^{\delta_1\dots\delta_n}$ — подпространство, натянутое на базисные векторы $e_j^{-\delta_j}$. Легко видеть, что $V_+^{\delta_1\dots\delta_n}$, $V_-^{\delta_1\dots\delta_n}$ — максимальные изотропные подпространства в V_{2n}, причем

$$V_{2n} = V_+^{\delta_1\dots\delta_n}\oplus V_-^{\delta_1\dots\delta_n}.$$

Карта $\mathrm{Map}_{\delta_1\dots\delta_n}$ на Gr_{2n} состоит из всех подпространств $L \in \mathrm{Gr}_{2n}$, являющихся графиками операторов

$$A_{\delta_1\dots\delta_n}(L): V_-^{\delta_1\dots\delta_n}\to V_+^{\delta_1\dots\delta_n}.$$

Задача. Докажите, что объединение всех 2^n карт $\mathrm{Map}_{\delta_1\dots\delta_n}$ совпадает с Gr_{2n} (см. например, [Арнольд (1971)], § 41). Покажите, что если выкинуть любую из карт, то оставшиеся не покроют весь грассманиан.

Теорема 2.7. Пусть $L \in \mathrm{Map}_{\delta_1\dots\delta_n}$, а $A_{\delta_1\dots\delta_n}(L)$ — соответствующий оператор $V_-^{\delta_1\dots\delta_n}\to V_+^{\delta_1\dots\delta_n}$. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой вектор $f \in \Lambda_n$, удовлетворяющий системе $\mathscr{H}_L$; этот вектор задается формулой

$$\Big(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\Big)^{\frac{1-\delta_1}{2}}\dots\Big(\xi_n + \frac{\partial}{\partial \xi_n}\Big)^{\frac{1-\delta_n}{2}}\exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A_{\delta_1\dots\delta_n}(L)\xi^t\big\} \qquad (2.14)$$

Доказательство. Пусть $\hat{s}_j$ — ортогональное преобразование в V, задаваемое формулой

$$\hat{s}_j e_k^\delta = e_k^\delta, \quad \hat{s}_j e_j^\delta = e_j^{-\delta}, \quad \text{где } k \neq j.$$

Замечание. Пусть $f(\xi)$, $g(\xi)$ не зависят от ξ_j. Тогда

$$\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\left(f(\xi) + \xi_j g(\xi)\right) = \xi_j f(\xi) + g(\xi).$$

Лемма 2.8. Функция f удовлетворяет системе $\mathscr{H}_L$ тогда и только тогда, когда функция $\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) f$ удовлетворяет системе $\mathscr{H}_{\hat{s}_j L}$.

Доказательство леммы. Лемма вытекает из легко проверяемого тождества

$$\hat{a}(\hat{s}_j v)\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) f = \left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \hat{a}(-v) f.$$

■

Лемма 2.9.

$$A_{\delta_1,\ldots,-\delta_j,\ldots,\delta_n}(L) = A_{\delta_1,\ldots,\delta_j,\ldots,\delta_n}(s_j L).$$

Эта лемма очевидна.

Теорема является очевидным следствием этих двух лемм. ■

2.7. Замечания. Пусть A — кососимметричная матрица размера $2n \times 2n$. *Пфаффианом* матрицы A называется число

$$\mathrm{Pfaff}(A) = \frac{1}{n!}(\mathscr{B}) \int \left(\tfrac{1}{2} \sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^n d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}).$$

Задача. Докажите, что $\mathrm{Pfaff}(CAC^t) = \det(C)\,\mathrm{Pfaff}(A)$.

Задача. Докажите, что $\det(A) = \mathrm{Pfaff}(A)^2$.

Легко видеть, что

$$(\mathscr{B}) \int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^t\right\} d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}) = \mathrm{Pfaff}(A),$$

где $(\mathscr{B})$ обозначает интеграл Березина из п. 1.7. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение из п. 1.13. Тогда

$$\left\langle \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\}, \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi B\xi^t\right\}\right\rangle = (\mathscr{B}) \int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t - \tfrac{1}{2}\bar{\xi}B\bar{\xi}^t + \bar{\xi}\xi^t\right\} d(\xi_1, \bar{\xi}_1, \ldots, \xi_n, \bar{\xi}_n) =$$
$$= \mathrm{Pfaff}\begin{pmatrix} A & -1 \\ 1 & -\overline{B} \end{pmatrix}.$$

Задача. Вывести отсюда равенство

$$\left\langle \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\}, \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi B\xi^t\right\}\right\rangle^2 = \det(1 + A\overline{B}).$$

В частности,

$$\left\|\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\}\right\| = [\det(1 + AA^*)]^{\frac{1}{4}},$$

где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму в Λ_n.

§ 3. *Спинорное представление группы* $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$.

Наша следующая цель — изучение одного замечательного действия группы $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ в Λ_n.

3.1. Теорема существования спинорного представления. Пусть пространство V_{2n} — то же, что и выше (п. 1.10). Пусть $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ — группа всех операторов в V_{2n}, сохраняющих симметричную форму $L(\cdot,\cdot)$. Иными словами, группа $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ состоит из блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ размера $(n \times n) \times (n \times n)$, удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Напомним, что по каждому элементу v пространства V_{2n} в п. 1.10 был построен оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$.

Теорема 3.1.

а) Для любого $Q \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ существует единствененный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $\mathrm{spin}(Q)$ в Λ_n такой, что

$$\hat{a}(Qv) = \mathrm{spin}(Q)\hat{a}(v)\,\mathrm{spin}(Q)^{-1} \tag{3.2}$$

для любого $v \in V_{2n}$.

б) Для любых $P, Q \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ выполнено

$$\mathrm{spin}(P)\,\mathrm{spin}(Q) = c(P, Q)\,\mathrm{spin}(PQ), \tag{3.3}$$

где $c(P, Q) \in \mathbb{C}^*$.

Утверждение б) означает, что $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$ — проективное представление (см. Предварительные сведения, § 5) группы $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$.

Наиболее трудным утверждением теоремы является существование оператора $\mathrm{spin}\,P$. Доказательство существования мы пока отложим и докажем остальные утверждения.

Следующая лемма, в частности, показывает, что б) следует из а).

Лемма 3.2. Пусть $P, Q \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ и существуют операторы A, B в Λ_n такие, что

$$\hat{a}(Pv) = A\hat{a}(v)A^{-1}, \qquad \hat{a}(Qw) = B\hat{a}(w)B^{-1} \tag{3.4}$$

для всех $v, w \in V_{2n}$. Тогда для всех $v \in V_{2n}$ выполнено

$$\hat{a}(PQv) = AB\hat{a}(v)(AB)^{-1}.$$

Доказательство.

$$\hat{a}(PQv) = A\hat{a}(Qv)A^{-1} = AB\hat{a}(v)B^{-1}A^{-1}.$$

■

Лемма 3.3. Для любого $Q \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ существует не более одного (с точностью до пропорциональности) оператора A, удовлетворяющего

$$\hat{a}(Qv) = A\hat{a}(v)A^{-1}$$

для всех $v \in V_{2n}$.

Доказательство. Пусть

$$\hat{a}(Qv) = A\hat{a}(v)A^{-1} = B\hat{a}(v)B^{-1},$$

тогда

$$\hat{a}(v) = B^{-1}A\hat{a}(v)A^{-1}B = (B^{-1}A)\hat{a}(v)(B^{-1}A)^{-1},$$

т. е. $B^{-1}A$ коммутирует со всеми операторами $\hat{a}(v)$. Но операторы рождения-уничтожения, согласно теореме 1.6, порождают всю алгебру операторов в Λ_n, а значит, $B^{-1}A$ коммутирует со всеми операторами, т. е. $B^{-1}A = \lambda E$. Лемма доказана. ■

3.2. Абстрактное доказательство теоремы существования. Это доказательство красиво и поучительно, но оно ничего не говорит о явном виде операторов spin(P). В дальнейшем мы не будем использовать рассуждения этого пункта.

Алгеброй Клиффорда Q_n называется ассоциативная алгебра с единицей с образующими $A_1^+, \ldots, A_n^+, A_1^-, \ldots, A_n^-$ и соотношениями

$$A_i^+A_j^+ + A_j^+A_i^+ = 0, \quad A_i^-A_j^+ + A_j^+A_i^- = \delta_{ij}, \quad A_i^-A_j^- + A_j^-A_i^- = 0$$

(ср. с (1.21)). Дадим эквивалентное определение. Алгебра Q_n — это алгебра с образующими $\hat{A}(v)$, где v пробегает V_{2n}, и с соотношениями

$$\widehat{A}_v\widehat{A}_w + \widehat{A}_w\widehat{A}_v = L(v,w)\cdot E, \qquad \widehat{A}_{\alpha v+\alpha' v'} = \alpha\widehat{A}_v + \alpha'\widehat{A}_{v'},$$

где $v, v', w \in V_{2n}$, а $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$. Эквивалентность определений очевидна (образующие $A_j^{\pm}$ соответствуют базисным элементам из V_{2n}).

В силу соотношений (1.22) отображение $\widehat{A}_v \mapsto \hat{a}(v)$ определяет некоторое представление алгебры Q_n, т. е. гомоморфизм ψ из Q_n в алгебру Mat(Λ_n) всех операторов в Λ_n. В силу теоремы 1.6 отображение ψ является эпиморфизмом, в частности $\dim Q_n \geqslant 4^n$.

Теорема 3.4. Алгебра Клиффорда Q_n изоморфна алгебре всех операторов в Λ_n.

Доказательство. Нам остается показать, что $\dim Q_n \leqslant 4^n$. Действительно, точно так же, как в п. 1.11, показывается, что любой элемент Q_n записывается в виде

$$\sum c^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\delta_1\ldots\delta_n}(A_1^+)^{\varepsilon_1}\ldots(A_n^+)^{\varepsilon_n}(A_1^-)^{\delta_1}\ldots(A_n^-)^{\delta_n},$$

где ε_i, δ_i могут быть равны 0 или 1, что завершает доказательство. ■

Пусть $P \in O(2n,\mathbb{C})$. Легко видеть, что отображение

$$\widehat{A}_v \mapsto \widehat{A}_{Pv}$$

множества образующих алгебры Q_n в себя продолжается до автоморфизма алгебры Q_n. Это вытекает из того, что

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{Pv}\widehat{A}_{Pw} + \widehat{A}_{Pw}\widehat{A}_{Pv} &= L(Pv,Pw)E = \\ &= L(v,w)E = \\ &= \widehat{A}_v\widehat{A}_w + \widehat{A}_w\widehat{A}_v,\end{aligned}$$

т. е. $\widehat{A}'_w := \widehat{A}_{Pw}$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и $\widehat{A}_w$.

Обозначим полученный автоморфизм через α_P.

Далее мы можем рассмотреть представление $\psi \circ \alpha_P$ алгебры Q_n. Но Q_n изоморфна матричной алгебре, а матричная алгебра имеет лишь одно неприводимое представление (см., например, [Bourbaki (1958)], VIII.1.1.3). Поэтому представления $\psi \circ \alpha_P$ и ψ эквивалентны. Следовательно, существует оператор $U(P) : \Lambda_n \to \Lambda_n$ такой, что

$$(\psi \circ \alpha_P)(B) = U(P)^{-1}\psi(B)U(P)$$

для любого $B \in Q_n$. Полагая $B = \widehat{A}_v$, мы получаем, что $U(P)$ — это не что иное как искомый оператор spin(P).

3.3. Конструкция Картана. Сначала мы заметим, что операторы рождения-уничтожения сами имеют вид spin( ).

Лемма 3.5. Пусть $v \in V_{2n}$, $L(v,v) \neq 0$. Обозначим через s_v следующий линейный оператор в пространстве V_{2n}:

$$s_v(w) = -w + 2\,\frac{L(v,w)}{L(v,v)}\,v. \tag{3.5}$$

Тогда

$$\text{spin}(s_v) = \hat{a}(v).$$

Замечание. s_v — симметрия относительно прямой λv, $\lambda \in \mathbb{C}$. В частности, $s_v \in O(2n,\mathbb{C})$.

Доказательство. Нужно проверить, что для всех $v \in V_{2n}$ выполнено равенство

$$\hat{a}(s_v w)\hat{a}(v) = \hat{a}(v)\hat{a}(w).$$

Учитывая, что $a(v)^2 = \frac{1}{2}L(v,v)E$, получаем, что левая часть равна

$$\left(-\hat{a}(w) + 2\,\frac{L(v,w)}{L(v,v)}\,\hat{a}(v)\right)\hat{a}(v) = -\hat{a}(w)\hat{a}(v) + L(v,w)\cdot E,$$

и теперь высказывание вытекает из равенства (1.22). ■

Лемма 3.6. Любой элемент группы $O(2n,\mathbb{C})$ представляется в виде произведения $s_{v_1}s_{v_2}\ldots s_{v_k}$.

Доказательство: см., например, [Bourbaki (1958)], IX.6.4. Мы для полноты приведем набросок доказательства.

Почти любой элемент $SO(2n,\mathbb{C})$ в подходящем базисе имеет блочно-диагональный вид, где на диагонали стоят блоки вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}, \quad \varphi_j \in \mathbb{C}. \tag{3.6}$$

Любая же матрица вида (3.6) представима как произведение двух симметрий. Поэтому почти любой элемент группы $SO(2n,\mathbb{C})$ представим в виде $s_{v_1}\ldots s_{2n}$. Рассматривая произведения таких элементов, мы уже получим всю группу $SO(2n,\mathbb{C})$. Любой же элемент из $O(2n,\mathbb{C}) \setminus SO(2n,\mathbb{C})$ имеет вид $s_v g$, где $g \in SO(2n,\mathbb{C})$. Лемма доказана. ■

Пусть теперь

$$g = s_{v_1} s_{v_2} \dots s_{v_k},$$

тогда в силу леммы 3.2 мы имеем

$$\operatorname{spin}(g) = \hat{a}(v_1)\hat{a}(v_2)\dots\hat{a}(v_k). \tag{3.7}$$

Таким образом, мы еще раз доказали теорему существования оператора $\operatorname{spin}(P)$, а кроме того, получили для этого оператора явную, хотя и не слишком удобную формулу.

3.4. Двузначность. Напомним, что в п. 3.1 операторы $\operatorname{spin}(g)$ были определены лишь с точностью до умножения на комплексную константу.

Теорема 3.7. Операторы $\operatorname{spin}(g)$ можно выбрать так, чтобы для любых g_1, g_2 было выполнено равенство

$$\operatorname{spin}(g_1 g_2) = \pm \operatorname{spin}(g_1)\operatorname{spin}(g_2). \tag{3.8}$$

Доказательство. Заметим, что отражение s_v (см. (3.5)) зависит не от самого вектора v, а от содержащей его прямой $\mathbb{C}\cdot v$. Поэтому мы можем выбрать v так, что $L(v,v) = 2$. Тогда оператор $\hat{a}(v)$ сохраняет билинейную форму $B(\cdot,\cdot)$ в Λ_n (см. следствие 1.9 из п. 1.12). Поэтому оператор $\operatorname{spin}(g)$, определенный формулой (3.7), сохраняет билинейную форму $B(\cdot,\cdot)$. Далее, оба оператора $\operatorname{spin}(g_1g_2)$ и $\operatorname{spin}(g_1)\operatorname{spin}(g_2)$ сохраняют билинейную форму B и при этом отличаются лишь числовым множителем. Тем самым этот множитель может быть лишь ±1. Теорема доказана. ■

Задача. Пусть g пробегает $SO(2n,\mathbb{C})$. Пусть G — группа операторов в Λ_n вида $\lambda \operatorname{spin}(g)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in SO(2n,\mathbb{C})$, сохраняющих форму $B(\cdot,\cdot)$. Покажите, что группа G связна. Выведите отсюда, что G — двулистное накрытие над $SO(2n,\mathbb{C})$, а также то, что представление spin группы $SO(2n,\mathbb{C})$ нельзя линеаризовать, т. е. ни при каком выборе операторов $\operatorname{spin}(g)$ не будет выполнено тождество $\operatorname{spin}(g_1g_2) = \operatorname{spin}(g_1)\operatorname{spin}(g_2)$.

Указание. Кривая

$$\gamma(s) = \left(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\left(e^{-is}\xi_1 + e^{is}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \in G,$$

где $0 \leqslant s \leqslant \pi$, связывает оператор E с $-E$.

3.5. Ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$. Мы переходим к изложению основной конструкции спинорного представления, которая и будет важна в дальнейшем. Читатель, безусловно, заметил, что между спинорными функциями и спинорным представлением есть какая-то аналогия.

Задача. Доказать, что для $g \in O(2n,\mathbb{C})$, $L \in \mathrm{Gr}_{2n}$ выполнено $\operatorname{spin}(g)\operatorname{spin}_L = \operatorname{spin}_{gL}$.

Теорема 3.8. Ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$ является спинорной функцией.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что операторы рождения-уничтожения переводят пространство Λ_n^+ четных функций в пространство Λ_n^- нечетных функций, а Λ_n^- — в Λ_n^+. Вспоминая конструкцию Картана, мы замечаем, что элементы $g \in SO(2n,\mathbb{C})$ представляются в виде произведения четного числа отражений s_{v_j}

(т. к. $\det(s_{v_j}) = -1$), а элементы $g \notin SO(2n,\mathbb{C})$ — в виде произведения нечетного числа отражений s_{v_j}. Поэтому в случае $g \in SO(2n,\mathbb{C})$

$$\operatorname{spin}(g)\Lambda_n^+ = \Lambda_n^+, \qquad \operatorname{spin}(g)\Lambda_n^- = \Lambda_n^-.$$

Следовательно, в случае $g \in SO(2n,\mathbb{C})$ ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$ является четной функцией. В случае же $g \notin SO(2n,\mathbb{C})$ ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$ является нечетной функцией.

Пусть $v = (v_1^+,\dots,v_n^+, v_1^-,\dots,v_n^-)$, $gv = w = (w_1^+,\dots,w_n^-)$. Тогда

$$\hat{a}(w)\operatorname{spin}(g) = \operatorname{spin}(g)\hat{a}(v). \tag{3.9}$$

Пусть $K(\xi,\eta)$ — ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$. Тогда равенства (3.9) в силу (1.11), (1.13), (1.16), (1.17) равносильны системе дифференциальных уравнений

$$\left(\sum w_j^+\xi_j + \sum w_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) K(\xi,\overline{\eta}) = \left(\sum v_j^+ \frac{\partial K}{\partial \overline{\eta}}(-\xi,-\eta) + \sum v_j^- \overline{\eta}_j K(-\xi,-\overline{\eta})\right).$$

Пусть, для определенности, $g \in SO(2n,\mathbb{C})$ и, следовательно, функция $K(\xi,\overline{\eta})$ четна. Тогда

$$\left(\sum w_j^+\xi_j + \sum w_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \sum v_j^-\overline{\eta}_j + \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}_j}\right) K(\xi,\overline{\eta}) = 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, мы имеем систему дифференциальных уравнений на функцию $K(\xi,\overline{\eta}) \in \Lambda_{2n}$. Нам остается убедиться, что это — система вида $\mathscr{X}_H$ (см. п. 2.3).

Введем в $\widetilde{V} = V_{2n} \oplus V_{2n}$ симметричную билинейную форму

$$\{(v,w),(v',w')\} = L(w,w') - L(v,v'). \tag{3.11}$$

Тогда график T оператора g является максимальным изотропным подпространством в $V_{2n} \oplus V_{2n}$; действительно,

$$\{(v,gv),(v',gv')\} = \{v,v'\} - \{gv,gv'\} = 0.$$

Далее, отождествим $\widetilde{V} = V_{2n} \oplus V_{2n}$ с V_{4n} по формуле

$$\tau : (\underbrace{v_+, v_-}_{\substack{\Cap \\ V_{2n}}}; \underbrace{w_+, w_-}_{\substack{\Cap \\ V_{2n}}}) \longleftrightarrow (\underbrace{w_+, -v_-}_{\substack{\Cap \\ V_{4n}^+}}; \underbrace{w_-, v_+}_{\substack{\Cap \\ V_{4n}^-}}).$$

Заметим, что форма (3.11) при этом отождествляется со стандартной формой L в V_{4n}. Остается заметить, что система (3.10) — это система $\mathscr{X}_{\tau T}$, что и завершает доказательство. ■

Важно заметить, что доказанная теорема вместе с теоремами 2.5—2.7 дает явные формулы для ядра оператора $\operatorname{spin}(g)$, см. пункт 3.7. Отметим также, что эта теорема дает еще одно доказательство существования спинорного представления (ссылки на конструкцию Картана в начале доказательства легко «убрать», в § 6 это проделывается в несколько большей общности).

3.6. Преобразование Потапова.

Предложение 3.9. Пусть $Y = Y_+ \oplus Y_-$, $Z = Z_+ \oplus Z_-$ — линейные пространства. Пусть $z_\pm \in Z_\pm$, $y_\pm \in Y_\pm$ и

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Пусть матрица D обратима. Тогда

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BD^{-1} & A - BD^{-1}C \\ D^{-1} & -D^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_- \\ y_+ \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Доказательство. В силу (3.12)

$$z_+ = Ay_+ + By_-, \quad z_- = Cy_+ + Dy_-.$$

Исключая y_-, получаем

$$y_- = D^{-1}z_- - D^{-1}Cy_+,$$
$$z_+ = BD^{-1}z_- + (A - BD^{-1}C)y_+,$$

что и требовалось доказать. ∎

Матрицу (3.13) мы будем называть *преобразованием Потапова* матрицы (3.12). Ниже мы увидим, что преобразование Потапова обладает целым рядом замечательных свойств.

Задача. Докажите, что в случае $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ преобразование Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ обладает следующими свойствами:

$$K = -K^t, \quad N = -N^t, \quad M = L^t.$$

3.7. Формула Березина.

Теорема 3.10. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$, причем матрица D обратима. Тогда оператор $\mathrm{spin}(g)$ имеет ядро

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} BD^{-1} & -(D^t)^{-1} \\ D^{-1} & -D^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar\eta^t \end{pmatrix}\right\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Мы позже обсудим этот вопрос подробнее и в большей общности. Сейчас лишь заметим, что для получения явной формулы из доказательства теоремы 3.8 нам не хватало только явного выражения, задающего подпространство τT как график оператора $V_{4n}^- \to V_{4n}^+$. Но именно это вычисление и проделано в п. 3.6. ∎

3.8. Некоторые действия с блочными матрицами.

Лемма 3.11. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$ — блочная матрица, причем блок D обратим. Тогда

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & BD^{-1} \\ & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & \\ & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ D^{-1}C & E \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Доказательство очевидно. ∎

Замечание. Сравните (3.13), (3.14) и (3.15).

Из этой формулы можно извлечь ряд полезных следствий. Во-первых,

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D)\det(A - BD^{-1}C). \tag{3.16}$$

Во-вторых, от каждой из матриц в правой части (3.15) легко вычислить обратную.

Задача. Вычислите.

В итоге мы получаем *формулу Фробениуса* для обращения блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & \\ & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ & E \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Эта формула не отличается особым изяществом, но бывает очень полезна.

Задача. Вычислите $\begin{pmatrix} A & E \\ E & B \end{pmatrix}^{-1}$.

3.9. Замечания. Еще один вывод формулы Березина.

Задача. Докажите непосредственно, что

$$\mathrm{spin}\begin{pmatrix} E & K \\ 0 & E \end{pmatrix} f(\xi) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} f(\xi), \tag{3.18}$$

$$\mathrm{spin}\begin{pmatrix} L^{-1} & \\ & L^t \end{pmatrix} f(\xi) = f(L\xi^t), \tag{3.19}$$

$$\mathrm{spin}\begin{pmatrix} E & 0 \\ M & E \end{pmatrix} f(\xi) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right\} f(\xi). \tag{3.20}$$

Теперь, разлагая произвольную ортогональную матрицу g в произведение (3.15) и вычисляя $\mathrm{spin}(\cdot)$ от каждого сомножителя по формулам (3.18)–(3.20), мы с помощью леммы 3.2 получаем явное выражение для оператора $\mathrm{spin}(g)$. Конечно при этом получится формула Березина (см. формулы (1.11), (1.17a)). В итоге мы получили еще один вывод формулы Березина, отсюда же несложно извлечь еще одно доказательство существования спинорного представления.

Задача. Докажите, что оператор

$$f(\xi) \mapsto \pm(\det(L))^{1/2} f(L\xi),$$

а также операторы (3.18), (3.20) сохраняют каноническую билинейную форму в Λ_n.

Следовательно, для того, чтобы сделать спинорное представление двузначным (см. теорему 3.7), нужно перед формулой Березина дописать

$$\pm(\det(D))^{-1/2}. \tag{3.21}$$

3.10. Литературные замечания. Спинорные представления ортогональных групп были обнаружены Э. Картаном [Cartan (1913)], см. также [Cartan (1938)]. Формула Березина была получена Ф. А. Березиным [Березин (1961)], см. также [Березин (1965)], впоследствии она была переоткрыта Сато, Дзимбо и Мивой [Sato, Miwa, Jimbo (1978)].

§ 4. Операторы Березина

4.1. Определения.

Определение 1. *Оператор Березина* $\Lambda_m \to \Lambda_n$ — это оператор, ядро которого является спинорной функцией. Иными словами, ядро должно иметь вид

$$\lambda \prod_{j=1}^{k} \Big(\sum a_{js}\xi_s + \sum \beta_{j\tau}\bar\eta_\tau\Big) \cdot \exp\Big\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\Big\}, \tag{4.1}$$

где $\lambda, \alpha_{js}, \beta_{j\tau} \in \mathbb{C}$, $K = -K^t$, $M = -M^t$, а $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$, $\eta = (\bar\eta_1 \ldots \bar\eta_m)$ — матрицы-строки.

Введем операторы

$$T_j^\xi = \xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad T_j^\eta = \eta_j + \frac{\partial}{\partial \eta_j}. \tag{4.2}$$

Заметим, что при $i \neq j$

$$(T_j^\xi)^2 = 1, \quad T_j^\xi T_i^\xi = -T_i^\xi T_j^\xi. \tag{4.3}$$

Определение 2. Оператор Березина $\Lambda_m \to \Lambda_n$ — это оператор, представимый в виде

$$A = \lambda T_{j_1}^\xi \ldots T_{j_\sigma}^\xi \mathscr{B}\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix} T_{i_1}^\eta \ldots T_{i_\mu}^\eta, \tag{4.4}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $\mathscr{B}\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}$ — это оператор с ядром вида

$$\exp\Big\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\Big\}. \tag{4.5}$$

Множество всех операторов Березина $\Lambda_m \to \Lambda_n$ мы обозначим $\mathrm{Ber}(\Lambda_m, \Lambda_n)$.

С операторами Березина мы уже встречались дважды. Во-первых, множество $\mathrm{Ber}(\Lambda_0, \Lambda_n)$ очевидным образом отождествляется с множеством Car_n спинорных функций в Λ_n. С другой стороны, мы видели (см. теорему 3.10), что операторы $\mathrm{spin}(g)$ являются операторами Березина.

4.2. Эквивалентность определений.

Предложение 4.1. Определения 1 и 2 п. 4.1 эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим функцию $K(\xi, \bar\eta)$ вида (4.1). Пусть A — соответствующий оператор. Учитывая, что T_j^ξ — оператор рождения-уничтожения, и теорему 2.1, мы получаем, что ядро $\big(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\big)K$ оператора $T_j^\xi A$ снова имеет вид (4.1).

Далее, ядро оператора AT_j^η

$$\bar\eta_j K(-\xi, -\bar\eta) + \frac{\partial K}{\partial \bar\eta_j}(-\xi, -\bar\eta) = \pm\left(\bar\eta_j - \frac{\partial}{\partial \bar\eta_j}\right) K(-\xi, -\bar\eta)$$

тоже имеет вид (4.1). Поэтому оператор Березина в смысле определения 2 является оператором Березина в смысле определения 1.

Далее, пусть A имеет ядро $K(\xi, \bar\eta)$ вида (4.1). Пусть слагаемое $\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_\sigma} \bar\eta_{i_1} \ldots \bar\eta_{i_\mu}$ входит в многочлен $K(\xi, \bar\eta)$ с ненулевым коэффициентом. Тогда ядро оператора

$$A' = T_{j_1}^\xi \ldots T_{j_\sigma}^\xi A T_{i_1}^\eta \ldots T_{i_\mu}^\eta$$

содержит ненулевой свободный член и по-прежнему имеет вид (4.1). Поэтому ядро A' имеет вид (4.5), и, учитывая равенства (4.3), мы получаем (4.4). ■

4.3. Умножение операторов Березина.

Задача. Докажите, что замыкание множества операторов вида $\lambda\,\mathrm{spin}(g)$, где $g \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$, есть $\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_n)$.

Учитывая, что множество $\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ замкнуто во множестве всех операторов $\Lambda_n \to \Lambda_m$ (так как $\mathbb{P}\mathrm{Car}_{m+n}$ компактно, см. теорему 2.2), мы в качестве следствия из задачи получаем

Предложение 4.2. Множество $\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_n)$ образует полугруппу относительно умножения.

Теорема 4.3. Пусть $A \in \mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_m)$, $B \in \mathrm{Ber}(\Lambda_m, \Lambda_k)$. Тогда $BA \in \mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_k)$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что если $K(\xi, \bar\eta)$, $L(\zeta, \bar\xi)$ — спинорные функции, то

$$\int L(\zeta, \bar\xi) K(\xi, \bar\eta)\, d\mu(\xi, \bar\xi)$$

— спинорная функция. Пусть $N = \max(m, n, k)$. Допишем каждый из наборов переменных $\xi_1, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \ldots, \eta_n$; $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ до наборов $\xi_1, \ldots, \xi_N$; $\eta_1, \ldots, \eta_N$; $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$. Теперь мы можем рассматривать $K(\xi, \bar\eta)$ как многочлен от $\xi_1, \ldots, \xi_N$; $\bar\eta_1, \ldots, \bar\eta_N$, а $L(\zeta, \bar\xi)$ — как многочлен от $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$; $\bar\xi_1, \ldots, \bar\xi_N$. Таким образом, утверждение свелось к случаю, когда $m = n = k = N$, а это — утверждение предложения 4.2. Теорема доказана. ■

Итак, мы получили какое-то умножение

$$\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_m) \times \mathrm{Ber}(\Lambda_m, \Lambda_k) \to \mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_k)$$

для любых m, n, k. При этом для любого n полугруппа операторов Березина в Λ_n, определенных с точностью до умножения на константы, содержит группу $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$. Наша следующая цель (§ 6) — описать эту алгебраическую структуру в простых терминах.

4.4. Замечания. Гауссов нечетный интеграл.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}, \theta_1, \ldots, \theta_{2n}$ — попарно антикоммутирующие переменные.

Теорема 4.4. Пусть $K = -K^t$ — невырожденная матрица размера $2n \times 2n$. Тогда

$$(\mathscr{B}) \int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t + \theta\xi^t\right\} d(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}) = \mathrm{Pfaff}(K) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\theta K^{-1}\theta^t\right\}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Пусть K произвольна. Представим K в виде $K = N\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}N^t$. Далее делаем замену переменных $\xi' = \xi N$. Тогда левая часть (4.6) переписывается в виде

$$(\det(N))(\mathscr{B})\int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi'\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}(\xi')^t+\theta(N^{-1})^t(\xi')^t\right\}d(\xi_1,\dots,\xi_{2n})=$$

$$=\det(N)\exp\left\{\tfrac{1}{2}\theta(N^{-1})^t\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}N^{-1}\theta^t\right\}.$$

■

Теорема 4.5. Пусть матрица $1-MP$ обратима. Тогда

$$\mathscr{B}\begin{pmatrix}K&L\\-L^t&M\end{pmatrix}\mathscr{B}\begin{pmatrix}P&Q\\-Q^t&R\end{pmatrix}=\operatorname{Pfaff}\begin{pmatrix}M&1\\-1&P\end{pmatrix}\mathscr{B}\begin{pmatrix}X&Y\\Z&U\end{pmatrix},\tag{4.7}$$

где

$$\begin{pmatrix}X&Y\\Z&U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K+L(1-PM)^{-1}PL^t & L(1-PM)^{-1}Q\\-Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R-Q^t(1-MP)^{-1}MQ\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Вычисляем свертку ядер с помощью формулы (4.6). ■

Операторы рождения-уничтожения, а значит, и их произведения, являются операторами Березина.

Задача. Докажите, что любой оператор Березина $\Lambda_n\to\Lambda_n$ разлагается в произведение операторов рождения-уничтожения.

4.5. Литературные замечания. Предложение 4.2 было получено в [Sato, Miwa, Jimbo (1978)]. Там же можно найти аналоги формулы (4.7) для общих операторов Березина в Λ_n. Общие операторы Березина $\Lambda_n\to\Lambda_m$ введены в [Неретин (1989.2)].

§ 5. Категории, функторы, представления категорий

5.1. Категории. Напомним, что такое категория. Чтобы определить категорию $\mathbf{K}$, нужно задать

а) некоторое множество $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, элементы которого называются *объектами* категории $\mathbf{K}$;

б) для любых двух объектов $V,W\in\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ определено множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V,W)$ (когда ясно, о какой категории идет речь, мы будем опускать индекс $\mathbf{K}$ и писать $\mathrm{Mor}(V,W)$), его элементы называются *морфизмами* из V в W;

в) для любых $P\in\mathrm{Mor}(V,V')$, $Q\in\mathrm{Mor}(V',V'')$ определено их *произведение* $QP\in\mathrm{Mor}(V,V'')$; умножение должно быть ассоциативным: для любых $P\in\mathrm{Mor}(V,V')$, $Q\in\mathrm{Mor}(V',V'')$, $R\in\mathrm{Mor}(V'',V''')$ должно быть выполнено $R(QP)=(RQ)P$;

г) обычно мы будем считать, что множество $\mathrm{Mor}(V,V)$ содержит элемент 1_V, называемый *единицей*, причем для любого $P\in\mathrm{Mor}(V,V')$ выполнено $P\cdot 1_V=P$, а для любого $Q\in\mathrm{Mor}(W,V)$ выполнено $1_V\cdot Q=Q$.

Пример. Определим категорию $\mathbf{A}$, объекты которой — конечномерные комплексные линейные пространства, а морфизмы — линейные операторы.

Пример. Объекты категории групп — группы. Морфизмы — гомоморфизмы групп (аналогично вводятся категории колец, алгебр, полей, полугрупп и т. д.).

Пример. Пусть G — фиксированная группа. Объекты категории представлений группы G — представления группы G, а морфизмы — сплетающие операторы (см. Предварительные сведения, § 5).

Пример. В п. 4.3 нам встретилась категория, объекты которой — грассмановы алгебры Λ_n, а морфизмы — операторы Березина. Сейчас нас интересует именно эта категория.

Множество $\mathrm{Mor}(V,V)$ — его мы будем тоже обозначать также через $\mathrm{End}(V)$ (или $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$) — является полугруппой. Элементы $\mathrm{End}(V)$ мы будем называть *эндоморфизмами*. Обратимые эндоморфизмы объекта V образуют группу $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$, ее элементы мы будем называть *автоморфизмами* объекта V.

Наконец, множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}$ всех морфизмов категории $\mathbf{K}$ образует так называемый группоид. Напомним, что *группоидом* называется множество с одной частично определенной операцией: некоторым парам элементов a,b группоида ставится в соответствие их произведение. При этом если определены произведения ab и $(ab)c$, то определены bc и $(ab)c$, и выполнено $(ab)c=a(bc)$.

Мы привыкли думать, что в математической иерархии категории стоят на ином уровне, чем группы, кольца, алгебры и т. д., см. например, [Шафаревич (1986)] (даже с формально-логической точки зрения обычно считают, что множество объектов категории — никакое не множество, а класс). В этой книге мы будем обходиться с категориями точно так же, как обходятся с группами, кольцами и т. п.

5.2. Пример: категория линейных отношений. Объектами этой категории являются линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ (пусть они будут конечномерными), а морфизмами $P:V\rightrightarrows W$ — *линейные отношения*, т. е. подпространства в $P\subset V\oplus W$.

Иногда такие подпространства являются графиками линейных операторов $V\to W$. В общем случае это не так, но полезно все-таки видеть в линейном отношении оператор $V\to W$, может быть, не всюду определенный, может быть, многозначный, но в остальном линейный. Кстати, в функциональном анализе операторы не обязаны быть всюду определенными (например оператор $\frac{d}{dx}$ в $L^2(\mathbb{R})$).

Если $P:V\rightrightarrows W$, $Q:W\rightrightarrows Y$ — линейные отношения, то определенно их произведение $QP:V\rightrightarrows Y$, а именно, $(v,y)\in V\oplus Y$ содержится в подпространстве QP, если существует $w\in W$ такой, что $(v,w)\in P$, $(w,y)\in Q$ (именно так и хочется определять произведение «многозначных отображений»).

У любого линейного отношения $P:V\rightrightarrows W$, так же, как у оператора, можно определить

а) *ядро* $\operatorname{Ker}P$ — множество всех $v\in V$ таких, что $(v,0)\in P$;

б) *образ* $\operatorname{Im}P$ — проекция P на W;

в) *область определения* $D(P)$ — проекция P на V;

Кроме того, введем

г) *неопределенность* $\operatorname{Indef}P$ — множество $w\in W$ таких, что $(0,w)\in P$; если P — график оператора, то $\operatorname{Indef}(P)=0$;

д) *ранг* $\mathrm{rk}(P)$:

$$\mathrm{rk}(P)=\dim D(P)-\dim\operatorname{Ker}P=\tag{5.1}$$
$$=\dim\operatorname{Im}P-\dim\operatorname{Indef}P=\tag{5.2}$$
$$=\dim P-\dim\operatorname{Ker}P-\dim\operatorname{Indef}P.\tag{5.3}$$

Задача. Докажите, что три величины (5.1)–(5.3) действительно совпадают.

Задача. Пусть P — график линейного оператора $A:V\to W$. Что такое $\operatorname{Ker}P$, $\operatorname{Im}P$, $\operatorname{Indef}P$, $D(P)$?

Задача. Докажите, что

$$\mathrm{rk}(QP)\leqslant\min(\mathrm{rk}(Q),\mathrm{rk}(P)).$$

Задача. Покажите, что умножение линейных отношений не является даже раздельно непрерывным (т. е. $P_j \to P$ не влечет $QP_j \to QP$). Важный вопрос: в каких именно точках Q, P операция умножения разрывна?

Задача. Пусть P, Q — линейные отношения $V \rightrightarrows V$. Что можно сказать о $\dim(QP)$, зная $\dim Q$ и $\dim P$? (Ответ: почти ничего.) Что можно сказать, если подпространства $P, Q \subset V \oplus V$ находятся в «общем положении»?

Пусть $P : V \rightrightarrows W$ — линейное отношение. Тогда подпространство $P \subset V \oplus W$ можно рассматривать как подпространство в $W \oplus V$, т. е. как линейное отношение $W \rightrightarrows V$. Это линейное отношение мы будем обозначать через $P^\square$ и называть линейным отношением, *псевдообратным* к P.

Задача. Пусть P — график обратимого оператора A. Покажите, что $P^\square$ — график оператора A^{-1}.

Задача. Покажите, что
$$(QP)^\square = P^\square Q^\square.$$

5.3. Представления категорий. *Ковариантным функтором* $\mathsf{F} = (F, \varphi)$ из категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{L}$ называется следующий набор данных:

а) отображение $F : \mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$;

б) набор отображений $\varphi_{V,W} : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(F(V), F(W))$, определенных для всех $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Эти отображения должны удовлетворять условию
$$\varphi_{V,Y}(PQ) = \varphi_{W,Y}(P)\varphi_{V,W}(Q), \qquad \varphi(1_V) = 1_{F(V)}.$$

Для определения *контравариантного функтора* из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{L}$ нужно задать отображение $F : \mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$ и для всех $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ нужно задать отображение $\varphi_{V,W} : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(F(W), F(V))$ так, что
$$\varphi_{V,Y}(PQ) = \varphi_{V,W}(Q)\varphi_{W,Y}(P), \qquad \varphi(1_V) = 1_{F(V)}.$$

Пример. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{Op}$ — категория линейных пространств и операторов, а $\mathbf{K}$ — категория ассоциативных алгебр и гомоморфизмов. Построим функтор $\Lambda : \mathbf{Op} \to \mathbf{K}$. Каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Op})$ мы ставим в соответствие внешнюю алгебру $\Lambda(V)$, а каждому оператору $A : V \to W$ — соответствующее естественное отображение внешних алгебр (см. пп. 1.3–1.4).

Представлением категории $\mathbf{K}$ называется ковариантный функтор $\mathsf{T} = (T, \tau)$ из категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{Op}$. Иными словами, каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ ставится в соответствие линейное пространство $T(V)$, а каждому морфизму $P : V \to W$ — оператор $\tau(P) : T(V) \to T(W)$ так, что для любых $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ выполнено
$$\tau(QP) = \tau(Q)\tau(P).$$

Контравариантные функторы из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{Op}$ мы будем называть *антипредставлениями.*

Пример. Пусть $\mathbf{F}$ — категория конечных множеств и отображений. Определим $T(X)$ — пространство функций на X, а $\tau(p)f(x) = f(p(x))$ для любого отображения $p : X \to Y$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — антипредставление.

Любой математик, порывшись в памяти, может вспомнить много примеров представлений категорий. Чтобы оживить воспоминания, приведем 3 примера (впрочем, очень далеких от основного содержания книги).

Пример 1. Пусть $\mathbf{K}$ — категория гладких n-мерных многообразий и гладких отображений. Рассмотрим пространство $T_k(M)$ дифференциальных форм степени k на многообразии M. Пусть $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Для любого $P \in \mathrm{Mor}(M, N)$ рассмотрим естественное отображение дифференциальных форм $\tau_k(P) : T_k(N) \to T_k(M)$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{K}$ — та же категория, а $H_k(M)$ — пространство k-х (дерамовских или любых других) когомологий многообразия. Пусть $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Для любого $P \in \mathrm{Mor}(M, N)$ рассмотрим естественное отображение $h_k(P) : H_k(N) \to H_k(M)$. Тогда $\mathsf{H} = (H, h)$ — представление категории $\mathbf{K}$.

Пример 3. Пусть множество $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ состоит из двух элементов V, W. Пусть $\mathrm{End}(V)$ и $\mathrm{End}(W)$ состоят из единичного элемента, $\mathrm{Mor}(V, W)$ состоит из двух элементов, а $\mathrm{Mor}(W, V)$ пусто. Задача о классификации представлений категории $\mathbf{K}$ — это в точности задача Кронекера о приведении к канонической форме пары операторов из V в W, см. [Гантмахер (1953)].

5.4. Проективные представления категорий. Задать *проективное представление категории* $\mathbf{K}$ — значит по каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ построить линейное пространство $T(V)$, а по каждому $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ — линейный оператор $\tau(P) : T(V) \to T(W)$ так, что для любых $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ выполнено
$$\tau(QP) = \lambda(Q, P)\tau(Q)\tau(P),$$
где $\lambda(Q, P) \in \mathbb{C}^*$ (подчеркнем, что $\lambda(Q, P)$ не обращается в 0 — это важно).

Примеров проективных представлений категорий в этой книге очень много, ближайший — в следующем параграфе. Пока мы сделаем одно банальное замечание.

5.5. Категория $\mathbf{A}^*$. Объекты этой категории — линейные пространства, а морфизмы — линейные операторы, определенные с точностью до умножения на ненулевую константу. Проективное представление категории $\mathbf{K}$ — это, по существу, то же самое, что функтор из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{A}^*$.

§ 6. *Категория* GD *и функтор* Spin

В п. 4.3 был сформулирован вопрос об описании алгебраической структуры, связанной с операторами Березина. Как мы видели (см. теорему 2.2), операторы Березина $\Lambda_m \to \Lambda_n$, определенные с точностью до умножения на константу, нумеруются точками грассманиана максимальных изотропных подпространств в $V_{2m} \oplus V_{2n}$. Встает вопрос о том, как записывается умножение операторов Березина на языке грассманианов.

6.1. Определение категории GD. Объекты категории $\mathbf{GD}$ — четномерные комплексные линейные пространства V, снабженные невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot, \cdot\}_V$.

Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$. Введем в $V \oplus W$ билинейную форму
$$\{(v, w), (v', w')\}_{V \oplus W} = \{v, v'\}_V - \{w, w'\}_W. \tag{6.1}$$

Морфизмы категории $\mathbf{GD}$ из V в W бывают двух типов:

а) максимальные изотропные подпространства в $V \oplus W$ (мы можем рассматривать их как линейные отношения, см. п. 5.2);

б) формальный элемент $\mathrm{null}_{V,W}$, чаще всего мы будем обозначать его просто через null; подчеркнем, что этому элементу не соответствует никакого подпространства в $V \oplus W$.

Теперь мы должны определить произведение QP морфизмов $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ и $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$. Во-первых, произведение null и любого другого морфизма равно null, т. е.

$$\mathrm{null}_{W,Y} \cdot P = \mathrm{null}_{V,Y}, \quad Q \cdot \mathrm{null}_{V,W} = \mathrm{null}_{V,Y}$$

для любых $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$. Пусть P и Q — линейные отношения. Если

$$\mathrm{Ker}(Q) \cap \mathrm{Indef}\, P = 0, \tag{6.2}$$

то Q и P перемножаются, как линейные отношения. Если же (6.2) не выполнено, то $QP = \mathrm{null}_{V,Y}$.

6.2. Комментарии.

А. Группа автоморфизмов. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$.

Лемма 6.1. Следующие условия на подпространство $P \subset V \oplus V$ равносильны:

а) $P \in \mathrm{Aut}(V)$;

б) P является графиком оператора, содержащегося в ортогональной группе $\mathrm{O}(V)$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{O}(V)$. Тогда для любых $v, v' \in V$ выполнено

$$\{gv, gv'\} = \{v, v'\}, \tag{6.3}$$

т. е. график P_g оператора g является изотропным подпространством в $V \oplus V$. При этом P_g имеет половинную размерность в $V \oplus V$, а значит, является максимальным изотропным подпространством.

Обратно, пусть $P \in \mathrm{Aut}(V)$. Пусть Q — обратный к P элемент. Тогда

$$\mathrm{Ker}\, P \subset \mathrm{Ker}\, QP = \mathrm{Ker}\, E = 0,$$
$$D(P) \supset D(QP) = D(E) = V,$$
$$\mathrm{Indef}\, P \subset \mathrm{Indef}\, PQ = \mathrm{Indef}\, E = 0.$$

Поэтому P — график некоторого оператора g; в частности, P имеет половинную размерность. При этом в силу изотропности P выполнено (6.3), что и завершает доказательство. ■

Замечание. Если $\dim V \neq \dim W$, то линейное отношение $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ не может быть ни графиком линейного оператора $V \to W$, ни графиком линейного оператора $W \to V$. В самом деле, $\dim P = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W)$. Тем не менее P, не будучи оператором, «сохраняет форму» в следующем смысле этого слова: если (v, w), $(v', w') \in P$, то

$$\{v, v'\} = \{w, w'\}. \tag{6.4}$$

В.

Лемма 6.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$. Тогда $(\mathrm{Ker}\, P)^{\perp} = D(P)$, $(\mathrm{Indef}\, P)^{\perp} = \mathrm{Im}\, P$ (в первом случае ортогональное дополнение берется в V, во втором — в W).

Доказательство. Проверим, например, первое равенство. Пусть $v \in \mathrm{Ker}\, P$, а $(p, q) \in P$. Так как $(v, 0) \in P$, мы имеем $\{v, p\} = 0$, т. е. $p \in (\mathrm{Ker}\, P)^{\perp}$. Включение $(\mathrm{Ker}\, P)^{\perp} \supset D(P)$ доказано. Обратно, если $v \in D(P)^{\perp}$, то, как легко видеть, вектор $(v, 0)$ ортогонален P, а следовательно, содержится в P, т. е. $v \in \mathrm{Ker}\, P$. ■

Следствие 6.3. Условие (6.2) равносильно условию

$$\mathrm{Im}\, P + D(Q) = W \tag{6.5}$$

Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Пусть $\dim V = 2n$, $\dim W = 2m$. Пусть $m > n$. Так как $\dim P$ равно $m + n$, то размерность $W \cap P = \mathrm{Indef}\, P$ не меньше $m - n$. Аналогично, если $m < n$, то $\dim(\mathrm{Ker}\, P) \geqslant n - m$.

С. Топология на $\mathrm{Mor}(V, W)$. Определим топологию на множестве $\mathrm{Mor}(V, W)$. На $\mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ это обычная топология грассманиана (напомним, что в п. 2.6 на грассманиане максимальных изотропных подпространств был построен атлас и тем самым введена структура гладкого многообразия, а значит, и топологического пространства). Точка null содержится в замыкании любой точки (или, что то же самое, null содержится лишь в одном открытом множестве — всем $\mathrm{Mor}(V, W)$). Конечно, эта топология неотделима.

D. Корректность. Тут возникает три вопроса:

α. Пусть P, Q — ненулевые морфизмы, $QP \neq \mathrm{null}$. Очевидно, что подпространство QP изотропно (см. (6.4)). Но *почему QP — максимальное изотропное подпространство*? Иными словами, *почему оно имеет максимальную возможную размерность*?

β. *Почему умножение ассоциативно*?

γ. *Почему умножение непрерывно*? Любопытно, что если бы мы не ввели null, а произведение морфизмов определили бы как умножение линейных отношений, то умножение не было бы непрерывным: непрерывность нарушалась бы как раз в тех точках, где не выполнено условие (6.2).

Все эти вопросы отпадут сами собой в § 7 (см. предложение 7.4).

6.3. Функтор Spin.

Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$, $\dim V = 2n$. Разложим V в прямую сумму $V = V_+ \oplus V_-$ максимальных изотропных подпространств. Выберем в $V_+ \oplus V_-$ базисы $e_1^+(V), \dots, e_n^+(V)$ и $e_1^-(V), \dots, e_n^-(V)$ так, что

$$\{e_i^+(V), e_j^+(V)\} = \{e_i^-(V), e_j^-(V)\} = 0, \quad \{e_i^+(V), e_j^-(V)\} = \delta_{ij}. \tag{6.6}$$

Координаты вектора $v \in V$ в этом базисе мы будем обозначать через $(v_1^+, \dots, v_n^+; v_1^-, \dots, v_n^-)$. Таким образом, V отождествляется с координатным пространством V_{2n} из п. 1.10, причем билинейные формы в V и V_{2n} тоже отождествляются.

Объекту $V \simeq V_{2n}$ категории $\mathbf{GD}$ мы поставим в соответствие пространство $\mathrm{Spin}(V) := \Lambda(V_+)$ — внешнюю алгебру на V_+ (или грассманову алгебру Λ_n). Вспомним, что каждому вектору v пространства $V \simeq V_{2n}$ ставится в соответствие оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$.

Теорема 6.4.

а) Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ — ненулевой морфизм. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор

$$\mathrm{spin}(P) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$$

такой, что

$$\hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(P) = \mathrm{spin}(P)\hat{a}(v) \tag{6.7}$$

для любых $(v, w) \in P$.

б) Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — ненулевые морфизмы. Тогда в случае $QP \neq \mathrm{null}$

$$\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P) = \lambda(P, Q)\,\mathrm{spin}(QP), \tag{6.8}$$

где $\lambda(P, Q) \in \mathbb{C}^*$; если же $QP = \mathrm{null}$, то

$$\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P) = 0. \tag{6.9}$$

Таким образом, отображение $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$, $\mathrm{null} \mapsto 0$ является проективным представлением категории **GD**.

Теорема 6.5. Отображение $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$ является биекцией $\mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ на множество ненулевых операторов Березина $\Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$, определенных с точностью до пропорциональности.

Операторы вида $\mathrm{spin}(P)$ нам уже встречались дважды: один раз — когда мы обсуждали спинорное представление группы $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$, второй раз — когда мы говорили о спинорных функциях. Действительно, в силу теоремы 2.2 прямая spin_L есть не что иное, как образ оператора $\mathrm{spin}(L)$, соответствующего морфизму $L : 0 \rightrightarrows W$ категории **GD** (оператор $\mathrm{spin}(L)$ действует из одномерной грассмановой алгебры Λ_0 в $\Lambda(V_+)$).

Лемма 6.6. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — ненулевые морфизмы. Пусть $QP = R$ — их произведение, вычисленное как произведение линейных отношений. Пусть $A : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$, $B : \Lambda(W_+) \to \Lambda(Y_+)$ — операторы такие, что

$$\hat{a}(w)A = A\hat{a}(v), \quad \hat{a}(y)B = B\hat{a}(w') \tag{6.10}$$

для любых $(v, w) \in P$, $(w', y) \in Q$. Тогда для любых $(v, y) \in R$ выполнено

$$\hat{a}(y)BA = BA\hat{a}(v).$$

Таким образом, утверждение а) теоремы 6.4 почти влечет б); мы говорим «почти», потому что условия обращения произведения $\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P)$ в 0 все равно придется проверять отдельно в п. 6.5.

Простейшее известное мне доказательство теоремы 6.4а намечено в замечаниях к этому параграфу; это доказательство не слишком конструктивно и плохо переносится на бесконечномерный случай, поэтому мы предпочитаем более сложный путь (см. следующий пункт).

Доказательство леммы. Пусть $(v, y) \in R$. Тогда существует вектор $w \in W$ такой, что $(v, w) \in P$, $(w, y) \in Q$. В силу (6.10) имеем

$$\hat{a}(y)BA = B\hat{a}(w)A = BA\hat{a}(v).$$

Лемма доказана. ■

В п. 6.7 мы получим явную формулу для ядра оператора $\mathrm{spin}(P)$; эта формула будет для нас очень важна, хотя и пригодна не во всех случаях. Две общие формулы для оператора $\mathrm{spin}(P)$ будут выведены в п. п. 6.8–6.9, эти формулы при чтении вполне можно опустить.

6.4. Доказательство теоремы существования и единственности.

Пусть $V \simeq V_{2n}$, $W \simeq V_{2m}$. Пусть $P \subset V \oplus W$ — максимальное изотропное подпространство, а $(v, w) \in P$. Обозначим через $K(\xi, \bar{\eta})$ ядро оператора $\mathrm{spin}(P)$. Тогда оператор $\hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(P)$ имеет ядро

$$\Bigl(\sum w_i^+ \xi_i + \sum w_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Bigr) K(\xi, \bar{\eta})$$

(мы использовали равенства (1.11), (1.13)). Оператор $\mathrm{spin}(P)\hat{a}(v)$ в силу равенств (1.16), (1.17) имеет ядро

$$\Bigl(\sum v_i^- \eta_i\Bigr) K(-\xi, -\bar{\eta}) + \sum v_i^+ \frac{\partial K}{\partial \bar{\eta}_i}(-\xi, -\bar{\eta}).$$

Поэтому ядро $K(\xi, \eta)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\Bigl(\sum w_i^+ \xi_i + \sum w_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Bigr) K(\xi, \bar{\eta}) = \Bigl(\sum v_j^- \bar{\eta}_j\Bigr) K(-\xi, -\eta) + \sum v_j^+ \frac{\partial K}{\partial \bar{\eta}_j}(-\xi, -\bar{\eta}). \tag{6.11}$$

Разложим ядро $K(\xi, \bar{\eta})$ в сумму четной и нечетной функций,

$$K(\xi, \bar{\eta}) = K_+(\xi, \bar{\eta}) + K_-(\xi, \bar{\eta}).$$

Тогда обе функции K_+ и K_- удовлетворяют дифференциальному уравнению (6.11). Но для этих двух функций система (6.11) может быть переписана в более простом виде

$$\Bigl(\sum w_i^+ \xi_i \mp \sum v_j^- \bar{\eta}_j + \sum w_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i} \pm \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\Bigr) K_\pm(\xi, \bar{\eta}) = 0. \tag{6.12$\pm$}$$

Это система дифференциальных уравнений вида $\mathscr{X}_L$ в Λ_{m+n} (см. п. 2.3), соответствующая подпространству $L_\pm \subset V_{2(m+n)}$, состоящему из векторов вида

$$\bigl((w_+, \mp v_-); (w_-, \pm v_+)\bigr) \in V^+_{2(m+n)} \oplus V^-_{2(m+n)},$$

где $\bigl((v_+, v_-); (w_+, w_-)\bigr) \in P \subset V \oplus W$. Хотя обе системы уравнений $(6.12)_+$ и $(6.12)_-$ имеют решения, из этих двух решений нас удовлетворяет лишь одно. Действительно,

$$\dim\bigl(L_+ \cap V^+_{2(m+n)}\bigr) = \dim\bigl(L_- \cap V^+_{2(m+n)}\bigr),$$

а значит (см. формулу (2.10)), четность решений систем $(6.12)_+$ и $(6.12)_-$ на самом деле одинакова. Поэтому системе (6.11) удовлетворяет решение ровно одной из двух систем $(6.12)_+$, $(6.12)_-$. Утверждение а) теоремы 6.1 доказано. ■

Доказательство теоремы 6.5. Пусть, для определенности, спинорная функция $K(\xi, \eta)$ четна. Тогда по этой функции выписывается система дифференциальных уравнений вида $\mathscr{X}_L$, где L — некоторое максимальное изотропное подпространство в $V_{2(m+n)}$. Тогда морфизм $P : V \to W$, соответствующий оператору Березина с ядром $K(\xi, \eta)$, состоит из векторов $\bigl((v_+, v_-), (w_+, w_-)\bigr) \in V \oplus W$ таких, что

$$\bigl((w_+, v_-), (w_-, -v_+)\bigr) \in L \subset V^+_{2(m+n)} \oplus V^-_{2(m+n)}.$$

■

6.5. Условия обращения произведения $\operatorname{spin}(Q)\operatorname{spin}(P)$ в 0.

Лемма 6.7. Пусть $w \in V_{2n}$ — ненулевой изотропный вектор. Тогда

$$\operatorname{Ker} \hat{a}(w) = \operatorname{Im} \hat{a}(w).$$

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь элемент $g \in O(2n, \mathbb{C})$, переводящий w в $(1, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0)$. Тогда

$$\operatorname{spin}(g)\hat{a}(w)\operatorname{spin}(g)^{-1} = \lambda\hat{a}(gw)$$

(где $\lambda \in \mathbb{C}^*$), и утверждение достаточно проверить для оператора

$$\hat{a}(gw)f = \xi_1 f,$$

а это уже очевидно. Лемма доказана. ■

Пусть теперь $\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P \neq 0$, а $w \neq 0$ содержится в этом пересечении. Тогда

$$0 = \hat{a}(0)\operatorname{spin}(Q) = \operatorname{spin}(Q)\hat{a}(w),$$
$$0 = \operatorname{spin}(P)\hat{a}(0) = \hat{a}(w)\operatorname{spin}(P),$$

отсюда

$$\operatorname{Ker}\operatorname{spin} Q \supset \operatorname{Im}\hat{a}(w) = \operatorname{Ker}\hat{a}(w) \supset \operatorname{Im}\operatorname{spin} P,$$

и мы получаем $\operatorname{spin} Q \operatorname{spin} P = 0$.

Доказательство обратного утверждения значительно сложнее. Мы сначала докажем его частный случай.

Лемма 6.8. Пусть $P \in \operatorname{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Пусть $L \subset V$ — максимальное изотропное подпространство (т. е. $L \in \operatorname{Mor}(0, V)$). Тогда следующие условия равносильны:

а) $(\operatorname{Ker} P) \cap L \neq 0$;

б) $\operatorname{spin}(P)\operatorname{spin}(L) = 0$ (или, что то же самое, $\operatorname{spin}(P)$ обращается в 0 на прямой $\mathbb{C} \cdot \operatorname{spin}_L$).

Доказательство. Утверждение а) $\Rightarrow$ б) только что доказано. Пусть выполнено б). Группа $O(V)$ действует транзитивно на $\operatorname{Mor}(0, V) \setminus \mathrm{null}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $L = V_-$, тем самым прямая spin_L состоит из констант.

Итак, предположим, что оператор $\operatorname{spin} P$ переводит 1 в 0. Ядро $K(\xi, \overline{\eta})$ оператора $\operatorname{spin} P$ имеет вид

$$l_1(\xi, \overline{\eta}) \dots l_s(\xi, \overline{\eta}) \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \quad \overline{\eta})\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \overline{\eta}^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{6.13}$$

где l_j — линейные выражения. Равенство $\operatorname{spin}(P) \cdot 1 = 0$ равносильно равенству $K(\xi, 0) = 0$, т. е.

$$l_1(\xi, 0) \cdot l_2(\xi, 0) \cdot \dots \cdot l_s(\xi, 0) = 0.$$

Поэтому линейные формы $l_1(\xi, 0), \dots, l_s(\xi, 0)$ линейно зависимы. Пусть, например, $\sum \alpha_j l_j(\xi, 0) = 0$. Но произведение $l_1(\xi, \overline{\eta}) \dots l_s(\xi, \overline{\eta})$ делится на любую линейную комбинацию форм $l_j(\xi, \eta)$, в частности, и на форму

$$\varphi(\xi, \overline{\eta}) = \sum \alpha_j l_j(\xi, \overline{\eta}).$$

Поэтому $\varphi(\xi, \overline{\eta})$ имеет вид $\sum p_j \overline{\eta}_j$. Следовательно, $K(\xi, \overline{\eta})\left(\sum p_j \overline{\eta}_j\right) = 0$. Но функция $K(\xi, \overline{\eta})\left(\sum p_j \overline{\eta}_j\right)$ является (см. (1.17)) ядром оператора

$$\operatorname{spin}(P) \cdot \left(\sum p_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right),$$

тем самым этот оператор равен 0. Оператор $\sum p_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}$ имеет вид $\hat{a}(u)$, где $u = (0, \dots, 0; p_1, \dots, p_n)$. Легко видеть, что пара векторов $w = 0$, $v = u$ удовлетворяет уравнению (6.7). Поэтому (см. задачи к теореме 2.2) вектор $(0, u)$ ортогонален к P. Но P — максимальное изотропное пространство, поэтому $(0, u) \in P$, или, что равносильно, $u = (0, \dots, 0; p_1, \dots, p_n) \in \operatorname{Ker} P$. Лемма доказана. ■

Предложение 6.9. Образ оператора $\operatorname{spin}(P) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ порожден всеми векторами вида spin_L, где L пробегает все максимальные изотропные подпространства в W, содержащие $\operatorname{Indef} P$.

Доказательство. Докажем, что для любого максимального изотропного подпространства $L \subset W$, содержащего $\operatorname{Indef} P$, прямая spin_L содержится в $\operatorname{Im}\operatorname{spin} P$. Рассмотрим подпространство $S = P^{\square}L \subset V$ (напомним, что $P^{\square}$ обозначает псевдообратное линейное отношение). Тогда S — максимальное изотропное подпространство в V. Но, к сожалению, $S \supset \operatorname{Ker} P$, и если $\operatorname{Ker} P \neq 0$, то $PS = \mathrm{null}$ в категории **GD** (хотя $PS = L$ в смысле произведения линейных отношений). Выберем в S какое-нибудь подпространство S_0, дополнительное до $\operatorname{Ker} P$, и далее выберем в V какое-нибудь максимальное изотропное подпространство $S' \supset S_0$ такое, что $S' \cap \operatorname{Ker} P = 0$. Тогда произведения PS, PS_0, PS' в смысле произведения линейных отношений совпадают. Поэтому $PS' = L$ в категории **GD**, а значит, по лемме 6.8 в равенстве

$$\operatorname{spin}(P)\operatorname{spin}(S') = \lambda \operatorname{spin}(L)$$

множитель λ отличен от 0. Итак, $\operatorname{spin}_L \subset \operatorname{Im}\operatorname{spin}(P)$ и, следовательно, $\operatorname{Im}\operatorname{spin} P$ содержит линейную оболочку Ω функций вида spin_L, где $L \supset \operatorname{Indef} P$. Включение же $\Omega \supset \operatorname{Im}\operatorname{spin} P$ очевидно (линейная оболочка спинорных функций под действием $\Lambda(V_+)$ совпадает с $\Lambda(V_+)$, а образ спинорной функции под действием $\operatorname{spin} P$ — спинорная функция). ■

Теперь мы готовы окончить доказательство теоремы 6.4б). Пусть $\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P = 0$. Возьмем максимальное изотропное подпространство $H \subset W$ такое, что $H \supset \operatorname{Indef}(P)$, $H \cap \operatorname{Ker} Q = 0$. Тогда $\operatorname{spin}_H \in \operatorname{Im}\operatorname{spin}(P)$, а $\operatorname{spin}(Q)\operatorname{spin}_H \neq 0$. Поэтому $\operatorname{spin}(Q)\operatorname{spin}(P) \neq 0$.

6.6. Преобразование Потапова.

Фиксируем в каждом $V \in \operatorname{Ob}(\mathbf{GD})$ разложение $V = V_+ \oplus V_-$ в прямую сумму двух максимальных изотропных подпространств.

Теорема 6.10. Пусть V, W — объекты **GD**. Пусть P — график оператора S из $W_- \oplus V_+$ в $W_+ \oplus V_-$. Тогда следующие условия равносильны:

а) $P \in \operatorname{Mor}(V, W)$;

б) матрица S имеет вид

$$S = S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}, \quad \text{где } K = -K^t,\ M = -M^t. \tag{6.14}$$

Доказательство. Теорема — прямое следствие предложения 2.3. В обозначениях предложения 2.3 мы имеем $Y_+ = W_+ \oplus V_-$, $Y_- = W_- \oplus V_+$. Здесь, однако, необходима некоторая осторожность, чтобы не запутаться в знаках. Спаривание $Y_+ = W_+ \oplus V_-$ с $Y_- = W_- \oplus V_+$ задается формулой

$$\langle (w_+, v_-); (w_-, v_+)\rangle := L(w_+, w_-) - L(v_-, v_+).$$

Транспонирование $S \mapsto S^{\mathrm{T}}$ относительно этого спаривания (см. Предварительные сведения, § 2) задается формулой

$$S^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $S \mapsto S^{\mathrm{t}}$ — транспонирование относительно спаривания

$$\{(w_+, v_-); (w_-, v_+)\} := L(w_+, w_-) + L(v_-, v_+).$$

Теперь условие $S = -S^{\mathrm{T}}$ дает в точности (6.14) (читатель, не склонный к инвариантному языку, может повторить рассуждения из доказательства предложения 2.3). ■

6.7. Явная формула для ядра оператора spin P**: простейший случай.** Мы переходим к выписыванию явных формул. На самом деле все необходимое для этого уже сделано в п. 6.4, а именно, там записана система дифференциальных уравнений на ядро оператора spin P. Решать же эти системы мы научились в пп. 2.3–2.6.

Теорема 6.11. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ и пусть P — график оператора

$$S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-.$$

Тогда ядро оператора spin(P) задается формулой

$$K(\xi, \eta) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\mathrm{t}} \\ \bar\eta^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}\right\} \tag{6.15}$$

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы 2.5. ■

Замечание. Отсюда вытекает формула Березина (3.14).

6.8. Первая общая явная формула. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Рассмотрим подпространство $\mathscr{T} := P \cap (W_+ \oplus V_-)$. Выберем какое-нибудь дополнение P° до $\mathscr{T}$ в P (т. е. $P = \mathscr{T} \oplus P^\circ$) и выберем какой-нибудь $P' \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ такой, что P' является графиком оператора

$$S(P') = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-$$

и, кроме того, $P' \supset P^\circ$. Выберем также в $\mathscr{T}$ какой-нибудь базис $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$, и запишем его в виде

$$\lambda_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j^+(W) + \sum_k \beta_{ik} e_k^-(V).$$

Теорема 6.12. Ядро оператора spin(P) при сформулированных выше предположениях задается формулой

$$\prod_{i=1}^{\sigma}\Big(\sum_j \alpha_{ij}\xi_j + (-1)^\sigma \sum_k \beta_{ik}\bar\eta_k\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & (-1)^\sigma L \\ -(-1)^\sigma L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\mathrm{t}} \\ \bar\eta^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}\right\}.$$

Доказательство. Теорема является следствием из теоремы 2.6. ■

6.9. Вторая общая явная формула. Пусть $e_1^+(V), \ldots, e_n^+(V)$, $e_1^-(V), \ldots, e_n^-(V)$ и $e_1^+(W), \ldots, e_m^+(W)$, $e_1^-(W), \ldots, e_m^-(W)$ — стандартные базисы в V и W. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, \delta_1, \ldots, \delta_n$ равны ± 1. Рассмотрим подпространство $V^+_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \subset V$, натянутое на $e_1^{\varepsilon_1}(V), \ldots, e_n^{\varepsilon_n}(V)$, и подпространство $V^-_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \subset V$, натянутое на $e_1^{-\varepsilon_1}(V), \ldots, e_n^{-\varepsilon_n}(V)$. Аналогично, рассмотрим подпространства $W^\pm_{\delta_1\ldots\delta_m} \subset W$, натянутые на $e_1^{\pm\delta_1}(W), \ldots, e_m^{\pm\delta_m}(W)$.

Теорема 6.13. Предположим, что $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ является графиком оператора

$$S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix} : W^-_{\delta_1\ldots\delta_m} \oplus V^+_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \to W^+_{\delta_1\ldots\delta_m} \oplus V^-_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}.$$

Тогда оператор spin(P) задается формулой

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{(1-\delta_j)/2} \cdot R \cdot \prod_{j=1}^{n}\left(\eta_j + \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right)^{(1-\varepsilon_j)/2}, \tag{6.17}$$

где R — оператор с ядром

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & (-1)^\sigma L \\ -(-1)^\sigma L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\mathrm{t}} \\ \bar\eta^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}\right\},$$

а $\sigma = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \delta_1 \ldots \delta_m$.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы 2.7. ■

Замечание. Любая из теорем 6.12, 6.13 влечет теорему 6.5.

6.10. Замечания.

A.

Задача. Опишите орбиты группы $\mathrm{O}(V) \times \mathrm{O}(W)$ на $\mathrm{Mor}(V, W)$. Покажите, что единственным инвариантом является ранг линейного отношения.

Задача. Покажите, что подпространство $\mathrm{Im}\,\mathrm{spin}\,P$ совпадает с множеством решений системы уравнений $\hat a(w) f = 0$, где w пробегает $\mathrm{Indef}\,P$.

Указание. Использовать предыдущую задачу.

Задача. Покажите, что ядро оператора spin(P) : $\Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ совпадает с суммой подпространств вида $\hat a(v)\Lambda(V_+)$, где v пробегает $\mathrm{Ker}\,P$.

B.

Задача. Пусть M — множество пар вида (P, Q), где $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y) \setminus \mathrm{null}$. Пусть группа $\mathrm{O}(V) \times \mathrm{O}(W) \times \mathrm{O}(Y)$ действует на M преобразованиями вида

$$(g_V, g_W, g_Y) : (P, Q) \to (g_W^{-1} P g_V, g_Y^{-1} Q g_W).$$

Покажите, что орбиты полностью определяются набором инвариантов

$$\dim \mathrm{Ker}\, Q, \quad \dim \mathrm{Indef}\, P, \quad \dim(\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P).$$

Задача. Вывести отсюда теорему 6.4.

§ 7. *Категория* GA

7.1. Однородные операторы Березина. Пусть $A : \Lambda_n \to \Lambda_m$ — линейный оператор. Мы скажем, что A — *однородный оператор* степени s, если $A\Lambda_n^k \subset \Lambda_m^{k+s}$ для всех k, т.е. A переводит однородные многочлены степени k в однородные многочлены степени $k+s$.

Ядро $K(\xi, \overline{\eta})$ однородного оператора степени s имеет вид

$$K(\xi, \overline{\eta}) = \sum a_{i_1\dots i_{\alpha+s}j_1\dots j_\alpha}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_{\alpha+s}}\overline{\eta}_{j_1}\dots\overline{\eta}_{j_\alpha}.$$

Иначе говоря, $K(\lambda\xi, \lambda^{-1}\overline{\eta}) = \lambda^s K(\xi, \overline{\eta})$.

Несложно проверить, что оператор Березина является однородным в том и только в том случае, когда его ядро имеет вид

$$K(\xi, \overline{\eta}) = \prod_{i=1}^{t}\Big(\sum \alpha_{ij}\xi_j\Big)\prod_{m=1}^{r}\Big(\sum \beta_{mk}\overline{\eta}_k\Big)\exp\{\xi L\overline{\eta}^t\}; \tag{7.1}$$

степень однородности оператора с таким ядром равна $t-r$.

Задача. Покажите, что оператор A с ядром (7.1) представим в виде произведения $A = BCD$, где

1. B — оператор умножения на $\prod_{i=1}^{t}\big(\sum \alpha_{ij}\xi_j\big)$;
2. C — оператор с ядром $\exp\{\xi L\overline{\eta}^t\}$, т.е. оператор замены переменной;
3. $D = \prod_{m=1}^{r}\big(\sum \beta_{mk}\frac{\partial}{\partial\eta_k}\big)$.

Очевидно, произведение однородных операторов Березина — снова однородный оператор Березина. Теперь мы можем задать себе тот же вопрос, что и в § 4: какая алгебраическая структура стоит за однородными операторами Березина?

7.2. Категория GA. Объекты категории **GA** — конечномерные комплексные линейные пространства. Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V, W)$ состоит из всевозможных линейных отношений $V \rightrightarrows W$, а также формального элемента $\mathrm{null} = \mathrm{null}_{V,W}$, который не отождествляется ни с каким линейным отношением.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(W, Y)$. Определим их произведение $QP \in \mathrm{Mor}(V, Y)$ по следующему правилу:

а) произведение null с чем угодно дает null:

$$\mathrm{null}_{W,Y} \cdot P = \mathrm{null}_{V,Y}, \quad Q \cdot \mathrm{null}_{V,W} = \mathrm{null}_{V,Y};$$

б) если $P \neq \mathrm{null}$ и $Q \neq \mathrm{null}$, и

$$\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P = 0, \tag{7.2}$$
$$\mathrm{Im}\, P + D(Q) = W, \tag{7.3}$$

то Q и P перемножаются как линейные отношения. В противном случае $QP = \mathrm{null}$.

Введем на $\mathrm{Mor}(V, W)$ неотделимую топологию. Для этого положим, что множество $\mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ снабжено топологией несвязного объединения $\dim V + \dim W$ грассманианов, а $\mathrm{null}_{V,W}$ содержится лишь в одном открытом множестве — всем $\mathrm{Mor}(V, W)$.

Предложение 7.1.
а) Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(W, Y)$, пусть $QP \neq \mathrm{null}$. Тогда

$$\dim QP = \dim P + \dim Q - \dim W. \tag{7.4}$$

б) Умножение морфизмов — непрерывная по совокупности переменных операция.

Доказательство.
а) Пусть $H = V \oplus W \oplus W \oplus Y$, а его подпространство Z состоит из векторов вида (v, w, w, y). Подпространство $T = Q \oplus P \subset H$ мы определим как множество всех векторов вида (v, w, w', y), где $(v, w) \in P$, $(w', y) \in Q$. В силу равенства (7.3) мы имеем $T + Z = H$. Таким образом $T \cap Z$ имеет размерность

$$\dim Z + \dim T - \dim H = \dim P + \dim Q - \dim W.$$

Пусть, далее, π — проектор в H на $V \oplus Y$ вдоль $W \oplus W$. Легко видеть, что $\pi(T \cap Z)$ — это в точности произведение QP. Более того, проекция π инъективна на $T \cap Z$. В самом деле, $\pi(v, w, w', y) = 0$ означает $v = 0$, $y = 0$, а $(v, w, w', y) \in Z$ означает, что $w = w'$, наконец $(0, w, w, 0) \in T$ значит, что w содержится в подпространстве $\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P$, которое в силу (7.2) равно 0. Утверждение а) доказано.

Утверждение б) следует из тех же рассуждений. ■

7.3. Двойственность. Обозначим через V' пространство, двойственное к V, т.е. пространство линейных функционалов на V.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V, W)$. Построим по P *двойственный* морфизм $P' \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V', W')$. Если P — ненулевой элемент, то P', по определению, состоит из всех пар $(f, g) \in V' \oplus W'$ таких, что $f(v) = g(w)$ для всех $(v, w) \in P$. Положим также $\mathrm{null}'_{V,W} = \mathrm{null}_{V',W'}$.

Двойственный морфизм можно описать чуть-чуть по-иному. Рассмотрим в $V \oplus W$ подпространство P°, состоящее из всех векторов вида $(v, -w)$, где $(v, w) \in P$. Тогда $P' \subset (V \oplus W)' = V' \oplus W'$ совпадает с аннулятором подпространства P° в $V \oplus W$ (см. Предварительные сведения, § 2).

Обозначим через $\mathrm{Ann}\, Q \subset H'$ аннулятор подпространства $Q \subset H$.

Лемма 7.2. Пусть $P : V \rightrightarrows W$, $Q : W \rightrightarrows Y$ — морфизмы категории **GA**. Тогда
а) $(P')' = P$;
б) $\dim P' + \dim P = \dim V + \dim W$; (7.5)
в) $\mathrm{Ker}\, P' = \mathrm{Ann}\, D(P)$, $D(P') = \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ker}\, P$, $\mathrm{Indef}\, P' = \mathrm{Ann}\,\mathrm{Im}\, P$, $\mathrm{Im}\, P' = \mathrm{Ann}\,\mathrm{Indef}\, P$;
г) $Q'P' = \mathrm{null}$ в категории **GA** тогда и только тогда, когда $QP = \mathrm{null}$ в категории **GA**;
д) $(QP)' = Q'P'$.

Доказательство.
а) $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, T = T$.
б), в) Упражнение по линейной алгебре.
г) Условия (7.2) и (7.3) при переходе к двойственному морфизму меняются местами.

д) Пусть Q, P, QP — ненулевые морфизмы. Пусть $(f'', f) \in Q'P'$. Тогда существует $f' \in W'$ такой, что $(f'', f') \in Q'$, $(f', f) \in P'$. Пусть (y, v) — произвольный элемент QP. Тогда существует $w \in W$ такое, что $(w, y) \in Q$, $(v, w) \in P$. По определению двойственного морфизма $f''(y) = f'(w) = f(v)$. Таким образом, $(f'', f) \in (QP)'$. Итак, $Q'P' \subset (QP)'$. С другой стороны, размерности $Q'P'$ и $(QP)'$ равны (см. Предложение 7.1), что завершает доказательство. ■

Лемма 7.3. Умножение морфизмов категории **GA** ассоциативно.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$, $R \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$. Пусть $R(QP) = \mathrm{null}$. Это значит, что выполнено одно из четырех условий:

1°. $\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P \neq 0$; $\quad 2^\circ$. $\mathrm{Ker}\, R \cap \mathrm{Indef}(QP) \neq 0$;

3°. $\mathrm{Im}\, P + D(Q) \neq W$; $\quad 4^\circ$. $D(R) + \mathrm{Im}\, QP \neq Y$.

Предположим сначала, что выполнено 1°. Очевидно, $\mathrm{Ker}(RQ) \supset \mathrm{Ker}\, Q$, поэтому $\mathrm{Indef}\, P \cap \mathrm{Ker}(RQ) \neq 0$ и, значит, $(RQ)P = \mathrm{null}$.

Пусть выполнено 2°. Тогда существует ненулевой вектор $y \in \mathrm{Indef}(QP) \cap \mathrm{Ker}\, R$. Возьмем $w \in W$ такой, что $(0, w) \in P$, $(w, y) \in Q$. Если $w = 0$, то $RQ = \mathrm{null}$. Пусть $w \neq 0$. При этом $(y, 0) \in R$, а поэтому $w \in \mathrm{Indef}\, P \cap \mathrm{Ker}(RQ)$.

Следовательно, $(RQ)P = \mathrm{null}$.

Случаи 3° и 4° сводятся к 1° и 2° с помощью перехода к двойственным морфизмам. ■

Предложение 7.4. Данное выше (п. 6.1) определение категории **GD** корректно.

Доказательство. Ассоциативность мы только что проверили. Если $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, W)$, а $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(W, Y)$, и $QP \neq \mathrm{null}$, то в силу предложения 7.1

$$\dim QP = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W).$$

Следовательно, изотропное подпространство QP имеет максимальную возможную размерность. ■

Задача. Пусть $V, W, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$. Пусть $P \subset V \oplus W$, $Q \subset W \oplus Y$ — максимальные изотропные подпространства. Тогда их произведение QP в смысле произведения линейных отношений является максимальным изотропным подпространством в $V \oplus Y$.

7.4. Фундаментальное представление категории GA. Построим сначала функтор $\mathrm{M} = (M, \mu)$ из категории **GA** в категорию **GD**. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$. Положим $M(V) = V \oplus V'$ и снабдим $M(V)$ симметричной билинейной формой

$$\{(v_1, f_1), (v_2, f_2)\} = f_1(v_2) + f_2(v_1),$$

тем самым $M(V)$ становится объектом категории **GD**.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Положим $\mu(P) := P \oplus P' \subset (V \oplus W) \oplus (V' \oplus W')$, положим, наконец $\mu(\mathrm{null}) = \mathrm{null}$. Функтор построен.

Композиция функтора Spin и функтора M дает нам проективное представление (Λ, λ) категории **GA**. Это представление мы будем называть *фундаментальным представлением категории* **GA** (происхождение названия станет ясно в § III.3).

7.5. Явная конструкция фундаментального представления. Итак, каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$ ставится в соответствие внешняя алгебра $\Lambda(V)$ на V. Опишем операторы $\lambda(P) : \Lambda(V) \to \Lambda(W)$. Разберем сначала 3 простых случая.

A. Пусть $L \subset V$ — подпространство. Пусть $T : V \rightrightarrows L$ — график вложения L в V. Выберем в V какой-нибудь базис $e_1, \ldots, e_n$ такой, что L натянуто на векторы $e_1, \ldots, e_m$. Пространство $\Lambda(V)$ мы отождествим с грассмановой алгеброй от переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$, а $\Lambda(L)$ — с грассмановой алгеброй от переменных $\eta_1, \ldots, \eta_m$. Тогда

$$\lambda(T) f(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_{m+1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \eta_n} f(\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

B. Пусть $R : L \rightrightarrows N$ — график оператора. Тогда $\lambda(R)$ — естественное отображение внешних алгебр, соответствующее этому оператору.

C. Пусть $N = W / K$, где K — подпространство, пусть $Q : N \rightrightarrows W$ — график проекции $W \to N$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_m$ в W так, чтобы K порождалось векторами $e_1, \ldots, e_\alpha$. Тогда $\lambda(Q)$ — оператор умножения на поливектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_\alpha$ (полезно заметить, что поливектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_\alpha$ определяется подпространством K лишь с точностью до умножения на константу, см. п. 1.5). Скажем то же самое чуть-чуть иначе. Пространство $\Lambda(W)$ отождествляется с алгеброй Λ_m от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_m$, а $\Lambda(N)$ — с алгеброй $\Lambda_{m-\alpha}$ от переменных $\xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_m$. Тогда $\lambda(Q)$ можно записать в виде

$$\lambda(Q) f(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \xi_1 \ldots \xi_\alpha f(\xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_m).$$

Во всех этих случаях нужно проверить, что $\lambda(\cdot)$ — те же операторы, что и в предыдущем пункте. Здесь проще всего проверить соотношения (6.7). Мы опускаем эти вычисления, потому что их проще провести, чем прочитать.

Задача. Проверьте последнее высказывание.

Пусть теперь $P : V \rightrightarrows W$ — произвольное линейное отношение. Тогда P разлагается в произведение $P = QRT$ следующих линейных отношений:

α) $T : V \rightrightarrows D(P)$ — график тождественного вложения $D(P) \to V$;

β) $R : D(P) \rightrightarrows W / \mathrm{Indef}\, P$, оно строится так: P содержится в $D(P) \oplus W$, а R — образ P при естественной проекции $D(P) \oplus W \to D(P) \oplus W / \mathrm{Indef}(P)$. Ясно, что R — график оператора $D(P) \to W / \mathrm{Indef}(P)$;

γ) $Q : W / \mathrm{Indef}\, P \rightrightarrows W$ — график проекции $W \to W / \mathrm{Indef}\, P$.

Теперь $\lambda(P) := \lambda(Q)\lambda(R)\lambda(T)$, а операторы $\lambda(Q)$, $\lambda(R)$, $\lambda(T)$ были описаны выше.

7.6. Явная формула для ядра оператора $\lambda(P)$. Пусть $P : V \rightrightarrows W$ — линейное отношение. Рассмотрим базис $e_1, \ldots, e_n$ в V и базис $f_1, \ldots, f_m$ в W. Пусть $p_1, \ldots, p_a$ — базис в $\mathrm{Ker}\, P$, $p_i = \sum \beta_{ij} e_j$, а $q_1, \ldots, q_b$ — базис в $\mathrm{Indef}\, P$, $q_i = \sum \alpha_{ik} f_k$. Рассмотрим подпространство $\tilde{P}$ в P, дополнительное к $\mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Indef}\, P$. Пусть A — некоторый оператор $V \to W$, график которого содержит $\tilde{P}$. Тогда ядро оператора $\lambda(P) : \Lambda(V) \to \Lambda(W)$ задается формулой

$$\prod_{i=1}^{a} \Big(\sum \alpha_{ik} \xi_k\Big) \prod_{i=1}^{b} \Big(\sum \beta_{ij} \bar{\eta}_j\Big) \exp\{(-1)^{a+b} \xi A \bar{\eta}^t\}.$$

Эта формула мгновенно следует из формулы для ядра (см. п. 6.8) оператора $\mathrm{spin}(\cdot)$.

§ 8. Представления категорий: терминология

8.1. Топологические категории. Пусть $\mathbf{K}$ — категория, и пусть на каждом множестве $\mathrm{Mor}(V, W)$ введена некоторая топология. Мы скажем, что $\mathbf{K}$ — *топологическая категория*, если для любых объектов V, W, Y и любых $P_0 \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q_0 \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ отображения $Q \mapsto QP_0$ из $\mathrm{Mor}(W, Y)$ в $\mathrm{Mor}(V, Y)$ и $P \mapsto Q_0P$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $\mathrm{Mor}(V, Y)$ непрерывны. Подчеркнем, что мы требуем лишь раздельную непрерывность умножения морфизмов.

Представления топологических категорий, естественно, должны удовлетворять каким-то требованиям непрерывности. Пусть $\mathrm{R} = (R, \rho)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Мы требуем, чтобы все пространства $R(V)$ были полными локально выпуклыми пространствами (см. определение в [Reed, Simon (1972)], § V.1), а все операторы $\rho(L)$ — ограниченными. Обозначим через $B(H_1, H_2)$ множество всех ограниченных операторов $H_1 \to H_2$. Функции $Q \mapsto \rho(Q)$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $B(T(V), T(W))$ должны быть непрерывными. Здесь, однако, может возникнуть двусмысленность: на множестве $B(T(V), T(W))$ существует несколько естественных топологий. Мы всегда будем считать, что на $B(T(V), T(W))$ введена слабая топология, т. е. слабейшая топология, в которой для любого $h \in T(V)$ и любого непрерывного линейного функционала l на $T(W)$ функция $\varphi_{h,l}(Q) = l(\rho(Q)h)$ непрерывна. Иными словами, мы требуем непрерывности всех «матричных элементов»

$$\varphi_{h,l}(P) = l(\rho(P)h)$$

представления $\mathrm{R} = (R, \rho)$.

Определим непрерывность проективного представления $\mathrm{R} = (R, \rho)$. Рассмотрим факторпространства $B(T(V), T(W)) / \mathbb{C}^*$ (мы отождествляем операторы A и λA, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$), и снабдим каждое из них естественной фактортопологией (см. [Bourbaki (1942)]), которая, кстати, неотделима. Все функции $Q \mapsto \rho(Q)$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $B(T(V), T(W))$ должны быть непрерывны.

8.2. Подпредставления. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть в каждом пространстве $T(V)$ выбрано замкнутое подпространство $A(V)$ так, что для любых $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ и $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ выполнено $\tau(P)A(V) \subset A(W)$. Тогда мы получаем следующее представление категории $\mathbf{K}$: каждому объекту V ставится в соответствие пространство $A(V)$, а каждому морфизму $P : V \to W$ — оператор $a(P)$ — ограничение оператора $\tau(P)$ на $A(V)$. В этом случае мы будем говорить, что $\mathrm{A} = (A, a)$ — *подпредставление* представления $\mathrm{T} = (T, \tau)$.

Представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ мы назовем *неприводимым*, если оно не имеет подпредставлений, отличных от самого себя и нулевого подпредставления.

Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть S — подмножество в некотором пространстве $T(V)$. Пусть $A(W)$ — замкнутая линейная оболочка множества всех векторов вида $\tau(P)h$, где $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, а $h \in S$. Несложно убедиться в том, что набор подпространств $A(W)$ задает подпредставление в T.

Задача. Докажите это.

Это подпредставление мы будем называть *циклической оболочкой* множества S.

8.3. Подчиненные представления. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Тогда в каждом пространстве $T(V)$ действует операторами $\tau(P)$ полугруппа $\mathrm{End}(V)$, а также группа $\mathrm{Aut}(V)$. Эти представления полугрупп $\mathrm{End}(V)$ и групп $\mathrm{Aut}(V)$ мы будем называть *представлениями, подчиненными* представлению T.

Лемма 8.1. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ неприводимо. Тогда все подчиненные представления полугрупп $\mathrm{End}(V)$ неприводимы.

Доказательство. Пусть $T(V)$ содержит $\mathrm{End}(V)$-инвариантное подпространство A. Тогда циклическая оболочка A — нетривиальное подпредставление в T. ∎

Замечание. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Оно, однако, верно для упорядоченных категорий, см. § III.4.

Задача. Приведите контрпример.

8.4. Прямые суммы. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ — подпредставления в T, и пусть для любого $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ выполнено

$$T(V) = A_1(V) \oplus A_2(V).$$

Тогда мы говорим, что T — *прямая сумма* подпредставлений $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$.

Мы говорим, что $\mathrm{T} = (T, \tau)$ *вполне приводимо*, если T разлагается в прямую сумму неприводимых подпредставлений $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$. Кстати, даже в конечномерном случае (т. е. в случае, когда все $T(V)$ конечномерны) количество этих A_j может быть бесконечным (если для любого V лишь конечное число пространств $A_j(V)$ отлично от 0).

Наконец, если есть набор *линейных* представлений $\mathrm{T}_i = (T_i, \tau_i)$ категории $\mathbf{K}$, то определена их *внешняя прямая сумма* $\mathrm{S} = (S, \sigma)$: пространства $S(V)$ суть $\bigoplus T(V_i)$, а операторы $\sigma(P)$ суть $\bigoplus \tau_i(P)$.

8.5. Сплетающие преобразования. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ и $\mathrm{T}' = (T', \tau')$ — два представления категории $\mathbf{K}$. *Сплетающим преобразованием* $A : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ мы назовем набор ограниченных операторов $A(V) : T(V) \to T'(V)$ такой, что для всех $V_1, V_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, $P \in \mathrm{Mor}(V_1, V_2)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(V_1) \arrow[r, "\tau(P)"] \arrow[d, "A(V_1)"'] & T(V_2) \arrow[d, "A(V_2)"] \\
T'(V_1) \arrow[r, "\tau'(P)"] & T'(V_2)
\end{tikzcd}$$

коммутативна (т. е. $\tau'(P)A(V_1) = A(V_2)\tau(P)$). Если мы имеем дело с проективными представлениями, то мы требуем, чтобы $\tau(P)A(V_1)$ и $A(V_2)\tau(P)$ совпадали с точностью до умножения на константу.

Задача. Пусть $A : \mathrm{T} = (T, \tau) \to \mathrm{T}' = (T', \tau')$ — сплетающее преобразование. Рассмотрим его график, т. е. в каждом пространстве $T(V) \oplus T'(V)$ возьмем график $\Gamma(V)$ оператора $A(V)$. Тогда Γ — подпредставление в $\mathrm{T} \oplus \mathrm{T}'$.

Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$, $\mathrm{T}' = (T', \tau')$ — представления категории $\mathbf{K}$, и пусть существуют сплетающие преобразования $A : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ и $B : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ такие, что $A(V)B(V) = E$, $B(V)A(V) = E$ для всех V. Тогда мы говорим, что *представления* T и T' *эквивалентны*.

Замечание. Наше определение эквивалентности является хорошим лишь в случае конечномерных представлений и $*$-представлений (см. ниже), в более общем случае оно неудачно. Мы уклонимся от обсуждения того, чем его можно было бы заменить.

8.6. $*$-представления. Пусть для любых $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ задано отображение $s : P \mapsto P^*$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $\mathrm{Mor}(W, V)$. Мы скажем, что s — *инволюция*, если выполнены тождества

$$P^{**} = P, \quad (PQ)^* = Q^*P^*.$$

Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Мы скажем, что T является *$*$-представлением*, если пространства $T(V)$ гильбертовы и для любого $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ выполнено

$$\tau(P)^* = \tau(P^*).$$

Лемма 8.2. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — некоторое $*$-представление категории $\mathbf{K}$, пусть A — его подпредставление. Выберем в каждом $T(V)$ подпространство $B(V)$ — ортогональное дополнение до $A(V)$. Тогда B — тоже подпредставление.

Доказательство. Пусть $v \in B(V)$. Для любого $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ и любого $w \in A(W)$ мы имеем

$$\langle Pv, w\rangle_W = \langle v, P^*w\rangle_V = 0,$$

так как $P^*w \in A(V)$. Поэтому $Pv \in B(W)$. ■

Назовем элемент $P \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$ *унитарным*, если $P^* = P^{-1}$ (или, иначе, $P^*P = PP^* = E$). Множество всех унитарных элементов $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$ мы обозначим через $\mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$. Ясно, что $\mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$ — подгруппа в $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$.

Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — линейное $*$-представление категории $\mathbf{K}$. Тогда подчиненное представление группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$, очевидно, является унитарным. Чуть менее очевидно следующее высказывание:

Лемма 8.3. Пусть T — проективное $*$-представление категории $\mathbf{K}$. Тогда для любого $P \in \mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$ оператор $\tau(P)$ унитарен с точностью до умножения на константу.

Доказательство. Действительно,

$$\tau(P)^*\tau(P) = \lambda \cdot \tau(P^*P) = \lambda\tau(1_V) = \lambda E,$$
$$\tau(P)\tau(P^*) = \mu \cdot \tau(PP^*) = \mu\tau(1_V) = \mu E$$

для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Далее заметим, что $\tau(P)^*\tau(P)$ и $\tau(P)\tau(P^*)$ — положительные самосопряженные операторы, поэтому $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

$$\lambda \cdot \tau(P) = \tau(P)(\tau(P)^*\tau(P)) = (\tau(P)\tau(P^*))\tau(P) = \mu \cdot \tau(P).$$

Следовательно, $\lambda = \mu$ и поэтому оператор $\lambda^{-\frac{1}{2}}\tau(P)$ унитарен. Лемма доказана. ■

8.7. Тензорное произведение. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ и $\mathsf{T}' = (T', \tau')$ — конечномерные представления категории $\mathbf{K}$ или $*$-представления категории $\mathbf{K}$. Определим их *тензорное произведение* $\mathsf{T} \otimes \mathsf{T}' = (T \otimes T', \tau \otimes \tau')$. Пространства $(T \otimes T')(V)$ суть $T(V) \otimes T'(V)$, операторы $(\tau \otimes \tau')(P) : T(V) \otimes T'(V) \to T(W) \otimes T'(W)$ суть $\tau(P) \otimes \tau'(P)$.

Определим далее *k-ю внешнюю степень* представления $\mathsf{T} = (T, \tau)$. Для этого положим (см. § G.4)

$$(\Lambda^k T)(V) := \Lambda^k(T(V)), \quad (\Lambda^k \tau)(P) := \Lambda^k \tau(P).$$

Точно так же определяется *k-я симметричная степень* представления.

8.8. Эквивалентность категорий. Пусть $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — две категории. Эти категории хотелось бы назвать *изоморфными*, если существует биекция $H : \mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \leftrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$ и набор биекций

$$h_{V,W} : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(H(V), H(W))$$

такой, что

$$h_{W,Y}(Q)h_{V,W}(P) = h_{V,Y}(QP)$$

для всех $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(W, Y)$, $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(V, W)$.

Это определение, однако, плохое.

Пример. Пусть $\mathbf{K}$ — категория конечномерных комплексных пространств и линейных операторов. Пусть $\mathbf{L}$ — категория, объекты которой натуральные числа, а морфизмы $m \to n$ — матрицы размера $m \times n$. Тогда $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ не изоморфны, потому что нет биекции $\mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \leftrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$.

Пусть $\mathbf{K}$ — категория. Назовем $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ *изоморфными*, если существует пара морфизмов $P : V \to W$, $Q : W \to V$ таких, что $PQ = 1$, $QP = 1$. Составим *«урезанную категорию»* $\mathbf{K}'$. Для этого из каждого класса изоморфных объектов $\mathbf{K}$ выберем по одному объекту. Это будет множество $\mathrm{Ob}(\mathbf{K}')$. Множества $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}'}(V, Y)$ совпадают с $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, Y)$.

Категории $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ мы назовем *эквивалентными*, если их урезанные категории изоморфны.

Пример. Категории $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ из предыдущего примера эквивалентны.

8.9. Подкатегории. Мы говорим, что категория $\mathbf{L}$ — *подкатегория* в $\mathbf{K}$, если $\mathrm{Ob}(\mathbf{L}) \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ и для любых $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$ выполнено $\mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(V, W) \subset \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W)$.

8.10. Факторпредставления. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть $\mathsf{A} = (A, \alpha)$ — его подпредставление. *Факторпредставление*

$$\mathsf{S} = (S, \sigma) = \mathsf{T} / \mathsf{A}$$

определяется следующим образом. Пространства $S(V)$ суть $T(V) / A(V)$, а операторы $\sigma(P) : T(V) / A(V) \to T(W) / A(W)$ суть естественные факторотображения, индуцированные отображениям $\tau(P) : T(V) \to T(W)$.

Глава III

Представления комплексных классических категорий

Эта глава посвящена классификации голоморфных представлений категорий **GD**, **GA** и нескольких близких к ним категорий, мы эти категории называем классическими в честь классических групп. Мы начинаем (§§ 1–2) с обсуждения голоморфных представлений классических групп $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$. Здесь основное утверждение — обманчиво простая теорема Эли Картана о старшем весе, которая дает простую параметризацию множества всех неприводимых представлений — объектов, которые сами по себе устроены совсем не просто. Здесь мы не можем дать систематического изложения предмета (см. книги [Weyl (1939)], [Serre (1966)], [Наймарк (1976)], [Dixmier (1974)], [Желобенко (1976)], [Adams (1969)]) и ограничиваемся изложением лишь одной, самой удобной для наших целей конструкции. Мы предполагаем известной теорию соответствия между группами Ли и алгебрами Ли, более специальных предварительных познаний не предполагается. Читателю, совсем не знакомому с предметом, лучше сначала прочитать §§ 1–2, имея в виду лишь алгебру A_n и не обращая внимания на остальные серии.

Результаты этой главы используются в дальнейшем сравнительно мало.

Слово «представление» везде в этой главе означает конечномерное представление.

§ 1. Представления комплексных классических групп: введение

1.0. Комплексные классические группы и алгебры Ли. Классическими комплексными алгебрами Ли называются алгебры, принадлежащие нижеперечисленным сериям A_n, B_n, C_n, D_n.

а) Алгебра $\mathrm{A}_n \simeq \mathfrak{sl}(n+1)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $(n+1)\times(n+1)$ с нулевым следом.

б) Алгебра $\mathrm{B}_n \simeq \mathfrak{so}(2n+1)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $(2n+1)\times(2n+1)$, сохраняющих симметричную билинейную форму. Нам будет

удобно считать, что матрица этой формы имеет вид $\begin{pmatrix} & & E_n \\ & 1 & \\ E_n & & \end{pmatrix}$, где E_n — единичная матрица размера $n\times n$.

в) Алгебра $\mathrm{C}_n \simeq \mathfrak{sp}(2n)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $2n\times 2n$, сохраняющих невырожденную кососимметричную билинейную форму. Мы будем считать, что матрица этой формы имеет вид $\begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}$.

г) Алгебра Ли серии $\mathrm{D}_n \simeq \mathfrak{so}(2n)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $2n\times 2n$ ($n \geqslant 2$), сохраняющих невырожденную симметричную билинейную форму; нам будет удобно считать, что матрица этой формы имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$.

Например, алгебра D_n состоит из всех блочных матриц размера $(n+n)\times(n+n)$ вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$, где $B=-B^t$, $C=-C^t$ (см. G.1.9). Переставляя в $\mathbb{C}^{2n}$ базисные элементы, мы можем сделать эту матрицу кососимметричной (как?).

Группы Ли, отвечающие алгебрам A_n, B_n, C_n, D_n — это соответственно группы $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ (см. Предварительные сведения). Группы $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ односвязны. Фундаментальная группа группы $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$ состоит из двух элементов, т. е. универсальная накрывающая группы $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$ двулистна (см. любой учебник по алгебраической топологии).

Задача*. Проверьте, что петля

$$\left(\begin{array}{cc|cc} e^{i\varphi} & & 0 & \\ & 0 & & E_n \\ \hline 0 & & e^{-i\varphi} & \\ & E_n & & 0 \end{array}\right), \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

является образующей фундаментальной группы группы $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$.

1.1. Картановские подалгебры. Пусть алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_{n-1}$, B_n, C_n, D_n реализованы как в п. 1.0. *Картановской подалгеброй* $\mathfrak{h}$ в A_{n-1}, B_n, C_n, D_n называется подалгебра, состоящая из всех диагональных матриц, т. е. соответственно подалгебра, состоящая из всех матриц вида

$$\Lambda_n; \quad \begin{pmatrix} \Lambda_n & & \\ & 1 & \\ & & -\Lambda_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \Lambda_n & \\ & -\Lambda_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \Lambda_n & \\ & -\Lambda_n \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(в случае $\mathfrak{sl}(n)$ выполнено $\sum \lambda_j = 0$).

Прежде всего мы хотим выяснить, как выглядит ограничение неприводимого представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$. Покажем сначала, что все операторы $\rho(X)$, где $X \in \mathfrak{h}$, одновременно диагонализируются в некотором базисе (алгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна, и наше высказывание, собственно, состоит в том, что операторы $\rho(X)$ не имеют жордановых клеток). Это можно сделать, работая лишь с алгебрами Ли (см. [Serre (1966)]), но мы предпочтем иной путь и временно перейдем к группам.

1.2. Унитарный прием Вейля. Пусть G — одна из групп $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$ или двулистная накрывающая группы $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$. Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G (т.е. соответственно $K = SU(n)$, $Sp(2n)$, $SO(k)$ или двулистная накрывающая группы $SO(k)$).

Теорема 1.1. Пусть ρ — голоморфное представление группы G, $\operatorname{Res}\rho$ — ограничение ρ на K. Тогда ρ и $\operatorname{Res}\rho$ имеют одни и те же подпредставления.

Замечание. Мы говорим, что представление ρ *голоморфно*, если операторнозначная функция $\rho(g)$ голоморфна, или, что равносильно, матричные элементы $\rho(g)$ голоморфно зависят от g.

Доказательство. Пусть V — некоторое K-инвариантное подпространство, W — дополнение до V. Запишем $\rho(g)$ как блочный оператор в $V \oplus W$:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} A_{11}(g) & A_{12}(g) \\ A_{21}(g) & A_{22}(g) \end{pmatrix}.$$

Операторнозначная функция $A_{21}(g)$ тождественно равна нулю на K (это равносильно K-инвариантности V). Поэтому в силу теоремы единственности для голоморфных функций (см. замечание ниже) $A_{21}(g) = 0$ на G, что и требовалось доказать. ■

Замечание. Пусть M — комплексное связное многообразие, а L — вещественное подмногообразие половинной размерности. Обозначим через $T_x(L)$ и $T_x(M)$ касательные пространства к L и M в точке $x \in L$. Пусть в некоторой точке $x \in L$ выполнено $T_x(M) = T_x(L) \oplus iT_x(L)$. Пусть f — голоморфная функция на M. Тогда условие $f(z) = 0$ на L влечет $f(z) = 0$ на M (см. любой учебник по многомерному комплексному анализу, например, [Шабат (1976)]). У нас $M = G$, $L = K$, а в качестве x можно выбрать $x = E$.

В качестве следствия мы получаем теорему

Теорема 1.2. Голоморфные представления комплексных классических групп вполне приводимы.

Доказательство. В самом деле, представления компактных групп вполне приводимы. ■

Прием, использованный при доказательстве этой теоремы, называется *унитарным приемом Г. Вейля.*

Вспоминая, что представления группы Ли и соответствующей алгебры Ли — это по существу одно и то же, мы можем переформулировать теорему в виде

Теорема 1.3. Представления классических алгебр A_n, B_n, C_n, D_n вполне приводимы.

Предложение 1.4. Пусть ρ — представление алгебры $\mathfrak{g} = A_{n-1}$, B_n, C_n, D_n. Ограничение ρ на картановскую подалгебру вполне приводимо.

Доказательство. Картановской подалгебре соответствует подгруппа $\mathbb{T}$ в $SL(n, \mathbb{C})$, $SO(2n+1, \mathbb{C})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$, $SO(2n, \mathbb{C})$, состоящая соответственно из матриц вида

$$M; \quad \begin{pmatrix} M & & \\ & 1 & \\ & & M^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} M & \\ & M^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} M & \\ & M^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}, \quad \mu_j \neq 0 \tag{1.1}$$

(в случае $SL(n, \mathbb{C})$ мы имеем $\mu_1\mu_2 \dots \mu_n = 1$). Во всех случаях группа $\mathbb{T}$ изоморфна произведению нескольких экземпляров группы $\mathbb{C}^*$.

Обсудим сначала случай $SL(n, \mathbb{C})$. Любое представление ρ алгебры A_{n-1} интегрируется до представления $\widetilde{\rho}$ группы $SL(n, \mathbb{C})$. Ограничим это представление на подгруппу $\mathbb{T}$ и покажем, что это ограничение вполне приводимо. Пусть $\mathbb{T}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{T}$ — подгруппа, состоящая из матриц вида (1.1) с $|\mu_j| = 1$. Теперь к комплексной группе $\mathbb{T}$ и ее компактной подгруппе $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ мы можем применить прием Вейля.

Случай $Sp(2n, \mathbb{C})$ ничем не отличается от рассмотренного. В случае же серий B_n и C_n нас интересуют не сами группы $SO(k, \mathbb{C})$, а их двулистные накрывающие. Подгруппа, соответствующая картановской подалгебре, — это или сама группа $\mathbb{T}$, или ее двулистная накрывающая (на самом деле выполнено второе, но нам это сейчас не интересно). Но двулистная накрывающая $\mathbb{T}$ сама представима в виде произведения групп $\mathbb{C}^*$, и мы снова можем применить трюк Вейля. ■

1.3. Веса и корни. Итак, рассмотрим неприводимое представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g} = A_n$, B_n, C_n, D_n в пространстве V. Как мы только что показали, ограничение $\operatorname{Res}\rho$ представления ρ на картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$ в некотором базисе состоит из диагональных операторов (алгебра $\mathfrak{h}$ абелева, поэтому ее неприводимые представления одномерны (см. Предварительные сведения, § 5), а с другой стороны, $\operatorname{Res}\rho$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений).

Ненулевой вектор $v \in V$ называется *весовым*, если для любого $h \in \mathfrak{h}$ выполнено $\rho(h)v = \lambda(h)v$, где $\lambda(h) \in \mathbb{C}$. *Веса́* представления ρ — это такие линейные функционалы $\mu(h)$ на $\mathfrak{h}$, что $\rho(h)w = \mu(h)w$ для некоторого $w \neq 0$. Если λ — вес представления, то *весовое подпространство* V_λ — это пространство всех векторов $v \in V$ таких, что $\rho(h)v = \lambda(h)v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Ясно, что

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda, \tag{1.2}$$

где суммирование ведется по всем весам представления (в самом деле, $\operatorname{Res}\rho$ диагонально в некотором базисе).

Корни алгебры $\mathfrak{g}$ — это ненулевые веса присоединенного представления. Весовые векторы присоединенного представления, отвечающие ненулевому весу α, называются *корневыми векторами*. Иными словами, вектор $x \in \mathfrak{g}$ является корневым, если для любого $h \in \mathfrak{h}$ выполнено $[h, x] = \lambda(h)x$, где $\lambda(h) \in \mathbb{C}$, и линейный функционал $\lambda(h)$ отличен от нуля. Подпространство в $\mathfrak{g}$ всех корневых векторов веса α обозначается через $\mathfrak{g}_\alpha$ и называется *корневым подпространством*.

Пусть $\mathfrak{g} = A_n$. Тогда корневые векторы — это просто матричные единицы E_{ij}, где $i \neq j$ (через E_{ij} обозначена матрица, у которой на ij-месте стоит 1, а остальные матричные элементы — нули). Корни — это линейные функционалы $\lambda_i - \lambda_j$ на $\mathfrak{g}$ (мы сохраняем обозначения п. 1.1).

Пусть $\mathfrak{g} = B_n$. Тогда корни суть $\lambda_i + \lambda_j$, $-\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_j$ $(i \neq j)$ и $\pm\lambda_j$.

В случае C_n корни суть $\lambda_i + \lambda_j$, $-\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_j$ (где $i \neq j$) и $\pm 2\lambda_j$.

Наконец, в случае D_n корни суть $\lambda_i + \lambda_j$, $-\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_j$ $(i \neq j)$.

Задача. Проверьте это.

Отметим, что во всех случаях подпространства $\mathfrak{g}_\alpha$ одномерны. Подпространство в $\mathfrak{g}$, состоящее из всех векторов веса 0, во всех случаях совпадает с $\mathfrak{h}$.

Предложение 1.5. Пусть ρ — представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Пусть $v \in V_\mu$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$. Тогда $\rho(x)v \in V_{\mu+\alpha}$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned}\rho(h)\rho(x)v &= \rho(x)\rho(h)v + \rho([h,x])v = \\ &= \rho(x)\mu(h)v + \rho(\alpha(h)x)v = \\ &= (\mu(h)+\alpha(h))\rho(x)v.\end{aligned}$$

■

Следствие 1.6. Пусть $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$. Тогда $[x,y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Доказательство: применяем предложение 1.5 к присоединенному представлению. ■

1.4. Пример: алгебра $A_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Рассмотрим в A_1 следующие элементы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm, \qquad [E_+, E_-] = H. \tag{1.3}$$

Картановская подалгебра натянута на H, а корневые векторы суть $E_\pm$. Пусть ρ — неприводимое конечномерное представление алгебры A_1 в пространстве V. Разложим его в сумму весовых подпространств $V = \bigoplus V_\beta$, где V_β состоит из всех $v \in V$ таких, что $\rho(H)v = \beta v$. Пусть s таково, что $V_s \neq 0$, а $V_\beta = 0$ при всех s таких, что $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re} s$. Пусть w_0 — ненулевой вектор из V_s. Тогда, по предложению 1.5, выполнено $\rho(E_+)w_0 \in V_{s+2}$, а значит, $\rho(E_+)w_0 = 0$. Рассмотрим набор векторов $w_j = E_-^j w_0$ (мы пользуемся обычной вольностью обозначений и оператор $\rho(X)$ обозначаем через X). Легко видеть, что

$$\begin{aligned}E_+w_j &= E_+E_-^j w_0 = \\ &= E_-E_+(E_-^{j-1}w_0) + [E_+,E_-]E_-^{j-1}w_0 = \\ &= E_-E_+(E_-^{j-1}w_0) + Hw_{j-1} = \\ &= E_-E_+E_-^{j-1}w_0 + (s-2(j-1))w_{j-1} = \\ &= E_-^2E_+E_-^{j-2}w_{j-2} + (s-2(j-2))w_{j-1} + (s-2(j-1))w_{j-1} = \\ &= E_-^jE_+w_0 + [s+(s-2)+\ldots+(s-2(j-1))]w_{j-1}.\end{aligned}$$

Итак,

$$E_-w_j = w_{j+1}, \quad Hw_j = (s-2j)w_j, \quad E_+w_j = j(s-j+1)w_{j-1}. \tag{1.4}$$

Из формул (1.4) видно следующее.

Во-первых, линейная оболочка векторов w_j является подпредставлением в V. Так как V неприводимо, то оно натянуто на векторы w_0, w_1 . . .

Далее, так как V конечномерно, то при достаточно больших j выполнено $w_j = 0$. Пусть $w_j = 0$, а $w_{j-1} \neq 0$. Тогда из последнего равенства (1.4) вытекает, что или $s = 0$, или $j = s+1$.

Итак, неприводимые представления $V(s)$ алгебры A_1 нумеруются целым параметром $s = 0, 1, 2, \ldots$. Размерность $V(s)$ равна $s+1$, и в некотором подходящем базисе w_0, $w_1 \ldots$, w_s представление задается формулами

$$\begin{aligned}Hw_j = (s-2j)w_j, \quad E_-w_k = w_{k+1}, \quad E_-w_s = 0, \\ E_+w_m = 2m(s-m+1)w_{m-1}, \quad E_+w_0 = 0,\end{aligned}$$

где $k \neq s$, $m \neq 0$.

Замечание. Опишем наше представление на уровне группы Ли $SL(2,\mathbb{C})$. Пусть $V(s)$ — пространство однородных многочленов от x, y степени s. Группа $SL(2,\mathbb{C})$ действует в $V(s)$ операторами вида

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x,y) = f(ax+by, cx+dy),$$

векторы w_j суть $\frac{s!}{(s-j)!}x^{s-j}y^j$. Алгебра Ли A_1 действует в $V(s)$ по формулам

$$H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_+ = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_- = y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Подробнее о представлениях $SL(2,\mathbb{C})$ см., например, [Cartan (1938)].

1.5. Повышающие и понижающие подалгебры. *Повышающую подалгебру* $\mathfrak{n}_+$ в $\mathfrak{g} = A_{n-1}$, B_n, C_n, D_n мы определим как подалгебру, состоящую соответственно из всех матриц вида

$$T; \quad \begin{pmatrix} T & l & P \\ 0 & 0 & -l^t \\ 0 & 0 & -T^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} T & Q \\ 0 & -T^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} T & P \\ 0 & -T^t \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где $P = -P^t$, $Q = Q^t$, а T — верхнетреугольная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{n-1,n} \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание. Переставив подходящим образом базисные элементы, мы можем сделать каждую из матриц (1.6) верхнетреугольной. Например, в случае серий C_n, D_n нужно сменить порядок $e_1, \ldots, e_{2n}$ базисных элементов на $e_1, \ldots, e_n, e_{2n}, e_{2n-1}, \ldots, e_{n+1}$.

Понижающая подалгебра $\mathfrak{n}_-$ состоит из всех матриц $S \in \mathfrak{g}$ таких, что $S^t \in \mathfrak{n}_+$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-. \tag{1.7}$$

При этом

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] = \mathfrak{n}_+. \tag{1.8}$$

Пусть α — корень, X_α — корневой вектор. Легко видеть, что либо $X_\alpha \in \mathfrak{n}_+$, либо $X_\alpha \in \mathfrak{n}_-$ (в этом можно убедиться перебором, можно и вывести из (1.7) и (1.8)). В первом случае мы называем корень *положительным*, во втором —

отрицательным. Множество всех корней мы обозначим через Δ, положительных корней — через Δ_+, отрицательных — через Δ_-. Легко видеть, что $\alpha \in \Delta_+$ равносильно $(-\alpha) \in \Delta_-$.

Перечислим положительные корни

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A}_n: & \lambda_i - \lambda_j,\ \text{где } i<j; & & \\ \mathrm{B}_n: & \lambda_i - \lambda_j,\ \text{где } i<j; & \lambda_i + \lambda_j,\ \text{где } i\neq j; & \lambda_j; \\ \mathrm{C}_n: & \lambda_i - \lambda_j,\ \text{где } i<j; & \lambda_i + \lambda_j; & 2\lambda_j; \\ \mathrm{D}_n: & \lambda_i - \lambda_j,\ \text{где } i<j; & \lambda_i + \lambda_j,\ \text{где } i\neq j. & \end{array}$$

Положительный корень α называется *простым*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in \Delta_+$.

Пример. Корень $\lambda_1 - \lambda_5$ в A_n не является простым: $\lambda_1 - \lambda_5 = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_5)$. Ясно, что простые корни в A_n суть $\mu_j = \lambda_{n+j-1} - \lambda_{n+j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Перечислим простые корни μ_j для остальных трех серий:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{B}_n: & \mu_j = \lambda_{n-j+1} - \lambda_{n-j+2},\ \text{где } n \geqslant j \geqslant 2; & \mu_1 = \lambda_n; \\ \mathrm{C}_n: & \mu_j = \lambda_{n-j+1} - \lambda_{n-j+2},\ \text{где } n \geqslant j \geqslant 2; & \mu_1 = 2\lambda_n; \\ \mathrm{D}_n: & \mu_j = \lambda_{n-j+1} - \lambda_{n-j+2},\ \text{где } n \geqslant j \geqslant 3; & \mu_\pm = \lambda_{n-1} \pm \lambda_n. \end{array}$$

Замечание. Опять-таки, может, было бы приятнее переупорядочить базис так, как это делалось выше, тогда во всех случаях, кроме D_n, простой корень был бы разностью соседних собственных значений матрицы $h \in \mathfrak{h}$.

Обозначим через $\mathfrak{h}'$ пространство линейных функционалов на $\mathfrak{h}$.

Предложение 1.7.

а) Простые корни образуют базис в $\mathfrak{h}'$.

б) Любой положительный корень $\beta \in \Delta$ представим в виде $\sum n_i \mu_i$, где μ_i — простые корни, а n_i — неотрицательные целые числа.

в) Пусть μ_i — простые положительные корни, а X_{μ_i} — некоторые корневые векторы. Тогда X_{μ_i} является системой образующих алгебры $\mathfrak{n}_+$.

Доказательство. Все проверяется перебором. Чтобы убедить читателя в очевидности в), обсудим случай $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$. Обозначим через E_{ij} матрицу, у которой на ij-м месте стоит 1, а остальные матричные элементы — нули. Простому корню $\mu = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ соответствует корневой вектор $E_{i,i+1}$. Далее

$$E_{i,i+2} = [E_{i,i+1}, E_{i+1,i+2}]; \quad E_{i,i+3} = [E_{i,i+1}, E_{i+1,i+3}]; \quad \text{и т. д.}$$

■

1.6. Теорема Картана о старшем весе.

Теорема 1.8. Пусть ρ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$, B_n, C_n, D_n в пространстве V. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой вектор $v \in V$ такой, что $\rho(p)v = 0$ для всех $p \in \mathfrak{n}_+$. При этом v является весовым вектором, и его вес $\alpha \in \mathfrak{g}'$ однозначно определяет представление ρ.

Вектор v называется *вектором старшего веса* представления, а линейный функционал α — *старшим весом* представления.

Введем в $\mathfrak{h}'$ частичное упорядочение. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — простые корни (напомним, что они образуют базис в $\mathfrak{h}'$). Мы скажем, что $\alpha \gg \beta$, если $\alpha - \beta = \sum t_j \mu_j$, где $t_j \geqslant 0$ (в частности, $t_j \in \mathbb{R}$). Старший вес — это максимальный из весов представления (в смысле нашего упорядочения).

1.7. Доказательство теоремы о старшем весе.

Лемма 1.9. Пусть ρ — конечномерное представление классической комплексной алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда существует ненулевой весовой вектор v такой, что $\rho(p)v = 0$ для всех $p \in \mathfrak{n}_+$.

Доказательство. Возьмем в множестве весов представления ρ какой-нибудь элемент α, максимальный относительно упорядочения, введенного в предыдущем пункте, тогда в качестве v можно выбрать любой вектор веса α (см. предложение 1.5). ■

Теорема 1.10. Пусть ρ — конечномерное представление классической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V, а $v \in V$ — ненулевой весовой вектор такой, что $\rho(q)v = 0$ для всех $q \in \mathfrak{n}_+$. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_N$ — все отрицательные корни, а $X_{\theta_1}, \ldots, X_{\theta_N}$ — корневые векторы. Тогда линейная оболочка M_v всех векторов вида

$$v_{p_1,\ldots,p_N} = X_{\theta_1}^{p_1} \ldots X_{\theta_N}^{p_n} v,$$

является неприводимым подпредставлением в V.

Следствие 1.11. Следующие утверждения равносильны:

а) представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ неприводимо;

б) существует единственный с точностью до пропорциональности весовой вектор v, удовлетворяющий условию $\rho(q)v = 0$ для всех $p \in \mathfrak{n}_+$.

Доказательство следствия. Пусть ρ приводимо. Тогда в каждом его подпредставлении есть по такому вектору. Обратно, пусть есть два таких непропорциональных вектора v и v' с весами λ и λ'. Но множества M_v и $M_{v'}$ не могут совпадать ($v \in M_{v'}$ влечет $\lambda \ll \lambda'$, а $v' \in M_v$ влечет $\lambda' \ll \lambda$, наконец, если $\lambda = \lambda'$, то $v \notin M_{v'}$, а $v' \notin M_v$). ■

Замечание. Это следствие дает способ проверки неприводимости представления. Другой способ дает сама теорема: иногда удается явно проверить, что M_v совпадает со всем представлением.

Доказательство теоремы 1.10. Векторы $v_{p_1,\ldots,p_N}$ являются весовыми, поэтому подпространство M_v инвариантно относительно $\mathfrak{h}$.

Обозначим через M_v^n множество всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{p_1+\ldots+p_N \leqslant n} c_{p_1\ldots p_N} v_{p_1\ldots p_N}.$$

Лемма 1.12. Пусть $p_1 + \ldots + p_N = n$. Тогда

$$X_{\theta_j} v_{p_1\ldots p_n} = v_{p_1\ldots p_{j-1}(p_{j+1}+1)p_{j+1}\ldots p_N} + h,$$

где $h \in M_v^n$.

Доказательство по индукции. Утверждение верно при $n = 0$. Пусть оно верно при $n = k$. Пусть p_α — первое из чисел p_i, отличное от нуля. В случае $j \leqslant \alpha$ наше высказывание очевидно. Пусть $j > \alpha$. Тогда

$$X_{\theta_j}\left(X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v\right) = X_{\theta_j}X_{\theta_\alpha}\left(X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v\right) =$$

$$= \left[X_{\theta_j}, X_{\theta_\alpha}\right]X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v + X_{\theta_\alpha}X_{\theta_j}\left(X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v\right)$$

Если вектор $\left[X_{\theta_j}, X_{\theta_\alpha}\right]$ отличен от нуля, то он является корневым, т. е. имеет вид X_{θ_k}. Теперь мы можем применить предположение индукции к первому слагаемому. В силу предположения индукции $X_{\theta_j}X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v$ представимо в виде

$$v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,\dots,p_j+1,\dots,p_N} + h',$$

где $h' \in M_v^{k-1}$. Но $X_{\theta_j}h' \in M_v^k$, и утверждение становится очевидным. ■

Лемма 1.13. Пусть $p_1 + \dots + p_N = n$. Тогда

$$X_{-\theta_j}v_{p_1\dots p_N} \in M_v^n.$$

Доказательство по индукции. Пусть утверждение верно при $n \leqslant k$. Пусть p_α — первое из чисел p_i, отличное от 0.

$$X_{-\theta_j}v_{0,\dots,0,p_\alpha,\dots,p_N} = X_{-\theta_j}X_{\theta_\alpha}v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,\dots,p_N} =$$

$$= \left[X_{-\theta_j}, X_{\theta_\alpha}\right]v_{0,\dots,p_\alpha-1,\dots,p_N} + X_{\theta_\alpha}\left(X_{-\theta_j}v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,\dots,p_N}\right).$$

Ко второму слагаемому применяем предположение индукции. По предположению индукции $X_{-\theta_j}v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,0,\dots,p_N} \in M_v^{k-1}$, а следовательно, по предыдущей лемме второе слагаемое лежит в M_v^k. Далее, $v_{0,\dots,p_\alpha-1,0,\dots,p_N} \in M_v^{k-1}$, а для $Y = [X_{-\theta_j}, X_{\theta_\alpha}]$ есть четыре возможности:

1. $Y = 0$ и тогда все очевидно;
2. $\theta_\alpha - \theta_j = 0$, следовательно, $Y \in \mathfrak{h}$, и этот случай тоже очевиден;
3. $\nu = \theta_\alpha - \theta_j \in \Delta_-$, тогда $Y \in \mathfrak{g}_\nu$, и мы применяем предположение индукции;
4. $\nu = \theta_\alpha - \theta_j \in \Delta_+$, тогда $Y \in \mathfrak{g}_\nu$ и мы применяем предыдущую лемму. ■

Из этих двух лемм следует, что $M_v = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_v^k$ является подпредставлением. Неприводимость M_v следует из леммы 5.5 предварительных сведений (для ее применения нужно или перейти к группам, или повторить доказательство для алгебр Ли). ■

Доказательство теоремы о старшем весе. Нам осталось проверить, что два модуля с одним старшим весом изоморфны. Итак, пусть ρ, ρ° — представления со старшим весом λ в пространствах V, V°, пусть v, v° — векторы старшего веса. Рассмотрим представление $\rho \oplus \rho^\circ$. Вектор $(v, v^\circ) \in V \oplus V^\circ$ имеет вес λ и аннулируется всеми операторами вида $\rho(p) \oplus \rho^\circ(p)$, где $p \in \mathfrak{n}_+$. Применим к (v, v°) теорему 1.10. Пусть $\widetilde{V}$ — циклическая оболочка вектора (v, v°). Тогда $\widetilde{V}$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным подпространством в $V \oplus V^\circ$, отличным от $V \oplus 0$ и $0 \oplus V^\circ$. Поэтому $\widetilde{V} \cap (V \oplus 0)$, $(0 \oplus V^\circ) \cap \widetilde{V}$ должны быть подпространствами соответственно в $V \oplus 0$ и $0 \oplus V^\circ$, в силу неприводимости V и V° эти пересечения равны 0. Аналогично проекции $\widetilde{V}$

на V и V° являются подпредставлениями в V и V° (как образы сплетающих операторов), а, значит, совпадают с V и V°. Итак, $\widetilde{V}$ — график оператора $V \to V^\circ$. Инвариантность $\widetilde{V}$ относительно $\mathfrak{g}$ равносильна тому, что этот оператор является сплетающим. Теорема доказана. ■

Подробнее о модулях со старшим весом см., например [Dixmier (1974)], глава VII.

1.8. Доминантные веса. Следующий вопрос: какие линейные функционалы могут быть старшими весами представлений?

Пусть α — корень алгебры $\mathfrak{g}$, а Y_α и $Y_{-\alpha}$ — ненулевые векторы в $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Пусть $K_\alpha = [Y_\alpha, Y_{-\alpha}]$. Ясно, что $K_\alpha \in \mathfrak{h}$; в самом деле, вес K_α в присоединенном представлении равен $(-\alpha) + \alpha = 0$ (см. предложение 1.5.). Итак,

$$[Y_\alpha, Y_{-\alpha}] = K_\alpha, \qquad [K_\alpha, Y_{\pm\alpha}] = \alpha(K_\alpha)Y_{\pm\alpha}.$$

Отсюда видно, что линейная оболочка $\mathfrak{J}_\alpha$ векторов Y_α, $Y_{-\alpha}$, K_α является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{J}_\alpha$ изоморфна $A_1 \simeq SL(2, \mathbb{C})$. Выберем в $\mathfrak{J}_\alpha$ базис так, чтобы выполнялись соотношения (1.3), для этого положим

$$H_\alpha = \frac{2}{\alpha(K_\alpha)}K_\alpha, \qquad E_{\pm\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\alpha(K_\alpha)}}\,Y_{\pm\alpha}.$$

Тогда

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \qquad [H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}.$$

Обсудим, как может быть устроено ограничение неприводимого представления ρ классической алгебры $\mathfrak{g}$ в конечномерном пространстве V на подалгебру $\mathfrak{J}_\alpha$. Для наших целей достаточно разобрать случай, когда α — простой корень.

Легко видеть, что верен следующий экспериментальный факт (во всех частных случаях он тривиален).

Лемма 1.14. Векторы вида H_{μ_i}, где μ_i — простые корни в $\mathfrak{g}$, образуют базис в $\mathfrak{h}$.

Предложение 1.15. Пусть λ — вес конечномерного (!) представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть μ_i — простой корень. Тогда $\lambda(H_{\mu_i}) \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. См. п. 1.4: в конечномерных представлениях алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ все веса — целые. ■

Введем в $\mathfrak{h}'$ следующие координаты: каждому $\lambda \in \mathfrak{h}'$ мы ставим в соответствие набор чисел $\left(\lambda(H_{\mu_1}), \dots, \lambda(H_{\mu_n})\right)$. Если λ — вес конечномерного представления, то его координаты, как мы только что видели, — целые числа. Множество всех векторов в $\mathfrak{h}'$ с целыми координатами обычно называется *решеткой весов* алгебры $\mathfrak{g}$.

Предложение 1.16. Пусть λ — старший вес (конечномерного) представления алгебры $\mathfrak{g} = A_n, B_n, C_n, D_n$, пусть μ_i — простые корни. Тогда $\lambda(H_{\mu_i}) \geqslant 0$.

Доказательство. В обозначениях п. 1.4 мы имеем $\lambda(H_{\mu_i}) = s$. ■

Доминантным весом алгебры $\mathfrak{g}$ называется линейный функционал λ на $\mathfrak{h}$ такой, что $\lambda(H_{\mu_i})$ — неотрицательные целые числа для всех простых корней μ_i.

Итак, мы видели, что старший вес неприводимого представления обязательно является доминантным. Следующий вопрос: верно ли обратное? Как мы сейчас увидим, ответ на этот вопрос положителен.

1.9. Фундаментальные веса. Рассмотрим два представления алгебры $\mathfrak{g}$ — представление ρ_1 со старшим весом λ_1 и вектором старшего веса v_1 и представление ρ_2 со старшим весом λ_2 и вектором старшего веса v_2. Рассмотрим их тензорное произведение. Ясно, что вектор $v_1 \otimes v_2$ аннулируется всеми операторами вида

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(p) = \rho_1(p) \otimes E + E \otimes \rho_2(p),$$

где $p \in \mathfrak{n}_+$, ясно также, что вес $v_1 \otimes v_2$ равен $\lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, циклическая оболочка вектора $v_1 \otimes v_2$ является неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом $\lambda_1 + \lambda_2$ (см. теорему 1.10).

Пусть λ — доминантный вес алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$, B_n, C_n, D_n. Поставим ему в соответствие набор целых неотрицательных чисел $\big(\lambda(H_{\mu_1}), \ldots, \lambda(H_{\mu_n})\big) \in \mathbb{Z}^n_+$, как в п. 1.8. Вес λ называется *фундаментальным*, если в этом наборе все числа — нули, за исключением одной единицы. В силу замечания, с которого мы начали этот пункт, для того, чтобы научиться строить все конечномерные представления алгебры $\mathfrak{g}$, нам достаточно научиться строить все представления, отвечающие фундаментальным весам. Это будет сделано в следующем параграфе. Представления, старшие веса которых фундаментальны, называются *фундаментальными*.

Перечислим все фундаментальные веса $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (нумерация весов соответствует нумерации простых корней из п. 1.5) для классических алгебр Ли:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{A}_n: & \psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}, & (0 \leqslant j \leqslant n-1); & \\
\mathrm{B}_n: & \psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}, & (1 \leqslant j \leqslant n-1); & \psi_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n); \\
\mathrm{C}_n: & \psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}, & (0 \leqslant j \leqslant n-1); & \\
\mathrm{D}_n: & \psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}, & (2 \leqslant j \leqslant n-1); & \psi_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} \pm \lambda_n).
\end{array}$$

1.10. Диаграммы Дынкина. Теория классических комплексных алгебр Ли включается в чуть более общую теорию простых алгебр Ли (алгебра Ли называется *простой*, если она не содержит нетривиальных идеалов). Великая классификационная теорема Киллинга (1888–1890) утверждает, что кроме классических алгебр $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ существует лишь 5 так называемых особых простых алгебр. Они обозначаются через $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$ и имеют соответственно размерности 14, 52, 78, 133, 248. Алгебры $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6$, интерпретируются в терминах линейной алгебры над числами Кэли (такая линейная алгебра, как известно, имеет смысл лишь в малых размерностях), для алгебр E_7 и E_8 это, вроде бы, не так.

Вопрос о том, как связана идеология настоящей книги с особыми математическими объектами (числами Кэли, особыми группами и алгебрами Ли, спорадическими конечными группами), выглядит совершенно осмысленно; я, однако, могу сказать мало вразумительного на эту тему.

Для простых алгебр Ли можно в абстрактных терминах определить картановские подалгебры, далее определяются веса, корни, простые корни и т. д. В каждой простой подалгебре Ли есть единственная с точностью до пропорциональности невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма $k(\cdot\,,\cdot)$ — так называемая форма Киллинга (инвариантность означает равенство $k([x, y], z) = k(y, [x, z])$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$). В классических алгебрах она задается формулой $k(p, q) = \mathrm{tr}(pq)$.

Ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{h}$ во всех алгебрах $\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ задается формулой

$$k\big((\lambda_1, \ldots, \lambda_n);\ (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)\big) = s \sum \lambda_j \lambda'_j,$$

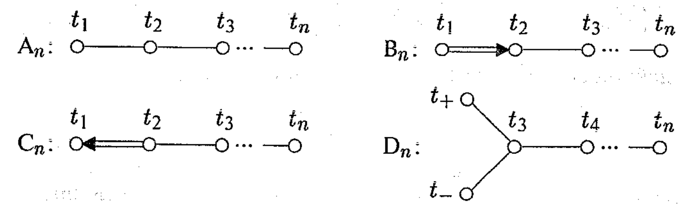
где λ_j — собственные числа матрицы Λ, см. п. 1.1, а $s > 0$.

Имея билинейную форму в $\mathfrak{h}$, мы, естественно, получаем и билинейную форму в $\mathfrak{h}'$. В частности, мы получаем и билинейную форму на решетке весов в $\mathfrak{h}'$. На решетке весов (или, точнее, на вещественном подпространстве, порожденном решеткой весов) эта билинейная форма (как легко видеть в случае $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$) положительно определена. При этом система корней алгебры $\mathfrak{g}$ образует очень красивую картинку в вещественном евклидовом пространстве $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ — пространстве линейных комбинаций корней с вещественными коэффициентами.

Задача. Нарисуйте эту картинку в случае A_2, $\mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_2$, $\mathrm{A}_3 = \mathrm{D}_3$, B_3, C_3.

Как заметил Е. Б. Дынкин, взаимное расположение простых корней в пространстве $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ полностью определяет простую алгебру Ли. А именно, каждому простому корню α ставится в соответствие вершина t_α некоторого графа. Вершины t_α и t_β соединяются $4\cos^2\varphi$ ребрами, где φ — угол между α и β; замечательно, что число $4\cos^2\varphi$ — всегда целое. Если корни α и β имеют разную длину, то в сторону длинного корня направляется стрелка.

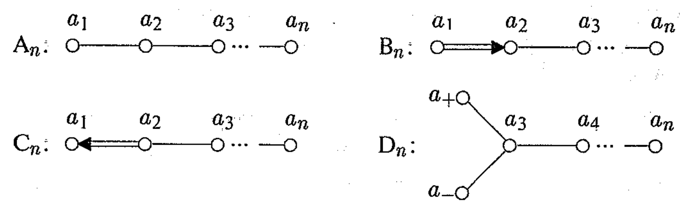
В случае A_n, B_n, C_n, D_n мы получаем



§ 2. Фундаментальные представления классических групп

Этот параграф содержит конструкции всех фундаментальных представлений классических групп. Доказательство неприводимости и вычисление старшего веса во всех случаях является несложным упражнением, и мы его в большинстве случаев опускаем (подробнее, см. [Adams (1969)]), о способах проверки неприводимости см. выше п. 1.7 (следствие 1.11 и следующее замечание).

2.1. Итак, каждому неприводимому конечномерному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ можно поставить в соответствие набор числовых отметок на диаграмме Дынкина



(2.1)

Это делается следующим образом. Пусть Λ — старший вес представления, пусть μ_α — простые корни. Тогда $a_\alpha = \Lambda(H_{\mu_\alpha})$.

Цель этого параграфа — построить все фундаментальные представления π_α алгебр $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ и соответствующих групп. Напомним, что все числовые отметки фундаментального представления π_α равны 0, кроме отметки a_α, которая равна 1.

Предположим, мы умеем строить все фундаментальные представления π_α алгебры $\mathfrak{g}$. Построим представление с набором числовых отметок $\{a_\alpha\}$. Для этого достаточно в тензорном произведении $\otimes\left(\pi_\alpha^{\otimes a_\alpha}\right)$ взять циклическую оболочку вектора старшего веса. Это и будет искомое представление.

2.2. Серия A_n**.** Пусть ρ — *тождественное* представление группы $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ (каждой матрице ставится в соответствие она сама). Фундаментальные представления группы $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$ — это просто внешние степени $\Lambda^1\rho = \rho$, $\Lambda^2\rho, \ldots, \Lambda^n\rho$ представления ρ.

В самом деле, рассмотрим грассманову алгебру Λ_{n+1} от антикоммутирующих переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$. Пространство $\Lambda^k(\mathbb{C}^{n+1})$ мы реализуем как пространство Λ^k_{n+1} многочленов степени k от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$. Группа $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$ действует в Λ^k_{n+1} заменами переменных

$$\left(\Lambda^k\rho(P)\right)f(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = f\left(\sum p_{1j}\xi_j, \ldots, \sum p_{(n+1),j}\xi_j\right),$$

алгебра Ли действует в Λ^k_n дифференциальными операторами вида

$$\sum q_{ij}\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

При этом элементам E_{ij} (где $j > i$) повышающей подалгебры соответствуют операторы $\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}$. Легко видеть, что вектор $\xi_1\xi_2\ldots\xi_k$ аннулируется всеми операторами вида $\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ при $i < j$, а его вес равен $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.

Задача.

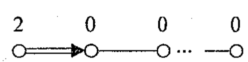
а) Докажите, что $\xi_1\xi_2\ldots\xi_k$ — единственный вектор в Λ^k_{n+1}, аннулируемый операторами $\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ при $i < j$.

б) Докажите, что циклическая оболочка вектора $\xi_1\ldots\xi_k$ совпадает со всем пространством Λ^k_{n+1}.

Из любого из утверждений а), б) задачи вытекает неприводимость представления $\Lambda^k\rho$, см. Следствие 1.11. Итак, в нумерации п. 1.9 фундаментальные представления π_j суть $\Lambda^{n+1-j}\rho$.

2.3. Серия B_n**.** Пусть ρ — тождественное представление группы $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}^{2n+1}$. Тогда фундаментальные представления $\pi_n, \pi_{n-1}, \ldots, \pi_2$ (нумерация п. 1.9) суть $\rho, \Lambda^2\rho, \Lambda^3\rho, \ldots, \Lambda^{n-1}\rho$.

Задача. Докажите, что представление $\Lambda^n\rho$ неприводимо и имеет числовые отметки



Задача. Докажите, что $\Lambda^{n+k}\rho$ эквивалентно $\Lambda^{n-k+1}\rho$.

Решение. В самом деле, пусть V — некоторое m-мерное линейное пространство. Тогда пространства $\Lambda^j V$ и $\Lambda^{m-j}V$ двойственны (действительно, умножая $f \in \Lambda^j V$ на $g \in \Lambda^{m-j}V$, получаем $fg \in \Lambda^m V$, а $\dim \Lambda^m V = 1$, и мы получаем билинейное спаривание $\Lambda^j V \times \Lambda^{m-j}V \to \Lambda^m V \simeq \mathbb{C}$; легко видеть, что это спаривание невырожденно). С другой стороны, двойственное пространство $(\Lambda^j V)'$ отождествляется с $\Lambda^j V'$. У нас же в $V \simeq \mathbb{C}^{2n+1}$ введена невырожденная билинейная форма $\{\cdot,\cdot\}$, а тем самым V отождествляется с V' (каждому элементу $v \in V$ ставится в соответствие линейный функционал l_v по формуле $l_v(w) = \{v, w\}$). Таким образом, $\Lambda^j V$ отождествляется с $\Lambda^{2n+1-j}V$.

2.4. Серия C_n**.** Пусть ρ — тождественное представление группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, пусть, как и прежде, группа $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ состоит из всех операторов в $\mathbb{C}^{2n}$, сохраняющих форму $\{\cdot,\cdot\}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Поставим в соответствие базисным элементам $e_1, \ldots, e_{2n}$ пространства $\mathbb{C}^{2n}$ антикоммутирующие переменные $\xi_1^+, \ldots, \xi_n^+, \xi_1^-, \ldots, \xi_n^-$. Пусть Λ_{2n} — грассманова алгебра от переменных $\xi_j^\pm$. Рассмотрим действие группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ в Λ^k_{2n}, где $k \leqslant n$. Легко проверяется, что вектор $\xi_1^+\ldots\xi_k^+$ является вектором старшего веса $\psi_{n-k+1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, тем самым его циклическая оболочка W_{n-k+1} является фундаментальным представлением π_{n-k+1} группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$.

Задача. Пусть $Q_k : \Lambda^k_{2n} \to \Lambda^{k+2}_{2n}$ — оператор умножения на $\sum_j \xi_j^+\xi_j^-$.

а) Покажите, что Q_k — сплетающий оператор.

б) Покажите, что факторпредставление группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ в $\Lambda^k_{2n} / \operatorname{Im} Q_{k-1}$ неприводимо и эквивалентно π_{n-k+1}.

в) Покажите, что W_{n-k+1} есть ядро оператора $\sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j^+}\frac{\partial}{\partial \xi_j^-}$.

г) Покажите, что $\Lambda^{n\pm k}_{2n}$ разлагается в сумму $\pi_k \oplus \pi_{k+2} \oplus \ldots$.

2.5. Серия D_n**.** Пусть снова ρ — тождественное представление $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$, пусть группа $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ состоит из операторов, сохраняющих форму $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Снова поставим в соответствие базисным элементам $e_1, \ldots, e_{2n}$ антикоммутирующие переменные $\xi_1^+, \ldots, \xi_n^+, \xi_1^-, \ldots, \xi_n^-$.

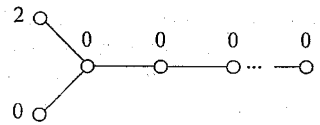
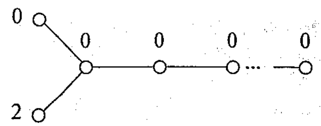
Фундаментальное представление π_k группы $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ при $k > 2$ есть $\Lambda^{n-k+1}\rho$, вектор старшего веса есть $\xi_1^+\ldots\xi_{n-k+1}^+$.

Обсудим, хотя это нам и не понадобится, что происходит в остальных внешних степенях.

Задача. Покажите, что $\Lambda^{n-1}\rho$ неприводимо и имеет старший вес $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = \psi_+ + \psi_-$ (обозначения п. 1.9).

Задача. Покажите, что векторы $v_+ = \xi_1^+\ldots\xi_{n-1}^+\xi_n^+$ и $v_- = \xi_1^+\ldots\xi_{n-1}^+\xi_n^-$ являются единственными векторами старшего веса в $\Lambda^n\rho$.

Простое вычисление показывает, что их веса равны $2\psi_\pm = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} \pm \lambda_n$, т. е. $\Lambda^n\rho$ разлагается в сумму двух представлений с числовыми отметками

Рассмотрим в Λ_{2n} оператор I (в литературе по дифференциальной геометрии его обычно обозначают через $*$) с ядром

$$K(\xi,\bar\eta)=\prod_{j=1}^{n}(\xi_j^- + \eta_j^+)\times\prod_{j=1}^{n}(\xi_j^+ + \bar\eta_j^-).$$

Этот оператор переставляет подпространства Λ_{2n}^{n-j} и Λ_{2n}^{n+j}.

Задача. Покажите, что $\Lambda^{n+j}(\rho(g))\,I=\det(g)\cdot I\cdot\Lambda^{n-j}\rho(g)$.

В частности, ограничение $I_{(n)}$ оператора I на Λ_{2n}^n является $SO(2n,\mathbb{C})$-сплетающим оператором в Λ_{2n}^n. Непосредственная проверка показывает, что $I_{(n)}^2=E$. Представления $\mu_\pm$ реализуются в собственных подпространствах оператора $I_{(n)}$, отвечающих собственным числам ±1.

2.6. Спинорные представления. Итак, для серий B_n и D_n мы с помощью внешних степеней не смогли получить все фундаментальные представления. Три непостроенных представления (π_1 для B_n и $\pi_\pm$ для D_n) являются двузначными (т. е. являются линейными представлениями для двулистных накрывающих B_n и D_n) и поэтому не могут быть получены тензорными операциями из однозначного тождественного представления. Начнем с серии D_n.

Как мы видели в п. II.3.9, операторы $\mathrm{spin}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ (двузначного) спинорного представления группы $SO(2n,\mathbb{C})$ имеют ядра вида

$$\pm\det(D)^{1/2}\exp\left\{\tfrac12(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}BD^{-1}&-D^{t-1}\\D^{-1}&-D^{-1}C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t\\\bar\eta^t\end{pmatrix}\right\}. \tag{2.2}$$

Перед этой формулой стоит двузначный множитель $\pm\det(D)^{1/2}$. Однако в малой окрестности единицы у этого множителя можно выбрать однозначную ветвь

$$\det(D^\alpha):=\det\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}(D-E)^k\right).$$

Задача. Пусть $S=\begin{pmatrix}K&L\\M&-K^t\end{pmatrix}$ — элемент алгебры Ли группы $SO(2n,\mathbb{C})$. Используя формулу (2.2), покажите, что

$$\mathrm{spin}(\exp(\varepsilon S))=1+\varepsilon\cdot\tau(S)+O(\varepsilon^2),$$

где

$$\tau(S)f=\left(-\frac12\operatorname{tr}K+\frac12\sum l_{ij}\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\sum k_{ij}\xi_i\xi_j+\frac12\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)f. \tag{2.3}$$

Задача. Покажите непосредственно, что операторы $\tau(S)$ образуют (однозначное) представление алгебры Ли группы $SO(2n,\mathbb{C})$.

Задача. Покажите, что единственные векторы, аннулируемые всеми повышающими операторами, суть $f_+(\xi)=1$, $f_-(\xi)=\xi_1$.

Легко видеть, что подпространства Λ_{2n}^+ и Λ_{2n}^- (состоящие соответственно из четных и нечетных функций, см. п. II.1.1) в Λ_{2n} являются инвариантными, а в силу утверждения последней задачи представления $SO(2n,\mathbb{C})$ в Λ_{2n}^+ и Λ_{2n}^- неприводимы.

Искомые представления $\pi_\pm$ группы $D_n\simeq SO(2n,\mathbb{C})$ — это просто неприводимые подпредставления спинорного представления (они называются *полуспинорными*).

Спинорное представление π_1 группы $B_n\simeq SO(2n+1,\mathbb{C})$ получается ограничением любого из полуспинорных представлений $\pi_\pm$ группы $SO(2n+2,\mathbb{C})$ на $SO(2n+1,\mathbb{C})$.

Задача. Докажите, что всевозможные операторы в Λ_n вида

$$\frac12\sum a_{ij}\xi_i\xi_j+\sum b_{ij}\xi\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\frac12\sum c_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\sum\alpha_i\xi_i+\sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\gamma,$$

где $a_{ij},b_{ij},c_{ij},\alpha_i,\beta_i,\gamma\in\mathbb{C}$, $a_{ij}=-a_{ji}$, $c_{ij}=-a_{ji}$, образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^1$, где через $\mathbb{C}^1$ обозначена одномерная (абелева) алгебра Ли.

§ 3. *Категории* A, B, C, D *и их представления*

3.1. Категории A, B, C. Категория **A** — это категория линейных пространств и линейных операторов (сразу заметим, что это лишь одна из многих категорий, связанных с серией групп A_n, см. ниже п. 3.6).

Объект категории **B** — нечетномерное комплексное линейное пространство V, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}$. Пусть V,W — объекты категории **B**. Введем в $V\oplus W$ симметричную билинейную форму

$$\{(v,w),(v',w')\}_{V\oplus W}=\{v,v'\}_V-\{w,w'\}_W. \tag{3.1}$$

Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(V,W)$ состоит из null и максимальных изотропных подпространств в $V\oplus W$. Морфизмы перемножаются так же, как в категории **GA** (см. § II.7). Корректность определения проверяется так же, как и в категории **GD**, см. предложение II.7.4.

Объект категории **C** — конечномерное комплексное линейное пространство V, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой $\{\ ,\ \}_V$. Пусть V,W — объекты категории **C**. Введем в $V\oplus W$ кососимметричную билинейную форму по формуле (3.1). Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(V,W)$ состоит из null и всех максимальных изотропных подпространств в $V\oplus W$. Морфизмы перемножаются так же, как в категории **GA**.

Группы автоморфизмов объекта V для перечисленных категорий **A**, **B**, **C** — это соответственно $GL(V)$, $O(V)$ и $Sp(V)$. Следующей в этом списке хотелось бы написать категорию **GD** (см. § II.6), связанную с серией групп $O(2n,\mathbb{C})$. Мы, однако, предпочтем этой категории близкую к ней категорию **D**, связанную с группами $SO(2n,\mathbb{C})$.

3.2. Категория D. Пусть Y — комплексное четномерное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой. Через $\mathrm{Gr}(Y)$ мы обозначаем грассманиан всех максимальных изотропных пространств в Y.

Лемма 3.1. Множество $\mathrm{Gr}(Y)$ состоит из двух компонент связности. Подпространства $H_1, H_2 \in \mathrm{Gr}(Y)$ лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда коразмерность $H_1 \cap H_2$ в H_1 и H_2 четна.

Доказательство. По теореме Витта (см. [Bourbaki (1959)] или Предварительные сведения, § 1) пространство $\mathrm{Gr}(Y)$ является $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$-однородным. Стабилизатор точки изоморфен $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и, следовательно, связен. Группа $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ состоит из двух компонент связности, поэтому и $\mathrm{Gr}(Y)$ состоит из двух компонент связности. Пусть фиксировано $V \in \mathrm{Gr}(Y)$. Пусть $W \in \mathrm{Gr}(Y)$. Выберем базис $e_1, \dots, e_s$, $f_1, \dots, f_k$, $f'_1, \dots, f'_k$, $g_1, \dots, g_s$ в Y так, что

$$\{e_i, g_j\} = \delta_{ij}, \quad \{f_i, f'_j\} = \delta_{ij}, \quad \{e_i, f_i\} = \{e_i, f'_j\} = \{g_i, f_j\} = \{g_i, f'_j\} = 0,$$
$$e_i \in V \cap W, \ f_j \in V, \ f'_j \in W, \ g_i \notin V + W.$$

Пусть k четно. Построим кривую $V(t)$ в $\mathrm{Gr}(Y)$, соединяющую V и W $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Пространство $V(t)$, по определению, натянуто на все векторы вида

$$e_i, \quad t\left(f_{2j-1} \pm f_{2j}\right) + (1-t)\left(f'_{2j-1} \mp f'_{2j}\right). \tag{3.2}$$

Тогда $V(0) = W$, $V(1) = V$.

Пусть k нечетно. Построим кривую $\tilde{V}(t)$ в $\mathrm{Gr}(Y)$ такую, что пространство $\tilde{V}(t)$ натянуто на векторы вида (3.2), где $2j \leqslant k$, а также на вектор f'_k. Очевидно, $V(0) = W$, а $V(1)$ натянуто на векторы $e_1, \dots, e_s$, $f_1, \dots, f_{k-1}$, f'_k; тем самым $V(1) \cap V$ имеет коразмерность 1 в V. Пусть $\mathfrak{L}$ — множество всех подпространств в V, имеющих коразмерность 1, а $\mathfrak{M}$ — множество всех $W \in \mathrm{Gr}(Y)$ таких, что $W \cap V \in \mathfrak{L}$. Отображение $\varphi : W \mapsto W \cap V$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{L}$ является непрерывной биекцией. Но $\mathfrak{L}$ связно, значит, связно и $\mathfrak{M}$, а значит, связно и множество всех $Q \in \mathrm{Gr}(Y)$ таких, что $Q \cap V$ имеет нечетную коразмерность в V. Лемма доказана. ∎

Объект категории $\mathbf{D}$ — это объект V категории $\mathbf{GD}$, в котором дополнительно фиксирована одна из компонент связности $\mathrm{Gr}_+(V)$ множества $\mathrm{Gr}(V) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(0, V) \setminus \mathrm{null}$. Пусть V, W — объекты $\mathbf{D}$. Пусть $W_+ \in \mathrm{Gr}_+(W)$, $V_+ \in \mathrm{Gr}_+(V)$, а $W_- \in \mathrm{Gr}(W)$ — некоторое подпространство в W, дополнительное к W_+ (заметим, что W_- содержится или не содержится в $\mathrm{Gr}_+(W)$ в зависимости от четности числа $\frac{1}{2}\dim W$). Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$ состоит из null и той компоненты связности $\mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, W) \setminus \mathrm{null} = \mathrm{Gr}(V \oplus W)$, которая содержит $V_+ \oplus W_-$. Морфизмы умножаются так же, как в категории $\mathbf{GD}$.

Лемма 3.2. Определение корректно, т. е. если $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$, а $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(W, Y)$, то $QP \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, Y)$.

Доказательство. Из соображений непрерывности достаточно проверить, что для некоторых $P_0 \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$ и $Q_0 \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(W, Y)$ таких, что $Q_0P_0 \neq \mathrm{null}$, выполнено $Q_0P_0 \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, Y)$. В качестве P_0 и Q_0 можно взять $V_+ \oplus W_-$ и $W_+ \oplus Y_-$ ($V_\pm$ и $Y_\pm$ определяются так же, как $W_\pm$). ∎

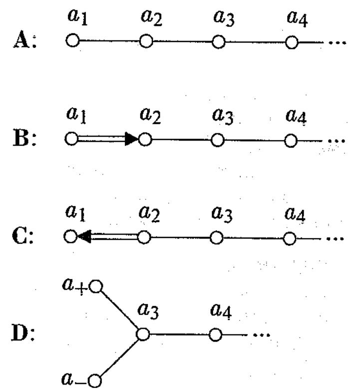
Легко видеть, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{D}}(V)$ совпадает с $\mathrm{SO}(V)$ (действительно, группа $\mathrm{SO}(V)$ должна целиком содержаться в одной из двух компонент многообразия $\mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, V) \setminus \mathrm{null}$, при этом легко видеть, что единичный элемент группы лежит именно в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, V) \setminus \mathrm{null}$).

3.3. Классификационная теорема.

Теорема 3.3.

а) Голоморфные проективные представления категорий **A**, **B**, **C**, **D**, **GD** вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные проективные представления категорий **A**, **B**, **C**, **D** нумеруются соответственно диаграммами вида

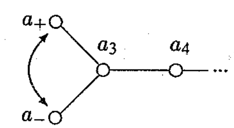


где a_j — неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Пусть a_α — самая правая ненулевая отметка. Если $n < \alpha - 1$ (sic!), то подчиненное представление группы $\mathrm{G}_n = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ соответственно, является нульмерным. Если же $n \geqslant \alpha - 1$, то подчиненное представление G_n неприводимо и имеет числовые отметки $(\dots, a_{n-1}, a_n)$ на соответствующей диаграмме Дынкина.

В пп. 3.4–3.5 мы явно строим все представления категорий **A**, **B**, **C**, **D**. Проверку корректности этих построений и доказательство теоремы 3.1 мы откладываем до § 4.

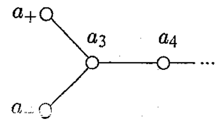
Замечание 1. Голоморфные проективные представления категории **A** линеаризуемы. Это будет ясно из явной конструкции.

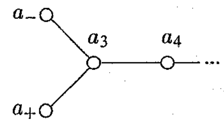
Замечание 2. Можно показать, что неприводимые голоморфные проективные представления категории **GD** нумеруются диаграммами вида



(3.3)

где a_α — неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0, а перестановка a_+ и a_- не меняет представления. Если $a_+ = a_-$, то ограничение этого представления на категорию **D** неприводимо и имеет числовые отметки (3.3). Если же $a_+ \neq a_-$, то ограничение на **D** разлагается в сумму двух представлений с числовыми отметками





3.4. Фундаментальные представления. Пусть $\mathbf{K}$ — одна из категорий $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Обозначим через $\Pi_\alpha^{\mathbf{K}} = \left(\Pi_\alpha^{\mathbf{K}}, \pi_\alpha^{\mathbf{K}}\right)$ то из неприводимых представлений $\mathbf{K}$, у которого числовая отметка a_α равна 1, а остальные отметки — нули.

Замечание. Строго говоря, пока классификационная теорема не доказана, мы не имеем права говорить о числовых отметках неприводимых представлений. Поэтому под *фундаментальным представлением* $\Pi_\alpha^{\mathbf{K}} = \left(\Pi_\alpha^{\mathbf{K}}, \pi_\alpha^{\mathbf{K}}\right)$ пока можно понимать то представление категории $\mathbf{K}$, подчиненные представления которого суть фундаментальные представления π_α групп $\mathrm{K}_n = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ (при $n > \alpha - 1$). Сейчас мы построим такие представления, но уверенности в их единственности у нас пока не будет.

Итак, рассмотрим спинорное представление $\mathsf{Spin} = (\mathrm{Spin}, \mathrm{spin})$ категории $\mathbf{GD}$ (см. § II.6) и ограничим его на категорию $\mathbf{D}$. Если $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$, то ядро оператора $\mathrm{spin}(P)$ является четной функцией (см. вторую явную формулу из § II.6), поэтому $\mathrm{spin}(P)$ переводит четные функции из $\Lambda(V_+)$ в четные функции из $\Lambda(W_+)$, а нечетные функции — в нечетные. Представления $\Pi_+^{\mathbf{D}} = \left(\Pi_+^{\mathbf{D}}, \pi_+^{\mathbf{D}}\right)$ и $\Pi_-^{\mathbf{D}} = \left(\Pi_-^{\mathbf{D}}, \pi_-^{\mathbf{D}}\right)$ — это подпредставления в ограничении $\mathsf{Spin} = (\mathrm{Spin}, \mathrm{spin})$ на $\mathbf{D}$, состоящие соответственно из четных и нечетных функций.

Далее, вложим категорию $\mathbf{B}$ в категорию $\mathbf{GD}$. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$, а L — одномерное комплексное пространство, снабженное ненулевой билинейной формой. Тогда $V \oplus L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$. Пусть, далее, $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Определим подпространство $Q \subset (V \oplus L) \oplus (W \oplus L)$ как множество векторов вида $((v, l), (w, l))$, где $(v, w) \in P$, $l \in L$. Тогда $Q = Q(P) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, W)$. Ограничение $\mathsf{Spin} = (\mathrm{Spin}, \mathrm{spin})$ на $\mathbf{B}$ разлагается в сумму двух эквивалентных представлений вида $\Pi_1^{\mathbf{B}} = \left(\Pi_1^{\mathbf{B}}, \pi_1^{\mathbf{B}}\right)$, одно из них реализуется в четных функциях, а другое — в нечетных.

Теперь рассмотрим фундаментальное представление $\Lambda = (\Lambda, \lambda)$ категории $\mathbf{GA}$ (см. § II.6). Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$, а $P \subset V \oplus W$ — ненулевой морфизм категории $\mathbf{GA}$, $\dim P = s$. Легко видеть, что оператор $\lambda(P)$ переводит подпространство $\Lambda^k V \subset \Lambda(V)$ в $\Lambda^{k-\dim(V)+s}(W)$. Ограничим представление $\Lambda = (\Lambda, \lambda)$ на категории $\mathbf{K} = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, а $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Тогда $\dim P = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W)$. Таким образом, ограничение $\Lambda = (\Lambda, \lambda)$ на $\mathbf{K}$ разлагается в счетную прямую сумму

$$\Lambda\big|_{\mathbf{K}} = (\Lambda, \lambda)\big|_{\mathbf{K}} = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} \left(L_j^{\mathbf{K}}, l_j\right),$$

где $L_j^{\mathbf{K}}(V) = \Lambda^{\left[\frac{1}{2}\dim V\right] - j + 1}(V)$.

Легко видеть, что

1. $\left(\Pi_j^{\mathbf{B}}, \pi_j^{\mathbf{B}}\right) = \left(L_j^{\mathbf{B}}, l_j\right)$ при $j \geqslant 2$;
2. $\left(\Pi_j^{\mathbf{D}}, \pi_j^{\mathbf{D}}\right) = \left(L_j^{\mathbf{D}}, l_j\right)$ при $j \geqslant 3$;

3. $\left(\Pi_j^{\mathbf{C}}, \pi_j^{\mathbf{C}}\right)$ есть факторпредставление $\left(L_j^{\mathbf{C}}, l_j\right) / Q\left(\left(L_{j+2}^{\mathbf{C}}, l_{j+2}\right)\right)$, где вложение Q представления $\left(L_{j+2}^{\mathbf{C}}, l_{j+2}\right)$ в $\left(L_j^{\mathbf{C}}, l_j\right)$ мы сейчас опишем. Обозначим через q элемент в $\Lambda^2 V$, инвариантный относительно $\mathrm{Sp}(V)$. Тогда $Qf := qf$, см. также п. 2.4.

Наконец, представление $\Pi_1^{\mathbf{A}} = \left(\Pi_1^{\mathbf{A}}, \pi_1^{\mathbf{A}}\right)$ — это тождественное представление категории $\mathbf{A}$ (каждому линейному пространству ставится в соответствие оно само, а каждому оператору — он сам), а остальные фундаментальные представления категории $\mathbf{A}$ суть его внешние степени:

$$\left(\Pi_j^{\mathbf{A}}, \pi_j^{\mathbf{A}}\right) = \Lambda^j\left(\Pi_1^{\mathbf{A}}, \pi_1^{\mathbf{A}}\right).$$

3.5. Построение остальных представлений. Пусть $\mathbf{K} = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Сейчас мы построим неприводимое представление $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{K}$ с набором числовых отметок $\{a_\alpha\}$. Для этого рассмотрим тензорное произведение

$$(S, \sigma) := \bigotimes_\alpha \left(\Pi_\alpha^{\mathbf{K}}, \pi_\alpha^{\mathbf{K}}\right)^{\otimes a_\alpha}.$$

В каждом пространстве $\Pi_\alpha^{\mathbf{K}}(V)$ рассмотрим вектор $h_\alpha(V)$ старшего веса относительно группы $\mathrm{Aut}(V)$. Пусть $T(V)$ — циклическая оболочка вектора $\bigotimes\limits_\alpha h_\alpha(V)^{\otimes a_\alpha} \in S(V)$ под действием группы $\mathrm{Aut}(V)$. Набор подпространств $T(V) \subset S(V)$ задает подпредставление в $\mathsf{S} = (S, \sigma)$, оно и имеет числовые отметки $\{a_\alpha\}$.

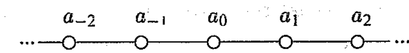
3.6. Замечания. Категории, связанные с серией групп A_n.

А. Категория GA.

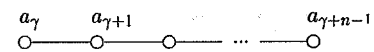
Теорема 3.4.

а) Голоморфные проективные представления категории $\mathbf{GA}$ вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные проективные представления категории $\mathbf{GA}$ нумеруются диаграммами вида



где a_j — неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0; при этом диаграммам, отличающимся друг от друга сдвигом, отвечают одинаковые представления. Пусть a_α — самая левая ненулевая числовая отметка, а a_β — самая правая. Тогда подчиненное представление группы $\mathrm{A}_n \simeq \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ есть однократная прямая сумма неприводимых представлений A_n с числовыми отметками

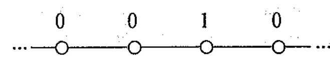


(3.4)

где $\gamma \leqslant \alpha + 1$, а $\gamma + n - 1 \geqslant \beta - 1$.

Замечания.

а) Фундаментальное представление из § II.7 имеет числовые отметки



все неприводимые представления $\mathbf{GA}$ реализуются в тензорных степенях фундаментального представления.

б) Пусть μ_γ — представление с числовыми отметками (3.4). Пусть R — элемент множества $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1}) \setminus \mathrm{null}$. Тогда $R\mu_\gamma \subset \mu_\gamma + \dim R - (n+1)$.

В. Категории $A(\lambda)$. Заметим, что диаграммы Дынкина для серий B_n, C_n, D_n могут расти только в одну сторону. Диаграммы Дынкина для серии A_n могут расти в обе стороны. Покажем, что любому росту диаграмм A_n соответствует своя категория.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ — последовательность из нулей и единиц. Объекты категории $\mathbf{A}(\lambda)$ суть комплексные линейные пространства. Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}(\lambda))$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда множество $\mathrm{Mor}(V, W)$ состоит из null и линейных отношений размерности $n + \lambda_n + \lambda_{n+1} + \ldots + \lambda_{m-1}$.

Пронумеруем вершины бесконечной диаграммы Дынкина

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & & & & & \\ \cdots - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - \cdots \end{array}$$

по следующему правилу. Поставим в каком-нибудь месте 0, далее ставим 1 слева от 0, если $\lambda_1 = 0$, и справа от 0, если $\lambda_1 = 1$. Вообще в случае $\lambda_j = 0$ номер j стоит на самом правом из мест, находящихся левее всех номеров $0, 1, \dots, j-1$. В случае $\lambda_j = 1$ номер j стоит на самом левом из мест, находящихся правее всех номеров $0, 1, \dots, j-1$ (таким образом, последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ задает «правило роста» диаграммы Дынкина).

Теорема 3.5. Пусть в последовательности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ бесконечно много нулей и бесконечно много единиц. Тогда

а) голоморфные проективные представления категории $\mathbf{A}(\lambda)$ вполне приводимы;

б) неприводимые голоморфные проективные представления категории $\mathbf{A}(\lambda)$ нумеруются диаграммами вида

$$\begin{array}{ccccccccccc} & s_{-2} & & s_{-1} & & 0 & & s_1 & & s_2 & \\ \cdots - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - \cdots \\ & a_{-2} & & a_{-1} & & a_0 & & a_1 & & a_2 & \end{array}$$

где числа верхнего ряда расставлены по изложенному выше правилу, а $a_j \in \mathbb{Z}_+$, причем лишь конечное число из них отлично от 0. Опишем подчиненное представление группы A_n. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc} s_\gamma & & & & & & & & s_{\gamma+n-1} \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \cdots & - & \circ \\ a_\gamma & & & & & & & & a_{\gamma+n-1} \end{array} \qquad (3.5)$$

— участок диаграммы, в котором числа верхнего ряда являются переставленными числами $0, 1, \dots, n-1$. Тогда в случае

$$a_{\gamma-2} = a_{\gamma-3} = \ldots = 0 = a_{\gamma+n+1} = a_{\gamma+n+2} = \ldots \qquad (3.6)$$

подчиненное представление неприводимо и имеет числовые отметки $a_\gamma, \dots, a_{\gamma+n-1}$. Если же (3.6) не имеет место, то подчиненное представление нульмерно.

Задача. Докажите теорему 3.5.

Задача. Выведите теорему 3.4 из теоремы 3.5.

§ 4. *Упорядоченные категории*

В этом параграфе доказываются классификационные теоремы из § 3.

4.1. Упорядоченные категории. В этой книге обсуждается теория представлений нескольких десятков категорий. Эти теории имеют между собой кое-что общее, и это общее хотелось бы зааксиоматизировать, чтобы в дальнейшем избежать многократных повторов однотипных рассуждений. Следующее определение не так удачно, как этого бы хотелось, но мы увидим, что оно все-таки полезно.

Пусть Σ — частично упорядоченное множество, причем для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ существует $\sigma_3 \in \Sigma$ такой, что $\sigma_3 > \sigma_1$, $\sigma_3 > \sigma_2$. В этой главе множество Σ

всегда совпадает с $\mathbb{Z}_+$, но позже нам встретятся и более замысловатые примеры. Пусть $\mathbf{K}$ — категория, объекты которой V_σ нумеруются элементами множества Σ. Пусть для любых элементов $\sigma, \tau \in \Sigma$ таких, что $\sigma < \tau$, фиксированы морфизмы $\lambda_{\sigma\tau} : V_\sigma \to V_\tau$, $\mu_{\tau\sigma} : V_\tau \to V_\sigma$ такие, что

$$\mu_{\tau\sigma}\lambda_{\sigma\tau} = 1. \qquad (4.1)$$

Пусть для любых $\sigma < \sigma' < \sigma''$ выполнено

$$\begin{aligned} \lambda_{\sigma'\sigma''}\lambda_{\sigma\sigma'} &= \lambda_{\sigma\sigma''}, \\ \mu_{\sigma'\sigma}\mu_{\sigma''\sigma'} &= \mu_{\sigma''\sigma}. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Такие категории мы будем называть *чисто упорядоченными*. Категории, эквивалентные чисто упорядоченным, мы будем называть *упорядоченными*.

4.2. Примеры упорядоченных категорий: A, B, C, D. Мы обсудим подробно самый простой из этих случаев $\mathbf{K} = \mathbf{A}$ и самый сложный $\mathbf{K} = \mathbf{D}$.

Категория A. Рассмотрим категорию, объектами которой являются пространства $\mathbb{C}^n$, а морфизмами — линейные операторы. Эта категория эквивалентна категории $\mathbf{A}$. Пусть $m < n$, определим $\lambda_{mn} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $\mu_{nm} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_{mn}(x_1, \dots, x_m) &= (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \\ \mu_{nm}(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

Категория D. Обозначим $2n$-мерный объект категории $\mathbf{D}$ через V_n. Пусть V — двумерное комплексное пространство, снабженное невырожденной билинейной симметричной формой. Пространство V содержит две изотропные прямые, которые мы обозначим через l и l'. Отождествим V_{n+1} с $V_n \oplus V$. Пусть S — график естественного вложения $V_n \to V_{n+1}$. Рассмотрим в $V_n \oplus V_{n+1} = V_n \oplus V_n \oplus V$ следующие максимальные изотропные подпространства H и H':

$$H = S \oplus l, \quad H' = S \oplus l'.$$

Легко видеть, что $H \cap H' = S$, следовательно (см. лемму 3.1) H и H' лежат в разных компонентах связности грассманиана $\mathrm{Gr}(V_n \oplus V_{n+1})$ (обозначения из п. 3.2). Заметим, что множества $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_n, V_{n+1}) \setminus \mathrm{null}$ и $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_{n+1}, V_n) \setminus \mathrm{null}$ являются компонентами связности многообразия $\mathrm{Gr}(V_n \oplus V_{n+1})$, и легко видеть, что эти компоненты различны (в самом деле, $V_n^- \oplus V_{n+1}^+ \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_n, V_{n+1})$, а $V_{n+1}^- \oplus V_n^+ \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_{n+1}, V_n)$, пересечение $V_n^- \oplus V_{n+1}^+$ и $V_n^+ \oplus V_{n+1}^-$ нулевое, а размерности этих подпространств нечетны).

Теперь $\lambda_{n,n+1}$ — это то из подпространств H, H', которое лежит в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_n, V_{n+1})$, а $\mu_{n+1,n}$ — то, которое лежит в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_{n+1}, V_n)$. Наконец, положим

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \lambda_{j-1,j}\lambda_{j-2,j-1} \cdots \lambda_{i,i+1}, \\ \mu_{ji} &= \mu_{i+1,i}\mu_{i+1,i+2} \cdots \mu_{j,j-1}. \end{aligned}$$

Категории B и C. Здесь все очень похоже на категорию $\mathbf{D}$, только в выборе прямых l и l' и морфизмов $\lambda_{n,n+1}$, $\mu_{n+1,n}$ здесь больше свободы: единственное требование — чтобы $l' \neq l$, а $\lambda_{n,n+1} = S \oplus l$, $\mu_{n+1,n} = S \oplus l'$.

4.3. Простейшие свойства упорядоченных категорий. Пусть $\sigma < \tau$. Введем элемент $\theta^\sigma_\tau \in \mathrm{End}(V_\tau)$

$$\theta^\sigma_\tau = \lambda_{\sigma\tau}\mu_{\tau\sigma}. \tag{4.3}$$

Легко видеть, что

$$(\theta^\sigma_\tau)^2 = \theta^\sigma_\tau, \quad \mu_{\tau\sigma}\theta^\sigma_\tau = \mu_{\tau\sigma}, \quad \theta^\sigma_\tau\lambda_{\sigma\tau} = \lambda_{\sigma\tau}. \tag{4.4}$$

Если $\sigma' < \sigma$, то

$$\theta^\sigma_\tau\theta^{\sigma'}_\tau = \theta^{\sigma'}_\tau\theta^\sigma_\tau = \theta^{\sigma'}_\tau \tag{4.5}$$

Проверим последнее равенство:

$$\begin{aligned}\theta^{\sigma'}_\tau\theta^\sigma_\tau &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\tau\sigma'}\lambda_{\sigma\tau}\mu_{\tau\sigma} =\\ &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\sigma\sigma'}\mu_{\tau\sigma}\lambda_{\sigma\tau}\mu_{\tau\sigma} =\\ &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\sigma\sigma'}\mu_{\tau\sigma} =\\ &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\tau\sigma'} =\\ &= \theta^{\sigma'}_\tau.\end{aligned}$$

Лемма 4.1. Пусть $\sigma' < \sigma$, $\tau' < \tau$. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V_{\sigma'}, V_{\tau'})$. Тогда существует $Q \in \mathrm{Mor}(V_\sigma, V_\tau)$ такое, что

$$P = \mu_{\tau\tau'}Q\lambda_{\sigma'\sigma}. \tag{4.6}$$

Доказательство: $Q = \lambda_{\tau'\tau}P\mu_{\sigma\sigma'}$. ■

Лемма 4.2. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — (проективное) представление упорядоченной категории $\mathbf{K}$. Пусть $T(V_\varkappa) = 0$. Тогда $T(V_\sigma) = 0$ для всех $\sigma < \varkappa$.

Доказательство. Так как $T(V_\varkappa) = 0$, то $\tau(Q) = 0$ для всех $Q \in \mathrm{End}(V_\sigma)$. В силу равенства (4.6) $\tau(P) = 0$ для всех $P \in \mathrm{End}(V_\sigma)$. В частности, $\tau(1_{V_\sigma}) = 0$. Отсюда $T(V_\sigma) = 0$. ■

Лемма 4.3. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — (проективное) представление упорядоченной категории $\mathbf{K}$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) T неприводимо;

б) подчиненные представления всех полугрупп $\mathrm{End}(V_\tau)$ неприводимы.

Следствие 4.4. Фундаментальные представления из п. 3.4 неприводимы.

Доказательство леммы. Нужно доказать лишь утверждение б) $\Rightarrow$ а) (см. Лемму II.8.1). Пусть выполнено б). Пусть M — подпредставление в $\mathsf{T} = (T, \tau)$, а $\mathsf{N} = \mathsf{T}/\mathsf{M}$. Тогда для любого V_σ мы имеем или $M(V_\sigma) = 0$ или $N(V_\sigma) = 0$. Из леммы 4.2 мгновенно следует, что или $M(V_\sigma) = 0$ для всех σ, или $N(V_\sigma) = 0$ для всех σ. ■

4.4. Спускающий функтор. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление упорядоченной категории $\mathbf{K}$. Пусть $\alpha < \beta$.

Лемма 4.5. Пусть $P \in \mathrm{End}(V_\alpha)$. Рассмотрим отображение $U^\beta_\alpha(P) = \lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha}$. Тогда отображение U^β_α является вложением полугруппы $\mathrm{End}(V_\alpha)$ в $\mathrm{End}(V_\beta)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}U^\beta_\alpha(P)U^\beta_\alpha(Q) &= \lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha}\lambda_{\alpha\beta}Q\mu_{\beta\alpha} =\\ &= \lambda_{\alpha\beta}PQ\mu_{\beta\alpha} =\\ &= U^\beta_\alpha(PQ).\end{aligned}$$

С другой стороны, $P = \mu_{\beta\alpha}U^\beta_\alpha(P)\lambda_{\alpha\beta}$, откуда следует инъективность U^β_α. Заметим, что

$$U^\beta_\alpha(1) = \theta^\alpha_\beta.$$

■

Итак, при $\alpha < \beta$ полугруппа $\mathrm{End}(V_\alpha)$ вложена в $\mathrm{End}(V_\beta)$ (следует обратить внимание на то, что $U^\beta_\alpha(\mathrm{Aut}(V_\alpha)) \not\subset \mathrm{Aut}(V_\beta)$.

Предложение 4.6. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — проективное представление упорядоченной категории $\mathbf{K}$, пусть $\alpha < \beta$. Тогда подпространство $\mathrm{Im}\,\theta^\alpha_\beta$ инвариантно относительно операторов $\tau(U^\beta_\alpha(P))$. Представление τ полугруппы $\mathrm{End}(V_\alpha)$ в $T(V_\alpha)$ эквивалентно представлению $\tau \circ U^\beta_\alpha$ в $\mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$.

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{Im}\,\tau(U^\beta_\alpha(P)) \subset \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$. В самом деле,

$$\begin{aligned}U^\beta_\alpha(P) &= \lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha} =\\ &= \lambda_{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}\lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha} =\\ &= \theta^\alpha_\beta\lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha}.\end{aligned}$$

Далее, легко видеть, что $\tau(\lambda_{\alpha\beta}) : T(V_\alpha) \to \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$ и $\tau(\mu_{\beta\alpha}) : \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta) \to T(V_\alpha)$ являются взаимно обратными $\mathrm{End}(V_\alpha)$-сплетающими операторами. Предложение доказано. ■

Пусть $\alpha < \beta$. Определим *спускающий функтор* F^β_α, который каждому представлению σ полугруппы $\mathrm{End}(V_\beta)$ ставит в соответствие представление $\sigma \circ U^\beta_\alpha$ полугруппы $\mathrm{End}(V_\alpha)$ в $\mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$. Мы опускаем тривиальную проверку того, что F^β_α — действительно функтор. Легко видеть также, что $\mathsf{F}^\beta_\alpha\mathsf{F}^\gamma_\beta = \mathsf{F}^\gamma_\alpha$.

В следующих двух пунктах мы обсудим, как выглядят представления полугрупп $\mathrm{End}_\mathbf{K}(V_\alpha)$ в случаях $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$, а также обсудим, как в этих случаях выглядит спускающий функтор.

4.5. Представления полугрупп $\mathrm{End}_\mathbf{K}(V)$ в случае $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Пусть $\mathbf{K}$ — одна из перечисленных категорий.

Лемма 4.7. Группа $\mathrm{Aut}(V)$ плотна в $\mathrm{End}(V)$.

Доказательство: очевидно. ■

Выберем в каждой из категорий **A**, **B**, **C**, **D** по одному объекту каждой размерности. Обозначим через V_n в случае категории **A** объект размерности $n+1$, в случае **C** и **D** — размерности $2n$, в случае **B** — размерности $2n+1$.

Лемма 4.8. Полугруппа $\mathrm{End}(V_n)$ порождена группой $\mathrm{Aut}(V_n)$ и линейным отношением $\theta_n^{n-1} = \lambda_{n-1,n}\mu_{n,n-1}$.

Доказательство: перебор случаев. ■

Пусть теперь τ — голоморфное проективное представление полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$. Так как группа $\mathrm{Aut}(V_n)$ плотна в $\mathrm{End}(V_n)$, то представление τ и ограничение τ на $\mathrm{Aut}(V_n)$ имеют одни и те же подпредставления. В частности, если τ неприводимо, то и его ограничение на $\mathrm{Aut}(V_n)$ неприводимо. Далее, известно, что проективные представления полупростых групп и, в частности, классических групп линеаризуются на их односвязных накрывающих (см., например, [Желобенко (1970)]). Таким образом, слова «проективное представление односвязной полупростой группы G» и «линейное представление G» по существу означают одно и то же. В частности, мы сразу получаем, что представления полугрупп $\mathrm{End}(V_n)$ вполне приводимы.

Рассмотрим теперь неприводимое представление $\pi = \pi[\dots, a_{n-1}, a_n]$ классической группы $\mathrm{Aut}(V_n) = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ с числовыми отметками $(\dots, a_{n-1}, a_n)$. Спрашивается, как может быть это представление продолжено до проективного представления τ полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$? Пусть последовательность $g_j \in \mathrm{Aut}(V_n)$ сходится к θ_n^{n-1}. Тогда для некоторых $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ мы имеем $\lambda_j\pi(g_j) = \lambda_j\tau(g_j) \to \tau(\theta_n^{n-1})$. Поэтому либо $\tau(\theta_n^{n-1}) = 0$, либо $\tau(\theta_n^{n-1})$ определено однозначно с точностью до пропорциональности. Таким образом (см. лемму 4.8), существует не более двух продолжений представления $\pi[\dots, a_{n-1}, a_n]$ до голоморфного проективного представления полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$:

а) *нулевое продолжение* $\tau = \pi_0[\dots, a_{n-1}, a_n]$; при этом $\tau(\theta_n^{n-1}) = 0$, а значит, $\tau(P)$ тождественно равно 0 на $\mathrm{End}(V_n) \setminus \mathrm{Aut}(V_n)$;

б) *максимальное продолжение* $\tau = \pi_{\max}[\dots, a_{n-1}, a_n]$; при этом $\tau(\theta_n^{n-1}) \neq 0$.

Существование нулевого продолжения очевидно, существование максимального продолжения станет очевидным в следующем пункте.

4.6. Вычисление спускающего функтора в случае категорий A, B, C, D и корректность конструкции п. 3.5. Итак, пусть по-прежнему $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

Лемма 4.9. Пусть $\Pi_\alpha = (\Pi_\alpha, \pi_\alpha)$ — фундаментальное представление категории **K**. Пусть $h_\alpha(V_n)$ — вектор старшего веса в $\Pi_\alpha(V_n)$. Тогда

$$\pi_\alpha(\theta_n^{n-1})h_\alpha(V_n) = s_n h_\alpha(V_n),$$
$$\pi_\alpha(\lambda_{n-1,n})h_\alpha(V_{n-1}) = \tau_n h_\alpha(V_n),$$
$$\pi_\alpha(\mu_{n,n-1})h_\alpha(V_n) = p_n h_\alpha(V_{n-1}),$$

где $\tau_n, s_n, p_n \in \mathbb{C}$ отличны от 0, если $\Pi_\alpha(V_{n-1}) \neq 0$.

Доказательство: перебор случаев. ■

Пусть теперь $a_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ и $a_\alpha = 0$ при достаточно больших α. Рассмотрим самую правую ненулевую отметку q. Пусть $\mathsf{S} = (S, \sigma) := \bigotimes_\alpha (\Pi_\alpha, \pi_\alpha)^{\otimes a_\alpha}$. Рассмотрим вектор старшего веса $h(V_n)$ в $S(V_n)$, т. е.

$$h(V_n) = \bigotimes_\alpha h_\alpha(V_n)^{\otimes a_\alpha}.$$

Заметим, что пространство $\Pi_\alpha(V_n)$ отлично от нуля в том и только в том случае, когда $n \geqslant \alpha - 1$ (здесь надо просмотреть все фундаментальные представления и убедиться в том, что это так). Поэтому $S(V_n)$ отлично от 0 тогда и только тогда, когда $n \geqslant q - 1$, при тех же n отличен от 0 и вектор $h(V_n)$.

Выберем в каждом пространстве $S(V_n)$ циклическую оболочку $T(V_n)$ вектора $h(V_n)$ под действием группы $\mathrm{Aut}(V_n)$.

Лемма 4.10. Набор подпространств $T(V_n) \subset S(V_n)$ задает неприводимое подпредставление в $\mathsf{S} = (S, \sigma)$.

Доказательство. Возьмем циклическую оболочку H какого-нибудь вектора $h(V_n)$ под действием категории **K**. В силу предыдущей леммы эта циклическая оболочка содержит все векторы $h(V_n)$; это верно для всех n, а поэтому **K**-циклические оболочки всех векторов $h(V_n)$ совпадают. Следовательно, для любого k пространство $H(V_k)$ является $\mathrm{End}(V_k)$-циклической оболочкой вектора $h(V_k)$. Но группа $\mathrm{Aut}(V_k)$ плотна в $\mathrm{End}(V_k)$, поэтому $H(V_k) = T(V_k)$ для всех k. Далее, циклическая оболочка вектора является подпредставлением, поэтому набор подпространств $T(V_k)$ — действительно подпредставление в S. Его неприводимость следует из леммы 4.3. Лемма доказана. ■

Теперь посмотрим, какое именно представление τ_k полугруппы $\mathrm{End}(V_k)$ реализуется в $T(V_k)$. Это может быть либо $\pi_0[\dots, a_{k-1}, a_k]$, либо $\pi_{\max}[\dots, a_{k-1}, a_k]$. Заметим, что условия $T(V_{k-1}) = 0$ и $\tau(\theta_k^{k-1}) = 0$ равносильны (см. предложение 4.6). Поэтому (см. определение максимального и нулевого продолжение в п. 4.5)

$$\tau_{q-1} = \pi_0[\dots, a_{q-1}], \tag{4.7}$$
$$\tau_k = \pi_{\max}[\dots, a_{k-1}, a_k] \quad \text{при } k > q-1. \tag{4.8}$$

Здесь нам немножко везет. Мы построили некоторый набор представлений категории **K**, и среди подчиненных представлений нам встретились все представления всех полугрупп $\mathrm{End}(V_k)$. Тем самым, предложение 4.6 мгновенно дает нам явный вид спускающего функтора

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_{n-1}^{n}\pi_0[\dots, a_{n-1}, a_n] &= 0, \\ \mathsf{F}_{n-1}^{n}\pi_{\max}[\dots, a_{n-1}, 0] &= \pi_{\max}[\dots, a_{n-2}, a_{n-1}]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Если же $a_n \neq 0$, то

$$\mathsf{F}_{n-1}^{n}\pi_{\max}[\dots, a_{n-1}, a_n] = \pi_0[\dots, a_{n-2}, a_{n-1}]. \tag{4.10}$$

4.7. Согласованные системы. Пусть **K** — упорядоченная категория. Пусть для каждого объекта V_σ задано *неприводимое* проективное представление ρ_σ полугруппы $\mathrm{End}(V_\sigma)$. Этот набор представлений мы назовем *согласованной системой*, если для любых $\sigma < \tau$ выполнено $\mathsf{F}_\sigma^\tau \rho_\tau = \rho_\sigma$.

Предложение 4.11. Для любой согласованной системы ρ_σ существует единственное проективное представление $\mathsf{R} = (R, \rho)$ категории **K** такое, что для всех σ и всех $P \in \mathrm{End}(V_\sigma)$ выполнено $\rho(P) = \rho_\sigma(P)$.

Замечание. Здесь важнее единственность, чем существование. Только единственность используется в п. 4.8.

Лемма 4.12. Полугруппы $\mathrm{End}(V_\sigma)$ и элементы $\lambda_{\sigma\tau}$, $\mu_{\tau\sigma}$ порождают весь группоид морфизмов категории $\mathbb{K}$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V_\sigma, V_\tau)$. Пусть $\varkappa > \tau$ и $\varkappa > \sigma$. Тогда $P = \mu_{\varkappa\tau} P' \lambda_{\sigma\varkappa}$, где $P' = \lambda_{\tau\varkappa} P \mu_{\varkappa\sigma} \in \mathrm{End}(V_\varkappa)$. ■

Доказательство предложения.

а) *Единственность.* Обозначим через $R(V_\sigma)$ пространство представления ρ_σ. Пусть $\sigma < \tau$. В силу (4.4) оператор $\rho(\mu_{\tau\sigma})$ обращается в ноль на ядре проектора $\rho(\theta_\tau^\sigma)$. Кроме того, операторы $\rho(\lambda_{\sigma\tau}) : R(V_\sigma) \to \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma)$ и $\rho(\mu_{\tau\sigma}) : \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma) \to R(V_\sigma)$ должны быть (см. п. 4.4) взаимно обратными $\mathrm{End}(V_\sigma)$-сплетающими операторами. Учитывая неприводимость ρ_σ, мы получаем, что $\rho(\lambda_{\sigma\tau})$ и $\rho(\mu_{\tau\sigma})$ однозначно определены с точностью до умножения на константу. Теперь утверждение следует из леммы.

б) *Существование.* Итак, пусть дана согласованная система. Определим операторы $\rho(\lambda_{\sigma\tau}) : R(V_\sigma) \to \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma)$ и $L : \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma) \to R(V_\sigma)$ так, чтобы они были $\mathrm{End}(V_\sigma)$-сплетающими. В силу неприводимости обоих представлений эти операторы определены однозначно. Положим $\rho(\mu_{\tau\sigma}) = L\rho_\tau(\theta_\tau)$. Пусть, далее, $P \in \mathrm{Mor}(V_\alpha, V_\beta)$. Выберем $\varkappa$ так, что $\varkappa > \alpha$, $\varkappa > \beta$, и определим $\rho(P)$ по формуле

$$\rho(P) = \rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho_\varkappa(\lambda_{\beta\varkappa} P \mu_{\varkappa\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}). \qquad (4.11)$$

Лемма 4.13. Оператор $\rho(P)$ не зависит от выбора $\varkappa$ (с точностью до множителя).

Доказательство леммы. Обозначим выражение (4.11) через $\rho^\varkappa(P)$. Пусть $\xi > \varkappa$. Тогда

$$\rho^\xi(P) = \rho(\mu_{\xi\beta})\rho_\xi(\lambda_{\beta\xi} P \mu_{\xi\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\xi}).$$

Из определения операторов $\rho(\mu_{\xi\varkappa})$ и $\rho(\lambda_{\varkappa\xi})$ видно, что для любого $S \in \mathrm{End}(V_\varkappa)$ выполнено

$$\rho_\varkappa(S) = s\rho(\mu_{\xi\varkappa})\rho_\xi(\lambda_{\varkappa\xi} S \mu_{\xi\varkappa})\rho(\lambda_{\varkappa\xi})$$

для некоторого $s \in \mathbb{C}^*$. Учитывая очевидные равенства

$$\rho(\mu_{\xi\beta}) = s'\rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho(\mu_{\xi\varkappa}),$$
$$\rho(\lambda_{\alpha\xi}) = s''\rho(\lambda_{\varkappa\xi})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}),$$

где $s', s'' \in \mathbb{C}^*$, мы получаем, что для некоторых $t, t', \ldots \in \mathbb{C}^*$ выполнено

$$\rho^\xi(P) = t\rho(\mu_{\xi\beta})\rho_\xi(\lambda_{\beta\xi} P \mu_{\xi\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\xi}) =$$
$$= t'\rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho(\mu_{\xi\varkappa})\rho_\xi(\lambda_{\varkappa\xi}\lambda_{\beta\varkappa} P \mu_{\varkappa\alpha}\mu_{\xi\varkappa})\rho(\lambda_{\varkappa\xi})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}) =$$
$$= t''\rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho_\varkappa(\lambda_{\beta\varkappa} P \mu_{\varkappa\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}) = t'''\rho^\varkappa(P).$$

Теперь пусть $\varkappa$ и $\varkappa'$ мажорируют α и β. Тогда существует ξ, мажорирующее $\varkappa$ и $\varkappa'$, а потому

$$\rho^\varkappa(P) = \rho^\xi(P) = \rho^{\varkappa'}(P).$$ ■

Осталось проверить равенство

$$\rho(P)\rho(Q) = s \cdot \rho(PQ)$$

для произвольных $Q \in \mathrm{Mor}(V_\sigma, V_\tau)$, $P \in \mathrm{Mor}(V_\tau, V_\gamma)$. Пусть ξ больше, чем σ, τ, γ. Тогда для некоторых $s, s', \ldots \in \mathbb{C}^*$ мы имеем

$$\rho(P)\rho(Q) = \rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} P \mu_{\xi\tau})\rho(\lambda_{\tau\xi})\rho(\mu_{\xi\tau})\rho_\xi(\lambda_{\tau\xi} Q \mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) =$$
$$= s\rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} P \mu_{\xi\tau})\rho_\xi(\theta_\xi^\tau)\rho_\xi(\lambda_{\tau\xi} Q \mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) =$$
$$= s'\rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} P[\mu_{\xi\tau}\theta_\xi^\tau\lambda_{\tau\xi}]Q\mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) =$$
$$= s''\rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} PQ \mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) =$$
$$= s'''\rho(PQ).$$ ■

4.8. Полнота списков неприводимых представлений для $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Из формул (4.9), (4.10) сразу следует, что любая согласованная система для $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ имеет следующий вид. Имеется $q \in \mathbb{Z}_+$ и конечный набор $[\ldots, a_{q-1}, a_q] \in \mathbb{Z}_+^q$ такой, что $a_q \neq 0$. Представления ρ_j полугрупп $\mathrm{End}(V_j)$ должны иметь вид

$$\rho_j = 0 \qquad \text{при } j < q - 1;$$
$$\rho_{q-1} = \pi_0[\ldots, a_{q-1}];$$
$$\rho_j = \pi_{\max}[\ldots, a_{q-1}, a_q, 0, \ldots, 0] \qquad \text{при } j > q - 1.$$

Представления, соответствующие таким согласованным системам, уже были построены в п. 4.6. Они имеют числовые отметки $(\ldots, a_{q-1}, a_q, 0, 0, \ldots)$. Утверждение б) классификационной теоремы доказано.

4.9. Вполне приводимость.

Теорема 4.14. Пусть $\mathbf{K}$ — упорядоченная категория. Пусть конечномерные проективные представления всех полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V_\sigma)$ вполне приводимы. Тогда проективные конечномерные представления категории $\mathbf{K}$ вполне приводимы.

Лемма 4.15. Пусть выполнены условия теоремы. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — представление $\mathbf{K}$, а $H \subset R(V_\sigma)$ — неприводимое подпредставление подчиненного представления полугруппы $\mathrm{End}(V_\sigma)$. Тогда $\mathbf{K}$-циклическая оболочка $\mathsf{S} = (S, \sigma)$ подпространства H является неприводимым подпредставлением в T.

Доказательство леммы. Для каждого объекта V_τ рассмотрим множество $M(V_\tau)$ всех $h \in S(V_\tau)$ таких, что циклическая оболочка h отлична от S. Условие $h \in M(V_\tau)$ равносильно тому, что для всех $P \in \mathrm{Mor}(V_\tau, V_\sigma)$ выполнено $\rho(P) = 0$ (если $\rho(P)h \neq 0$, то циклическая оболочка h содержит H, а значит, совпадает с S). Пусть для некоторого $\tau > \alpha$ пространство $M(V_\tau) \neq 0$. Пусть $K(V_\tau)$ — инвариантное относительно полугруппы $\mathrm{End}(V_\tau)$ дополнение до $M(V_\tau)$ в $S(V_\tau)$. Если $K(V_\tau) = 0$, то факторпредставление S/M удовлетворяет условию $(\mathsf{S}/\mathsf{M})(V_\tau) = 0$, и это противоречит лемме 4.3. Поэтому $K(V_\tau) \neq 0$. Циклическая оболочка любого вектора $h \in K(V_\tau)$ под действием $\mathbf{K}$ содержит H (так как $h \notin M(V_\tau)$), а значит, совпадает с S. С другой стороны, та часть циклической оболочки вектора h, которая лежит в $S(V_\tau)$, совпадает с $\mathrm{End}(V_\tau)$-циклической оболочкой вектора h, а последняя, в свою очередь, содержится в $K(V_\tau) \neq S(V_\tau)$. Противоречие. Итак, $M(V_\tau) = 0$ для всех $\tau > \alpha$. Но отсюда следует, что $M(V_\tau) = 0$ для всех τ. Поэтому S неприводимо. ■

Доказательство теоремы. Итак, выберем в представлении $\mathsf{R} = (R, \rho)$ какое-нибудь неприводимое подпредставление S. Пусть $R(V_\alpha) \neq S(V_\alpha)$. Пусть $T(V_\alpha)$ — некоторое $\mathrm{End}(V_\alpha)$-инвариантное дополнение до $S(V_\alpha)$. Возьмем циклическую оболочку T подпространства $T(V_\alpha)$. Ясно, что для любого V_β выполнено $T(V_\beta) \cap S(V_\beta) = 0$ (иначе набор подпространств $T(V_\beta) \cap S(V_\beta)$ образовывал бы нетривиальное подпредставление в S, которое, как мы помним, неприводимо). Может, однако, оказаться, что для некоторого V_β равенство $S(V_\beta) \oplus T(V_\beta) = R(V_\beta)$ не выполнено. Тогда найдется $\gamma > \alpha$ такое, что $S(V_\gamma) \oplus T(V_\gamma) \neq R(V_\gamma)$ (для этого достаточно взять любое γ такое, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$; действительно, тогда $R(V_\gamma) / [S(V_\gamma) \oplus T(V_\gamma)] = 0$ влекло бы $R(V_\beta) / [S(V_\beta) \oplus T(V_\beta)] = 0$). Возьмем в $R(V_\gamma)$ инвариантное относительно $\mathrm{End}(V_\gamma)$ дополнение $T'(V_\gamma)$ до $S(V_\gamma)$ такое, что $T'(V_\gamma) \supset T(V_\gamma)$. Пусть T' — циклическая оболочка пространства $T(V_\gamma)$. Ясно, что для всех μ выполнено $T'(V_\mu) \supset T(V_\mu)$. В самом деле, $T'(V_\alpha) \supset T(V_\alpha)$, потому что циклическая оболочка N пространства $T(V_\gamma)$ содержит $T(V_\alpha)$, (действительно, $(T / N)(V_\gamma) = 0$, а значит, $(T / N)(V_\alpha) = 0$).

Далее мы можем продолжить ту же процедуру и выбрать $\mathsf{T}'' \supset \mathsf{T}'$, $\mathsf{T}''' \supset \mathsf{T}''$, ... и т. д., а затем взять их объединение. Если частично упорядоченное множество Σ индексов, нумерующих объекты категории $\mathbf{K}$, устроено достаточно сложно (чего в этой книге не случается), придется еще произнести стандартные заклинания, связанные с леммой Цорна. Мы избавляем читателя от этих заклинаний. Теорема доказана. ■

Теперь теорема о классификации голоморфных проективных представлений категорий **A**, **B**, **C**, **D** доказана полностью.

4.10. Упорядоченные категории с инволюцией. Пусть $\mathbf{K}$ — упорядоченная категория, и пусть на $\mathbf{K}$ введена инволюция $P \mapsto P^*$. Мы говорим, что $\mathbf{K}$ — *упорядоченная категория с инволюцией*, если

$$\lambda^*_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$$

для любых $\alpha < \beta$.

Отсюда, в частности, следует, что $(\theta^\alpha_\beta)^* = \theta^\alpha_\beta$, поэтому для любого $*$-представления $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{K}$ оператор $\tau(\theta^\alpha_\beta)$ является ортогональным проектором.

Глава IV

Фермионное пространство Фока

В этой главе мы обобщаем конструкцию главы II на случай бесконечного числа переменных.

§ 1. Фермионное пространство Фока

1.1. Предварительные замечания. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \bar\xi_1, \bar\xi_2, \ldots$ — счетный набор антикоммутирующих переменных.

Через $\Lambda_{\min}$ мы обозначим пространство всех многочленов, зависящих от переменных ξ_1, $\xi_2, \ldots$, а через $\Lambda_{\max}$ — пространство всех формальных рядов, зависящих от переменных ξ_1, $\xi_2, \ldots$. Сразу заметим, что нас ни то, ни другое пространство сами по себе не интересуют, мы же будем работать с двумя определенными ниже промежуточными пространствами Λ и $\overline{\Lambda}$ такими, что $\Lambda_{\min} \subset \Lambda \subset \overline{\Lambda} \subset \Lambda_{\max}$.

Дифференцирование и интегрирование вводятся так же, как и в § II.1. Многочлен $f(\xi) = 1$ мы будем называть *вакуумным вектором*.

1.2. Гильбертово фермионное пространство Фока. Введем в $\Lambda_{\min}$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f(\xi), g(\xi) \rangle = \int \overline{g^\circ(\xi)} f(\xi)\, d\mu(\xi, \bar\xi) \qquad (1.1)$$

(см. п. II.1.13). Одночлены вида

$$\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}, \quad \text{где } i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \qquad (1.2)$$

образуют в $\Lambda_{\min}$ ортонормированный базис.

Через $\overline{\Lambda}$ мы обозначим пополнение пространства $\Lambda_{\min}$ по этому скалярному произведению.

Пусть $\overline{\Lambda}^{(k)}$ — подпространство в $\overline{\Lambda}$, состоящее из всех однородных форм степени k. Ясно, что $\overline{\Lambda}$ разлагается в следующую прямую сумму гильбертовых пространств:

$$\overline{\Lambda} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \overline{\Lambda}^{(k)}.$$

Задача. Пусть $f = \exp\left(\sum \lambda_i \xi_{2i-1} \xi_{2i}\right)$. При каких λ_i функция f содержится в $\overline{\Lambda}$?

1.3. Полинормированное фермионное пространство Фока. Пусть $f \in \overline{\Lambda}$. Пусть $f = \sum f_k$, где $f_k \in \overline{\Lambda}^k$. Рассмотрим в $\overline{\Lambda}$ подпространство Λ, состоящее из всех векторов f, удовлетворяющих условию: для любой константы C существует A такое, что

$$\|f_k\| \leqslant A\exp(-Ck).$$

Иными словами, нормы векторов f_k убывают быстрее любой последовательности $\exp(-Ck)$.

Введем в пространстве Λ счетное семейство полунорм

$$|||f|||_C = \sup_k\bigl(\|f_k\|\exp(Ck)\bigr).$$

Мы вскоре увидим, что эта топология в пространстве Фока в некоторых отношениях предпочтительнее гильбертовой.

Ясно, что пространство Λ локально выпукло.

Задача. Докажите, что Λ полно.

Задача. Пусть $\sum|\lambda_j|^2 < \infty$. Докажите, что функция $\exp\left(\sum \lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}\right)$ содержится в Λ.

1.4. Бескоординатные пространства $\Lambda(H)$ и $\overline{\Lambda}(H)$. Пусть H — гильбертово пространство (конечномерное или бесконечномерное). Выберем в нем базис $e_1, e_2, \ldots$. Каждому базисному элементу e_i поставим в соответствие переменную ξ_i, построим по этому набору переменных пространства Λ и $\overline{\Lambda}$, которые мы и будем обозначать $\Lambda(H)$ и $\overline{\Lambda}(H)$. Подпространства в $\Lambda(H)$ и $\overline{\Lambda}(H)$, состоящие из однородных форм степени k, мы будем обозначать через $\Lambda^k(H)$, $\overline{\Lambda}^k(H)$ (отметим, что $\Lambda^k(H) = \overline{\Lambda}^k(H)$ совпадает с k-й внешней степенью гильбертова пространства H, см. Предварительные сведения, §4). Теперь мы видим, что конструкция $\Lambda(H)$ не зависит от выбора базиса. Пусть H, K — гильбертовы пространства. Пусть A — ограниченный оператор $H \to K$. Рассмотрим внешние степени $\Lambda^k A : \Lambda^k(H) \to \Lambda^k(K)$ оператора A (см. Предварительные сведения, §4). Мы видим, что для любого ограниченного оператора A корректно определен оператор $\Lambda(A) : \Lambda(H) \to \Lambda(K)$ как прямая сумма внешних степеней оператора A. Если при этом $\|A\| \leqslant 1$, то корректно определен и оператор $\overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(K)$ как $\oplus\Lambda^k(A) : \oplus\overline{\Lambda}^k(H) \to \overline{\Lambda}^k(K)$.

Задача. Пусть A — диагональная матрица с собственными числами λ_j. При каких λ_j оператор $\Lambda(A) := \oplus\Lambda^k(A)$ ограничен в $\overline{\Lambda}$?

1.5. Ядра. Как и в конечномерном случае, оператор $A : \Lambda(H) \to \Lambda(K)$ или $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(K)$ удобно записывать в виде

$$Af(\xi) = \int K(\xi,\overline{\eta})f(\eta)\,d\mu(\eta,\overline{\eta}),$$

где $K(\xi,\overline{\eta})$ — некоторый формальный ряд. Ясно (см. §II.1), что в таком виде может быть записан любой оператор $\Lambda_{\min} \to \Lambda_{\max}$, а значит, в этой форме представимы и все ограниченные операторы $\Lambda(H) \to \Lambda(K)$ и $\overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(K)$.

1.6. Операторы рождения-уничтожения. Положим $V_{2\infty} = V_{2\infty}^+ \oplus V_{2\infty}^-$, где $V_{2\infty}^{\pm} \simeq \ell_2$. Билинейную форму L в $V_{2\infty}$ определим формулой

$$L\bigl((v^+,w^+),(v^-,w^-)\bigr) = \sum\left(v_i^+w_i^- + v_i^-w_i^+\right) \tag{1.3}$$

Пусть $v = (v_1^+, v_2^+, \ldots, v_1^-, v_2^-, \ldots) \in V_{2\infty}$. Тогда определен *оператор рождения-уничтожения* в Λ (или в $\overline{\Lambda}$)

$$\hat{a}(v)f(\xi) = \left(\sum v_i^+\xi_i + \sum v_i^-\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)f(\xi). \tag{1.4}$$

Эти операторы по-прежнему удовлетворяют соотношениям (II.1.21)–(II.1.22).

Стоит обсудить определение операторов рождения-уничтожения в бескоординатном пространстве $\Lambda(H)$. Пусть H' — пространство, двойственное к H. Пусть $V = H \oplus H'$. Выберем в H и H' двойственные базисы (см. Предварительные сведения, §2), тогда V отождествляется с $V_{2\infty}$, и операторы $\hat{a}(v)$ задаются формулой (1.3).

Задача. Проверьте, что оператор $\hat{a}(v)$ в $\Lambda(H)$ не зависит от выбора базиса в H.

Лемма 1.1. Операторы $\hat{a}(v)$ ограничены в обеих топологиях фермионного пространства Фока.

Доказательство. Достаточно проверить это отдельно для операторов рождения $\hat{a}(\alpha_+, 0)$ и для операторов уничтожения $\hat{a}(0,\alpha_-)$. Далее, у нас есть свобода выбора базиса в H. Поэтому нам достаточно рассмотреть операторы $\hat{a}_i^+ f = \xi_i f$ и $\hat{a}_i^- f = \frac{\partial}{\partial\xi_i}f$. Записывая a_i^+ в базисе (1.2), мы видим, что норма a_i^+ как оператора $\Lambda^k(H) \to \Lambda^{k+1}(H)$ равна 1 и, аналогично, норма a_i^- как оператора $\Lambda^{k+1}(H) \to \Lambda^k(H)$ тоже равна 1. Теперь утверждение становится очевидным. ■

Замечание. В пространстве $\overline{\Lambda}(H)$ выполнено

$$\hat{a}(v_+, v_-)^* = \hat{a}(\overline{v}_-, \overline{v}_+). \tag{1.5}$$

1.7. Замечания. Существуют еще 2 модели фермионного пространства Фока, которые нам не понадобятся.

А. «Полубесконечные формы» см. [Березин (1969б)], [Фейгин, Фукс (1982)]. Пусть $\xi_1^+, \xi_2^+, \ldots, \xi_1^-, \xi_2^-, \ldots$ — два набора антикоммутирующих переменных. Рассмотрим пространство M, базисом которого являются формальные выражения

$$\xi_{\beta_k}^+ \cdots \xi_{\beta_1}^+\xi_{\alpha_1}^-\xi_{\alpha_2}^- \cdots,$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$, $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k$, причем в последовательность α_j входят все натуральные числа, кроме некоторого конечного набора.

Вакуумным вектором мы назовем вектор $v = \xi_1^-\xi_2^-\xi_3^- \ldots$. Тогда любой элемент из M записывается в виде

$$\sum_{\substack{i_1<i_2<\ldots<i_k\\ j_1<j_2<\ldots<j_n}} a_{j_1j_2\ldots j_n}^{i_1i_2\ldots i_k}\xi_{j_1}^+\xi_{j_2}^+\ldots\xi_{j_n}^+\frac{\partial}{\partial\xi_{i_1}^-}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_{i_k}^-}v.$$

Ставя в соответствие этому элементу многочлен

$$\sum a_{j_1j_2\ldots j_n}^{i_1i_2\ldots i_k}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_n}\eta_{i_1}\eta_{i_2}\ldots\eta_{i_k},$$

мы отождествляем M с пространством нечетных функций от переменных $\xi_1, \xi_2 \ldots, \eta_1, \eta_2 \ldots$, т.е. с фермионным пространством Фока (см. также добавление C).

В. L^2 на произведении двоеточий. Пусть D — пространство с мерой μ, состоящее из двух точек $-1, 1$, причем мера каждой точки равна $\frac{1}{2}$. Пусть D^∞ — произведение счетного числа экземпляров D. Каждой точке

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots) \in D^\infty$$

мы поставим в соответствие обобщенный вектор

$$\psi_\sigma = (1+\sigma_1\xi_1)(1+\sigma_2\xi_2)(1+\sigma_3\xi_3)\dots \in \Lambda_{\max}.$$

Функции $f(\xi) \in \overline{\Lambda}$ мы сопоставим функцию $(If)(\sigma)$ на D^∞, равную формально вычисленному скалярному произведению

$$If(\sigma) = \langle f(\xi), \psi_\sigma\rangle_{\overline{\Lambda}}.$$

Базисные векторы $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_k} \in \overline{\Lambda}$ при этом переходят в систему функций Уолша $\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\dots\sigma_{j_k}$, а эти функции образуют ортонормированный базис в $L^2(D^\infty)$. Отсюда видно, что I — унитарный оператор.

§ 2. Операторы Березина: теоремы ограниченности

2.1. Первое определение. Пусть H, $\widetilde{H}$ — гильбертовы пространства. *Оператором Березина* из $\Lambda(H)$ в $\Lambda(\widetilde{H})$ (или из $\overline{\Lambda}(H)$ в $\overline{\Lambda}(\widetilde{H})$) назовем произвольный оператор с ядром вида

$$\lambda \cdot \prod_{j=1}^{k}\left(\sum \alpha_{jl}\xi_l + \sum \beta_{jm}\overline{\eta}_m\right)\cdot \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \overline{\eta})\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \overline{\eta}^t\end{pmatrix}\right\}, \tag{2.1}$$

где L — ограниченный оператор, K и M — операторы Гильберта—Шмидта ($K = -K^t$, $M = -M^t$), векторы $(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots)$ и $(\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots)$ лежат в ℓ_2, а $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.2. Второе определение. Пусть, как и раньше (в § II.4),

$$T_i^\xi f(\xi) = \left(\xi_i + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) f(\xi),$$

$$T_j^\eta f(\eta) = \left(\eta_j + \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right) f(\eta).$$

Оператор Березина $\Lambda(H) \to \Lambda(\widetilde{H})$ — это оператор, представимый в виде

$$A = T_{\alpha_1}^\xi \dots T_{\alpha_k}^\xi A' T_{\beta_1}^\eta \dots T_{\beta_m}^\eta, \tag{2.2}$$

где A' имеет ядро вида

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \overline{\eta}^t\end{pmatrix}\right\};$$

здесь по-прежнему L — ограниченный оператор, а K и M — операторы Гильберта—Шмидта ($K = -K^t$, $M = -M^t$).

Эквивалентность определений проверяется так же, как и в § II.4.

2.3. Теорема ограниченности.

Теорема 2.1. Любой оператор Березина $\Lambda(H) \to \Lambda(\widetilde{H})$ ограничен.

В сущности, именно это утверждение и было побудительной причиной для введения второй топологии в пространство Фока. Доказательство см. ниже в пп. 2.5–2.8.

2.4. Операторы Березина в гильбертовом пространстве. Здесь положение более сложное, и условие ограниченности состоит примерно в том, что оператор L должен не очень сильно отличаться от сжатия, т. е. от оператора с нормой $\leqslant 1$. Точный критерий ограниченности не известен, но «зазор» между необходимыми и достаточными условиями очень невелик.

Теорема 2.2. Пусть оператор $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(\widetilde{H})$ с ядром (2.1) ограничен. Тогда матрица L представима в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L'\| \leqslant 1$, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Теорема 2.3. Пусть матрица L представима в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L'\| < 1$, а T — оператор Гильберта—Шмидта. Тогда оператор $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(\widetilde{H})$ с ядром (2.1) ограничен.

Теорема 2.4. Пусть $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(\widetilde{H})$ — оператор с ядром (2.1). Пусть K и M — ядерные операторы. Тогда для ограниченности A необходимо и достаточно, чтобы матрица L представлялась в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L'\| \leqslant 1$, а T — ядерный оператор.

Кстати, эта теорема показывает, что условие теоремы 2.2 не является достаточным, а условие теоремы 2.3 — необходимым для ограниченности.

Из этих трех теорем мы докажем самую простую — теорему 2.4 — в п. 2.9. Пока же займемся доказательством теоремы 2.1.

2.5. Редукции. Прежде всего, заметим, что оператор T_j^ξ ограничен и обратим, $(T_j^\xi)^{-1} = -T_j^\xi$. Поэтому мы можем ограничиться операторами с ядрами вида

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \overline{\eta})\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \overline{\eta}^t\end{pmatrix}\right\}. \tag{2.3}$$

Далее, оператор A с ядром вида (2.3), как и в конечномерном случае (см. (II.1.11), (II.1.17) и п. II.3.9), представим в виде произведения трех операторов $A = BCD$,

$$Bf(\xi) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} f(\xi), \tag{2.4}$$

$$Cf(\xi) = f(L\xi), \tag{2.5}$$

$$Df(\eta) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\eta_i}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right\}. \tag{2.6}$$

Таким образом, нам достаточно доказать три леммы.

Лемма 2.5. Оператор вида (2.4) ограничен.

Лемма 2.6. Оператор вида (2.5) ограничен.

Лемма 2.7. Оператор вида (2.6) ограничен.

Из этих лемм вторая является очевидной (мы это уже отмечали в п. 1.4), и нам остается доказать первую и третью.

Лемма 2.8. Пусть Q — кососимметричная билинейная форма на гильбертовом пространстве H, и пусть матрица этой формы в некотором ортогональном базисе является оператором Гильберта—Шмидта. Тогда унитарной заменой переменных форма Q приводится к виду

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} 0 \; \ddots & & & & & \\ \hline & 0 & \mu_1 & & & \\ & -\mu_1 & 0 & & & \\ & & & 0 & \mu_2 & \\ & & & -\mu_2 & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{array}\right),$$

где $\mu_i > 0$ и $\sum \mu_i^2 < \infty$.

Доказательство. Представим нашу форму $Q(u, v)$ в виде $Q(u, v) = \langle u, Sv \rangle$, где S — антилинейный оператор. Равенство $Q(u, v) = -Q(v, u)$ влечет $\langle u, Sv \rangle = -\overline{\langle Su, v \rangle}$.

Овеществим пространство H, выражение $\mathrm{Re}\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ становится скалярным произведением в вещественном пространстве H, а S становится кососимметрическим оператором. Но тогда S^2 самосопряжен. Пусть λ_j — собственные числа оператора $(-S^2)$. Собственные числа S чисто мнимы, поэтому все λ_j положительны. Пусть $H_{\lambda_j} = \{v \in H : (-S^2)v = \lambda_j v\}$. По теореме Гильберта—Шмидта (см. [Reed, Simon (1972)], § VI.5) имеем $H = \bigoplus H_\lambda$. Далее, оператор S^2 является комплексно-линейным, поэтому подпространства H_λ инвариантны относительно умножения на i.

Со случаем $\lambda = \lambda_j = 0$ все ясно. Пусть $\lambda = \lambda_j \neq 0$. Рассмотрим оператор $J = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S$ в H_λ, этот оператор антилинеен и унитарен, $J^2 = -1$. Тем самым, оператор J задает в H_λ кватернионную структуру (мнимые единицы суть операторы $f \mapsto Jf$, $f \mapsto if$, $f \mapsto iJf$). Выберем в H_λ какой-нибудь кватернионный ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_s$. Легко видеть, что $e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_s, ie_s$ — искомый канонический базис в H_λ. Существование канонического вида доказано. ■

Итак, выражение $\frac{1}{2}\xi K \xi^t$ может быть унитарной заменой переменной $\xi = U\xi'$ приведено к виду $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi'_{2j-1}\xi'_{2j}$, где $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum \lambda_j^2 < \infty$.

Таким образом, леммы 2.5 и 2.7 могут быть переформулированы в следующем виде.

Лемма 2.9. Оператор

$$Bf(\xi) = \exp\Bigl(\sum_j \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Bigr) f(\xi),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum \lambda_j^2 < \infty$, ограничен.

Лемма 2.10. Оператор

$$Df(\eta) = \exp\Bigl(\sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial \eta_{2j-1}} \frac{\partial}{\partial \eta_{2j}}\Bigr) f(\eta),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum \lambda_j^2 < \infty$, ограничен.

Сейчас мы проведем простое вычисление, которое не является для нас необходимым, но, быть может, облегчит восприятие дальнейших рассуждений. Мы покажем, что вектор

$$\begin{aligned} v &= B \cdot 1 = \\ &= \exp\Bigl(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Bigr) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\right)^n}{n!} \end{aligned} \tag{2.8}$$

лежит в пространстве Λ. Оценим норму n-го слагаемого v_n в сумме (2.8). Заметим, что при возведении суммы в n-ю степень отличны от 0 лишь произведения n различных слагаемых, и каждое такое произведение войдет в сумму ровно $n!$ раз. Тем самым,

$$v_n = \frac{1}{n!}\Bigl(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Bigr)^n = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n}\xi_{2i_1-1}\xi_{2i_1}\ldots\xi_{2i_n-1}\xi_{2i_n}. \tag{2.9}$$

Поэтому

$$\|v_n\|^2 = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} \lambda_{i_1}^2 \ldots \lambda_{i_n}^2 \leqslant \frac{1}{n!}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots\right)^n,$$

и, следовательно, $\|v_n\|$ убывает достаточно быстро.

2.6. Одна лемма об оценке нормы. Напомним, что через Λ^k мы обозначили подпространство в Λ (или $\overline{\Lambda}$), состоящее из всех форм степени k. Обозначим через P_r^s следующий оператор из Λ^s в Λ^{s+2r}:

$$P_r^{(s)} f(\xi) = \frac{1}{r!}\Bigl(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Bigr)^r f(\xi), \quad \text{где } \lambda_j \geqslant 0.$$

Лемма 2.11. Пусть $A = \sum \lambda_j^2$, а $a = 2\max(A, 1)$. Тогда

$$\|P_r^{(s)}\|^2 \leqslant \frac{1}{r!} a^{r+s/2}.$$

Доказательство. Пусть

$$f(\xi) = \sum b_{i_1\dots i_s}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_s}.$$

Тогда, используя (2.9), получаем

$$P_r^{(s)}f(\xi) = \sum b_{i_1\dots i_s}\lambda_{\alpha_1}\dots\lambda_{\alpha_r}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_s}\prod_{1\leqslant i\leqslant r}\left(\xi_{2\alpha_i-1}\xi_{2\alpha_i}\right), \tag{2.10}$$

где среди индексов $i_1,\dots,i_s$, $2\alpha_1-1, 2\alpha_1,\dots,2\alpha_r-1, 2\alpha_r$ нет повторяющихся. Среди слагаемых в этой сумме могут быть подобные. Важно, однако, заметить, что ни один одночлен $\prod\xi_{\mu_k}$ не входит в эту сумму более $C^r_{r+[s/2]}$ раз (действительно, пусть моном $\prod\xi_{\mu_k}$ с некоторым коэффициентом входит в сумму (2.10); это значит, что из всех пар ξ_{2h-1},ξ_{2h}, входящих в набор ξ_{μ_k}, мы выбрали r, составляющих произведение $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\left(\xi_{2\alpha_i-1}\xi_{2\alpha_i}\right)$, что можно сделать не более чем $C^r_{r+[s/2]}$ способами). Так как

$$\left\|\sum_{i_1<i_2<\dots i_\xi} c_{i_1\dots i_s}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_s}\right\|^2 = \sum|c_{i_1\dots i_s}|^2,$$

то, используя очевидное неравенство

$$|x_1+x_2'+\dots+x_n|^2 \leqslant n\left(|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2\right),$$

мы получаем

$$\begin{aligned}\|P_r^{(s)}f(\xi)\|^2 &\leqslant C^r_{r+[s/2]}\sum|b_{i_1\dots i_s}|^2\lambda^2_{\alpha_1}\dots\lambda^2_{\alpha_r}\leqslant\\ &\leqslant C^r_{r+[s/2]}\left(\sum|b_{i_1\dots i_s}|^2\right)\left(\sum\lambda^2_{\alpha_1}\dots\lambda^2_{\alpha_r}\right)\leqslant\\ &\leqslant C^r_{r+[s/2]}\|f\|^2\frac{\left(\sum\lambda_j^2\right)^r}{r!}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $C_n^k \leqslant 2^n$, получаем

$$\|P_r^{(s)}\|^2 \leqslant C^r_{r+[s/2]}\frac{\left(\sum\lambda_j^2\right)^r}{r!} \leqslant \frac{1}{r!}2^{r+[s/2]}\left(\sum\lambda_j^2\right)^r,$$

а отсюда уже вытекает требуемая оценка. ∎

2.7. Доказательство леммы 2.9.

Запишем наш оператор B как блочную матрицу $\bigoplus\limits_k\Lambda^k\to\bigoplus\limits_k\Lambda^k$. Эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0}\\ 0 & 1 & & & & \\ P_1^{(0)} & 0 & 1 & & & \\ 0 & P_1^{(1)} & 0 & 1 & & \\ P_2^{(0)} & 0 & P_1^{(2)} & 0 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где операторы $P_r^{(s)}$ введены в предыдущем пункте.

Рассмотрим $f\in\Lambda$ и представим $f=\sum f_k$, где $f_k\in\Lambda_k$. Аналогичным образом представим Bf в виде $Bf=\sum(Bf)_k$, где $(Bf)_k\in\Lambda_k$.

$$\begin{aligned}\|(Bf)_k\| &= \left\|\sum_{2j\leqslant k}P_j^{(k-2j)}f_{k-2j}\right\|\leqslant\\ &\leqslant\sum_{2j\leqslant k}\left\|P_j^{(k-2j)}f_{k-2j}\right\|\leqslant\\ &\leqslant\sum_{2j\leqslant k}\left\|P_j^{(k-2j)}\right\|\|f_{k-2j}\|\leqslant\\ &\leqslant\sum\frac{1}{\sqrt{j!}}a^{k/4}\|f_{k-2j}\|.\end{aligned}$$

Пусть теперь $|||f|||_C\leqslant 1$, то есть (см. п. 1.3) для всех k

$$\|f_k\|\exp(Ck)\leqslant 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|(Bf)_k\| &\leqslant\sum\frac{1}{\sqrt{j!}}a^{k/4}\exp(-C(k-2j)) =\\ &=\exp\left(-\left(C-\tfrac14\ln a\right)k\right)\sum_{2j\leqslant k}\frac{1}{\sqrt{j!}}e^{2Cj}\leqslant\\ &\leqslant M\exp\left(-\left(C-\tfrac14\ln a\right)k\right),\end{aligned}$$

где $M=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{j!}}e^{2Cj}$.

Мы видим, что $\|(Bf)_k\|$ быстро убывает, т. е. $Bf\in\Lambda$. Таким образом, наш оператор B корректно определен как оператор в Λ. На самом деле и ограниченность B тоже доказана, так как мы получили, что

$$|||Bf|||_{C-\frac14\ln a}\leqslant M|||f|||_C.$$

∎

2.8. Доказательство леммы 2.10.

Она доказывается примерно так же, как и предыдущая лемма. Рассмотрим оператор $Q_r^{(s+2r)}$, действующий из Λ^{s+2r} в Λ^s по формуле

$$Q_r^{(s+2r)}f(\eta)=\left(\sum\lambda_j\frac{\partial^2}{\partial\eta_{2j-1}\partial\eta_{2j}}\right)^r f(\eta).$$

Легко видеть, что $Q_r^{(s+2r)}=(P_r^s)^*$ (в самом деле, оператор, сопряженный к $\hat a_j^+f=\xi_jf$, есть $\frac{\partial}{\partial\xi_j}$).

Пусть $f = \sum f_k$, $Df = \sum (Df)_k$, где f_k, $(Df)_k \in \Lambda^k$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(Df)_k\| &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \left\|Q_r^{(k+2r)} f_{k+2r}\right\| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \left\|Q_r^{(k+2r)}\right\| \|f_{k+2r}\| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \left\|P_r^{(k)}\right\| \|f_{k+2r}\| \leqslant \\ &\leqslant \sum \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2+k/4} \|f_{k+2r}\|. \end{aligned}$$

Пусть теперь $|||f|||_C \leqslant 1$, т. е. для всех k выполнено

$$\|f_k\| \exp(Ck) \leqslant 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|(Df)_k\| &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2+k/4} \exp(-(k+2r)C) = \\ &= a^{k/4} \exp(-Ck) \left(\sum \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2} e^{-2Cr} \right). \end{aligned}$$

Мы снова видим, что $(Df)_k$ убывает достаточно быстро, и тем самым $Df \in \Lambda$. При этом мы видим, что

$$|||Df|||_{C-\frac{1}{4}\ln a} \leqslant M |||f|||_C, \quad \text{где } M = \sum \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2} e^{-2Cr},$$

т. е. наш оператор ограничен.

Лемма 2.10 и вместе с ней теорема 2.1 доказаны. ■

2.9. Доказательство теоремы 2.4. Прежде всего, заметим, что и здесь достаточно рассмотреть операторы с ядрами вида

$$\exp\left\{ \tfrac{1}{2} (\xi \ \ \bar\eta) \begin{pmatrix} K & L \\ -L^{\mathrm t} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\mathrm t} \\ \bar\eta^{\mathrm t} \end{pmatrix} \right\} \tag{2.11}$$

(дело в том, что при домножении оператора с ядром вида (2.1) на T_j^ξ и T_j^η матрицы K, L, M подвергаются конечномерным возмущениям).

Лемма 2.12. Пусть K — ядерный оператор. Тогда оператор B умножения на $\exp\left\{\frac{1}{2}\xi K \xi^{\mathrm t}\right\}$ ограничен и обратим в гильбертовом фермионном пространстве Фока $\overline{\Lambda}$.

Доказательство. В силу леммы 2.8 мы без ограничения общности можем считать, что

$$\frac{1}{2} \xi K \xi^{\mathrm t} = \sum \lambda_j \xi_{2j-1} \xi_{2j},$$

где $\lambda_j \geqslant 0$, а $\sum |\lambda_j| < \infty$.

Пусть V_s — внешняя алгебра от переменных ξ_{2s-1}, ξ_{2s}. Тогда

$$\Lambda = \bigotimes_{s=1}^{\infty} V_s,$$

а оператор B разлагается в тензорное произведение

$$B = \bigotimes_{s=1}^{\infty} B_s,$$

где B_s — оператор умножения на $\exp(\lambda_s \xi_{2s-1} \xi_{2s})$ в V_s. Поэтому

$$\|B\| = \prod_{s=1}^{\infty} \|B_s\|. \tag{2.12}$$

Но B_s — это оператор в четырехмерном пространстве, и вычисление его нормы не составляет труда. Матрица этого оператора в базисе $1, \xi_{2s-1}, \xi_{2s}, \xi_{2s-1}\xi_{2s}$ равна

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \lambda_s & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Спектр оператора $B_s^* B$ состоит из чисел $1, 1, 1 \pm \lambda_s \sqrt{1 + \frac{\lambda_s^2}{4}} + \frac{\lambda_s^2}{2}$, а величина $\|B_s\|^2$ равна максимальному собственному значению $B_s^* B$. Поэтому

$$\|B_s\| = \left(1 + \lambda_s \sqrt{1 + \frac{\lambda_s^2}{4}} + \frac{\lambda_s^2}{2} \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\lambda_s + O(\lambda_s^2).$$

Следовательно, произведение (2.12) сходится.

Ограниченность оператора B доказана. Далее,

$$B^{-1} f(\xi) = \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \xi K \xi^{\mathrm t} \right\} f(\xi),$$

а в силу только что доказанного оператор, стоящий в правой части равенства, ограничен. ■

Лемма 2.13. Пусть K — ядерный оператор. Тогда оператор

$$D = \exp\left(\sum k_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

ограничен и обратим в $\overline{\Lambda}(H)$.

Доказательство. Этот оператор сопряжен к оператору B из предыдущей леммы. ■

Вернемся к общему случаю. Нам нужно исследовать на ограниченность оператор S с ядром (2.11).

Домножая S слева на оператор

$$B^{-1} f(\xi) = \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \xi K \xi^{\mathrm t} \right\} f(\xi)$$

и справа на

$$D^{-1} = \exp\left(-\tfrac{1}{2} \sum m_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

мы получаем оператор с ядром

$$\exp\left\{ \tfrac{1}{2} (\xi \ \ \bar\eta) \begin{pmatrix} 0 & L \\ -L^{\mathrm t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\mathrm t} \\ \bar\eta^{\mathrm t} \end{pmatrix} \right\},$$

или, что то же самое, оператор

$$Qf(\xi) = f(L\xi).$$

Этот оператор оставляет инвариантными подпространства Λ^s и действует в Λ^s как внешняя степень $\Lambda^s L$ оператора L. Тем самым, возникает вопрос: для каких L последовательность $\|\Lambda^s L\|$ ограничена? Доказательство теоремы завершается следующей леммой.

Лемма 2.14. Последовательность $\|\Lambda^s L\|$ ограничена тогда и только тогда, когда L представи́м в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L'\| \leqslant 1$, а T — ядерный оператор.

Доказательство. Пусть L представи́м в указанном виде. Ясно, что

$$\Lambda^k L = \Lambda^k L' \cdot \Lambda^k(1+T),$$

далее, $\|\Lambda^k L\| \leqslant 1$, а

$$\left\|\Lambda^k(1+T)\right\|^2 = \left\|\Lambda^k(1+T^*)\cdot\Lambda^k(1+T)\right\| = \left\|\Lambda^k[(1+T^*)(1+T)]\right\|.$$

Пусть $(1+T^*)(1+T) = 1+S$. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$ — положительные собственные числа оператора S (каждое собственное число входит в эту последовательность столько раз, какова его кратность), а $e_1, e_2, \ldots$ — соответствующие собственные векторы. Легко видеть, что

$$\|\Lambda^s(1+S)\| = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_s), \tag{2.13}$$

причем норма достигается на векторе $e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_s$. Последовательность (2.13) ограничена сверху величиной $\prod(1+\lambda_j)$, которая в силу ядерности оператора S конечна. В одну сторону лемма доказана.

Обратно, пусть L — некоторый оператор, причем числа $\|\Lambda^s L\|$ ограничены. Пусть $L = UR$ — его полярное разложение (см. Предварительные сведения, §4). Тогда

$$\Lambda^s L = \Lambda^s U \cdot \Lambda^s R.$$

Оператор $\Lambda^s U$ является изометрией на образе $\Lambda^s R$, поэтому $\|\Lambda^s R\| = \|\Lambda^s L\|$. Таким образом, числа $\|\Lambda^s R\|$ ограничены. Пусть H_- и H_+ — спектральные подпространства положительного самосопряженного оператора R, отвечающее отрезку $[0,1]$ и интервалу $(1,\infty)$ соответственно. Определим операторы R' и $(1+T)$ из условия

$$\begin{cases} R'v = v, & v \in H_+; \\ R'v = Rv, & v \in H_-; \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+T)v = Rv, & v \in H_+; \\ (1+T)v = v, & v \in H_-. \end{cases}$$

Ясно, что $R = R'T$. Мы хотим доказать, что оператор T — ядерный. Пусть H_ε — спектральное подпространство оператора T, отвечающее интервалу (ε,∞), где $\varepsilon > 0$. Допустим, H_ε бесконечномерно. Тогда для любого N найдутся ортогональные единичные векторы $e_1, \ldots e_N \in H_\varepsilon$ такие, что векторы $(1+T)e_1, \ldots (1+T)e_N$ также попарно ортогональны (это очевидно, если в H_ε содержится хотя бы одно бесконечномерное собственное подпространство, если же такого подпространства нет, то H_ε можно разложить в счетную сумму ненулевых спектральных подпространств $H_\varepsilon = \bigoplus Q_j$ и далее выбрать произвольные $e_j \in Q_j$). Поэтому

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda^N(1+T)\right\| \geqslant \left\|\Lambda^N(1+T)(e_1\wedge\ldots\wedge e_N)\right\| &= \\ = \left\|(1+T)e_1\wedge\ldots\wedge(1+T)e_N\right\| &= \\ = \prod \|(1+T)e_j\| &\geqslant \\ \geqslant (1+\varepsilon)^N&.\end{aligned}$$

Противоречие. Таким образом, все H_ε конечномерны, а значит, оператор T — компактен. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ — его собственные числа, а $e_1, e_2, \ldots$ — собственные векторы. Тогда

$$\left\|\Lambda^k(1+T)\right\| = (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_k), \tag{2.14}$$

причем норма достигается на векторе $e_1\wedge\ldots\wedge e_k$. Но числа (2.14) должны быть ограничены, следовательно, произведение $\prod(1+\lambda_k)$ сходится, а значит, оператор T — ядерный, что и требовалось доказать. ■

§ 3. *Категория* $\overline{\mathbf{GA}}$

В этом параграфе мы строим бесконечномерный аналог категории **GA**.

3.1. Первое определение. Объект категории $\overline{\mathbf{GA}}$ — прямая сумма двух гильбертовых пространств.

Определение морфизма будет двухступенчатым. Пусть $V = V_+ \oplus V_-$, $W = W_+ \oplus W_-$ — два объекта категории $\overline{\mathbf{GA}}$. Множество $m(V,W)$ мы определим как множество подпространств (линейных отношений) $P : V \rightrightarrows W$ таких, что P является графиком оператора $S(P) : W_+ \oplus V_- \to W_- \oplus V_+$, причем матрица $S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям:

1°. блоки B и C ограничены;

2°. блоки A и D являются операторами Гильберта—Шмидта.

Матрицу $S(P)$ мы будем называть *преобразованием Потапова* линейного отношения P.

Множество $\mathrm{Mor}(V,W)$ состоит из null и некоторых замкнутых линейных отношений $P : V \rightrightarrows W$, причем линейное отношение $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$ содержится в $\mathrm{Mor}(V,W)$ в том и только том случае, когда существует $P' \in m(V,W)$ такое, что $P \cap P'$ имеет конечную коразмерность в P и P'.

Пусть α — коразмерность $P \cap P'$ в P', а β — коразмерность $P \cap P'$ в P. Величину $d(P) = \alpha - \beta$ мы назовем *дефектом размерности* морфизма. Мы опускаем тривиальную проверку того, что $d(P)$ не зависит от выбора P'.

Замечание. Пусть P — ненулевой морфизм $V \to W$. Пусть $s = \dim(P \cap (W_- \oplus V_+))$, пусть L — проекция P на $W_+ \oplus V_-$ параллельно $W_- \oplus V_+$. Пусть t — коразмерность L в P. Тогда легко видеть, что $d(P) = s - t$.

Умножение морфизмов мы определим так же как в категории **GA** (см. п. II.7.2), т. е. произведение null и любого морфизма равно null, если же $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — ненулевые морфизмы, то в случае

$$\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Im}\, P = 0, \quad D(Q) + \mathrm{Im}\, P = W \tag{3.1}$$

Q и P перемножаются как линейные отношения; в противном случае их произведение равно null.

3.2. Второе определение морфизмов. Это определение, не будучи двухступенчатым, не является, однако, более прозрачным. Пусть $V = V_+ \oplus V_-$, $W = W_+ \oplus W_-$ — объекты $\overline{\mathbf{GA}}$. Пусть $P \subset V \oplus W$ — замкнутое подпространство. Заметим, что тем самым на P определена структура гильбертова пространства. Линейное отношение P является морфизмом категории $\overline{\mathbf{GA}}$, если:

1°. оператор X проектирования P на $W_+ \oplus V_-$ (вдоль $W_- \oplus V_+$) является фредгольмовым (см. Предварительные сведения, §4);

2°. операторы проектирования $P \cap (W \oplus V_-)$ на W_- и $P \cap (V \oplus W_+)$ на V_+ являются операторами Гильберта—Шмидта.

Дефект размерности $d(P)$ — это не что иное, как индекс фредгольмова оператора X.

Задача. Проверьте равносильность определений.

3.3. Корректность определения. Пункты 3.5–3.10 посвящены доказательству следующих утверждений 3.1–3.5.

Предложение 3.1. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — морфизмы, отличные от null. Тогда:

а) подпространство $\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P \subset W$ конечномерно;

б) подпространство $D(Q) + \mathrm{Im}\, P \subset W$ замкнуто и имеет конечную коразмерность в W.

Замечание. Тем самым устраняется некоторая двусмысленность в (3.1): нам не важно, какую сумму, алгебраическую или топологическую, мы рассматриваем. Заметим также, что сами подпространства $\mathrm{Im}\, P$ и $D(Q)$ могут не быть замкнутыми.

Теорема 3.2. Произведение морфизмов $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ категории $\overline{\mathbf{GA}}$ является морфизмом категории $\overline{\mathbf{GA}}$. При этом если $QP \neq \mathrm{null}$, то

$$d(Q) + d(P) = d(QP). \tag{3.2}$$

Полезна также следующая явная формула для произведения морфизмов.

Теорема 3.3. Пусть $P \in m(V, W)$, $Q \in m(W, Y)$; пусть

$$S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad S(Q) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$$

— их преобразования Потапова. Предположим, что матрица $(1 - AN)$ обратима. Тогда $QP \in m(V, Y)$ причем

$$S(QP) = \begin{pmatrix} K + L(1 - AN)^{-1}AM & L(1 - AN)^{-1}B \\ C(1 - NA)^{-1}M & D + C(1 - NA)^{-1}NB \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Отметим одну важную особенность формулы (3.3), которая не сразу бросается в глаза.

Лемма 3.4. Пусть A, N — операторы Гильберта—Шмидта, и матрица $(1 - AN)$ обратима. Тогда матрица $(1 - NA)$ обратима и

$$(1 - AN)^{-1}A = A(1 - NA)^{-1}. \tag{3.4}$$

3.4. Группа $\mathrm{Aut}(V)$. Два конечномерных объекта категории $\overline{\mathbf{GA}}$ изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их размерности. Условия 1° и 2° п. 3.1 в случае, когда V и W конечномерны, выполнены автоматически, поэтому в этом случае $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V, W) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{GA}}(V, W)$.

Задача. Покажите, что существует 3 попарно не изоморфных бесконечномерных объекта категории $\overline{\mathbf{GA}}$, а именно: $\ell_2 \oplus 0$, $0 \oplus \ell_2$ и $\ell_2 \oplus \ell_2$.

Пусть $V = V_+ \oplus V_- \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$, причем V_+ и V_- бесконечномерны.

Предложение 3.5. Следующие условия на линейное отношение $P \subset V \oplus V$ равносильны:

1°. $P \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$;

2°. P является графиком обратимого ограниченного оператора $V \to V$, причем матрица

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_- \tag{3.5}$$

этого оператора удовлетворяет условию: B и C — операторы Гильберта—Шмидта.

Доказательство см. в п. 3.9.

Допуская некоторую неточность языка, мы будем считать, что $\mathrm{Aut}(V)$ — группа ограниченных операторов, удовлетворяющих условию 2°.

Замечание. Блоки A, D в матрице (3.5) являются фредгольмовыми операторами. В самом деле, пусть $\begin{pmatrix} F & G \\ H & J \end{pmatrix}$ — обратная матрица. Тогда

$$AF = 1 - BH, \quad FA = 1 - GC,$$

и тем самым оператор A почти обратим. Как показывает следующий пример, блоки A и D действительно могут быть необратимыми:

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \quad 1 \end{array}\right). \tag{3.6}$$

Заметим далее, что отображение $P \mapsto d(P)$ является гомоморфизмом $\mathrm{Aut}(V)$ в аддитивную группу $\mathbb{Z}$. Отметим также, что дефект размерности графика оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ равен индексу оператора A.

Через $\mathrm{Aut}^{\circ}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ мы обозначим подгруппу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$, состоящую из автоморфизмов с дефектом 0.

3.5. Доказательство леммы 3.4. Пусть матрица $1 - NA$ необратима. В силу компактности оператора NA найдется ненулевой вектор v такой, что $NAv = v$. Но тогда $AN(Av) = Av$, а значит, и оператор $(1 - NA)$ необратим. Далее, равенство

$$A(1 - NA)^{-1} = (1 - AN)^{-1}A$$

очевидно в случае, если $\|AN\| \leqslant 1$, $\|NA\| \leqslant 1$, потому что в обеих его частях стоит

$$A + ANA + ANANA + \ldots .$$

Поэтому при малых λ

$$A(1 - \lambda NA)^{-1} = (1 - \lambda AN)^{-1}A.$$

В обеих частях последнего равенства стоят мероморфные операторнозначные функции от λ. Они совпадают в окрестности нуля, а значит, совпадают всюду.

3.6. Сравнимые подпространства. Пусть Y — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H. Подпространство $Y' \subset H$ мы назовем *сравнимым* с Y, если:

1. Y' замкнуто;
2. $Y \cap Y'$ имеет конечные коразмерности в Y и Y'.

Лемма 3.6. Условие 1 может быть заменено на условие
1$'$. $Y \cap Y'$ замкнуто.

Доказательство: Утверждение вытекает из следующей задачи. ■

Задача. Пусть $A \supset B$ — подпространства в гильбертовом пространстве, причем B замкнуто и имеет конечную коразмерность в A. Тогда A замкнуто.

Задача. Пусть Y и Y' — сравнимы, а H — замкнутое подпространство. Тогда $H \cap Y$ сравнимо с $H \cap Y'$.

Лемма 3.7. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, а $A : H_1 \to H_2$ — ограниченный оператор. Пусть Y, Y' — сравнимые подпространства в H_1, и подпространство AY замкнуто в H_2. Тогда подпространства AY и AY' сравнимы.

Доказательство. В силу теоремы Банаха об обратном операторе (см. [Reed, Simon (1972)], § III.5) оператор A индуцирует гомеоморфизм

$$Y / (Y \cap \operatorname{Ker} A) \to AY$$

(слева стоит факторпространство Y по $Y \cap \operatorname{Ker} A$). Поэтому подпространство $A(Y \cap Y')$ замкнуто в H_2, и теперь утверждение становится очевидным. ■

Следствие 3.8. Пусть Y, Y', Z, Z' — подпространства в H, причем Y сравнимо с Y', а Z сравнимо с Z'. Пусть $Y + Z$ замкнуто, тогда $Y' + Z'$ замкнуто и сравнимо с $Y + Z$.

Доказательство. Применяем лемму к оператору $A(x, x') = x + x'$ из $H \oplus H$ в H. ■

Пусть Y и Y' сравнимы, пусть α — коразмерность $Y \cap Y'$ в Y, а β — коразмерность $Y \cap Y'$ в Y'. *Относительной размерностью* $\dim(Y \mid Y')$ мы назовем число $\alpha - \beta$.

3.7. Доказательство предложения 3.1.

Пусть сначала $P \in m(V, W)$, $Q \in m(W, Y)$.

$$S(Q) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}, \qquad S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

т. е. P состоит из векторов (v_+, v_-, w_+, w_-), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} w_- = Aw_+ + Bv_-, & (3.7) \\ v_+ = Cw_+ + Dv_-, & (3.8) \end{cases}$$

а Q — из векторов (w_+, w_-, y_+, y_-), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} y_- = Ky_+ + Lw_-, & (3.9) \\ w_+ = My_+ + Nw_-. & (3.10) \end{cases}$$

Поэтому $\operatorname{Indef} P$ и $\operatorname{Ker} Q$ удовлетворяют соответственно системам уравнений

$$\begin{cases} w_- = Aw_+, \\ Cw_+ = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} Lw_- = 0, \\ w_+ = Nw_-. \end{cases}$$

Пусть $(w_+, w_-) \in \operatorname{Indef} P \cap \operatorname{Ker} Q$. Тогда $(1 - AN)w_- = 0$. В силу компактности оператора AN ядро $(1 - AN)$ конечномерно. Итак, подпространство $\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P$ конечномерно.

Далее, заметим, что $D(Q)$ содержит множество F всех векторов (w_+, w_-), удовлетворяющих условию $w_+ = Nw_-$ (в самом деле, вектор $(Nw_-, w_-; 0, Lw_-) \in$ $\in W \oplus Y$ содержится в Q). Множество $\operatorname{Im} P$ содержит множество G всех векторов (w_+, w_-), удовлетворяющих условию $w_- = Aw_+$. Подпространство $F + G$ совпадает с образом оператора

$$Z : \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & N \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

В силу альтернативы Фредгольма (см. [Reed, Simon (1972)], § VI.5) $\operatorname{Im} Z$ замкнут и имеет конечную коразмерность в W. Но подпространство $D(Q) + \operatorname{Im} P$ содержит $F + G = \operatorname{Im} Z$ и поэтому тоже замкнуто.

Для перехода к общему случаю $P \in \operatorname{Mor}(V, W)$, $Q \in \operatorname{Mor}(W, Y)$ остается применить соображения предыдущего пункта. ■

3.8. Доказательство теоремы 3.3.

Итак, пусть оператор $1 - AN$ обратим. Из предыдущего доказательства ясно, что $\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P = 0$. Далее, оператор Z, задаваемый формулой (3.11), обратим:

$$\begin{pmatrix} 1 & N \\ A & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1 - NA)^{-1} & -N(1 - AN)^{-1} \\ -A(1 - NA)^{-1} & (1 - AN)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\operatorname{Im} P + D(Q) \supset \operatorname{Im} Z = W$. Таким образом, $QP \neq \text{null}$.

Исключая w_- и w_+ из уравнений (3.7), (3.10), мы получаем

$$w_- = (1 - AN)^{-1}(AMy_+ + Bv_-), \quad w_+ = (1 - NA)^{-1}(My_+ + NBv_-).$$

Подставляя w_+ и w_- в уравнения (3.8), (3.9), мы получаем искомое утверждение. ■

3.9. Доказательство теоремы 3.1.

Лемма 3.9. Пусть $P, P' : V \rightrightarrows W$ и $Q, Q' : W \rightrightarrows Y$ — линейные отношения, причем P сравнимо с P', а Q сравнимо с Q'. Пусть $R = QP$ (соответственно $R' = Q'P'$) — произведение Q и P (соответственно Q' и P') как линейных отношений. Тогда

$$d(QP, Q'P') = d(Q, Q') + d(P, P') - \\ - d\big(\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P,\ \operatorname{Ker} Q' \cap \operatorname{Indef} P'\big) + \\ + d\big(\operatorname{Im} P + D(Q),\ \operatorname{Im} P + D(Q')\big). \tag{3.12}$$

Доказательство. Повторим рассуждения из п. II.7.2. Пусть $Z \subset T = V \oplus W \oplus W \oplus Y$ — подпространство всех векторов вида (v, w, w, y), а $P \oplus Q \subset V \oplus W \oplus W \oplus Y$ — подпространство, состоящее из векторов вида (v, w, w_1, y_1), где $(v, w) \in P$, $(w_1, y_1) \in Q$. Тогда QP — проекция $Z \cap (P \oplus Q)$ на $V \oplus Y$ вдоль $W \oplus W$. Пусть подпространство $L \subset V \oplus W \oplus W \oplus Y$ состоит из всех векторов вида $(0, w, w, 0)$. Ясно, что

$$(P \oplus Q) \cap L \simeq \operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Im} P. \tag{3.13}$$

Теперь мы должны проследить, что происходит с двумя парами Q, P и Q', P' сравнимых отношений. Следующие три равенства являются легко проверяемыми высказываниями из области чистой линейной алгебры:

1°. $$d(Q, Q') + d(P, P') = d\big(Z \cap (P \oplus Q),\ Z \cap (P' \oplus Q')\big) + \\ + d\big(Z + (P \oplus Q),\ Z + (P' \oplus Q')\big);$$

2°. $$d\big(Z + (P \oplus Q),\ Z + (P' \oplus Q')\big) = d\big(\operatorname{Im} P + D(Q),\ \operatorname{Im} P' + D(Q')\big);$$

3°. $$d\big(Z \cap (P \oplus Q),\ Z \cap (P' \oplus Q')\big) = d\big(L \cap (P \oplus Q),\ L \cap (P' \oplus Q')\big) + d(PQ, P'Q').$$

Учитывая эти 3 равенства, а также (3.13), мы получаем искомое утверждение. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $P \in \operatorname{Mor}(V, W)$, $Q \in \operatorname{Mor}(W, Y)$. Возьмем $P' \in m(V, W)$, сравнимое с P, и $Q' \in m(W, Y)$ сравнимое с Q. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — преобразования Потапова морфизмов Q' и P'. Возможен случай, когда матрица $1 - AN$ необратима. Если это так, то выберем конечномерный оператор ΔN так, чтобы $\|N + \Delta N\| < \|A\|^{-1}$. Тогда матрица $(1 - (N + \Delta N)A)$ обратима. Пусть $Q'' \in m(W, Y)$ — морфизм с преобразованием Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N + \Delta N \end{pmatrix}$. Тогда к Q'' и P' применима теорема 3.3. В частности, $Q''P' \neq \mathrm{null}$ и $d(Q''P') = 0$.

Применяя лемму 3.4 и учитывая, что в силу равенств

$$\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P = \operatorname{Ker} Q'' \cap \operatorname{Indef} P' = 0,$$
$$\operatorname{Im} P + D(Q) = \operatorname{Im} P' + D(Q'') = W$$

второе и третье слагаемое в формуле (3.12) равны 0, мы получаем искомое утверждение. ■

3.10. Доказательство предложения 3.5.

Пусть G — группа всех операторов в V, удовлетворяющих условию 2° предложения 3.5. Для любого $P \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ обозначим через $\widetilde{P}$ соответствующий оператор в V. Пусть $X \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ — элемент, соответствующий элементу $\widetilde{X} \in \mathrm{G}$, задаваемому формулой (3.6).

Итак, пусть $P \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$. Мы хотим убедиться в том, что $\widetilde{P} \in \mathrm{G}$. Пусть $j = d(P)$. Рассмотрим $P' = X^{-j}P$. Тогда $d(P') = 0$, а нам достаточно проверить, что $\widetilde{P}' \in \mathrm{G}$. Рассмотрим конечномерное возмущение P'' элемента P' такое, что $P'' \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V) \cap m(V, V)$. Тогда $\widetilde{P}'' - \widetilde{P}'$ имеет конечный ранг, поэтому нам достаточно проверить, что $\widetilde{P}'' \in \mathrm{G}$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ — преобразование Потапова P'', тогда $(v_+, v_-; w_+, w_-) \in P''$ равносильно

$$\begin{cases} w_- - Kw_+ = Lv_-, \\ \quad Mw_+ = v_+ - Nv_-. \end{cases} \tag{3.14}$$

Рассмотрим операторы

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ -K & E \end{pmatrix} : W_+ \oplus W_- \to V_+ \oplus W_-,$$
$$Q = \begin{pmatrix} E & -N \\ 0 & L \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus W_-,$$

где $W = W_+ \oplus W_-$ — второй экземпляр пространства $V = V_+ \oplus V_-$. Условие $(v_+, v_-; w_+, w_-) \in P''$ в силу равенств (3.14) переписывается в виде

$$T \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix}.$$

Теперь вспоминаем, что P'' — график обратимого оператора $V \to W$, поэтому

$$\operatorname{Ker} T = 0, \quad \operatorname{Ker} Q = 0, \quad \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} Q.$$

Но

$$W_- \subset \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} Q \supset V_+,$$

поэтому $\operatorname{Im} T \supset V_+ \oplus W_-$, следовательно (по теореме Банаха об обратном операторе), операторы T и Q обратимы. Теперь для оператора $\widetilde{P}''$ мы можем написать явную формулу

$$\widetilde{P}'' = T^{-1}Q = \begin{pmatrix} M^{-1} & M^{-1}N \\ KM^{-1} & L - KM^{-1}N \end{pmatrix},$$

и в одну сторону утверждение доказано.

Пусть $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, пусть индекс фредгольмова оператора A равен j. Тогда верхний левый блок оператора $X^{-j}U$ имеет индекс 0, а поэтому его можно подвергнуть конечномерному возмущению так, что верхний левый блок станет обратимым, а затем все сводится к простому вычислению (см. п. II.3.6). ■

3.11. Инволюция в категории $\overline{\mathrm{GA}}$. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, а $P : H_1 \rightrightarrows H_2$ — замкнутое линейное отношение (т. е. замкнутое подпространство в $H_1 \oplus H_2$). Определим сопряженное линейное отношение $P^* : H_2 \rightrightarrows H_1$ как множество всех $(\tilde h_2, \tilde h_1) \in H_2 \oplus H_1$ таких, что для любого вектора (h_1, h_2) выполнено

$$\langle \tilde h_2, h_2 \rangle_{H_2} = \langle \tilde h_1, h_1 \rangle_{H_1}.$$

Иными словами, P^* есть ортогональное дополнение в $H_1 \oplus H_2$ до P относительно эрмитовой формы

$$M\big((\tilde{h}_1, \tilde{h}_2), (h_1, h_2)\big) = \langle \tilde{h}_1, h_1 \rangle_{H_1} - \langle \tilde{h}_2, h_2 \rangle_{H_2} \tag{3.15}$$

(где $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2), (h_1, h_2) \in H_1 \oplus H_2$). В частности, $P^{**} = P$.

Задача. Пусть P — график некоторого оператора A. Покажите, что P^* — график оператора A^*.

Задача. Покажите, что для любых $P : H_1 \rightrightarrows H_2$, $Q : H_2 \rightrightarrows H_3$ выполнено

$$(QP)^* \supset P^*Q^*. \tag{3.16}$$

Задача. Приведите пример, когда $(QP)^* \not\supseteq P^*Q^*$.

Введем инволюцию в категории **GA**, положив, что для любого $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ морфизм P^* есть сопряженное линейное отношение, а $\mathrm{null}^*_{V,W} = \mathrm{null}_{W,V}$.

Теорема 3.10. Определение инволюции корректно, т. е.

а) если $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V, W)$, то $P^* \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(W, V)$;

б) если $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(W, Y)$, то

$$(QP)^* = P^*Q^*. \tag{3.17}$$

Кроме того, инволюция обладает следующими свойствами:

в) $d(P^*) = -d(P)$;

г) $\mathrm{Ker}(P^*) = (\mathrm{Im}\, P)^{\perp}$, $\mathrm{Indef}(P^*) = D(P)^{\perp}$ $\quad$ (3.18)

(ортогональное дополнение понимается в смысле скалярных произведений в V и W);

д) пусть $P \in m(V, W)$ и $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$. Тогда $P^* \in m(W, V)$ и

$$S(P^*) = \begin{pmatrix} -N^* & L^* \\ M^* & -K^* \end{pmatrix} : V_+ \oplus W_- \to V_- \oplus W_+.$$

Доказательство д). Пусть вектор $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (\tilde{v}_+, \tilde{v}_-; \tilde{w}_+, \tilde{w}_-) \in V \oplus W$ ортогонален относительно формы (3.15) любому вектору $(v, w) = (v_+, v_-; w_+, w_-) \in P$. Учитывая, что

$$w_- = Kw_+ + Lv_-, \quad v_+ = Mw_+ + Nv_-,$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{w}, w \rangle - \langle \tilde{v}, v \rangle = \\ &= \langle \tilde{w}_+, w_+ \rangle + \langle \tilde{w}_-, w_- \rangle - \langle \tilde{v}_+, v_+ \rangle - \langle \tilde{v}_-, v_- \rangle = \\ &= \langle \tilde{w}_+, w_+ \rangle + \langle \tilde{w}_-, Kw_+ + Lv_- \rangle - \langle \tilde{v}_+, Mw_+ + Nv_- \rangle - \langle \tilde{v}_-, v_- \rangle = \\ &= \langle \tilde{w}_+ + K^*\tilde{w}_- - M^*\tilde{v}_+, w_+ \rangle - \langle \tilde{v}_- - L^*\tilde{w}_- + N^*\tilde{v}_+, v_- \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что w_+ и v_- могут быть любыми, получаем

$$\tilde{v}_- = -N^*\tilde{v}_+ + L^*\tilde{w}_-, \quad \tilde{w}_+ = -K^*\tilde{w}_- + M^*\tilde{v}_+,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение г) мы оставляем в качестве упражнения.

Далее, легко видеть, что если P и R сравнимы, то P^* и R^* сравнимы, и

$$d(P, R) + d(P^*, R^*) = 0.$$

Отсюда (и из д)) мгновенно следует а) и г).

Пусть, далее, P и Q удовлетворяют условиям теоремы 3.3. Тогда равенство (3.17) вытекает непосредственно из формул (3.3). Пусть P, Q произвольны. Тогда (3.18) вместе с г) дает $d((QP)^*) = d(P^*Q^*)$, что вместе с (3.16), в свою очередь, дает (3.17). Теорема доказана. ■

Легко видеть, что группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ всех унитарных элементов группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ (см. п. II.8.6) состоит из всех унитарных матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где B и C — операторы Гильберта—Шмидта.

3.12. Замечания. Пусть Y_1, Y_2 — подпространства в гильбертовом пространстве H. Пусть P_1, P_2 — проекторы на Y_1, Y_2. Мы скажем, что Y_1, Y_2 являются $\mathscr{L}_p$-сравнимыми, если операторы $(P_1P_2 - E)|_{Y_1}$ и $(P_2P_1 - E)|_{Y_2}$ содержатся в классе Шаттена $\mathscr{L}_p$.

Задача. Обобщите на $\mathscr{L}_p$-сравнимость рассуждения п. 3.6. Дайте определение категории $\overline{\mathrm{GA}}$ в терминах $\mathscr{L}_2$-сравнимости.

§ 4. *Категория* $\overline{\mathrm{GD}}$ *и спинорное представление*

4.1. Категория $\overline{\mathrm{GD}}$. Объект V категории $\overline{\mathrm{GD}}$ — это прямая сумма $H \oplus H'$ гильбертова пространства H и сопряженного к H пространства H'. Эта прямая сумма наделяется естественной структурой гильбертова пространства, а также симметричной билинейной формой

$$\{(v, v'), (w, w')\} = v'(w) + w'(v),$$

где $v, w \in H$, а $v', w' \in H'$. Подпространство $H \subset V$ мы будем обозначать через V_+, а подпространство $H' \subset V$ — через V_-.

Можно еще сказать, что объект V категории **GD** — это прямая сумма $V = V_+ \oplus V_-$ двух подпространств, при этом фиксирована антилинейная обратимая изометрия $U_V : V_+ \to V_-$ (в самом деле, пространство H' антиизоморфно H).

Множество $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$ состоит из null и линейных отношений $P : V \rightrightarrows W$, удовлетворяющих двум условиям:

а) P — морфизм категории $\overline{\mathrm{GA}}$;

б) P — максимальное изотропное подпространство в $V \oplus W$ относительно формы

$$\{(v_1, w_1), (v_2, w_2)\}_{V \oplus W} = \{v_1, v_2\}_V - \{w_1, w_2\}_W. \tag{4.1}$$

Правила умножения морфизмов — те же, что и в категории $\overline{\mathrm{GA}}$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V, W)$, причем P изотропно относительно формы (4.1). Докажите, что $d(P) \leqslant 0$, причем $d(P) = 0$ тогда и только тогда, когда P — максимальное изотропное подпространство.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(W, Y)$. Тогда $QP \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V, Y)$, при этом очевидно, что QP изотропно. С другой стороны, $d(QP) = d(Q) + d(P) = 0 + 0$ и, тем самым, $QP \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, Y)$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(W, Y)$. Докажите, что произведение $QP : V \rightrightarrows Y$, вычисленное как произведение линейных отношений, содержится в $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, Y)$.

4.2. Преобразование Потапова.

Лемма 4.1. Пусть $P \in m(V, W)$ (см. п. 3.1). Пусть его преобразование Потапова равно $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Тогда условие $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$ эквивалентно одновременному выполнению условий

$$B = C^{t}, \quad A = -A^{t}, \quad D = -D^{t}. \tag{4.2}$$

Доказательство леммы мы опускаем (см. п. II.6.7). ■

4.3. Спинорное представление категории $\overline{\mathrm{GD}}$. Поставим в соответствие каждому $V \in \overline{\mathrm{GD}}$ пространство Фока $\Lambda(V_+)$. При этом каждому вектору $v \in V$ мы поставим в соответствие оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$. Напомним, что эти операторы удовлетворяют так называемым *«каноническим антикоммутационным соотношениям»*:

$$\hat{a}(v_1)\hat{a}(v_2) + \hat{a}(v_2)\hat{a}(v_1) = \{v_1, v_2\} \cdot 1.$$

Теорема 4.2.

а) Для любого $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $\mathrm{spin}(P) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ такой, что

$$\hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(P) = \mathrm{spin}(P)\hat{a}(v) \tag{4.3}$$

для всех $(v, w) \in P$.

б) Положим $\mathrm{spin}(\mathrm{null}) = 0$. Тогда для любых $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$, $Q \in$ $\in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(W, Y) \setminus \mathrm{null}$

$$\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P) = \lambda\,\mathrm{spin}(QP),$$

причем $\lambda \neq 0$.

в) Отображение $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$ является биекцией множества $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$ на множество всех операторов Березина $\Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$, определенных с точностью до умножения на константу.

Эта теорема является точным аналогом теоремы из § II.6; доказательство, приведенное там, основано на явных вычислениях и без каких-либо ощутимых изменений переносится на бесконечномерный случай.

4.4. Группа автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений. Определим инволюцию в категории $\overline{\mathrm{GD}}$ как ограничение инволюции в категории $\overline{\mathrm{GA}}$ (см. п. 3.11).

Задача. Проверьте, что $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$ влечет $P^* \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(W, V)$.

Задача. Пусть операторы $U_V : V_+ \to V_-$ определены так же, как в п. 4.1. Покажите, что оператор

$$\begin{bmatrix} & & & U_V \\ & & U_V^{-1} & \\ & U_W & & \\ U_W^{-1} & & & \end{bmatrix} : V_+ \oplus V_- \oplus W_+ \oplus W_- \to W_+ \oplus W_- \oplus V_+ \oplus V_-$$

переводит любое подпространство $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V, W)$ в $P^* \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GD}}}(W, V)$.

Задача. Покажите, что

$$\mathrm{spin}(P^*) = [\mathrm{spin}(P)]^*$$

в том смысле, что при $f \in \Lambda(V)$, $g \in \Lambda(W)$

$$\langle f, \mathrm{spin}(P^*)g\rangle = \langle \mathrm{spin}(P)f, g\rangle.$$

Указание. Это видно из тождества (4.3).

Пусть теперь P — унитарный элемент группы $\mathrm{Aut}(V)$ (см. п. II.8.6). Тогда $P^* = P^{-1}$, поэтому матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ оператора с графиком P является унитарной. С другой стороны, матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ сохраняет каноническую билинейную форму в V с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $A = \overline{D}$, $B = \overline{C}$. Итак, матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Группой автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений называется группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$ всех унитарных элементов в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$. Она реализуется как группа унитарных матриц вида (4.5) таких, что Ψ — оператор Гильберта—Шмидта.

В силу леммы II.8.3 для любого $g \in \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$ оператор $\mathrm{spin}(g)$ унитарен с точностью до умножения на константу.

Задача. Пусть $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$. Пусть оператор Φ обратим. Отнормируем оператор $\mathrm{spin}(g)$ так, чтобы он имел ядро

$$\det\left[(\Phi^*\Phi)^{1/4}\right] \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \overline{\eta}) \begin{pmatrix} \overline{\Psi}\Phi^{-1} & \Phi^{-1} \\ \Phi^{t-1} & \Phi^{-1}\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \overline{\eta} \end{pmatrix}\right\}. \tag{4.6}$$

Тогда $\mathrm{spin}(g)$ унитарен (ср. с формулой (II.3.21)). Покажите, что $(\Phi^*\Phi - 1)$ — ядерный оператор (см. [Березин (1965)], § 5).

Задача. Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть G — группа вещественно-линейных операторов в V, сохраняющих форму $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ и представимых в виде $A(1 + B)$, где A — (комплексно-линейный) унитарный оператор, а B — вещественно-линейный оператор Гильберта—Шмидта. Покажите, что G изоморфна группе автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений.

4.5. Спинорное представление категории $\overline{\mathrm{GA}}$. Пусть, как обычно, R' обозначает пространство, двойственное к R. Пусть $H = H_+ \oplus H_-$ — объект категории $\overline{\mathrm{GA}}$. Поставим ему в соответствие объект $V(H)$ категории $\overline{\mathrm{GD}}$:

$$V(H) = V_+ \oplus V_- = (H_+ \oplus H'_-) \oplus (H_- \oplus H'_+).$$

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H, Y) \setminus \mathrm{null}$, а P° — аннулятор P в $H' \oplus Y'$, т. е. множество всех функционалов $(h', y') \in H' \oplus Y'$ таких, что $h'(p) = y'(q)$ для любых $(p, q) \in P$. Тогда $P \oplus P^\circ \subset V(H) \oplus V(Y)$ есть морфизм категории $\overline{\mathrm{GD}}$. Таким образом, мы построили функтор из $\overline{\mathrm{GA}}$ в $\overline{\mathrm{GD}}$.

Ограничивая спинорное представление $\overline{\mathrm{GD}}$ на $\overline{\mathrm{GA}}$, мы получаем представление категории $\overline{\mathrm{GA}}$, которое мы тоже будем называть *спинорным*.

4.6. Замечания.

A. Спинорное представление групп $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ и $\mathrm{Aut}^\circ_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$. Пусть H_+ и H_- — бесконечномерные гильбертовы пространства, $H = H_+ \oplus H_-$. Тогда группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GA}}(H)$ действует в $\Lambda(H_+ \oplus H'_-)$, и это представление мы также назовем *спинорным*. Обозначим нечетные переменные, отвечающие пространству H_+, через $\xi_1^+, \xi_2^+, \ldots$, а нечетные переменные, отвечающие H'_- — через $\xi_1^-, \xi_2^-, \ldots$.

Задача. Докажите, что представление $\mathrm{Aut}^\circ_{\mathrm{GA}}(H)$ (см. п. 3.4) в $\Lambda(H_+ \oplus H'_-)$ приводимо. Его неприводимые подпредставления R_k $(k \in \mathbb{Z})$ действуют в подпространствах, натянутых на векторы вида

$$\xi_{i_1}^+ \ldots \xi_{i_{k+\alpha}}^+ \xi_{j_1}^- \ldots \xi_{j_\alpha}^-.$$

Задача. Докажите, что спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GA}}(H)$ неприводимо. (Покажите, что операторы $Q \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{GA}}$ с $d(A) = n$ переводят R_k в R_{k+n}).

B. Категории $\overline{\mathrm{B}}$ и $\overline{\mathrm{C}}$. Объект V категории $\overline{\mathrm{B}}$ есть сумма $\mathbb{C} \oplus H \oplus H'$, где H — гильбертово пространство. Подпространства H и H' в V мы будем обозначать через V_+ и V_-. В пространстве V вводится симметричная билинейная форма

$$L_V\big((c, v_+, v_-), (d, w_+, w_-)\big) = cd + v_-(w_+) + w_-(v_+).$$

Объект V категории $\overline{\mathrm{C}}$ — это прямая сумма $V = V_+ \oplus V_-$ гильбертова пространства H и его сопряженного H'. В V водится кососимметричная билинейная форма по формуле

$$L_V\big((v_+, v_-), (w_+, w_-)\big) = v_-(w_+) - w_-(v_+).$$

В обоих случаях объекты являются объектами категории $\overline{\mathrm{GA}}$ (в случае $\overline{\mathrm{B}}$ имеем $\mathbb{C} \oplus H \oplus H' = (\mathbb{C} \oplus H) \oplus H'$). Множество $\mathrm{Mor}(V, W)$ в обоих случаях состоит из null и морфизмов категории $\overline{\mathrm{GA}}$, являющихся максимальными изотропными пространствами в $V \oplus W$ относительно билинейной формы

$$L_{V \oplus W}\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = L_V(v_1, v_2) - L_W(w_1, w_2).$$

Спинорное представление категории $\overline{\mathrm{B}}$ строится точно так же, как спинорное представление категории B (см. § III.3). С другой стороны, мы имеем возможность ограничить спинорное представление $\overline{\mathrm{GA}}$ на $\overline{\mathrm{B}}$ и $\overline{\mathrm{C}}$ (и таким образом получить аналоги всех представлений главы III).

C. Линеаризация. Рассмотрим в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$ подгруппу G, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1+K & L \\ M & 1+N \end{pmatrix},$$

где K, N — ядерные операторы, а L и M — операторы Гильберта—Шмидта.

Задача. Докажите, что для $g \in \mathrm{G}$ операторы $\mathrm{spin}(g)$ можно выбрать так, что

$$\mathrm{spin}(g_1 g_2) = \pm\, \mathrm{spin}(g_1)\, \mathrm{spin}(g_2)$$

для всех $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$.

Указание. См. п. II.3.9.

D. Представления ограниченными операторами в гильбертовом пространстве.

Задача. Пусть Q — подгруппа в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$, состоящая из операторов, представимых в виде $A(1+T)$, где $A \in \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$, а T — ядерный оператор. Докажите, что для $g \in \mathrm{Q}$ оператор $\mathrm{spin}(g)$ ограничен в топологии $\overline{\Lambda}(V_+)$.

4.7. Литературные замечания. Теорема существования спинорного представления для группы автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений получена независимо Шейлом и Стайнеспрингом [Shale, Stinespring (1964)] и Березиным [Березин (1965)]. Березин также получил явную формулу (4.6). На группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$ представление продолжено в [Неретин (1986)]. Категории $\overline{\mathrm{GD}}$, $\overline{\mathrm{GA}}$ и их спинорные представления построены в [Неретин (1989.2)], там же получены теоремы ограниченности из § 2.

Глава V

Представление Вейля: конечномерный случай

В работах по математической физике 50-х — начала 60-х годов было обнаружено, что вещественная симплектическая группа $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ имеет представление, поразительно похожее на спинорное представление группы $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$. По трудно объяснимой причуде математической терминологии это представление называется представлением Вейля (или Сигала—Шейла—Вейля), хотя правильней был бы термин «представление Фридрихса—Сигала—Березина», см. п. VI.2.5. В этой и следующей главе мы проводим по отношению к «представлению Вейля» ту же программу, что уже проведена в отношении спинорного представления. При этом (в отличие от главы II) мы избегаем промежуточных мотивировок и сразу излагаем то, что получается в итоге.

§ 1. Классические эрмитовы категории U, Sp, SO*

По аналогии с изучавшимися выше категориями линейных отношений **GA**, **B**, **C**, **D** хочется ввести похожие категории вещественных линейных отношений. Однако буквальное следование комплексным образцам приводит к объектам, которые не особенно интересны. Оказывается, что разумные вещественные аналоги категорий **GA**, **B**, **C**, **D** устроены несколько более замысловато. В этом параграфе мы вводим три такие вещественные категории **Sp**, **U** и **SO*** (об остальных вещественных «классических» категориях см. добавление А). Сразу оговоримся, что в этой книге нас интересует главным образом категория **Sp** (хотя две другие категории ничем ее не хуже).

1.1. Категория U. Объект категории **U** — конечномерное комплексное линейное пространство V, снабженное невырожденной эрмитовой формой $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ (вообще говоря, знаконеопределенной). Пусть p_V и q_V — положительный и отрицательный индексы инерции формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

Пусть V, W — объекты категории **U**. Как всегда, снабдим прямую сумму $V \oplus W$ разностью форм $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$, т.е. формой

$$\langle (v, w), (v', w')\rangle_{V\oplus W} = \langle v, v'\rangle_V - \langle w, w'\rangle_W. \tag{1.1}$$

До этого места все очень знакомо. Здесь, однако, начинаются различия с комплексным случаем. Морфизмом в $V \to W$ называется подпространство $P \subset V \oplus W$, удовлетворяющее условиям:

а) форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ на P неотрицательно определена, причем P — максимальное из подпространств, удовлетворяющих этому свойству (тем самым, $\dim P = p_V + q_W$);

б) форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ строго положительно определена на $\operatorname{Ker} P$, а форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ строго отрицательно определена на $\operatorname{Indef} P$.

Морфизмы умножаются как линейные отношения.

Замечание 1. Условие а) можно понять как то, что линейное отношение P «сжимает» форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$; в самом деле, $(v, w) \in P$ влечет $\langle v, v\rangle_V \geqslant \langle w, w\rangle_W$.

Замечание 2. Неотрицательность формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ на $\operatorname{Ker} P \subset V$ и неположительность формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ на $\operatorname{Indef} P \subset W$ следует из условия а). Условие б) лишь чуть-чуть усиливает условие а).

Предложение 1.1. Определение корректно, т.е. произведение морфизмов категории **U** является морфизмом категории **U**.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(W, Y)$. В проверке нуждается лишь то, что QP является максимальным среди подпространств, на которых форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ неотрицательно определена.

Покажем, что $QP \neq \mathrm{null}$ в категории **GA**. В самом деле, условие б) влечет $\operatorname{Indef} P \cap \operatorname{Ker} Q = 0$.

Осталось показать, что $\operatorname{Im} P + D(Q) = W$. Для этого рассмотрим в W ненулевой вектор $w \in D(Q)^\perp$. Отметим, что тем самым $(w, 0)$ ортогонален Q. Если $\langle w, w\rangle_W \geqslant 0$, то вектор $(w, 0)$ можно добавить к подпространству Q: форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W\oplus Y}$ останется неотрицательно определенной на линейной оболочке подпространства Q и вектора w. В силу максимальности Q мы имеем $(w, 0) \in Q$. Поэтому $(w, 0) \in Q \cap Q^\perp$; это возможно лишь в случае $\langle w, w\rangle = 0$, что противоречит строгой положительной определенности формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\operatorname{Ker} Q$.

Итак, форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ строго отрицательно определена на $D(Q)^\perp$. Точно так же показывается, что $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ строго положительно определена на $\operatorname{Im}(P)^\perp$. Поэтому $D(Q)^\perp \cap \operatorname{Im}(P)^\perp = 0$, а значит, $D(Q) + \operatorname{Im}(P) = W$.

Итак, $QP \neq \mathrm{null}$, а следовательно (см. предложение II.7.1),

$$\begin{aligned}\dim QP &= \dim Q + \dim P - \dim W = \\ &= (p_W + q_Y) + (p_V + q_W) - (p_W + q_W) = \\ &= p_V + q_Y,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ∎

Заметим, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{U}}(V)$ — это не что иное, как псевдоунитарная группа $\mathrm{U}(p_V, q_V)$. В самом деле, автоморфизм объекта V должен быть графиком обратимого оператора $A : V \to V$ (см., например, рассуждения п. II.6.2), причем по условию а) для всех v должно быть выполнено:

$$\langle Av, Av\rangle \leqslant \langle v, v\rangle; \quad \langle A^{-1}v, A^{-1}v\rangle \leqslant \langle v, v\rangle,$$

а значит, $\langle Av, Av\rangle = \langle v, v\rangle$.

Полугруппа $\mathrm{End}(V)$ содержит, однако, еще много операторов (формально говоря, графиков операторов). А именно, любой оператор $T : V \to V$, удовлетворяющий условию

$$\langle Tv, Tv\rangle \leqslant \langle v, v\rangle \tag{1.2}$$

для всех $v \in V$, содержится в $\mathrm{End}(V)$. Операторы, удовлетворяющие (1.2), мы будем называть $\langle\cdot,\cdot\rangle$-*сжимающими*.

Задача. Приведите пример такого оператора.

1.2. Преобразование Потапова. Условия а), б) сами по себе не очень наглядны, и есть способ сделать их более понятными. Сейчас мы введем на множестве $\mathrm{Mor}(V,W)$ удобные координаты.

Для каждого $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{U})$ фиксируем разложение $V = V_+ \oplus V_-$ в прямую сумму ортогональных подпространств V_+, V_-, причем форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ положительно определена на V_+ и отрицательно определена на V_-.

Теорема 1.2. Подпространство $P \subset V \oplus W$ является морфизмом категории $\mathbf{U}$ тогда и только тогда, когда P является графиком оператора

$$S = S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-,$$

удовлетворяющего условиям:

i) $\|S\| \leqslant 1$;

ii) $\|K\| < 1$, $\|N\| < 1$.

Замечание. Пространство $W_- \oplus V_+$ является евклидовым по определению, на пространстве же $W_+ \oplus V_-$ форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ отрицательно определена, поэтому форма $-\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ определяет скалярное произведение в $V_+ \oplus W_-$. Норма оператора здесь, как и везде в этой книге, означает евклидову норму. Норма вектора ниже означает норму в одном из пространств $V_+ \oplus W_-$, $V_- \oplus W_+$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V,W)$. Так как форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ отрицательно определена на $W_+ \oplus V_-$ и неотрицательно определена на P, мы имеем $P \cap (W_+ \oplus V_-) = 0$. Так как $\dim P = \dim(W_- \oplus V_+)$, подпространство P является графиком оператора $S : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-$. Далее, для любого $h \in W_- \oplus V_+$ мы имеем

$$0 \leqslant \langle (h, Sh), (h, Sh)\rangle_{V\oplus W} = \|h\|^2_{W_-\oplus V_+} - \|Sh\|^2_{W_+\oplus V_-}, \tag{1.3}$$

а тем самым $\|S\| \leqslant 1$.

Допустим, что $\|K\| = 1$, пусть w_- — вектор, на котором эта норма достигается:

$$\|Kw_-\| = \|w_-\|. \tag{1.4}$$

Тогда $S\begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kw_- \\ Mw_- \end{pmatrix}$, а значит,

$$\left\|S\begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 = \|Kw_-\|^2 + \|Mw_-\|^2.$$

Учитывая, что $\|S\| \leqslant 1$, мы получаем $Mw_- = 0$. Поэтому $S\begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kw_- \\ 0 \end{pmatrix}$, а следовательно, вектор $r = (w_-, Kw_-) \in W_- \oplus W_+$ содержится в P, т. е. $r \in \mathrm{Ker}\, P$. С другой стороны, из (1.4) следует, что $\langle r, r\rangle = 0$, что противоречит условию б) в определении морфизма. Легко видеть, что эти рассуждения обратимы, тем самым обратное высказывание тоже верно. Теорема доказана. ∎

Матрицу $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, соответствующую подпространству P, мы будем называть *преобразованием Потапова* морфизма P и обозначать через $S(P)$.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, V')$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V', V'')$. Пусть

$$S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}; \quad S(Q) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}.$$

Тогда $S(QP)$ равно

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} K + LX(1-NX)^{-1}M & L(1-XN)^{-1}Y \\ Z(1-NX)^{-1}M & W + Z(1-NX)^{-1}NY \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

(мы уже проводили это вычисление в п. IV.3.3).

1.3. Полугруппа $\mathrm{End}(V)$. Обсудим теперь, как выглядит преобразование Потапова на полугруппе $\mathrm{End}(V)$. Во избежание путаницы мы будем считать, что элемент $P \in \mathrm{End}(V)$ является подпространством не в $V \oplus V$, а в $V \oplus W$, где W — другой экземпляр пространства V.

Предложение 1.3.

а) Пусть $P \in \mathrm{End}(V)$ является графиком обратимого оператора $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ из V в $W = V$. Тогда

$$S(P) = \begin{pmatrix} BD^{-1} & A - BD^{-1}C \\ D^{-1} & -D^{-1}C \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

б) Пусть $P \in \mathrm{End}(V)$, а $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$. Пусть блок M обратим. Тогда P является графиком оператора $V \to W = V$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L - KM^{-1}N & KM^{-1} \\ -M^{-1}N & M^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

в) $P \in \mathrm{End}(V)$ является графиком оператора из $\mathrm{U}(p_V, q_V)$ тогда и только тогда, когда матрица $S(P)$ унитарна.

Доказательство.

а) Применяя оператор $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ к вектору $(0, v_-)$, получаем вектор (Cv_-, Dv_-). В силу условия (1.2) мы имеем

$$\|Cv_-\|^2 - \|Dv_-\|^2 \leqslant -\|v_-\|^2.$$

Отсюда $\|Dv_-\| \geqslant \|v_-\|$, и, следовательно, оператор D обратим. Далее (см. п. II.3.6) честно выражаем v_- и w_+ через v_+ и w_- из соотношения

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix}.$$ ∎

Задача. Докажите утверждения б) и в).

1.4. Категория Sp. Пусть $V_{\mathbb{R}}$ — конечномерное вещественное линейное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}_V$.

Рассмотрим комплексификацию V пространства $V_{\mathbb{R}}$. Тогда в V канонически определена кососимметричная билинейная форма $L_V(\cdot,\cdot)$ — комплексификация формы $\{\cdot,\cdot\}_V$. Но форма $\{\cdot,\cdot\}_V$ может быть продолжена в V и по полуторалинейности (см. Предварительные сведения, пп. 2.5, 2.7). Поэтому в V определена канонически и полуторалинейная форма

$$M_V(v, w) = \frac{1}{i} L(v, \bar{w}). \tag{1.8}$$

Она индефинитна, и ее отрицательный и положительный индексы инерции совпадают.

Задача. Проверьте последнее высказывание.

Объект категории **Sp** — это пространство V, снабженное тремя перечисленными структурами (т. е. структурой комплексификации пространства $V_{\mathbb{R}}$, кососимметричной билинейной формой L_V и эрмитовой формой M_V). Итак, V одновременно и объект категории **U**, и объект категории **C** (см. п. III.3.1). Морфизм $V \to W$ — это, по определению, линейное подпространство $P \subset V \oplus W$, которое является одновременно и морфизмом категории **U**, и морфизмом категории **C**.

Лемма 1.4. Группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Sp}}(V)$ совпадает с вещественной симплектической группой $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Aut}(V)$, тогда P является графиком обратимого оператора A. Так как P — автоморфизм категории **C**, то $L(Av, Av) = L(v, v)$ для всех v. Так как P — автоморфизм категории **U**, то $M(Av, Av) = M(v, v)$ (см. п. 1.1).

Покажем, что из этого следует $\overline{Aw} = A\overline{w}$. В самом деле, для любых v, w выполнено

$$\begin{aligned} L(v, \overline{Aw}) &= iM(v, Aw) = \\ &= iM(A^{-1}v, w) = \\ &= L(A^{-1}v, \overline{w}) = \\ &= L(v, A\overline{w}), \end{aligned}$$

и, значит, $\overline{Aw} = A\overline{w}$.

Таким образом, A сохраняет вещественное подпространство $V_{\mathbb{R}} \subset V$ и форму $\{\cdot,\cdot\}$ в этом подпространстве. Лемма доказана. ■

Разложим $V_{\mathbb{C}}$ в прямую сумму двух подпространств $V_{\mathbb{C}} = V_+ \oplus V_-$, которые изотропны относительно кососимметричной формы L и ортогональны относительно эрмитовой формы M, причем M положительно определена на V_+ и отрицательно определена на V_-. Мы потребуем также, чтобы подпространства V_+ и V_- были комплексно сопряжены друг другу.

Такое разложение действительно возможно: пусть $p_1, \dots, p_n$, $q_1, \dots, q_n$ — канонический базис в $V_{\mathbb{R}}$, т. е.

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = \{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}.$$

В качестве V_+ и V_- можно выбрать подпространства, натянутые на векторы вида $e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_\alpha - iq_\alpha)$ и $f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_\alpha + iq_\alpha)$ соответственно. Тогда

$$\begin{gathered} L(e_\alpha, e_\beta) = L(f_\alpha, f_\beta) = 0, \quad L(e_\alpha, f_\beta) = i\delta_{\alpha\beta}; \\ M(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad M(f_\alpha, f_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}, \quad M(e_\alpha, f_\beta) = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Обычно бывает приятней думать, что в V с самого начала фиксирован базис e_α, f_α, удовлетворяющий (1.9).

Пусть $Q \in \mathrm{Aut}(V)$. Как мы видели, Q является графиком оператора в V, перестановочного с операцией сопряжения $v \mapsto \overline{v}$. Отсюда следует, что матрица

оператора $Q : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$ должна иметь вид $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$; естественно, она должна быть также симплектической, т. е. сохранять форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Так же, как и в **U**, в категории **Sp** определено преобразование Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ морфизма P.

Теорема 1.5. Подпространство $P \subset V_+ \oplus V_-$ является морфизмом категории **Sp** тогда и только тогда, когда его преобразование Потапова $S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\text{i) } \|S\| \leqslant 1; \\ &\text{ii) } \|K\| < 1, \ \|N\| < 1; \\ &\text{iii) } S = S^{\mathrm{t}}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Задача. Докажите эту теорему (см. пп. 1.3 и II.6.7, о транспонировании см. Предварительные сведения, § 2).

Как и в случае категории **U**, условие $P \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Sp}}(V)$ равносильно тому, что матрица $S(P)$ унитарна.

1.5. Категория SO*. Эта категория не играет в книге сколько-нибудь заметной роли, но так как она ничем не хуже категорий **U** и **Sp**, она тоже должна быть упомянута.

Объект категории **SO*** — конечномерное кватернионное пространство V, снабженное невырожденной антиэрмитовой формой $H(\cdot,\cdot)$.

Пусть $V^{\mathbb{C}}$ — то же самое пространство V, но рассматриваемое как линейное пространство над $\mathbb{C}$ (см. Предварительные сведения, п. 2.9). Представим нашу антиэрмитову форму H в виде суммы

$$H(v, w) = iM(v, w) + jL(v, w),$$

где $M(v, w)$ и $L(v, w)$ — формы со значениями в $\mathbb{C}$. Легко видеть, что M — эрмитова форма в $V_{\mathbb{C}}$, а L — симметричная билинейная форма. Таким образом, $V_{\mathbb{C}}$ становится одновременно и объектом категории **U**, и объектом категории **GD**. Морфизм V в W — это (комплексное) подпространство в $V^{\mathbb{C}} \oplus W^{\mathbb{C}}$, которое одновременно является морфизмом категорий **U** и **GD**.

Группа автоморфизмов n-мерного (в кватернионном смысле) объекта V изоморфна группе $\mathrm{SO}^*(2n)$.

Как и в случае категории **Sp**, разложим пространство $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму двух подпространств $V^{\mathbb{C}} = V_+ \oplus V_-$, где V_+ — максимальные изотропные подпространства относительно формы L, ортогональные относительно M, причем форма M положительно определена на V_+ и отрицательно определена на V_-; удобно также считать, что оператор умножения на j в $V^{\mathbb{C}}$ переставляет V_+ и V_-.

Так же, как и выше, определяется преобразование Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ морфизма P, оно удовлетворяет условиям:

i) $\|S\| \leqslant 1$;
ii) $\|K\| < 1$, $\|N\| < 1$;
iii) $K = -K^{\mathrm{t}}$, $N = -N^{\mathrm{t}}$, $M = L^{\mathrm{t}}$.

1.6. Инволюция в эрмитовых категориях. Пусть $P = \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$. Через P^* мы обозначим элемент пространства $\mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$ такой, что подпространство $P^* \subset V \oplus W$ является ортогональным дополнением до P.

Пример. Если $P \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(V)$, то $P^* = P^{-1}$, потому что подпространство P совпадает со своим ортогональным дополнением; минус первая степень появляется из-за перестановки слагаемых в сумме $V \oplus V$.

Предложение 1.6. Если $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, то

$$S(P^*) = S^\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S(P)^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^* & M^* \\ L^* & K^* \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

(мы опускаем тривиальное доказательство).

Несложно проверить (см. аналогичное высказывание в п. II.7.2), что

$$(QP)^* = P^*Q^*,$$

т. е. $P \mapsto P^*$ действительно является инволюцией в категории $\mathbf{U}$ (см. п. II.8.6).

Пусть, далее, $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$. Через P^* мы обозначим элемент $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(W, V)$, являющийся ортогональным дополнением до P относительно эрмитовой формы $M_{V\oplus W}$ в $V \oplus W$. Не сразу очевидно, что это самое ортогональное дополнение является изотропным подпространством относительно кососимметричной формы $L_{V\oplus W}$. Это, однако, легко усмотреть из формулы (1.11): если S — преобразование Потапова морфизма $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$ (т. е. удовлетворяет условиям (1.10)), то S^σ оказывается преобразованием Потапова некоторого элемента $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(W, V)$ (см. также замечание на с. 392). Инволюция в категории $\mathbf{SO}^*$ определяется аналогично.

1.7. Замечания.

A. Канонические формы. Пусть $\mathbf{K}$ — одна из трех категорий $\mathbf{Sp}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{SO}^*$. Нас интересуют две тесно связанные между собой задачи:

1. описать орбиты группы $\mathrm{Aut}(V) \times \mathrm{Aut}(W)$ на $\mathrm{Mor}(V, W)$;
2. описать орбиты группы $\mathrm{Aut}(V)$ на множестве самосопряженных элементов $\mathrm{End}(V)$.

Мы начнем со следующей элементарной задачи линейной алгебры. Пусть V — пространство, снабженное невырожденной (вообще говоря, индефинитной) эрмитовой формой M_V, а A — самосопряженный относительно формы M_V оператор в V (т. е. $M_V(Av_1, v_2) = M_V(v_1, Av_2)$). Назовем самосопряженные операторы A_1, A_2 эквивалентными, если существует оператор B, сохраняющий форму M_V, такой, что $BA_1B^{-1} = A_2$. Мы хотим описать классы эквивалентности.

Задача равносильна следующей. Пусть V и A — те же, что и выше. Мы назовем набор $\{V, M_V, A\}$ *разложимым*, если существуют A-инвариантные подпространства $V_1, V_2 \subset V$ такие, что $V = V_1 \oplus V_2$, $V_2 = V_1^\perp$. Требуется описать все неразложимые наборы.

Задача. Покажите, что все неразложимые наборы исчерпываются следующими:

а) тип $\mathrm{I}^\pm(\lambda, n)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Базис в V состоит из элементов $e_1, \dots, e_n$, причем (при $k \neq n$)

$$M(e_i, e_j) = \pm\delta_{i+j,n+1}, \quad Ae_k = \lambda e_k + e_{k+1}, \quad Ae_n = \lambda e_n;$$

б) тип $\mathrm{II}(\lambda, n)$, где $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Базис в V состоит из элементов $e_1, \dots, e_n$, $f_1, \dots, f_n$, причем (при $k \neq n$)

$$M(e_i, e_j) = M(f_i, f_j) = 0, \qquad Ae_k = \lambda e_k + e_{k+1}, \qquad Ae_n = \lambda e_n,$$
$$M(e_i, f_j) = \delta_{i+j,n+1}, \qquad Af_k = \bar\lambda f_k + f_{k+1}, \qquad Af_n = \bar\lambda f_n.$$

Из этих типов несложно отобрать те, в которых оператор A является M_V-сжатием. Оказывается, что неразложимые M_V-сжатия исчерпываются операторами в одномерном пространстве, а также двумерными жордановыми клетками $\mathrm{I}^\pm(\mp 1, 2)$.

Случай произвольного самосопряженного элемента $P \in \mathrm{End}_{\mathrm{U}}(V)$ мгновенно сводится к случаю оператора. Для этого заметим, что

$$V = \mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Indef}\, P \oplus (\mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Indef}\, P)^\perp.$$

Это решает задачу об описании орбит группы $\mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(V)$ на множестве самосопряженных элементов $\mathrm{End}_{\mathrm{U}}(V)$.

Перейдем к задаче об орбитах $\mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(V) \times \mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(W)$ на $\mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V, W)$. Она сводится к предыдущей преобразованием $P \mapsto P^*P$. Снова назовем элемент $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ *неразложимым*, если существуют V_1, V_2, W_1, $W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{U})$ и $P_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V_1, W_1)$, $P_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V_2, W_2)$ такие, что $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$ (прямые суммы — ортогональные) и $P = P_1 \oplus P_2$.

Задача. Докажите, что неразложимые морфизмы $P : V \to W$ категории $\mathbf{U}$ исчерпываются следующими (мы выписываем преобразования Потапова):

1°–4°. нулевые операторы $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0$, $\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0$, $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0$;

5°–6°. оператор умножения на $\lambda : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0$, $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1$ (где $0 < \lambda \leqslant 1$);

7°. оператор $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$, где $0 < \alpha < 1$ (при этом при разных α морфизмы эквивалентны).

Для нас важнее случай категории $\mathbf{Sp}$.

Задача (см. [Ольшанский (1995)]). Докажите, что неразложимые морфизмы $P : V \to W$ категории $\mathbf{Sp}$ исчерпываются следующими (мы выписываем преобразования Потапова):

1. $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$;
2. $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$, где $0 < \alpha < 1$, причем при разных α морфизмы эквивалентны.

B. Диссипативные операторы. Пусть V — объект категории $\mathbf{U}$. Оператор A в V называется *M_V-диссипативным*, если $M_V(Ax, x) \leqslant 0$ для всех $x \in V$.

Задача. Докажите, что следующие условия на оператор $A : V \to V$ равносильны:

а) A является M_V-диссипативным;

в) $\exp(tA)$ является M_V-сжатием для всех $t \geqslant 0$.

Задача. Пусть A — невырожденный оператор в V, причем A является M_V-сжатием. Тогда A единственным образом представимо в виде

$$A = Q\exp(tH), \tag{1.11}$$

где $Q \in \mathrm{Aut}(V)$, H — самосопряженный M_V-диссипативный оператор, а $t \geqslant 0$ ([Потапов (1955)]).

Указание. A^*A имеет простую каноническую форму.

Замечание. Очевидно, что M_V-диссипативные операторы образуют выпуклый конус $\widetilde{C}$, инвариантный относительно действия $g : A \mapsto g^{-1}Ag$ группы $\mathrm{Aut}(V)$. При этом $\widetilde{C}$ разлагается в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы $\mathrm{Aut}(V)$ и инвариантного выпуклого конуса C всех M_V-самосопряженных M_V-диссипативных операторов. Продолжение этого сюжета см. [Винберг (1980)], [Ольшанский (1981)], [Paneitz (1981)].

§ 2. *Функтор Крейна—Шмульяна*

Пусть **K** — произвольная категория. Построим по каждому объекту Z^0 категории **K** некоторый функтор $\mathsf{I} = (I, i)$ из **K** в категорию множеств. А именно, пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Тогда $I(V) := \mathrm{Mor}(Z^0, V)$, а любому морфизму $P : V_1 \to V_2$ ставится в соответствие отображение

$$i(P) : Q \mapsto PQ$$

из $I(V_1) = \mathrm{Mor}(Z^0, V_1)$ в $I(V_2) = \mathrm{Mor}(Z^0, V_2)$.

Во многих частных случаях эта общая тривиальная конструкция оказывается весьма содержательной. В этом параграфе мы применим конструкцию к категориям **U**, **Sp**, **SO***, а в качестве Z^0 во всех случаях будем брать нульмерные объекты этих категорий (мы их будем обозначать через 0).

2.1. Функтор Крейна—Шмульяна для категории U. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{U})$.

Предложение 2.1. Следующие условия на подпространство $H \subset V$ равносильны:

а) $H \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(0, V)$;

б) H — график оператора $S = S(H) : V_- \to V_+$, причем $\|S\| < 1$.

Доказательство. Это предложение является частным случаем теоремы 1.2. ■

Оператор $S = S(H) : V_- \to V_+$ называется *угловым оператором* подпространства H.

Итак, множество $\mathscr{X}(V) := \mathrm{Mor}(0, V)$ отождествляется с множеством операторов $V_- \to V_+$ с нормой < 1 (или, иначе, с множеством $\mathscr{X}_{p,q}$ матриц размера $q \times p$, где $p = p_V$, $q = q_V$ — индексы инерции эрмитовой формы в V). Такие множества мы будем называть *операторными* (*матричными*) *шарами*.

Опишем теперь действие категории **U** на матричных шарах.

Предложение 2.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, а $H \in \mathscr{X}(V) = \mathrm{Mor}(0, V)$. Пусть $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, $S(H) = X$.

Тогда преобразование

$$\tau(P) : H \mapsto PH$$

из $\mathscr{X}(V)$ в $\mathscr{X}(W)$ задается формулой

$$\tau(P)X = K + LX(1 - NX)^{-1}M. \tag{2.1}$$

Доказательство. Это частный случай формулы (1.5). ■

В силу того, что τ — функтор, для любых $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ выполнено

$$\tau(Q)\tau(P) = \tau(QP). \tag{2.2}$$

Задача. Докажите равенство (2.2) непосредственно, исходя из формулы (2.1).

Пусть $p = p_V$, $q = q_V$ — индексы инерции эрмитовой формы M_V в V. Тогда, очевидно, группа $\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{U}(p, q)$ действует на $\mathscr{X}(V) \simeq \mathscr{X}_{p,q}$ обратимыми преобразованиями.

Предложение 2.3. $\mathscr{X}(V)$ является однородным $\mathrm{U}(p, q)$-пространством, причем стабилизатор точки $0 \in \mathscr{X}(V)$ есть $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$.

Доказательство. Транзитивность действия $\mathrm{U}(p, q)$ следует из теоремы Витта (см. предварительные сведения, § 1). Далее, пусть 0 остается на месте под действием $g \in \mathrm{U}(p, q)$. Тогда $gV_- = V_-$, а $V_+ = V_-^{\perp}$, и, следовательно, $gV_+ = V_+$. Утверждение доказано. ■

Полезно иметь удобную формулу для этого действия, сейчас мы выведем ее в чуть большей общности.

Предложение 2.4. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$ — график линейного оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$: $V_+ \oplus V_- \to W_+ \oplus W_-$.

Тогда

$$\tau(P)X = (AX + B)(CX + D)^{-1}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим подпространство Q с угловым оператором X. Оно состоит из векторов вида $(Xv_-, v_-) \in V_+ \oplus V_- = V$. Тогда подпространство $PQ \subset W$ состоит из векторов вида

$$r = \big((AX + B)v_-, (CX + D)v_-\big). \tag{2.4}$$

Обозначая $(CX + D)v_-$ через w_-, мы получаем, что PQ состоит из векторов вида $\big((AX + B)(CX + D)^{-1}w_-, w_-\big)$, т. е. угловой оператор подпространства PQ задается формулой (2.3).

Однако нам надо еще доказать, что оператор $CX + D$ обратим. Действительно, допустим, что для некоторого v_- выполнено $(CX + D)v_- = 0$. Рассмотрим вектор r, заданный формулой (2.4). Тогда $\langle r, r\rangle_{V \oplus W} = \|(AX + B)v_-\|^2 \geqslant 0$, а это противоречит тому, что $r \in PQ$ (в самом деле, на PQ форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ строго отрицательно определена). Утверждение доказано. ■

Формула (2.3), безусловно, более привычна читателю, чем (2.1). Преобразования вида (2.3) называются *дробно-линейными*, а отображения вида (2.1) — *обобщенно дробно-линейными*.

Задача. В чем разница между дробно-линейными и обобщенно дробно-линейными отображениями в случае $p = q = 1$?

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$ является графиком оператора

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : W_+ \oplus W_- \to V_+ \oplus V_-.$$

Выведите формулу для $\tau(P)$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{End}_{\mathbf{U}}(V)$ — график обратимого оператора. Докажите, что $\tau(P)$ инъективно. Когда $\tau(P)$ биективно?

Задача*. Пусть $\overline{\mathscr{X}}(V)$ — множество всех операторов $V_- \to V_+$ с нормой $\leqslant 1$. Для каких линейных отношений P формула (2.1) задает отображение а) $\mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(V)$; б) $\mathscr{X}(V) \to \overline{\mathscr{X}}(V)$; в) $\overline{\mathscr{X}}(V) \to \overline{\mathscr{X}}(V)$; г) $\overline{\mathscr{X}}(V) \to \mathscr{X}(V)$? (См. [Шмульян (1978)].)

2.2. Функтор Крейна—Шмульяна для категории Sp. Итак, каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sp})$ ставится в соответствие множество $L(V) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(0, V)$. Его элементы — подпространства в V, являющиеся максимальными изотропными относительно формы L_V, а форма M_V на них отрицательно определена. Преобразование Потапова отождествляет $L(V)$ с множеством $\mathscr{K}(V)$ симметрических операторов $V_- \to V_+$ с нормой < 1 (пространство $\mathscr{K}(V)$ мы будем также называть *матричным шаром*). Каждому морфизму $V \to W$ соответствует обобщенно дробно-линейное отображение $\mathscr{K}(V) \to \mathscr{K}(W)$, задаваемое формулой (2.1).

Мы видели, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V) = \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$: $V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$, сохраняющих кососимметричную билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (см. п. 1.5), эта группа действует на $\mathscr{K}(V)$ преобразованиями вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} : Z \to (\Phi Z + \Psi)(\overline{\Psi} Z + \overline{\Phi})^{-1}$$

(см. (2.2)).

Лемма 2.5. Группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V) \simeq \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$ действует на $\mathscr{K}(V_{\mathbb{C}})$ транзитивно.

Доказательство. Дробно-линейное преобразование области $\mathscr{K}(V)$, соответствующее оператору

$$\begin{pmatrix} (1 - Z\overline{Z})^{-1/2} & Z(1 - \overline{Z}Z)^{-1/2} \\ \overline{Z}(1 - Z\overline{Z})^{-1/2} & (1 - \overline{Z}Z) \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V),$$

переводит точку 0 в Z. Легко видеть, что стабилизатор точки 0 состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$. В силу симплектичности $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ матрица Φ должна быть унитарной. Лемма доказана. ∎

Таким образом, если $\dim V = 2n$, то $\mathscr{K}(V)$ как $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-однородное пространство есть $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) / \mathrm{U}(n)$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{End}_{\mathrm{Sp}}(V)$, а $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Покажите, что $P \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V)$ равносильно унитарности матрицы $S(P)$.

Задача. Опишите функтор Крейна—Шмульяна для категории $\mathbf{SO}^*$.

2.3. Замечания. Три типа матричных шаров, которые нам встретились в этом параграфе (включая последнюю задачу), являются важными объектами сразу в нескольких областях математики.

Во-первых, они есть не что иное, как эрмитовы симметрические пространства

$$\mathrm{U}(p,q) / (\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)), \quad \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) / \mathrm{U}(n), \quad \mathrm{SO}^*(2n) / \mathrm{U}(n)$$

(см., например, [Helgason (1962)]).

Во-вторых, они являются *областями Картана*. Напомним, что любая односвязная область в $\mathbb{C}$ (отличная от $\mathbb{C}$) конформно эквивалентна единичному кругу, а группа конформных автоморфизмов круга изоморфна $\mathrm{PSU}(1,1) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_0(2,1)$. Эти факты не переносятся на многомерный случай. При этом для случайно взятой области в $\mathbb{C}^N$ группа ее биголоморфных автоморфизмов, как правило, тривиальна. Однако существуют так называемые области Картана, на которых группа голоморфных автоморфизмов действует транзитивно (см. [Пятецкий-Шапиро (1961)] или [Cartan (1935)]). Матричные шары как раз и являются такими областями Картана.

Задача*. Докажите, что группа биголоморфных (т. е. голоморфных вместе со своим обратным) отображений $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(0, V)$ в себя изоморфна $\mathrm{Sp}(V)$ (см. [Пятецкий-Шапиро (1961)]).

В-третьих, матричные шары используются в теории операторов.

А. Инвариантные подпространства. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{U})$. Пусть $\overline{\mathscr{K}}(V)$ — множество всех операторов $V_- \to V_+$ с нормой $\leqslant 1$.

Задача. Пусть P — график M_V-сжимающего оператора A в V. Пусть $X \in \overline{\mathscr{K}}(V)$. Тогда следующие условия равносильны:

а) $\tau(P)X = X$;

б) подпространство в V с угловым оператором X инвариантно.

Следствие 2.6 (Крейн). Любой M_V-сжимающий оператор в V имеет инвариантное подпространство размерности $\dim V_-$, на котором форма M_V отрицательно определена.

Задача. Выведите отсюда описание канонических форм (см. п. 1.7) для строгих M_V-сжатий.

Задача. Покажите, что орбиты $\mathrm{Aut}(V)$ на $\overline{\mathscr{K}}(V)$ нумеруются числом $\mathrm{rk}(1 - X^*X)$.

В. Заметим, что множество $\mathrm{Mor}(V, W)$ само является матричным шаром.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(W, Y)$, $Q \in \mathrm{Mor}(Z, V)$. Покажите, что отображение

$$X \mapsto PXQ \tag{2.5}$$

из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $\mathrm{Mor}(Z, Y)$ является обобщенно дробно-линейным. Покажите, что если $P \in \mathrm{Aut}(W)$, $Q \in \mathrm{Aut}(V)$, то (2.5) является автоморфизмом матричного шара $\mathrm{Mor}(V, W)$.

С. Пусть A — открытая ограниченная область в $\mathbb{C}^N$, а $\overline{A}$ — ее замыкание. *Граница Шилова* области A определяется следующим образом: точка $a \in \overline{A}$ лежит в границе Шилова, если существует голоморфная в A и непрерывная на $\overline{A}$ функция $f(z)$ такая, что максимум модуля $f(z)$ достигается в a.

Задача. Докажите, что граница Шилова содержится в $\overline{A} \setminus A$.

Задача. Пусть $a \in \overline{A}$. Пусть окрестность точки a в $\overline{A}$ содержит одномерное комплексное подмногообразие, содержащее a. Тогда a не содержится в границе Шилова.

Задача. Найдите границу Шилова шара $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum |z_i|^2 \leqslant 1\}$ и полукруга $D^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall i : |z_i| < 1\}$ в $\mathbb{C}^N$.

Задача. Пусть $\overline{\mathscr{K}}_n$ — множество симметричных матриц с нормой $\leqslant 1$. Докажите, что граница Шилова $\overline{\mathscr{K}}_n$ состоит из унитарных симметричных матриц (ср. с задачей из п. 2.2). Найдите границу Шилова для остальных матричных шаров (см. [Пятецкий-Шапиро (1961)]).

§ 3. *Бозонное пространство Фока с конечным числом степеней свободы*

3.1. Определение. Пусть H — конечномерное комплексное евклидово пространство размерности $n = 0, 1, 2 \ldots$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Введем на H

гауссову меру $d\mu(z)$ с плотностью $\pi^{-n}e^{-\|z\|^2}$ относительно меры Лебега. *Бозонное пространство* Фока $F(H)$ состоит из голоморфных функций $f(z)$ на H, удовлетворяющих условию

$$\iint_H |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty.$$

Введем в $F(H)$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \iint_H f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z).$$

Число n называется числом степеней свободы пространства H. Функцию $f(z) = 1$ называют *вакуумным вектором.*

Теорема 3.1.
а) Одночлены вида

$$e_{k_1\ldots k_n}(z) = \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!}\ldots\sqrt{k_n!}} \tag{3.1}$$

образуют в $F(\mathbb{C}^n)$ ортонормированный базис.
б) Пространство $F(H)$ полно.

Доказательство. Вычислим скалярное произведение

$$\left\langle z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}, z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n}\right\rangle = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \iint_H z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}\bar z_1^{l_1}\ldots \bar z_n^{l_n}\, d\mu(z) = $$
$$= \prod_{j=1}^n \iint_{\mathbb{C}} z_j^{k_j}\bar z_j^{l_j}\frac{1}{\pi}\, e^{-|z_j|^2} dz_j\, d\bar z_j.$$

Вычислим отдельно каждый из сомножителей

$$\iint_{\mathbb{C}} z^k \bar z^l \frac{1}{\pi}\, e^{-|z|^2} dz\, d\bar z = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} r^{k+l+1} e^{i(k-l)\varphi} e^{-r^2} d\varphi\, dr =$$
$$= \int_0^\infty r^{2k} e^{-r^2} dr^2 \cdot \delta_{k,l} =$$
$$= \Gamma(k+1)\,\delta_{k,l} =$$
$$= k!\,\delta_{k,l}.$$

Итак, мы видим, что одночлены вида (3.1) образуют в $F(H)$ ортонормированную систему. Из тех же вычислений видно, что функции (3.1) попарно ортогональны (но не ортонормированы) в любом поликруге вида $|z_1| \leqslant A_1, \ldots, |z_n| \leqslant A_n$.

Пусть

$$f(z) = \sum \frac{c_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!}\ldots\sqrt{k_n!}}. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\iint |f(z)|^2 d\mu(z) = \lim_{A\to\infty} \sum |c_{k_1\ldots k_n}|^2 \iint_{\substack{|z_1|\leqslant A\\ \cdots\\ |z_n|\leqslant A}} \frac{\left|z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}\right|^2}{k_1!\ldots k_n!}\, d\mu(z) = \sum |c_{k_1\ldots k_n}|^2.$$

Итак, $f(z) \in F(H)$ тогда и только тогда, когда $\sum |c_{k_1\ldots k_n}|^2 < \infty$. Отсюда вытекают оба утверждения теоремы. ∎

Замечание 1. Обозначим через $F^{(k)}(H) \subset F(H)$ подпространство, состоящее из всех однородных многочленов степени k. Ясно, что подпространства $F^{(k)}(H)$ и $F^{(j)}(H)$ попарно ортогональны, причем

$$F(H) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} F^j(H).$$

Замечание 2. У нас есть небольшое несогласование в обозначениях $\Lambda(H)$ и $F(H)$ для фермионного и бозонного пространства Фока: пространство $\Lambda(H)$ — это внешняя алгебра на H, а пространство $F(H)$ есть алгебра функций на H, т. е. $F(H)$ — это симметрическая алгебра не на H, а на двойственном пространстве H'. Это рассогласование объясняется исключительно вредными привычками автора.

Задача. При каких λ функция $\exp\left(\frac{1}{2}\lambda z^2\right)$ содержится в $F(\mathbb{C})$?

Задача. Для каких матриц A функция $\exp\left(\frac{1}{2}\sum a_{ij}z_i z_j\right)$ содержится в $F(\mathbb{C})^n$?

3.2. Воспроизводящее свойство. Пусть $u \in H$. Обозначим через $\varphi_u(z)$ функцию

$$\varphi_u(z) = \exp(z, u). \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. $\varphi_u(z) \in F(H)$. При этом

$$\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle = \exp(v, u). \tag{3.4}$$

Доказательство. Разлагая (3.3) в ряд, получаем

$$\varphi_u(z) = \prod_j \sum \frac{(z_j\bar u_j)^{k_j}}{k_j!} =$$
$$= \sum \frac{\bar u_1^{i_1}\ldots \bar u_n^{i_n}}{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_n!}}\,\frac{z_1^{i_1}\ldots z_n^{i_n}}{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_n!}} = \tag{3.5}$$
$$= \sum \frac{\bar u_1^{i_1}\ldots \bar u_n^{i_n}}{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_n!}}\, e_{i_1\ldots i_n}(z).$$

И теперь утверждение очевидно. ∎

Теорема 3.3. Для любой $f \in F(H)$ и любого $u \in H$ выполнено

$$\langle f, \varphi_u\rangle = f(u). \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum a_{j_1\dots j_n} \frac{z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n}}{\sqrt{j_1!}\dots\sqrt{j_n!}} = \sum a_{j_1\dots j_n} e_{j_1\dots j_n}(z).$$

Тогда в силу (3.5)

$$\langle f, \varphi_u\rangle = \sum a_{j_1\dots j_n} \frac{u_1^{j_1}\dots u_n^{j_n}}{\sqrt{j_1!}\dots\sqrt{j_n!}},$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание. Равенство (3.6), в частности, влечет непрерывность линейного функционала $l_u : f \mapsto f(u)$ на $F(H)$.

3.3. Ядра операторов. Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$. Рассмотрим функцию

$$K_A(u, \bar{v}) = \langle A\varphi_v, \varphi_u\rangle_{F(H_2)}, \tag{3.7}$$

где φ_u задается формулой (3.3). Мы вскоре покажем, что $K_A(u, \bar{v})$ есть не что иное, как ядро оператора A в обычном смысле слова.

Замечание. Запись $K(u, \bar{v})$ можно понимать двумя способами. Можно считать, что $K_A(u, \bar{v})$ есть функция двух переменных $u \in H$, $v \in H$, а черта над v показывает, что $K_A(u, \bar{v})$ антиголоморфна по v. С другой стороны, $\bar{v}$ можно понимать как элемент двойственного пространства H', соответствующий элементу v при отождествлении H с H'.

Введем функции

$$k_A^{\bar{u}}(z) = K_A(z, \bar{u}), \quad k_A^z(u) = \overline{K_A(z, \bar{u})}. \tag{3.8}$$

Тогда легко видеть, что

$$k_A^{\bar{u}}(z) = K_A(z, \bar{u}) = \langle A\varphi_u, \varphi_z\rangle = (A\varphi_u)(z), \tag{3.9}$$

$$k_A^z(u) = \overline{K_A(z, \bar{u})} = \langle \varphi_z, A\varphi_u\rangle = \langle A^*\varphi_z, \varphi_u\rangle = (A^*\varphi_z)(u). \tag{3.10}$$

В частности, $k_A^u \in F(H_2)$, а $k_A^z \in F(H_1)$.

Теорема 3.4. Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$. Для любого $f \in F(H_1)$ функция Af восстанавливается по формуле

$$(Af)(z) = \langle f, k_A^z\rangle. \tag{3.11}$$

Расписывая скалярное произведение в правой части этого равенства, мы сразу получаем

Следствие 3.5. Для любого ограниченного A

$$Af(z) = \int K(z, \bar{u}) f(u)\, d\mu(u). \tag{3.12}$$

Доказательство теоремы 3.4. Равенство достаточно проверить в случае $f = \varphi_h$, т. е. нужно доказать

$$(A\varphi_h)(z) = \overline{k_A^z(h)}$$

(заметим, что и в левой, и в правой части стоит функция от z). Для этого достаточно убедиться в том, что для любого $g \in F(H)$ выполнено

$$\langle (A\varphi_h), g(z)\rangle = \langle \overline{k_A^z(h)}, g(z)\rangle.$$

При этом достаточно проверить равенство для всех g вида $g = \varphi_p(z)$. Но тогда в обеих частях стоит $K(p, \bar{h})$ (см. равенства (3.7) и (3.8)). Теорема доказана. ■

Теорема 3.6. Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$, пусть $c_{j_1\dots j_n}^{i_1\dots i_k}$ — его матричные коэффициенты в базисе (3.1) (где $k = \dim H_2$, $n = \dim H_1$). Тогда

$$K_A(z, \bar{u}) = \sum c_{j_1\dots j_n}^{i_1\dots i_k} \frac{z_1^{i_1}}{\sqrt{i_1!}} \dots \frac{z_k^{i_k}}{\sqrt{i_k!}} \frac{u_1^{j_1}}{\sqrt{j_1!}} \dots \frac{u_n^{j_n}}{\sqrt{j_n!}}, \tag{3.13}$$

причем этот ряд сходится равномерно на любом поликруге $|z_1| \leqslant C_1, \dots, |z_n| \leqslant C_n$, $|u_1| \leqslant B_1, \dots, |u_k| \leqslant B_k$.

Доказательство. Легко видеть, что ряд (3.5) сходится равномерно в $F(H)$ в любом поликруге $|u_j| \leqslant B_j$. Поэтому

$$K_A(z, \bar{u}) = \left\langle A\left(\sum \frac{\bar{u}_1^{j_1}\dots \bar{u}_n^{j_n}}{\sqrt{j_1!}\dots\sqrt{j_n!}} e_{j_1\dots j_n}\right), \left(\sum \frac{\bar{z}_1^{i_1}\dots \bar{z}_k^{i_k}}{\sqrt{i_1!}\dots\sqrt{i_k!}} e_{i_1\dots i_k}\right)\right\rangle,$$

что, очевидно, равно (3.13). ■

Предложение 3.7. Пусть $K_A(u, \bar{v})$ — ядро оператора $A : F(H_1) \to F(H_2)$, а $K_B(z, \bar{u})$ — ядро оператора $B : F(H_2) \to F(H_3)$. Тогда ядро оператора BA задается формулой

$$K_{BA}(z, \bar{v}) = \langle k_A^{\bar{v}}, k_B^z\rangle_{F(H_2)}. \tag{3.14}$$

Следствие 3.8.

$$K_{BA}(z, \bar{v}) = \int K_B(z, \bar{u})\, K_A(u, \bar{v})\, d\mu(u). \tag{3.15}$$

Конечно, (3.14) и (3.15) — это одна и та же формула. Формула (3.15) более привычна, но (3.14) в некоторых отношениях (см. следующую главу) более предпочтительна.

Доказательство. По определению

$$K_{BA}(z, \bar{v}) = \langle BA\varphi_v, \varphi_z\rangle = \langle A\varphi_v, B^*\varphi_z\rangle,$$

и искомое равенство вытекает из формулы (3.11). ■

Замечание. Аналогии с § II.1 достаточно очевидны.

Задача. Покажите, что ядро единичного оператора равно $\exp\left(\sum z_i\bar{u}_i\right)$.

Задача. Какому оператору соответствует ядро $\frac{1}{k!}\left(\sum z_i\bar{u}_i\right)^k$?

Задача. Пусть $K(z, \bar{u})$ — ядро оператора A. Докажите, что ядро оператора A^* задается формулой $L(u, \bar{z}) = \overline{K(z, \bar{u})}$.

Замечание. Как показывает опыт, применение формул этого пункта к неограниченным операторам почти никогда не приводит к недоразумениям.

3.4. Замены переменной. Пусть $A : H_1 \to H_2$ — ограниченный оператор. Рассмотрим оператор

$$F(A) : f(z) \mapsto f(Az)$$

из $F(H_2)$ в $F(H_1)$. Тогда в подпространствах $S^k H$ оператор $F(A)$ действует как k-я симметричная степень $S^k A$ оператора A. Учитывая, что $\|S^k A\| = \|A\|^k$, мы получаем, что $F(A)$ ограничен тогда и только тогда, когда $\|A\| \leqslant 1$.

Задача. Докажите, что ядро оператора $F(A)$ равно $\exp(z, Au)$.

3.5. Операторы рождения-уничтожения. Пусть H — конечномерное евклидово пространство, а H' — двойственное пространство (напомним, что H' антиизоморфно H; если $h \in H$, то ему соответствует линейный функционал $f_h(z) = \langle z, h\rangle$; мы будем обозначать f_h через $\overline{h}$). Рассмотрим пространство $V = V_+ \oplus V_- := H' \oplus H$. Выберем в H ортонормированный базис, а в H' — двойственный базис. Возьмем вектор $v = (v_+, v_-) \in H' \oplus H = V$. Пусть v_i^+, v_i^- — координаты вектора v. Оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$ в $F(H)$ задается формулой

$$\hat{a}(v) f(z) = \left(\sum v_i^+ z_i - \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial z_i}\right) f(z). \tag{3.16}$$

Эти операторы не ограничены. В качестве общей плотной инвариантной области определения можно выбрать, например, пространство всех многочленов.

Введем в V кососимметричную билинейную форму по формуле

$$L(v, w) = \sum (v_i^+ w_i^- - v_i^- w_i^+).$$

Тогда, как легко видеть,

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)] = L(v, w) E.$$

Лемма 3.9. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $f, g, z_j f, \frac{\partial}{\partial z_j} g \in F(H)$. Тогда

$$\langle z_j f, g\rangle = \left\langle f, \frac{\partial}{\partial z_j} g \right\rangle. \tag{3.17}$$

Доказательство. Пусть, для определенности $j = 1$. Пусть

$$f = \sum c_{k_1 \dots k_n} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!} \dots \sqrt{k_n!}}, \quad g = \sum d_{k_1 \dots k_n} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!} \dots \sqrt{k_n!}}.$$

Тогда в обеих частях равенства (3.17) стоит

$$\sum c_{k_1 - 1, k_2, \dots, k_n} \sqrt{k_1}\, \overline{d}_{k_1 \dots k_n}.$$

■

Итак, мы видим, что оператор умножения на z_j и оператор $\frac{\partial}{\partial z_j}$ сопряжены.

Теорема 3.10. Операторы $\hat{a}(v, -\overline{v})$, заданные на пространстве многочленов, существенно самосопряжены в $F(H)$.

Доказательство. Подходящим образом выбирая координаты в H, мы можем все свести к случаю оператора $z_1 + \frac{\partial}{\partial z_1}$.

Пусть $F^k(H) \subset F(H)$ — пространство многочленов степени k. Пусть $A_k : F^k(H) \to F^{k+1}(H)$ — оператор умножения на z_1, тогда $A_k^* : F^{k+1}(H) \to F^k(H)$ — это оператор $\frac{\partial}{\partial z_1}$. Вычислим $\|A_k\| = \|A_k^*\| = \|A_k A_k^*\|^{1/2}$. Оператор $A_k A_k^*$ — это просто ограничение $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ на $F_k(H)$, одночлены являются собственными векторами, а значит, $\|A_k A_k^*\| = k$, причем норма достигается на векторе z_1^k.

Теперь мы можем применить признак Карлемана (см. Предварительные сведения, § 4). ■

3.6. Слабая сходимость операторов.

Предложение 3.11. Пусть A_n, A — операторы $F(H) \to F(K)$, а $K_n(z, \overline{u})$, $K(z, \overline{u})$ — их ядра.

а) Если последовательность $K_n(z, \overline{u})$ сходится к $K(z, \overline{u})$ поточечно, а числа $\|A_n\|$ ограничены сверху некоторой константой C, то оператор A ограничен, и $A_n \to A$ слабо.

б) Если $A_n \to A$ слабо, то последовательность $K_n(z, \overline{u})$ сходится к $K(z, \overline{u})$ поточечно.

Доказательство. Утверждение б) мгновенно следует из явной формулы (3.7) для ядра оператора. Утверждение а) вытекает из критерия слабой сходимости (см. п. I.4.1), примененнного к системе функций φ_h, и того, что линейные комбинации функций $\varphi_h(z)$ плотны в пространстве Фока. ■

§ 4. *Представление Вейля симплектической категории*

4.1. Операторы с гауссовыми ядрами. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — симметричная блочная матрица размера $(m+n) \times (m+n)$. Обозначим через $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ оператор $F(\mathbb{C}^n) \to F(\mathbb{C}^m)$ с ядром

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{4.1}$$

где $z = (z_1 \dots z_m)$, $\overline{u} = (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n)$ — матрицы-строки.

Предложение 4.1. Пусть оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ ограничен. Тогда

а) $\|S\| \leqslant 1$;
б) $\|K\| < 1$, $\|M\| < 1$.

Замечание. См. теорему 1.5.

Доказательство. Пусть A — ограниченный оператор, K_A — его ядро. Тогда в силу (3.7), (3.4)

$$K_A(z, \overline{u}) = \langle A\varphi_u, \varphi_z\rangle \leqslant \|A\|\, \|\varphi_u\|\, \|\varphi_z\| = \|A\| e^{\frac{1}{2}\|u\|^2} e^{\frac{1}{2}\|v\|^2}.$$

Отсюда следует утверждение а).

Далее, пусть $f \in F(H)$. Тогда $f(u) = \langle f, \varphi_u\rangle \leqslant \|f\| e^{\frac{1}{2}\|u\|^2}$. Более того, это неравенство является строгим за исключением случая, когда f имеет вид φ_a, а $u = a$. Но $B[S]\cdot 1 = \exp\left\{\frac{1}{2}zKz^{t}\right\}$, а $B[S]^{*}\cdot 1 = \exp\left\{\frac{1}{2}zMz^{t}\right\}$. Эти векторы должны лежать в пространстве Фока, и отсюда следует б). ■

Теорема 4.2. Условия $\|S\| \leqslant 1$, $\|K\| < 1$, $\|M\| < 1$ достаточны для ограниченности оператора $B[S]$.

4.2. Представление Вейля (We, we) **категории Sp.** Каждому объекту V категории **Sp** мы ставим в соответствие пространство $\mathrm{We}(V)$ — бозонное пространство Фока $F(V_-)$. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$. Пусть $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Тогда положим

$$\mathrm{we}(P) = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Замечание. Проще всего считать, что во всех пространствах $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$ фиксированы канонические базисы. Тогда выражение (4.1) имеет вполне понятный смысл. Иногда такая точка зрения не очень удобна, и поэтому необходимо описать инвариантный смысл выражения (4.1). На знак транспонирования над вектором (т. е. над $z, \overline{u}$) в этом случае не следует обращать внимания. Тогда $z^{t} \in W_-$, $Kz^{t} \in W_+$, а $zKz^{t} := L(z, Kz^{t})$, где L — каноническая кососимметричная форма в V. Аналогично определяются $\overline{u}M\overline{u}^{t}$ и $zL\overline{u}^{t}$.

Теорема 4.3.

а) We = (We, we) — проективное представление категории **Sp**. Более точно, пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(W, Y)$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A & B \\ B^{t} & C \end{pmatrix}$ — их преобразования Потапова. Тогда

$$\mathrm{we}(Q)\,\mathrm{we}(P) = \det\left[(1 - KC)^{-1/2}\right]\mathrm{we}(QP). \tag{4.3}$$

б) We = (We, we) является $*$-представлением категории **Sp**.

в) Пусть $P \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Sp}}(V) \simeq \mathbf{Sp}(V_{\mathbb{R}})$. Тогда оператор $\mathrm{we}(P)$ унитарен с точностью до умножения на константу.

Замечание. Матрица $(1 - KC)^{-1/2}$ корректно определена. Действительно, $\|KC\| < 1$, а поэтому

$$(1 - KC)^{\alpha} = 1 + \alpha KC + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}(KC)^2 + \ldots$$

Доказательства теорем 4.2–4.3 займут оставшуюся часть параграфа. Из вспомогательных утверждений самостоятельный интерес представляет верхняя оценка нормы $B[S]$, см. п. 4.10–4.12, а также прием с неподвижной точкой, используемые для этой оценки. Замечания содержат существенные добавления к этим теоремам.

4.3. Гауссов интеграл.

Предложение 4.4. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ — симметричная матрица размера $(n+n)\times (n+n)$, пусть $\|S\| < 1$, а α, β — матрицы строки длины n. Тогда

$$\iint \exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^{t} \\ \overline{z}^{t}\end{pmatrix} + \alpha z^{t} + \beta\overline{z}^{t}\right\} d\mu(z) =$$
$$= \det\left[\begin{pmatrix} E - L & -K \\ -M & E - L^{t}\end{pmatrix}^{-1/2}\right]\exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -M & E - L \\ E - L^{t} & -N\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha^{t} \\ \beta^{t}\end{pmatrix}\right\}, \tag{4.4}$$

причем интеграл сходится абсолютно.

Доказательство. Все сводится к следующей стандартной формуле из элементарного анализа:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \exp\left(-\tfrac{1}{2}xAx^{t} + bx^{t}\right) dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}bA^{-1}b^{t}\right), \tag{4.5}$$

где A симметричная матрица, причем вещественная часть A положительно определена.

Делая замену $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, получаем, что левая часть (4.4) равна

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}\iint \exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} - x^2 - y^2\right\} dx\,dy,$$

т. е., в обозначениях (4.4),

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE\end{pmatrix}, \\ b &= \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & +iE \\ E & -iE\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Дальше эти A и b нужно подставить в правую часть (4.5). Не совсем очевидно лишь вычисление $\det A$; чтобы его проделать, вынесем в (4.6) слева за скобки $\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE\end{pmatrix}$, а справа — $\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE\end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} \det A &= \det(\theta_1\theta_2)\det\left(\theta_1^{-1}\theta_2^{-1} - \begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M\end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E\end{pmatrix}\det\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M\end{pmatrix}\right) = \\ &= (-1)^n\det\begin{pmatrix} -K & 1 - L \\ 1 - L^{t} & -M\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и, переставляя столбцы, мы получаем искомое выражение. ■

Нас будет интересовать в основном случай $L = 0$. В этом случае выражение (4.4) может быть записано в более удобной форме. А именно, учитывая формулы (II.3.16)–(II.3.17), получаем:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -M \\ -N & 1\end{pmatrix} = \det(1 - MN), \tag{4.7}$$

$$\begin{pmatrix} -M & 1 \\ 1 & -N\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} N(1 - MN)^{-1} & (1 - NM)^{-1} \\ (1 - MN)^{-1} & M(1 - NM)^{-1}\end{pmatrix} \tag{4.8}$$

(впрочем, (4.8) проверяется и непосредственно умножением).

Поэтому верна формула

$$\iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}zMz^{t} + \tfrac{1}{2}\overline{z}N\overline{z}^{t} + \alpha\overline{z}^{t} + \beta\overline{z}^{t}\right\} d\mu(z) =$$
$$= \det(1 - MN)^{-1/2}\exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} N(1 - MN)^{-1} & (1 - NM)^{-1} \\ (1 - MN)^{-1} & M(1 - NM)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{t} \\ \beta^{t}\end{pmatrix}\right\}. \tag{4.9}$$

4.4. Векторы $b[T|l]$. Пусть T — симметрический оператор $V_- \to V_+$ с нормой < 1, а $l^t \in V_+$. Определим функцию $b[T \mid l] \in F(V_+)$ по формуле

$$b[T \mid l](z) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}zTz^t + lz^t\right\}$$

Замечание. Если V — координатное пространство, то $zl^t = lz^t$ обозначает просто $\sum z_j l_j$. На инвариантном языке zl^t — это результат спаривания $l \in V_+$ и $z \in V_-$.

Лемма 4.5. $b[T \mid l^t] \in F(V_-)$.

Доказательство. Утверждение следует из предложения 4.4. ■

Предложение 4.6.

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} b[T|l^t] = \det\left[(1-MT)^{-1/2}\right] b\left[K + LT(1-MT)^{-1}L^t \,\middle|\, L(1-TM)^{-1}l^t\right]. \tag{4.10}$$

Более точно, обозначим ядро (4.1) оператора $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ через $K(z, u)$. Пусть $k^z(u) := \overline{K(z, \overline{u})}$ (см. (3.9)–(3.10)). Тогда интеграл

$$\iint K(z, \overline{u}) \exp\left\{\tfrac{1}{2}uT^t u^t + lu^t\right\} d\mu(u) = \langle k^z, b[T \mid l^t]\rangle \tag{4.11}$$

сходится абсолютно, а вектор $b[\cdot \mid \cdot]$ из правой части (4.10) действительно лежит в $F(V_-)$, т. е.

$$\left\| K + LT(1-MT)^{-1}L^t \right\| < 1. \tag{4.12}$$

Доказательство. Выражение (4.11) равно

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}zKz^t\right\} \iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + uL^t z^t\right\} d\mu(u),$$

и теперь применение формулы (4.9) доказывает (4.10).

Утверждение (4.12) доказать «в лоб» довольно трудно, но, к счастью, оно нами уже доказано, а именно: неравенство (4.12) означает, что обобщенно дробно-линейное отображение переводит матричный шар в себя (см. п. 2.2). ■

Заметим, что мы пока не знаем, являются ли операторы $B[S]$ ограниченными.

4.5. Умножение операторов $B[S]$. Обозначим через $F_0(H) \subset F(H)$ множество конечных линейных комбинаций векторов вида $b[T \mid l^t]$.

Рассмотрим теперь произвольный оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} : F(V_-) \to F(W_-)$. В силу предложения 4.6 оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ переводит $F_0(V_-)$ в $F_0(W_-)$. Итак, пока мы не знаем, будет ли наш оператор ограниченным, но, по крайней мере, знаем, что он корректно определен как оператор $F_0(V_-) \to F_0(W_-)$. Из сказанного также ясно, что корректно определено произведение таких операторов.

Теорема 4.7. Пусть даны $B\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{bmatrix} : F(W_-) \to F(Y_-)$. Тогда для любой $f \in F_0(V_-)$ выполнено

$$B\begin{bmatrix} K & L^t \\ L^t & M \end{bmatrix} B\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{bmatrix} f =$$

$$= \det(1-MP)^{-1/2} B\begin{bmatrix} K + LP(1-MP)^{-1}L^t & L(1-PM)^{-1}Q \\ Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R + Q^t(1-MP)^{-1}MQ \end{bmatrix} f. \tag{4.13}$$

В качестве следствия мы получаем утверждение а) теоремы 4.3, т. е. то, что $P \mapsto \mathrm{we}(P)$ — действительно представление категории $\mathbf{Sp}$ (см. формулу (1.5)).

Формальное рассуждение. Вычисляя формально свертку ядер по формуле (3.15), мы получаем, что произведение (4.13) должно иметь ядро вида

$$\iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L^t \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{w}^t \end{pmatrix}\right\} d\mu(u) =$$

$$= \exp\left\{\tfrac{1}{2}zKz^t + \tfrac{1}{2}\overline{w}R\overline{w}^t\right\} \iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q\overline{w}^t \\ L^t z^t \end{pmatrix}\right\} d\mu(u).$$

По предложению 4.4 получаем, что это равно

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & -M \\ -P & 1 \end{pmatrix}^{-1/2}\right] \exp\left\{\tfrac{1}{2}zKz^t + \tfrac{1}{2}\overline{w}R\overline{w}^t\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\begin{pmatrix} zL & \overline{w}Q^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L^t z^t \\ Q\,\overline{w}^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{4.14}$$

после чего применение формул (4.7)–(4.8) дает искомое выражение.

К сожалению, мы до сих пор не выяснили, являются ли наши операторы ограниченными, поэтому формула (3.15) неприменима. Следовательно, наши рассуждения нуждаются в дополнительном обосновании.

Доказательство.

$$B\begin{bmatrix} K & L^t \\ L^t & M \end{bmatrix} \left(B\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{bmatrix} b[T \mid l]\right)(z) = \iint\left[\iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{w}^t \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}wTw^t + lw^t\right\} d\mu(w)\right] d\mu(u). \tag{4.15}$$

Нам нужно обосновать возможность перестановки порядка интегрирования в «повторном» интеграле с $d\mu(w)\, d\mu(u)$ на $d\mu(u)\, d\mu(w)$. Это заведомо можно сделать, если (4.15) сходится абсолютно как двойной интеграл. Последнее, в свою очередь, выполнено, по крайней мере, в случае $\left\|\begin{matrix} P & Q \\ Q^t & R \end{matrix}\right\| < 1$, $\left\|\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\right\| < 1$.

Соображения непрерывности завершают доказательство. Действительно, обозначим оператор с ядром (4.14) через U. Тогда $Ub[T \mid l^t]$ имеет вид

$$\det(A)^{-1/2} b[Z \mid m^t],$$

а (4.15) имеет вид

$$\det(B)^{-1/2} b[Y \mid n^t],$$

причем A, Z, B, Y, m, n рационально зависят от K, L, M, P, Q, R, T, l, поэтому из соображений непрерывности $A = B$, $Z = Y$, $m = n$. ■

4.6. Эквивариантное отображение матричного шара $\mathscr{X}(V)$ в проективное пространство $\mathbb{P}F(V_-)$. Поставим в соответствие каждой точке T области $\mathscr{X}(V) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(0, V)$ вектор $b[T] := b[T \mid 0]$.

Пусть $Q \in \mathrm{Mor}(V, W)$, а $S(Q) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Тогда в силу формулы (4.10) мы имеем

$$\mathrm{we}(Q) b[T] = \det(1-MT)^{-1/2} b[\tau(Q)T], \tag{4.16}$$

где $\tau(\cdot)$ обозначает функтор Крейна—Шмульяна. Замечу также, что (4.16) есть частный случай уже доказанной формулы (4.3) = (4.13). А именно, если $R \in \mathrm{Mor}(0, V)$ — подпространство с угловым оператором T, то $b[T]$ есть не что иное, как $\mathrm{we}(R)\cdot 1$.

4.7. Сопряженный оператор. Проверим утверждение б) теоремы 4.3. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(V, W)$, а $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Преобразованием Потапова морфизма P^* служит матрица

$$S^\sigma = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}^\sigma := \begin{pmatrix} \overline{M} & \overline{L}^t \\ \overline{L} & \overline{K} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Вычисляя формально ядро оператора, сопряженного к $B[S] = \mathrm{we}(P)$, мы получим в точности ядро оператора $B[S^\sigma] = \mathrm{we}(P^*)$. Пока, однако, мы не убедились, что имеем дело с ограниченными операторами, писать

$$B[S]^* = B[S^\sigma]$$

было бы опасно. Соблюдем аккуратность.

Лемма 4.8. Для любых $f_1 \in F_0(V_-)$, $f_2 \in F_0(W_-)$ выполнено

$$\big\langle B[S]f_1, f_2\big\rangle = \big\langle f_1, B[S^\sigma]f_2\big\rangle.$$

Доказательство. Если $\|S\| < 1$, то в обеих частях равенства стоит один и тот же абсолютно сходящийся интеграл, различен лишь порядок интегрирования. В случае $\|S\| = 1$, как и в доказательстве теоремы 4.7, используем соображения непрерывности. В частности, если $S = S^\sigma$, то оператор $B[S]$ — симметрический на F_0. ■

4.8. Проверка унитарности. Унитарность операторов $\mathrm{we}(P)$, где $P \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}$, есть следствие леммы II.8.3.

4.9. Сведение к симметричному случаю. Наша следующая цель — доказать утверждение об ограниченности операторов $\mathrm{we}(P)$ — самое трудное утверждение теоремы. Вспомним обычный прием вычисления нормы оператора: $\|A\|^2 = \|A^*A\|$.

Лемма 4.9. Оператор $B[S]$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор $B[S^\sigma]B[S]$.

Доказательство. Пусть оператор $B[S^\sigma]B[S]$ ограничен. В частности, функция $q(f) = \big\langle B[S^\sigma]B[S]f, f\big\rangle$ ограничена на единичном шаре D пространства F_0. В силу леммы 4.8 мы имеем $q(f) = \big\langle B[S^\sigma]f, B[S]f\big\rangle = \|B[S]f\|^2$. Ограниченность последнего выражения на D и означает ограниченность $B[S]$. ■

Оператор $B[S^\sigma]B[S]$ — симметрический и сам имеет вид $B[\cdot]$. Таким образом, нам достаточно проверить ограниченность оператора $B[S]$ в случае, когда он является симметрическим.

4.10. Принцип неподвижной точки. Обозначим вектор $b[T\,|\,0]$ через $b[T]$. Напомним, что

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} b[T] = \det(1 - MT)^{-1/2}\, b\big[K + LT(1 - MT)^{-1}L^t\big]. \tag{4.18}$$

Предложение 4.10. Следующие утверждения равносильны:

а) $b[T]$ — собственный вектор оператора $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$;

б) T — неподвижная точка преобразования

$$\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} : T \mapsto K + LT(1 - MT)^{-1}L^t. \tag{4.19}$$

Доказательство: очевидно. ■

Замечание. Еще раз подчеркнем, что отображение (4.18) переводит матричный шар в себя (см. п. 2.2).

Пусть теперь оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} : F(V_-) \to F(V_-)$ — симметрический, т. е. $K = \overline{M}$, $L = L^*$.

Теорема 4.11. Пусть оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ — симметрический. Пусть T — неподвижная точка преобразования (4.18), $\|T\| < 1$. Тогда

$$\left\| B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} \right\| = \det\big[(1 - MT)^{-1/2}\big], \tag{4.20}$$

при этом норма достигается на векторе $b[T]$.

Доказательство. Особенно просто дело обстоит в случае $T = 0$. Тогда из (4.18) видно, что $K = 0$, а значит, и $M = 0$, т. е. наш оператор имеет вид $B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{bmatrix}$. Но, как мы уже видели в п. 3.4,

$$B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{bmatrix} f(z) = f(Lz).$$

Пусть, как и раньше, $F^{(k)}(V_-) \subset F(V_-)$ — пространство однородных многочленов степени k. Ограничение оператора $f(z) \mapsto f(Lz)$ на $F^{(k)}(V)$ есть k-я симметричная степень $\mathrm{S}^k L$ оператора L. Учитывая, что $\|L\| \leqslant 1$, получаем, что $\|\mathrm{S}^k L\| = \|L\|^k \leqslant 1$. Мы видим, что $\left\|B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{bmatrix}\right\| = 1$, причем норма достигается на векторе $f(z) = 1$.

Пусть теперь T произвольно. Мы видели (см. лемму 2.5), что симплектическая группа $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$ действует на матричном шаре $\mathscr{X}(V)$ транзитивно. Рассмотрим элемент $g \in \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$ такой, что соответствующее преобразование $\tau(g)$ матричного шара переводит 0 в T. Тогда оператор $\mathrm{we}(g)$ переводит вектор $b[T]$ в $b[0]$. Поэтому вектор $b[0]$ является собственным для оператора

$$A = \mathrm{we}(g)^{-1} B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} \mathrm{we}(g),$$

который по-прежнему симметрический (вспомним, что оператор $\mathrm{we}(g)$ унитарен с точностью до умножения на константу) и имеет вид $\lambda B[H]$, где λ — скаляр. Как только что было доказано, норма оператора A достигается на векторе $b[0]$. Поэтому норма оператора

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix} = \mathrm{we}(g) A\, \mathrm{we}(g)^{-1}$$

достигается на собственном векторе $b[T]$. Теперь (4.20) следует из (4.18). ∎

4.11. Существование неподвижной точки.

Предложение 4.12. Пусть $\left\|\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}\right\| < 1$. Тогда обобщенно дробно-линейное отображение $\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ матричного шара в себя имеет неподвижную точку.

Первое доказательство: см. п. VI.3.7. ∎

Второе доказательство. В п. 2.2 мы через $\mathscr{X}(V)$ обозначали множество симметрических операторов $V_+ \to V_-$ с нормой < 1. Обозначим через $\overline{\mathscr{X}(V)}$ множество симметрических операторов $V_+ \to V_-$ с нормой $\leqslant 1$. Очевидно, отображение (4.19) продолжается до непрерывного отображения $\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix} : \overline{\mathscr{X}(V)} \to \overline{\mathscr{X}(V)}$.

Лемма 4.13. Если $\left\|\begin{matrix} K & L \\ L^{t} & M \end{matrix}\right\| < 1$, то $\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ переводит $\overline{\mathscr{X}(V)}$ в $\mathscr{X}(V)$.

Задача. Докажите лемму.

Продолжим доказательство предложения. С топологической точки зрения $\overline{\mathscr{X}(V)}$ есть шар. Отображение $\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ по теореме Брауэра имеет неподвижную точку в $\overline{\mathscr{X}(V)}$, а по лемме эта неподвижная точка содержится в $\mathscr{X}(V)$. ∎

4.12. Оценка нормы оператора $\mathrm{we}(P)$.

Теорема 4.14. Пусть $P \in \mathrm{End}_{\mathrm{Sp}}(V)$, причем $P = P^*$. Пусть $S = \begin{pmatrix} \overline{M} & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Тогда

$$\|\mathrm{we}(P)\| \leqslant \det(1 - |M|)^{-1/2}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Начнем со случая, когда $\|S\| < 1$. Тогда у нас есть теорема 4.11 и предложение 4.12, поэтому нам достаточно убедиться в истинности высказывания:

Лемма 4.15. Пусть M, X — матрицы размера $n \times n$, причем $\|M\| < 1$, $\|X\| < 1$. Тогда

$$|\det(1 - XM)| \geqslant \det(1 - |M|).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что матрица M самосопряжена и положительна. Мы хотим доказать, что

$$1 \leqslant \det(1 - M)^{-1} |\det(1 - XM)|. \tag{4.22}$$

Преобразуя правую часть, мы получаем

$$\left|\det(1 + (1 - X)M(1 - M)^{-1})\right|. \tag{4.23}$$

Пусть $\Lambda = \sqrt{M(1 - M)^{-1}}$. Тогда (4.23) равно

$$\det(1 + \Lambda(1 - X)\Lambda), \tag{4.24}$$

и для того, чтобы доказать (4.22), нам достаточно убедиться в том, что собственные числа матрицы $\Lambda(1 - X)\Lambda$ имеют неотрицательные вещественные части. Для этого достаточно проверить, что

$$\mathrm{Re}\langle \Lambda(1 - X)\Lambda v, v\rangle \geqslant 0$$

для всех v. Преобразуя это выражение, получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle \Lambda(1 - X)\Lambda v, v\rangle &= \mathrm{Re}\langle (1 - X)\Lambda v, \Lambda v\rangle = \\ &= \|\Lambda v\|^2 - \mathrm{Re}\langle X\Lambda v, \Lambda v\rangle \geqslant \\ &\geqslant \|\Lambda v\|^2 - \|X\|\,\|\Lambda v\|^2\| \geqslant \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. ∎

Теорема 4.14, а вместе с ней и ограниченность оператора $\mathrm{we}(P)$ в случае $\|S\| < 1$ доказаны. Пусть теперь $\|S\| = 1$. Рассмотрим последовательность линейных отношений P_n с преобразованиями Потапова

$$S_n = \begin{pmatrix} \overline{M} & \left(1 - \frac{1}{n}\right)\overline{L} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)L^{t} & M \end{pmatrix}.$$

Пусть $K_n(z, \bar{u})$ — ядро оператора $\mathrm{we}(P_n)$, а $K(z, \bar{u})$ — ядро оператора $\mathrm{we}(P)$. Тогда, очевидно, $K_n(z, \bar{u})$ сходится к $K(z, \bar{u})$ поточечно, при этом нормы операторов $\mathrm{we}(P_n)$ ограничены константой $\det(1 - |M|)$. Поэтому в силу предложения 3.11

$$\|\mathrm{we}(P)\| \leqslant \det(1 - |M|).$$ ∎

4.13. Замечания

A. Еще одно доказательство ограниченности операторов $B[S]$.

Задача. Пусть $Y = B\begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix} : F(\mathbb{C}^1) \to F(\mathbb{C}^1)$, где $0 < \lambda < 1$. Докажите, что $\|Y\| = \sqrt{1 - \lambda}$.

Указание. Постройте спектральное разложение оператора Y по обобщенным собственным функциям. Обобщенные собственные функции ищутся в виде $b[T \mid l^{t}]$, см. VI.1.9.D.

Пусть $B[S]$ — некоторый самосопряженный оператор в $F(\mathbb{C}^n)$. При доказательстве ограниченности $B[S]$ можно без ограничения общности считать, что S имеет канонический вид из п. 1.7, а для такого оператора ограниченность достаточно очевидна.

B. Коммутационные соотношения.

Задача. Пусть $Q \in \mathrm{Mor}(V, W)$. Докажите, что $\mathrm{we}(Q)$ — единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $F(V_-) \to F(W_-)$ такой, что для любого многочлена $f \in F(V_-)$ и любых $(v, w) \in Q$ выполнено

$$\hat{a}(w)\, \mathrm{we}(Q) f = \mathrm{we}(Q) \hat{a}(v) f. \tag{4.25}$$

C. Линеаризация. Пусть $P \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V) \simeq \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$. Пусть P — график оператора с матрицей $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$.

Задача. Докажите, что операторы

$$\widetilde{\mathrm{we}}(P) = \pm \det(\Phi)^{-1/2}\, \mathrm{we}(P)$$

унитарны, причем

$$\widetilde{\mathrm{we}}(PQ) = \pm\, \widetilde{\mathrm{we}}(P)\, \widetilde{\mathrm{we}}(Q).$$

D. Компактность.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$. Докажите, что оператор $B[S]$ компактен.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$. Найти $\mathrm{tr}\, B[S]$.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$, причем $S = S^{\sigma}$. Мы видели, что оператор $B[S]$ имеет собственную функцию вида $\exp\{zTz^t\}$. Докажите, что все собственные функции оператора $B[S]$ имеют вид $p(z)\exp\{zTz^t\}$, где $p(z)$ — многочлены.

E. Точные формулы для норм операторов $B[S]$ известны, см. [Ольшанский (1994)]; однако они не очень удобны.

Глава VI

Представление Вейля: бесконечномерный случай

§ 1. Бозонное пространство Фока с бесконечным числом степеней свободы

1.1. Координатное пространство F. Рассмотрим пространства Фока $F(\mathbb{C}^0)$, $F(\mathbb{C}^1)$, … . Рассмотрим изометрическое вложение

$$\lambda_n f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_n)$$

пространства $F(\mathbb{C}^n)$ в $F(\mathbb{C}^{n+1})$. Таким образом, мы можем отождествить $F(\mathbb{C}^n)$ с подпространством в $F(\mathbb{C}^{n+1})$. Рассмотрим неполное евклидово пространство $\bigcup_{n=0}^{\infty} F(\mathbb{C}^n)$. *Пространство Фока F* — это пополнение пространства $\bigcup F(\mathbb{C}^n)$.

Как мы видели (в п. V.3.1), функции вида

$$e_{j_1 \dots j_n}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k^{j_k}}{\sqrt{j_k!}} \tag{1.1}$$

образуют ортонормированный базис в $F(\mathbb{C}^n)$. Отображение λ_n отождествляет функции $e_{j_1 \dots j_n}$ и $e_{j_1 \dots j_n 0}$. Теперь из ортогональных базисов (1.1) в $F(\mathbb{C}^n)$ мы можем составить базис в F. Его элементы $e_{j_1 j_2 \dots}(z)$ нумеруются последовательностями неотрицательных целых чисел $j_1, j_2, \dots$, у которых начиная с некоторого места стоят нули; при этом функция $e_{j_1 \dots j_n}(z) \in F(\mathbb{C}^n)$ отождествляется с $e_{j_1 \dots j_n 00 \dots}(z) \in F$.

Теперь элементы пространства F можно рассматривать как формальные ряды вида

$$r(z) = \sum_{j_1, j_2, \dots} c_{j_1 j_2 \dots} e_{j_1 j_2 \dots}(z), \tag{1.2}$$

где $\sum |c_{j_1 j_2} \dots|^2 < \infty$.

1.2. Пространство F как пространство голоморфных функций.

Лемма 1.1. Ряд (1.2) сходится для любого $z = (z_1, z_2, \dots) \in \ell_2$.

Доказательство. Пусть $(a_1, a_2, \dots) \in \ell_2$. Рассмотрим формальный ряд

$$\varphi_a(z) = \sum_{j_1, j_2, \dots} \left(\frac{\bar{a}_1^{j_1}}{\sqrt{j_1!}} \frac{\bar{a}_2^{j_2}}{\sqrt{j_2!}} \cdots \right) e_{j_1 j_2 \dots}(z_1, z_2, \dots). \tag{1.3}$$

Легко видеть, что $\varphi_a(z) \in F$ Действительно,

$$\|\varphi_a\|^2 = \sum \frac{|a_1|^{2j_1}}{j_1!}\frac{|a_2|^{2j_2}}{j_2!}\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_k|^{2j}}{j!}\right) = e^{-\|a\|^2}.$$

Вычисляя скалярное произведение функции $\varphi_a(z)$ и функции $r(z)$, заданной формулой (1.2), мы получаем

$$\langle r(z), \varphi_a(z)\rangle = \sum c_{j_1j_2\ldots}\frac{a_1^{j_1}}{\sqrt{j_1!}}\frac{a_2^{j_2}}{\sqrt{j_2!}}\ldots.$$

Но это выражение в точности равно $r(a_1, a_2, \ldots)$. Тем самым сходимость ряда (1.2) в любой точке доказана. ■

Далее, пусть A — линейный оператор $H_1 \to H_2$, причем $\|A\| \leqslant 1$. Тогда оператор замены переменной $F(A) : f(z) \mapsto f(zA)$ является ограниченным оператором $F(H_2) \to F(H_1)$. В самом деле, в каждом пространстве $S^k(H_2)$ наш оператор $F(A)$ действует как k-я симметричная степень S^kA оператора A, а $\|S^kA\| = \|A\|^k$.

1.3. Гауссова мера и пространство Фока как подпространство в L^2. Итак, пространство Фока $F(H)$ можно рассматривать как некоторое пространство голоморфных функций на гильбертовом пространстве H. Однако до сих пор для вычисления скалярного произведения мы должны были обращаться к пространствам $F(\mathbb{C}^n)$ или к разложению по базису $e_{j_1j_2\ldots}$. Сейчас мы запишем скалярное произведение в $F(H)$ более привычным образом.

Введем в $\mathbb{C}$ гауссову меру ν с плотностью $\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}$ (множитель $\frac{1}{\pi}$ выбран так, чтобы мера всего $\mathbb{C}$ была равна 1). Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^\infty$ всех комплексных последовательностей $(z_1, z_2, \ldots)$. Введем в $\mathbb{C}^\infty$ гауссову меру μ — произведение гауссовых мер ν на каждом сомножителе.

Задача. Докажите, что пространство ℓ_2 имеет в $\mathbb{C}^\infty$ меру 0.

Любая функция $e_{j_1j_2\ldots}(z)$ на ℓ_2 зависит лишь от конечного числа переменных, а тем самым корректно определена и на $\mathbb{C}^\infty$.

Лемма 1.2. Функции $e_{j_1j_2\ldots}(z)$ образуют ортонормированную систему в $L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

Доказательство. Функции $e_{j_1j_2\ldots}$ зависят лишь от конечного числа переменных, поэтому интегрирование $\int e_{j_1j_2\ldots}\overline{e_{i_1i_2\ldots}}\,d\mu$ сводится к интегрированию по $\mathbb{C}^n$, а вычисления в этом случае мы уже проводили в п. V.3.1. ■

Замечание. Система функций $e_{j_1j_2\ldots}(z)$, конечно, не является базисом в $L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

Таким образом, ряд (1.2) как ряд функций на $\mathbb{C}^\infty$ сходится в среднем квадратичном на $\mathbb{C}^\infty$, а поэтому пространство $F(\ell_2)$ изометрически вкладывается в $L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

С этого места мы будем отождествлять $F(\ell_2)$ с подпространством в $L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

1.4. Воспроизводящее свойство и ядра. Пусть $a \in H$. Рассмотрим в $F(H)$ функцию

$$\varphi_a(z) = \exp(z, a), \tag{1.4}$$

где через (z, a) обозначено скалярное произведение z и a в H.

Лемма 1.3. Для любой $f \in F(H)$ и любого $a \in H$ выполнено

$$\langle f, \varphi_a\rangle = f(a). \tag{1.5}$$

Доказательство: по существу, именно это вычисление было проведено при доказательстве леммы 1.1, см. также п. V.3.2. ■

Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$. Определим его *ядро* по формуле

$$K_A(u, \overline{v}) = \langle A\varphi_v, \varphi_u\rangle_{F(H_2)}, \tag{1.6}$$

где $v \in H_1$, $u \in H_2$.

Так же, как и в п. V.3.3, для ядра $K_A(z, \overline{u})$ определим функции

$$k_A^{\overline{u}}(z) = K_A(z, \overline{u}), \quad k_A^z(u) = \overline{K_A(z, \overline{u})}.$$

Так же, как и в конечномерном случае (см. п. V.3.3), мы имеем $k_A^z(u) \in F(H_1)$, $k_A^{\overline{u}}(z) \in F(H_2)$. Так же, как и в п. V.3.3, мы имеем

$$Af(z) = \langle f, k_A^z\rangle. \tag{1.7}$$

Мы будем символически записывать эту формулу в виде

$$Af(z) = \iint K_A(z, \overline{u})f(u)\,d\mu(u), \tag{1.8}$$

но теперь мы уже обязаны помнить, что запись (1.8) является чисто символической.

Наконец, если $A : F(H_1) \to F(H_2)$, $B : F(H_2) \to F(H_3)$ — операторы с ядрами $K_A(u, \overline{v})$ и $K_B(z, \overline{u})$, то ядро $K_{BA}(z, \overline{v})$ оператора BA равно

$$K_{BA}(z, \overline{v}) = \left\langle k_A^{\overline{v}}, k_B^z\right\rangle_{F(H_2)}, \tag{1.9}$$

или, в символической форме,

$$K_{BA}(z, \overline{v}) = \iint K_B(z, \overline{u})K_A(u, \overline{v})\,d\mu(u).$$

Наконец, по-прежнему верна формула

$$K_A(z, \overline{u}) = \sum\left\langle Ae_{k_1k_2\ldots}, e_{j_1j_2\ldots}\right\rangle_{F(H_2)}e_{j_1j_2\ldots}(z)\,e_{k_1k_2\ldots}(\overline{u}). \tag{1.10}$$

Замечание. Стоит обсудить, можно ли формулы (1.8) и (1.10) понимать буквально как интеграл по гауссовой мере. Оказывается, что совсем буквально их понимать нельзя: функция $K_A(z, \overline{u})$, определенная на $\ell_2 \times \ell_2$, не продолжается до функции на $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$. Она, однако, канонически продолжается и на $\ell_2 \times \mathbb{C}^\infty$, и на $\mathbb{C}^\infty \times \ell_2$ (т. к. функции $k_A^{\overline{u}}$ и k_A^z продолжаются на $\mathbb{C}^\infty$). Поэтому формулу (1.8) можно понимать так: продолжаем ядро $K_A(z, \overline{u})$ на $\ell_2 \times \mathbb{C}^\infty$, а потом интегрируем и получаем значение функции Af в точке $z \in \ell_2$. Но значение функции Af в $z \in \mathbb{C}^\infty$ так не получается.

Еще стоит отметить, что эта же техника применима и к неограниченным операторам. Пусть Q — какое-нибудь плотное подпространство в $F(H)$, содержащее все функции φ_a, а $\widetilde{F}(H)$ — пространство всех целых функций на H. Тогда формула (1.6) имеет смысл для любого оператора $Q \to \widetilde{F}(H)$. Использование этой техники возможно и в более общей ситуации, если не требовать, чтобы «ядро» $K_A(z, \overline{u})$ было определено на всем $H \oplus H$; с ней вполне можно работать даже если ядро определено лишь на некотором шаре в $H \oplus H$ (нам это не понадобится).

1.5. Операторы рождения-уничтожения. Пусть H — гильбертово пространство, H' — двойственное пространство, $V = V_+ \oplus V_- := H' \oplus H$. Выберем в H ортогональный базис, а в H' — сопряженный базис. Пусть $v = (v_+, v_-) \in H' \oplus H = V$. Пусть $(v_1^+, v_2^+, \ldots; v_1^-, v_2^-, \ldots)$ — координаты вектора v. Определим оператор рождения-уничтожения в $F(H)$ по формуле

$$\hat{a}(v)f(z) = \left(\sum v_i^+ z_i - \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial z_i}\right) f(z).$$

Эти операторы неограничены, в качестве их общей плотной области определения можно взять, например, пространство $F_{\mathrm{fin}}(H)$ всех финитных векторов, т. е. векторов, представимых в виде конечной суммы

$$\sum_{j=0}^{n} c_j f_j, \quad \text{где } f_k \in \mathrm{S}^k(H').$$

Введем на V кососимметричную билинейную форму

$$\{(v_+, v_-), (w_+, w_-)\} = v_+(w_-) - w_+(v_-)$$

(напомним, что $v_+, w_+ \in H'$, а $v_-, w_- \in H$). Тогда

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)] = \hat{a}(v)\hat{a}(w) - \hat{a}(w)\hat{a}(v) = \{v, w\} \cdot E$$

(«*канонические коммутационные соотношения*»). Операторы $\hat{a}(\cdot)$ неограничены, поэтому для осторожности лучше сказать, что это равенство есть равенство операторов на $F_{\mathrm{fin}}(H)$.

Так же, как и в п. V.3.5, доказывается, что операторы $\hat{a}(v_+, -\overline{v_+})$ существенно самосопряжены.

1.6. Группа Гейзенберга. Пусть $b \in H$. Рассмотрим оператор $T(b)$ в $F(H)$, задаваемый формулой

$$T(b)f(z) = f(z - b)\exp\left(-\tfrac{1}{2}(b, b) + (z, b)\right). \tag{1.11}$$

Задача.

а) Покажите, что операторы $T(b)$ унитарны.

б) Проверьте равенство

$$T(b)T(b') = \exp\big(i\,\mathrm{Im}(b, b')\big)T(b + b').$$

Таким образом, $b \mapsto T(b)$ является унитарным проективным представлением аддитивной группы гильбертова пространства. Это представление можно также рассматривать как линейное представление так называемой группы Гейзенберга. *Группа Гейзенберга* есть пространство $H \oplus \mathbb{R}$ с операцией умножения

$$(h, r)(h_1, r_1) = \big(h_1 + h_2, r_1 + r_2 + \mathrm{Im}(h, h_1)\big).$$

Задача. Покажите, что генератор однопараметрической группы операторов $T(sb)$, где $s \in \mathbb{R}$, есть $\hat{a}(b, \overline{b})$.

Задача. Докажите, что представление T неприводимо.

1.7. Действие группы изометрий. Пусть $\mathrm{Isom}(H)$ — группа изометрий гильбертова пространства H, т. е. группа всех преобразований H вида $z \mapsto Az + b$, где A — унитарный оператор, а $b \in H$. Сдвиги $z \mapsto z + b$ образуют в $\mathrm{Isom}(H)$ нормальную подгруппу, изоморфную аддитивной группе пространства H. Кроме того, $\mathrm{Isom}(H)$ содержит полную унитарную группу $\mathrm{U}(H)$ пространства H. Мы видели, что и $\mathrm{U}(H)$, и группа сдвигов действует в $F(H)$ (см. п. 1.2 и 1.6). Эти два действия можно объединить, а именно: поставим в соответствие изометрическому преобразованию $[A, b] : z \mapsto Az + b$ унитарный оператор

$$\mathrm{Exp}[A, b]f(z) = f\big(A^{-1}(z - b)\big)\exp\left(-\tfrac{1}{2}(b, b) + (z, b)\right) \tag{1.12}$$

Мы получаем проективное унитарное представление группы $\mathrm{Isom}(H)$:

$$\mathrm{Exp}[A_1, b_1]\,\mathrm{Exp}[A_2, b_2] = \exp\big(i\,\mathrm{Im}(b_1, A_1 b_2)\big)\,\mathrm{Exp}\big([A_1, b_1] \circ [A_2, b_2]\big). \tag{1.12a}$$

Эта конструкция будет существенно расширена в § 4, действие группы изометрий будет продолжено до действия значительно более широкой группы. Однако в главах IX–X мы увидим, что группа Isom и ее представление Exp имеют самостоятельную ценность.

Отметим также, что конструкция представления Exp допускает небольшое шевеление, а именно: можно определить представление Exp_s по формуле

$$\mathrm{Exp}_s[A, b]f(z) = f\big(A^{-1}(z - sb)\big)\exp\left(-\tfrac{1}{2}|s|^2(b, b) + s(z, b)\right),$$

где $s \in \mathbb{C}$.

Задача. Покажите, что Exp_s и Exp_t эквивалентны тогда и только тогда, когда $|s| = |t|$.

Задача. Покажите, что

$$\mathrm{Exp}_s \otimes \mathrm{Exp}_t \simeq \mathrm{Exp}_{\sqrt{s^2+t^2}} \otimes \mathrm{Exp}_0. \tag{1.13}$$

Что из себя представляет представление Exp_0?

Пусть, далее, Y — вещественное гильбертово пространство, а $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(Y)$ — группа изометрий Y. Ограничение представления Exp_s группы $\mathrm{Isom}(Y_{\mathbb{C}})$ на $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(Y)$ мы будем обозначать через $\mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}$. Из формулы (1.12a) видно, что это представление является линейным.

Задача. Покажите, что $\mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}$ неприводимо при $s \neq 0$.

Задача. Покажите, что при $|s| \neq |t|$ представления $\mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}$ и $\mathrm{Exp}_t^{\mathbb{R}}$ не эквивалентны.

Указание. Покажите, что $f(z) = 1$ — единственный $\mathrm{O}(H)$-инвариантный вектор в $F(H)$, далее вычисляются сферические функции $\left\langle \mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}(g) \cdot 1, 1 \right\rangle$ и показывается, что они различны.

1.8. Тензорные произведения. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, в них введены координаты $z_1, z_2, \dots, h_1, h_2, \dots$ соответственно. Построим канонический изоморфизм

$$F(H_1) \otimes F(H_2) \simeq F(H_1 \oplus H_2).$$

Это очень просто: если $f(z) \in F(H_1)$, а $g(h) \in F(H_2)$, то

$$f(z) \otimes g(h) \mapsto f(z)g(h).$$

Дословно также строится канонический изоморфизм

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} F(H_i) \simeq F\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i\right) \tag{1.14}$$

(в каждом $F(H_i)$ отмечен вакуумный вектор (см. Предварительные сведения, §4)). При этом, если A_i — операторы в $F(H_i)$, а $K_i(z_i, \bar{u}_i)$ — их ядра, то ядро оператора $\otimes A_i$ равно $\prod_{i=1}^{\infty} K_i(z_i, \bar{u}_i)$.

Здесь стоит заметить, что в правой части равенства (1.14) можно поставить и прямой интеграл гильбертовых пространств, тогда левую часть придется понимать как непрерывное тензорное произведение, и тем самым мы получаем способ определения непрерывных тензорных произведений (он неявно будет использован ниже (глава X) при построении мультипликативного интеграла Араки).

1.9. Замечания. Вещественная модель пространства Фока. Вещественная модель пространства Фока была обнаружена раньше голоморфной ([Segal I. E. (1956)], [Segal I. E. (1958)]), она менее удобна, но по-своему замечательна. Подробное изложение перечисленных ниже в A, B фактов содержится в книге [Шилов, Фан Дык Тинь (1967)], см. также [Kuo (1975)].

A. Пространство $L^2(\mathbb{R}^\infty)$. Введем на $\mathbb{R}$ гауссову меру с плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ (так, что мера $\mathbb{R}$ равна 1). Рассмотрим произведение $\mathbb{R}^\infty$ счетного числа экземпляров $\mathbb{R}$ и снабдим его произведением мер $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_i^2/2}$.

Пусть $t = (t_1, t_2, \dots) \in \ell_2$. Рассмотрим «линейный функционал» $f(x) = \sum t_j x_j$ на $\mathbb{R}^\infty$. На первый взгляд кажется, что выражение $\sum t_j x_j$ не имеет смысла.

Задача. Покажите, что ряд $\sum t_j x_j$ сходится в среднем квадратичном.

Задача. Покажите, что ряд $\sum t_j x_j$ сходится почти всюду.

Последнее высказывание нетривиально; оно, однако, вытекает из следующей теоремы (см., например, [Ширяев (1980)]).

Теорема 1.4 (Колмогоров—Хинчин). Пусть f_i — независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием. Пусть ряд $\sum Df_i$, составленный из их дисперсий, сходится. Тогда ряд $\sum f_i$ сходится почти всюду.

B. Преобразования пространства $\mathbb{R}^\infty$. Пусть $O(\infty)$ — группа всех ортогональных операторов в вещественном пространстве ℓ_2. Пусть A — матрица из $O(\infty)$, а $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$. Умножим формально вектор x на матрицу A. Как мы только что видели, ряды $\sum x_j a_{ij}$ сходятся почти всюду, поэтому *почти всюду* определено отображение $x \mapsto xA$.

Теорема 1.5. Отображение $x \mapsto xA$ сохраняет меру μ в $\mathbb{R}^\infty$.

В частности, группа $O(\infty)$ действует в пространстве $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ операторами вида $f(x) \mapsto f(xA)$.

Задача. Пусть $t = (t_1, t_2, \dots) \in \ell_2$. Покажите, что отображение $x \mapsto x + t$ оставляет меру μ в $\mathbb{R}^\infty$ квазиинвариантной, причем производная Радона—Никодима равна $\exp\left(-\sum t_j x_j - \frac{1}{2}\sum t_j^2\right)$.

Пусть теперь $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ — группа изометрий вещественного пространства ℓ_2. Как мы только что видели, $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ действует на $\mathbb{R}^\infty$ преобразованиями, оставляющими меру μ квазиинвариантной. Поэтому мы можем определить унитарное представление Exp группы $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ по формуле

$$\mathrm{Exp}[A, b]f(x) = f\left((x-b)A^{-1}\right)\exp\left(-\tfrac{1}{4}(b,b) + \tfrac{1}{2}xb^t\right). \tag{1.15}$$

Задача. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots > 0$. Рассмотрим преобразование

$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto \left((1+\lambda_1)x_1, (1+\lambda_2)x_2, \dots\right)$$

пространства $\mathbb{R}^\infty$. Докажите, что мера μ квазиинвариантна относительно этого преобразования тогда и только тогда, когда $\sum \lambda_j^2 < \infty$.

Замечание. При решении задачи на первый взгляд кажется, что необходимо выполнение более сильного условия $\sum |\lambda_j| < \infty$.

Обозначим через $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\right)$ группу всех операторов в ℓ_2, представимых в виде $A(1+T)$, где $A \in O(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Теорема 1.6 (Фельдман—Гаек) [Feldman (1958)], [Hajek (1958)]. Пусть B — ограниченный оператор в ℓ_2. Преобразование $x \mapsto xB$ оставляет меру μ квазиинвариантной тогда и только тогда, когда $B \in \left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\right)$.

Задача. Докажите теорему в одну сторону: условие $B \in \left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\right)$ влечет квазиинвариантность μ.

В частности, мы получаем серию T_w унитарных представлений $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\right)$ в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$:

$$T_w(B)f(x) = f(xB)\left[\frac{d\mu(xB)}{d\mu(x)}\right]^{1/2+iw}, \tag{1.16}$$

где $w \in \mathbb{R}$, а $\frac{d\mu(xB)}{d\mu(x)}$ — производная Радона—Никодима.

C. Изоморфизм $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ и пространства Фока. Пусть $a = (a_1, a_2, \dots)$ — элемент комплексного ℓ_2.

Определим функцию

$$\tilde{\varphi}_\alpha(x) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum a_j^2 + \sqrt{2}\sum a_j x_j\right) \in L^2(\mathbb{R}^\infty). \tag{1.17}$$

Задача. Проверьте, что

$$\left\langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b \right\rangle = \exp\left(\sum a_j \bar{b}_j\right).$$

Таким образом, скалярные произведения функций $\tilde{\varphi}_a \in L^2(\mathbb{R}^\infty)$ совпадают со скалярными произведениями функций $\varphi_a \in F(\ell_2)$.

Следовательно, мы можем отождествить $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ с $F(\ell_2)$, полагая, что элементы «переполненного» базиса $\tilde{\varphi}_a \in L^2(\mathbb{R}^\infty)$ соответствуют элементам «переполненного базиса» $\varphi_a \in F(\ell_2)$.

Задача. Пусть $\tilde f \in L^2(\mathbb{R}^\infty)$, а f — соответствующий элемент $F(\ell_2)$. Тогда

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \tilde f(x)\overline{\tilde\varphi_z(x)}\, d\mu(x).$$

Для обратного преобразования можно написать формальное выражение

$$\tilde f(x) = \int\limits_{\mathbb{C}^\infty} f(u)\overline{\tilde\varphi_u(x)}\, d\mu(u).$$

Оператор $f \mapsto \tilde f$ называется *преобразованием Баргмана—Сигала*.

Задача. Куда переходят элементы базиса $e_{j_1 j_2 \dots} \in F(\ell_2)$ при этом соответствии?

Ответ. В функции

$$\tilde e_{j_1 j_2 \dots}(x) = H_{j_1}(x_1)H_{j_2}(x_2)\dots,$$

где $H_j(x)$ — многочлены Эрмита (которые, как известно, образуют ортогональный базис в $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\right)$).

Задача. Покажите, что представления (1.12) и (1.15) группы $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ на самом деле совпадают.

Задача. Что соответствует в пространстве $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ операторам рождения-уничтожения?

Ответ.

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \leftrightarrow -i\,\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad z_j \leftrightarrow i\left(x_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Задача. Перенесите действие группы Гейзенберга в пространство $L^2(\mathbb{R}^\infty, d\mu)$.

D. Конечномерный случай. Только что мы отождествили $F(\ell_2)$ с $L^2(\mathbb{R}^\infty, d\mu)$. Точно так же проводится отождествление $F(\mathbb{C}^n)$ с $H_n := L^2\left(\mathbb{R}^n, (2\pi)^{-n/2}e^{-\sum x_j^2/2}dx\right)$. Пространство H_n, в свою очередь, отождествляется с обычным пространством $L^2(\mathbb{R}^n)$, а именно: функции $f(x) \in H_n$ соответствует функция $f(x)e^{-\sum x_j^2/4} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Задача. Покажите, что векторам вида $b[T \mid l^t] \in F(\mathbb{C}^n)$ соответствуют функции вида

$$b[Q \mid m^t] := \exp\left\{-\tfrac{1}{2}xQx^t + xm^t\right\} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

где матрица $\operatorname{Re} Q$ положительно определена.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$. Покажите, что операторам $B[S] : F(\mathbb{C}^n) \to F(\mathbb{C}^m)$ соответствуют интегральные операторы в $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^m)$ вида

$$f(x) \mapsto \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^t \\ y^t \end{pmatrix}\right\} f(y)\, dy, \tag{1.18}$$

где $A = A^t$, $C = C^t$, а матрица $\operatorname{Re}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$ положительно определена.

Замечание. В предельном случае $\|S\| = 1$ это уже не так, и наряду с операторами вида (1.18) (пример: преобразование Фурье) встречаются операторы вида

$$f(x) \mapsto \int\limits_L \chi(x, y) f(y)\, dy,$$

где $\chi(x, y)$ — гауссова плотность, сосредоточенная на некотором линейном подпространстве $L \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Подробнее об операторах вида (1.18) см. [Howe (1988)], [Hörmander (1994)].

Задача. Истолкуйте формулу (1.18) через преобразование Потапова.

Задача. Покажите, что оператор $B\begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix} : F(\mathbb{C}^1) \to F(\mathbb{C}^1)$ соответствует оператору

$$f(x) \mapsto (1-\lambda)^{-1/2} e^{-(1-\lambda)x^2} f(x) \tag{1.19}$$

в $L^2(\mathbb{R}^1)$.

E. Группа Гейзенберга. Пусть V — вещественное линейное пространство размерности $2n$, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой $\{\cdot, \cdot\}$. Введем на $V \oplus \mathbb{R}$ структуру группы, положив

$$(v_1, r_1) \times (v_2, r_2) = \bigl(v_1 + v_2, r_1 + r_2 + \{v_1, v_2\}\bigr).$$

Построенный объект называется *группой Гейзенберга* H_{2n+1}.

Пусть V_+ и V_- — два дополнительных изотропных подпространства в V. Пусть $v = (v_+, v_-) \in V_+ \oplus V_-$. Определим операторы $T_\lambda(v, r)$ в $L^2(V_+)$ по формуле

$$T_\lambda(v, r) f(x) = f(x + v_+) e^{i\lambda(\{x, v_-\} + r)}. \tag{1.20}$$

Задача. Проверьте, что это представление эквивалентно представлению из п. 1.6.

Заметим, что элементы вида $(0, r)$ образуют центр группы, и, следовательно, в любом неприводимом унитарном представлении они должны действовать скалярными операторами $e^{i\lambda r} \cdot E$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.7 (Стоун—фон Нейман). Для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ группа Гейзенберга H_{2n+1} имеет ровно одно унитарное представление T_λ такое, что $T_\lambda(0, r) = e^{i\lambda}$. Это представление задается формулой (1.20).

Пусть $g \in \mathrm{Sp}(V, \mathbb{R})$. Тогда преобразование $(v, r) \mapsto (gv, r)$ является автоморфизмом H_{2n+1}, а значит, $(v, r) \mapsto T_\lambda(gv, r)$ является снова представлением H_{2n+1}; в силу теоремы Стоуна—фон Неймана представления $T_\lambda(gv, r)$ и $T_\lambda(v, r)$ эквивалентны. Поэтому существует унитарный оператор $U(g)$ такой, что

$$T_\lambda(gv, r) = U(g)^{-1} T_\lambda(v, r) U(g) \tag{1.21}$$

для всех (v, r).

Задача.

а) Покажите, что

$$U(g_1 g_2) = e^{i\mu} U(g_1) U(g_2).$$

б) Покажите, что $g \mapsto U(g)$ есть представление Вейля группы $\mathrm{Sp}(V, \mathbb{R})$.

Замечания.

а) Конечно, (1.20) есть лишь другая форма записи коммутационных соотношений (V.4.25).

б) См. аналогичные рассуждения в п. II.3.2.

в) Для бесконечномерной группы Гейзенберга теорема Стоуна—фон Неймана не верна (см. [Gårding, Wightman (1954)]).

1.10. Замечания. Канонические расширения гильбертовых пространств (см. [Kuo (1975)], главы I—II). Рассмотрим теперь произвольное *вещественное* гильбертово пространство H. Выберем в нем ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$. Пространство H состоит из рядов вида $\sum \alpha_j e_j$, где $\sum \alpha_j^2 < \infty$.

Рассмотрим пространство $\widehat H$, состоящее из формальных выражений (рядов) вида $\sum \beta_j e_j$, где $\beta_j \in \mathbb{R}$ произвольны. Тогда $\widehat H$ отождествляется с $\mathbb{R}^\infty$, и тем самым мы получим гауссову меру на $\widehat H$.

Формально пространство $\widehat{H}$ зависит не только от самого гильбертова пространства H, но и от базиса $e_1, e_2, \ldots$. Поэтому мы должны были бы писать $\widehat{H}(e_1, e_2, \ldots)$ вместо $\widehat{H}$. Однако в силу $\mathrm{O}(\infty)$-инвариантности конструкции разные пространства $\widehat{H}(e_1, e_2, \ldots)$ и $\widehat{H}(e_1', e_2', \ldots)$ канонически изоморфны (они изоморфны как пространства с мерой, а не как множества и не как линейные пространства!).

Пространство $L^2(\widehat{H})$ теперь естественным образом отождествляется с пространством Фока $F(H_{\mathbb{C}})$. Естественно, встает вопрос о том, можно ли «пощупать руками» пространство $\widehat{H}$, потому что в только что описанном виде оно выглядит совершенно неосязаемым.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — последовательность положительных чисел, причем $\sum \lambda_j^2 < \infty$. Обозначим через $\mathbb{R}^\infty_\Lambda$ подмножество в $\mathbb{R}^\infty$, состоящее из последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ таких, что

$$\sum \lambda_j^2 x_j^2 < \infty.$$

Теорема 1.8.

$$\mu(\mathbb{R}^\infty_\Lambda) = 1.$$

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Беппо Леви о монотонной сходимости (см. [Колмогоров, Фомин (1981)]) (можно также сослаться на теорему Колмогорова—Хинчина) ряд $\sum x_j^2 \lambda_j^2$ сходится почти всюду на $\mathbb{R}^\infty$. ■

Заметим, далее, что пространство $\mathbb{R}^\infty_\Lambda$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\{x, y\} = \sum_j \lambda_j^2 x_j y_j,$$

и, таким образом, мы можем считать, что мера μ сосредоточена не на $\mathbb{R}^\infty$, а на гильбертовом пространстве $\mathbb{R}^\infty_\Lambda$.

Отметим также, что для конкретного функционального пространства H пространство $\widehat{H}$, как правило, может быть точно описано, см. примеры ниже в замечаниях к § IX.6.

§ 2. Представление Вейля.

2.1. Категория $\overline{\mathbf{Sp}}$. Объект V категории $\overline{\mathbf{Sp}}$ — это прямая сумма $V = V_+ \oplus V_- := H' \oplus H$, где H — гильбертово пространство, а H' — двойственное пространство. Обозначим через I естественный антилинейный оператор, отождествляющий H с H'. Для $h \in H$ линейный функционал Ih мы будем обозначать через $\bar{h}$. Аналогично, для $v \in H'$ мы положим $\bar{v} := I^{-1}v$. Таким образом, в V определен антилинейный оператор «сопряжения»: $(v, h) \mapsto (\bar{h}, \bar{v})$. Снабдим $H' \oplus H$ следующими структурами:

а) эрмитовой знаконеопределенной формой

$$M_V\big((v_1', v_1), (v_2', v_2)\big) = \langle v_1', v_2' \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle;$$

б) кососимметричной билинейной формой

$$L_V\big((v_1', v_1), (v_2', v_2)\big) = v_1'(v_2) - v_2'(v_1).$$

Морфизмом из V в W мы будем называть линейные отношения $P : V \rightrightarrows W$, которые являются графиками операторов

$$S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-,$$

причем матрица $S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$ (*преобразование Потапова* линейного отношения P) удовлетворяет условиям

1. $S(P) = S(P)^t$;
2. $\|S(P)\| \leqslant 1$;
3. $\|A\| < 1$, $\|C\| < 1$;
4. A и C — операторы Гильберта—Шмидта.

Дадим интерпретацию условий 1–3 на языке форм а)–б).

Условие 1 означает, что P является максимальным изотропным подпространством в $V \oplus W$ относительно формы

$$L_{V \oplus W}\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = L_V(v_1, v_2) - L_W(w_1, w_2).$$

Условие 2 означает, что форма

$$M_{V \oplus W}\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = M_V(v_1, v_2) - M_W(w_1, w_2)$$

неотрицательно определена на P.

Условие 3 означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $v \in \operatorname{Ker} P$, $w \in \operatorname{Indef} P$ выполнено

$$M(v, v) \geqslant \varepsilon \|v\|_V^2, \quad M(w, w) \leqslant -\varepsilon \|w\|_W^2$$

(через $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$ обозначены нормы в гильбертовых пространствах V и W).

Что касается условия 4, то оно означает, что P — морфизм категории $\overline{\mathbf{GA}}$.

Морфизмы категории $\overline{\mathbf{Sp}}$ перемножаются как линейные отношения.

Задача. Докажите корректность определения.

Введем в $\overline{\mathbf{Sp}}$ инволюцию, положив, что $P^* \in \operatorname{Mor}(W, V)$ есть ортогональное дополнение до $P \in \operatorname{Mor}(W, V)$ относительно формы $M_{V \oplus W}$ (см. п. V.1.6). Так же, как и в п. V.1.6, из $S(P) = S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & N \end{pmatrix}$ вытекает

$$S(P^*) = S^\sigma := \begin{pmatrix} N^* & \overline{L} \\ L^* & K^* \end{pmatrix}.$$

Замечание. Точно так же можно ввести категории $\overline{\mathbf{U}}$ и $\overline{\mathbf{SO}}^*$.

Пусть $V = V_+ \oplus V_-$ — бесконечномерный объект категории $\overline{\mathbf{Sp}}$. Легко видеть, что группа $\operatorname{Aut}(V)$ состоит из всех операторов $V \to V$ вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

сохраняющих форму L, таких, что Ψ — оператор Гильберта—Шмидта.

Задача. Докажите это. Покажите, что $\operatorname{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Sp}}} = \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$ (определение Aut^* см. в п. II.8.6).

6 Зак. 320

2.2. Векторы $b[T \mid l^t]$. Пусть T — оператор Гильберта—Шмидта $V_- \to V_+$, причем $\|T\| < 1$. Пусть $l \in V_+$. Определим функцию $b[T \mid l^t]$ на V_+ по формуле

$$b[T \mid l^t] = \exp\left\{\tfrac{1}{2} z T z^t + l z^t\right\}$$

(мы, как и раньше, предпочитаем координатную форму записи, см. п. V.4.1).

Предложение 2.1. Функции $b[T \mid l^t]$ содержатся в $F(V_+)$, причем

$$\big\langle b[T \mid m^t], b[R \mid n^t] \big\rangle =$$
$$= \det\Big((1 - T\overline{R})^{-1/2}\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} m & \overline{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{R}(1 - T\overline{R})^{-1} & (1-\overline{R}T)^{-1} \\ (1 - T\overline{R})^{-1} & T(1-\overline{R}T)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^t \\ \overline{n}^t \end{pmatrix}\right\}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть $V_+ = \ell_2$. Рассмотрим сначала случай, когда матрицы T, R и векторы m, n финитны. Тогда проверка формулы (2.2) сводится к вычислению гауссова интеграла, что мы умеем делать (см. формулу (V.4.9)). Далее, заметим, что числовая функция $\Delta(T, R, m, n)$, стоящая в правой части (2.2), непрерывна относительно естественной топологии в ℓ_2 и топологии пространства операторов Гильберта—Шмидта на множестве матриц. Пусть теперь T_j — последовательность финитных матриц, сходящихся к T, а m_j — последовательность финитных векторов, сходящаяся к m. Тогда из соображений непрерывности легко выводится, что последовательность $q_j = b[T_j \mid m_j^t]$ фундаментальна в $F(V_+)$. Действительно,

$$\|q_i - q_j\|^2 = \Delta(T_i, T_i, m_i, m_i) + \Delta(T_j, T_j, m_j, m_j) - 2\,\mathrm{Re}\,\Delta(T_i, T_j, m_i, m_j).$$

В силу непрерывности Δ это выражение стремится к 0 при $i, j \to \infty$.

Итак, последовательность q_j сходится. Пусть q — ее предел. В силу воспроизводящего свойства (1.5) последовательность $q_j(z) = b[T_j \mid m_j^t](z) = \langle q_j, \varphi_z \rangle$ сходится поточечно к $q(z)$, т. е. $q(z) = b[T \mid m^t](z)$, и, тем самым, $b[T \mid m] \in F(V_+)$.

Равенство (2.2) теперь вытекает из соображений непрерывности. Предложение доказано. ∎

Пусть матрица $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям 1—4 из п. 2.1, тогда (см. п. 1.4) определим оператор

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} f(z) = \int K(z, \overline{u}) f(u)\, d\mu(u) := \langle f, k^z \rangle, \quad (2.3)$$

где

$$K(z, \overline{u}) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix}\right\}. \quad (2.4)$$

Предложение 2.2. Оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ корректно определен на векторах вида $b[T \mid l^t]$, при этом

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} b[T \mid l^t] = \det\Big((1 - MT)^{-1/2}\Big) b\Big[K + LT(1-MT)^{-1}L^t \,\Big|\, L(1-TM)^{-1} l^t\Big]. \quad (2.5)$$

Доказательство. Вычисление (2.5) сводится к формуле (2.2) (см. также предложение V.4.6). ∎

Обозначим через $F_0(V_+)$ пространство финитных линейных комбинаций векторов вида $b[T \mid l^t]$.

Как показывает предложение 2.2, оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ является корректно определенным оператором $F_0(V_+) \to F_0(W_+)$.

2.3. Представление Вейля. Поставим в соответствие каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$ пространство $F(V_+)$, а каждому морфизму $P : V \to W$ — линейный оператор $\mathrm{we}(P) = B[S]$, где S — преобразование Потапова—Гинзбурга линейного отношения P.

Теорема 2.3.

а) Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$, а $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$ — их преобразования Потапова. Тогда для любой функции $f \in F_0(V_+)$ выполнено

$$\mathrm{we}(Q)\,\mathrm{we}(P) f = \det\Big((1 - CK)^{-1/2}\Big)\,\mathrm{we}(QP) f. \quad (2.6)$$

б) $P \mapsto \mathrm{we}(P)$ является $*$-представлением категории $\overline{\mathbf{Sp}}$.

в) Пусть $P \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$ является графиком оператора $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ в V. Тогда оператор

$$\Big[\det(\Phi^*\Phi)\Big]^{-1/4}\,\mathrm{we}(P) \quad (2.7)$$

является унитарным.

Доказательство. Понятно, что для любой $f = b[T \mid l^t]$ обе части равенства (2.6) вычисляются явно. Поэтому их можно вычислить и сверить ответы, которые, конечно, совпадают. Мы проведем несколько иное рассуждение в чуть большей общности в § 4.

Утверждение б) достаточно очевидно.

В случае $P \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$ мы имеем $P^* = P^{-1}$, а потому (см. п. 1.8.3) оператор $\mathrm{we}(P)$ унитарен с точностью до умножения на константу. Для вычисления скалярного множителя в (2.7) достаточно вычислить норму гауссовского вектора $\mathrm{we}(P) \cdot 1$, что мы оставляем читателю в качестве упражнения (см. также [Березин (1965)]). ∎

2.4. Замечания.

Задача. Рассмотрим в группе $\mathrm{Aut}(V)$ подгруппу G, состоящую из всех матриц вида $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, где оператор $\Phi - 1$ является ядерным. Докажите, что формула

$$\widetilde{\mathrm{we}}(g) = \pm\det(\Phi)^{-1/2}\,\mathrm{we}(g)$$

задает двузначное унитарное представление группы G, в частности,

$$\widetilde{\mathrm{we}}(g_1)\,\widetilde{\mathrm{we}}(g_2) = \pm\,\widetilde{\mathrm{we}}(g_1 g_2).$$

Замечу, что в $\mathrm{Aut}(V)$ существуют и другие подгруппы, на которых представление Вейля линеаризуется (см. §§ IX.1—IX.2).

2.5. Литературные замечания к главам V–VI. Бозонное пространство Фока действительно введено В. А. Фоком ([Fock (1932)], [Fock (1934)]). Используемая нами функциональная модель предложена Баргманом ([Bargmann (1961)], [Bargmann (1962)]), Березиным ([Березин (1961)], [Березин (1965)]) и И. Сигалом. С точки зрения комплексного анализа пространство Фока — довольно обычный пример гильбертова пространства голоморфных функций, речь идет о стандартной технике, связанной с керн-функцией Бергмана (S. Bergman), см. например, [Шабат (1976)], § 18, или [Hua (1958)].

Вопрос о том, когда было обнаружено «представление Вейля», не лишен забавности. Общепринято мнение (десятки раз повторенное в различных статьях и книгах), что «представление Вейля» было в конечномерном случае построено И. Сигалом ([Segal I. E (1959)]), а в бесконечномерном случае — Д. Шейлом ([Shale (1962)]). Странно, однако, что Березин ([Березин (1965)], [Березин (1969)]) утверждал, что конструкция *в бесконечномерном случае* содержится в книге [Friedrichs (1953)] (которая, кстати, часто цитируется в связи с каноническими коммутационными соотношениями). Книга Фридрихса написана не очень прозрачно, и я видел несколько человек, которые безуспешно пытались найти в ней какие-нибудь следы «представления Вейля». Мне, кстати, однажды удалось это сделать, но повторная попытка, сделанная через несколько лет, успеха не имела. Потом Лундбергу (Lundberg) и мне удалось все же найти это рассуждение, и оно сводится примерно к следующему. Матрица $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ раскладывается в произведение вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и дальше строится оператор we(·) для каждого сомножителя; на нашем языке это значит

$$\mathrm{we}\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} = \lambda B\begin{bmatrix} \overline{\Psi}\Phi^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B\begin{bmatrix} 0 & \Phi \\ \Phi^{t} & 0 \end{bmatrix} B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\Phi^{-1}\Psi \end{bmatrix}.$$

К сожалению, первый и последний сомножители в этом произведении — очень плохие неограниченные операторы, и мне кажется сомнительным, что Фридрихс мог заделать эту зияющую дыру[1]. Однако даже сама постановка вопроса об автоморфизмах канонических коммутационных соотношений в бесконечномерном случае у Фридрихса предполагает понимание того, что «представление Вейля» для групп $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ существует. Первый внятный текст на эту тему был действительно написан И. Сигалом.

Аккуратные тексты о бесконечномерном случае были написаны независимо Шейлом ([Shale (1962)]) и Березиным ([Березин (1961)], [Березин (1965)]). В работе Шейла содержится доказательство теоремы существования, у Березина же была явная и очень удобная конструкция, на которую тогда никто, кажется, не обратил внимания (книга [Березин (1965)] написана четко, но очень сыро), и в последующие 15–20 лет результаты книги [Березин (1965)] постепенно переоткрывались. Что касается А. Вейля, то его работа [Weil (1964)] никакого отношения к открытию «представления Вейля» группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ не имеет, в ней конструкция обобщается на конечные и локальные поля.

В начале 80-х годов в неопубликованной работе Г. И. Ольшанского появился вопрос о полугруппе ВО ограниченных операторов с ядрами вида

$$K(z, \overline{u}) = \exp\left\{\frac{1}{2}(z \;\; \overline{u})\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \overline{u} \end{pmatrix}\right\}.$$

Достаточные условия ограниченности таких операторов (а именно, условия 1–4 из п. 2.1) получаются легко, см. п. V.4.1.

[1] Вообще-то Березин четко различал доказательства и правдоподобные рассуждения, и я не уверен, что источником информации для Березина была именно книга Фридрихса. На одном из стендов механико-математического факультета Московского Университета им. Ломоносова долгое время висела любительская фотография конца 50-х годов с подписью «После лекции профессора Фридрихса». Среди лиц на фотографии — молодой Березин. Кажется правдоподобным, что на фотографии изображен момент, который (с точки зрения специалиста по бесконечномерным группам) является «историческим».

Ольшанский доказал, что упомянутые условия достаточны в $F(\mathbb{C}^n)$ (независимо вопрос об ограниченности этих операторов изучался в [R. Howe (1988)] в вещественной модели) и предположил, что они достаточны и в бесконечномерном случае (контрпример см. в п. 3.1). Вопрос о полугруппе ВО несколько лет обсуждался на семинаре А. А. Кириллова. Осенью 1987 г. Ольшанский, Назаров и я обсудили несколько различных доказательств теоремы ограниченности, которые никак не доводились до полной четкости, и один из этих путей доказательства оказался удачным. Тогда же прояснилась и алгебраическая структура полугруппы ВО (см. [Nazarov, Neretin, Olshanskii (1989)], [Неретин (1990)]). Позднее эта алгебраическая структура в конечномерном случае была переоткрыта Л. Хёрмандером [Hörmander (1994)].

§ 3. *Геометрия симметрических пространств* Sp / U *и теоремы ограниченности операторов* $B[S]$

3.1. Формулировка теорем. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям п. 2.1.

Теорема 3.1. Если операторы K и M — ядерные, то $B[S]$ ограничен. При этом если $B[S]$ самосопряжен, то $\|B(S)\| \leqslant \det(1 - |M|)^{-1/2}$.

Теорема 3.2. Если $\|S\| < 1$, то оператор $B[S]$ ограничен.

Контрпример. Пусть Λ — диагональная матрица с собственными числами λ_j, причем $0 \leqslant \lambda_j < 1$, $\sum \lambda_j^2 < \infty$. Пусть $S = \begin{pmatrix} \Lambda & 1-\Lambda \\ 1-\Lambda & \Lambda \end{pmatrix}$. Тогда

$$\|B[S]\| = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda_i)^{-1/2}.$$

В частности, в случае, когда $\sum \lambda_j = \infty$, оператор $B[S]$ неограничен.

Доказательства теорем 3.1, 3.2 занимают оставшуюся часть параграфа. Используемая для доказательства теоремы 3.2 теорема 3.9 интересна сама по себе.

3.2. Доказательство теоремы 3.1. Прежде всего, заметим, что так же, как и в п. V.4.7, все сводится к самосопряженному случаю. Итак, рассмотрим симметрический оператор $A = B\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} : F(\ell_2) \to F(\ell_2)$. Напомним, что симметричность равносильна условию $K = \overline{M}$, $L = L^*$. Ядро оператора A задается формулой

$$K(z, \overline{u}) = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij} z_i z_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} l_{ij} z_i \overline{u}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty} m_{ij} \overline{u}_i \overline{u}_j\right\}.$$

Рассмотрим последовательность операторов $A_N : F(\ell_2) \to F(\ell_2)$ с ядрами

$$K_N(z, \overline{u}) = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k_{ij} z_i z_j + \sum_{i,j=1}^{N} l_{ij} z_i \overline{u}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij} \overline{u}_i \overline{u}_j\right\}.$$

Обозначим через F_N подпространство в $F(\ell_2)$, состоящее из функций, не зависящих от переменных $z_{N+1}, z_{N+2}, \ldots$. Ясно, что F_N отождествляется с $F(\mathbb{C}^N)$.

Обозначим через P_N проектор на F_N в F. Следующее высказывание очевидно, но оно заслуживает того, чтобы быть сформулированным.

Предложение 3.3. Пусть $Q : F(\ell_2) \to F(\ell_2)$ — оператор с ядром $L(z, \bar{u})$. Тогда ядро оператора $P_m Q P_n$ получается из $L(z, \bar{u})$ подстановкой $z_{m+1} = z_{m+2} = \ldots = 0$, $\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_{n+2} = \ldots = 0$.

Итак,

$$A_N = P_N A P_N. \tag{3.1}$$

Обозначим через A_N^0 ограничение оператора A_N на F_N. Оператор A_N^0 переводит F_N в себя и имеет вид

$$A_N^0 = B \begin{bmatrix} (K)_N & (L)_N \\ (L^t)_N & (M)_N \end{bmatrix},$$

где матрицы $(K)_N$, $(L)_N$, $(M)_N$ — это верхние левые уголки матриц K, L, M размера $N \times N$. При этом $\|A_N\| = \|A_N^0\|$, что ясно из равенства (3.1).

Теперь в силу теоремы 4.14

$$\|A_N\| = \|A_N^0\| \leqslant \det\bigl(1 - |(M)_N|\bigr)^{-1/2} = \det\left(1 - \begin{pmatrix} |(M)_N| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1/2}.$$

Далее, так как $A_N = P_N A_{N+1} P_N$, то последовательность $\|A_N\|$ является монотонно возрастающей. С другой стороны, функция $\gamma(X) = \det(1 - |X|)^{-1/2}$ непрерывна в ядерной топологии, поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \|A_N\| \leqslant \lim_{N\to\infty} \det\bigl(1 - |(M)_N|\bigr) = \det\bigl(1 - |M|\bigr)^{-1/2}.$$

Учитывая равенство (3.1) и критерий слабой сходимости (см. I.4.1), мы получаем, что A ограничен. Поэтому $\|A\| \leqslant \det\bigl(1 - |M|\bigr)^{-1/2}$, а $A_N \to A$ слабо.

3.3. Сложное расстояние. Для доказательства теоремы 3.2 нам придется обсудить геометрию матричных шаров.

Итак, пусть V — гильбертово пространство, V' — двойственное пространство. Обозначим через $\mathscr{K}(V)$ множество симметрических операторов Гильберта—Шмидта $V' \to V$ с нормой < 1. Напомним, что каждой точке $T \in \mathscr{K}(V)$ мы ставили в соответствие подпространство в $V \oplus V'$ — график оператора T. Таким образом, $\mathscr{K}(V)$ отождествляется с множеством $\mathscr{L}(V) := \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(0, V \oplus V')$.

Напомним, что пространство $V \oplus V'$ снабжено двумя формами, симплектической и эрмитовой, причем подпространство $R \in \mathscr{L}(V)$ является лангранжевым относительно симплектической формы L, а эрмитова форма M на нем положительно определена.

Пусть $R_1, R_2 \in \mathscr{L}(V)$, а $T_1, T_2 \in \mathscr{K}(V)$ — их угловые операторы. Выберем в R_1 и R_2 по ортонормированному относительно формы $(-M(\cdot\,,\cdot))$ базису e_1, $e_2, \ldots$ и f_1, $f_2, \ldots$ и составим матрицу Σ с матричными элементами $s_{ij} = -M(e_i, f_j)$. При замене базисов e_i и f_j матрица Σ преобразуется в некоторую другую матрицу вида $U_1 \Sigma U_2$, где U_1 и U_2 унитарны. Таким образом, сингулярные числа матрицы Σ определяются лишь подпространствами R_1 и R_2 и не зависят от выбора базисов e_i, f_j (напомним, что *сингулярные числа* матрицы A — это, по определению, собственные числа матрицы $\sqrt{A^* A} = |A|$).

Вычислим явно матрицу Σ через угловые операторы T_1 и T_2. Прежде всего, заметим, что отображения

$$a_k : v \mapsto \Bigl(T_k(1 - T_k^* T_k)^{-1/2} v,\ (1 - T_k^* T_k)^{-1/2} v\Bigr)$$

из V' в R_k (где $k = 1, 2$) являются унитарными относительно формы $(-M(\cdot\,,\cdot))$. Далее,

$$\begin{aligned} -M\langle a_1 v, a_2 w\rangle &= -\Bigl\langle T_1(E - T_1^* T_1)^{-1/2} v, T_2(E - T_2^* T_2)^{-1/2} w\Bigr\rangle + \\ &\quad + \Bigl\langle (E - T_1^* T_1)^{-1/2} v, (E - T_2^* T_2)^{-1/2} w\Bigr\rangle = \\ &= \Bigl\langle (E - T_2^* T_2)^{-1/2}(E - T_2^* T_1)(E - T_1^* T_1)^{-1/2} v, w\Bigr\rangle. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Sigma = (E - T_2^* T_2)^{-1/2}(E - T_2^* T_1)(E - T_1^* T_1)^{-1/2} \tag{3.2}$$

Кстати, матрица $\Sigma^*\Sigma - E$ является ядерной, и потому мы с полным правом можем говорить о сингулярных числах матрицы Σ.

Замечание. Если мы точно так же определим матрицу Σ для двух подпространств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, то сингулярные числа матрицы Σ — это в точности числа $\cos\varphi_i$, где φ_1, $\varphi_2, \ldots$ — *углы* (в смысле Жордана) между подпространствами R_1 и R_2.

Обозначим через arch гиперболический арккосинус:

$$\operatorname{arch} x = \ln\Bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\Bigr),$$

где $x \geqslant 1$. Напомним, что $y = \operatorname{arch} x$ равносильно $x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \operatorname{ch} y$.

Сложным расстоянием между R_1 и R_2 мы назовем упорядоченный набор чисел

$$\varphi_j = \operatorname{arch} \sigma_j, \tag{3.3}$$

где $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots$ — сингулярные числа матрицы Σ.

Лемма 3.4.

а) $\varphi_j \geqslant 0$.

б) Если $g \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V \oplus V')$, то $\varphi_j(gR_1, gR_2) = \varphi_j(R_1, R_2)$.

Доказательство. Второе высказывание очевидно. Что касается первого, то нужно доказать неравенство $\sigma_j \geqslant 1$. В силу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$-инвариантности и того, что $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$ действует на $\mathscr{L}(V) \simeq \mathscr{K}(V)$ транзитивно (доказательство транзитивности см. в п. IV.2.2), мы можем без ограничения общности считать, что $T_1 = 0$, тогда $\Sigma = (E - T_2^* T_2)^{-1/2} \geqslant E$, и утверждение становится очевидным. ∎

3.4. Риманова метрика. Введем в матричном шаре $\mathscr{K}(V)$ в случае $\dim V < \infty$ более привычные геометрические структуры. Прежде всего, ведем две римановых метрики

$$\begin{aligned} (ds_1)^2 &= \operatorname{tr}(dT^* dT), \\ (ds_2)^2 &= \operatorname{tr}\bigl\{(E - T^*T)^{-1/2} dT^* (E - TT^*)^{-1} dT (E - T^*T)^{-1/2}\bigr\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Замечание. Мы считаем, что
$$dT = \begin{pmatrix} dt_{11} & dt_{12} & \dots \\ dt_{21} & dt_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, первой метрике отвечает расстояние
$$\rho_1(T_1, T_2) = \left(\operatorname{tr}(T_1 - T_2)^*(T_1 - T_2)\right)^{1/2}.$$

Задача. Проверьте, что риманова метрика $(ds_2)^2$ является $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-инвариантной.

Теорема 3.5. Расстояние, соответствующее римановой метрике $(ds_2)^2$, задается формулой
$$\rho_2(T_1, T_2) = \frac{1}{4}\left(\sum \varphi_j^2\right)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Доказательство. См. [Klingen (1956)]. ■

Лемма 3.6. Риманова метрика ds_2^2 мажорирует риманову метрику ds_1^2.

Следствие 3.7.
$$\rho_1(T_1, T_2) \leqslant \rho_2(T_1, T_2). \tag{3.6}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ — диагональная матрица, причем $\lambda_i < 1$ (потому что обе метрики инвариантны относительно преобразований вида $T \mapsto UTU^t$, где U — унитарная матрица, а любая матрица T этими преобразованиями приводится к диагональному виду). Тогда в этой точке
$$(ds_2)^2 = \sum \frac{dt_{ij} d\bar{t}_{ij}}{(1 - \lambda_i^2)(1 - \lambda_j^2)} \geqslant \sum dt_{ij}\, d\bar{t}_{ij} = (ds_1)^2.$$
■

Пусть теперь V бесконечномерно. Очевидно, что метрика ρ_1 корректно определена на $\mathscr{X}(V)$. Чуть менее очевидно, что на $\mathscr{X}(V)$ определена метрика ρ_2, причем функция $\rho_2(T_1, T_2)$ непрерывна относительно гильберт-шмидтовской топологии. Далее, из соображений непрерывности неравенство (3.6) остается в силе и в бесконечномерном случае (кстати, из тех же соображений непрерывности для метрики ρ_2 выполнено неравенство треугольника).

3.5. Полнота шара.

Предложение 3.8. Шар $\mathscr{X}(V)$ полон относительно метрики ρ_2.

Доказательство. Заметим, что
$$\rho_2(0, S) = \left(\sum \operatorname{arch}^2\left(1 - |\mu_i|^2\right)^{-1}\right)^{1/2},$$

где μ_i — сингулярные числа матрицы S. Оставляя в $\sum \operatorname{arch}^2(\dots)$ лишь самое большое слагаемое, мы получаем, что
$$\rho_2(0, S) \geqslant \operatorname{arch}\left(1 - \|S\|^2\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

Пусть $T_1, T_2, \dots$ — последовательность, фундаментальная относительно метрики ρ_2. Тогда, в силу неравенства (3.6), она фундаментальна относительно метрики ρ_1. Пусть T — ее предел относительно метрики ρ_1. Последовательность T_j фундаментальна, а следовательно, и ограничена по метрике ρ_2. В силу неравенства (3.7) для некоторого ε выполнено $\|T_j\| \leqslant 1 - \varepsilon$ для всех j. Следовательно, $\|T\| \leqslant 1 - \varepsilon$, а значит, $T \in \mathscr{X}(V)$.

Пусть, далее, $g \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V \oplus V')$ переводит T в 0, пусть $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ — матрица этого оператора. Легко видеть, что отображение
$$g : S \to (\Phi S + \Psi)(\overline{\Psi} S + \overline{\Phi})^{-1} = (\Phi S + \Psi)\overline{\Phi}^{-1}(\overline{\Psi} S \overline{\Phi}^{-1} + 1)^{-1}$$
из $\mathscr{X}(V)$ в $\mathscr{X}(V)$ непрерывно относительно гильберт-шмидтовской топологии. Поэтому $gT_i \to 0$ по гильберт-шмидтовской норме. Но тогда $\rho_2(gT_i, 0) \to 0$ в силу непрерывности функции ρ_2 относительно гильберт-шмидтовской топологии. Далее, в силу инвариантности метрики ρ_2 последовательность $g^{-1}(gT_i) = T_i$ сходится в смысле метрики ρ_2 к $g^{-1}(0) = T$, что и требовалось доказать. ■

3.6. Теорема о сжатии.

Теорема 3.9. Пусть $r \in \mathrm{Mor}(V, W)$, а $P_1, P_2 \in \mathscr{L}(V)$. Тогда для всех j выполнено
$$\varphi_j(rP_1, rP_2) \leqslant \varphi_j(P_1, P_2).$$

Следствие 3.10. $\rho_2(rP_1, rP_2) \leqslant \rho_2(P_1, P_2)$.

Доказательство. Пусть $A : H_1 \to H_2$ — некоторый оператор, а $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$ — его сингулярные числа. Тогда
$$\lambda_j = \max_{\substack{L \subset H_1 \\ \dim L = j}} \ \min_{\substack{x \in L; \\ \|x\| = 1}} \ \max_{\substack{y \in H_2; \\ \|y\| = 1}} |\langle Ax, y \rangle|,$$
где L пробегает все j-мерные подпространства в H_1. Пусть $P_1, P_2 \in \mathscr{L}(V)$. Пусть σ_j — те же, что и выше (см. п. 3.3). Тогда
$$\sigma_j = \max_{\substack{L \subset P_2 \\ \dim L = j}} \ \min_{\substack{x \in L \\ M(x,x) = -1}} \ \max_{\substack{y \in P_1 \\ M(y,y) = -1}} |-M(x, y)| =$$
$$= \max_{\substack{L \subset P_2 \\ \dim L = j}} \ \min_{\substack{x \in L \\ x \neq 0}} \ \max_{\substack{y \in P_1 \\ y \neq 0}} \left| \frac{-M(x, y)}{\sqrt{M(x, x) M(y, y)}} \right|.$$

Нам нужно доказать, что эта величина уменьшается при действии $r \in \mathrm{Mor}(V, W)$. Учитывая, что $\sigma_j \geqslant 1$ мы можем ограничиться лишь парами x, y такими, что
$$\sigma(x, y) = \left| \frac{-M(x, y)}{\sqrt{M(x, x) M(y, y)}} \right| > 1, \tag{3.8}$$

что возможно лишь в случае, когда форма M знаконеопределена на плоскости, натянутой на векторы $x \in P_2$, $y \in P_1$. Теперь теорема следует из следующей леммы.

Лемма 3.11. Пусть $(x, x'), (y, y') \in r$, причем форма M_V знаконеопределена на плоскости Φ, натянутой на (x, y). Тогда

$$\left|\frac{-M_V(x,y)}{\sqrt{M_V(x,x)M_V(y,y)}}\right| \geqslant \left|\frac{-M_W(x',y')}{\sqrt{M_W(x',x')M_W(y',y')}}\right|$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что M_W знаконеопределена на плоскости Φ', натянутой на x', y'. Линейное отношение r, ограниченное на Φ, является графиком линейного оператора $A : \Phi \to \Phi'$, причем для любого $\varphi \in \Phi$ выполнено $-M_W(A\varphi, A\varphi) \geqslant -M_W(\varphi, \varphi)$.

Теперь мы можем отождествить пространства Φ и Φ' с формами $-M_V$ и $-M_W$ с пространством $\mathbb{C}^2$, снабженным эрмитовой формой

$$\big\langle (z_1, z_2), (z_1', z_2') \big\rangle = z_1\bar{z}_1' - z_2\bar{z}_2'.$$

Далее, рассмотрим в проективном пространстве $\mathbb{C}P^1$ (т.е. в пространстве прямых в $\mathbb{C}^2$ проходящих через 0) область D, состоящую из прямых, на которых форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ положительно определена. Такие прямые l_λ задаются уравнениями вида $z_2 = \lambda z_1$, где $|\lambda| < 1$, т.е. область D отождествляется с единичным кругом. Оператор A индуцирует дробно-линейное отображение вида

$$\lambda \mapsto \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \tag{3.9}$$

круга D в себя. Далее, выражение $\sigma(x, y)$, задаваемое формулой (3.8), зависит не от векторов x и y, а только от содержащих их прямых. Тем самым, σ определяет функцию на D

$$\sigma(\lambda, \mu) = \frac{|1 - \lambda\mu|}{\sqrt{\big(1 - |\lambda|^2\big)\big(1 - |\mu|^2\big)}},$$

а выражение $\rho(\lambda, \mu) := \operatorname{arch} \sigma(\lambda, \mu)$ — это не что иное, как $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-инвариантная метрика Пуанкаре на D.

Мы хотим доказать, что отображение (3.9) не увеличивает расстояния ρ. Из соображений непрерывности мы можем обойтись отображениями, переводящими круг $|\lambda| < 1$ в некоторый круг вида $|\lambda| < 1 - \varepsilon$. Любое такое отображение представимо в виде $g_1 h g_2$, где $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, а h — отображение вида $\lambda \to \alpha\lambda$, где $0 < \alpha < 1$.

Задача. Докажите это.

Указание. См. п. V.1.7.A или [Ольшанский (1981)].

Элементы g_1 и g_2 сохраняют метрику ρ. Отображение $\lambda \mapsto \alpha\lambda$, как легко видеть, сжимает риманову метрику $\frac{d\lambda^2}{1-|\lambda|^2}$, соответствующую расстоянию ρ, а значит, сжимает и саму метрику ρ. Лемма доказана. ■

3.7. Доказательство теоремы 3.2. Итак, пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$, $\|S\| < 1$. Как и в п. V.4.9, мы сводим задачу к симметричному случаю. Теперь (см. п. V.4.10) нам достаточно доказать, что обобщенно дробно-линейное (см. § 5.2) отображение $\tau[S] : \mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(V)$ имеет неподвижную точку. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда

$$\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} K & \frac{1}{1-\varepsilon}L \\ \frac{1}{1-\varepsilon}L^t & \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}M \end{pmatrix} \tau\begin{pmatrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Первый сомножитель в правой части (3.10) не увеличивает расстояние. Второй сомножитель имеет вид

$$\tau\begin{pmatrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{pmatrix} : T \mapsto (1-\varepsilon)^2 T,$$

и нам осталось доказать следующую лемму.

Лемма 3.12. Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда отображение $T \mapsto \alpha T$ из $\mathscr{X}(V)$ в $\mathscr{X}(V)$ является сжимающим в метрике ρ_2, более того,

$$\rho_2(\alpha T_1, \alpha T_2) \leqslant \alpha \rho_2(T_1, T_2).$$

Доказательство. Из соображений непрерывности нам достаточно доказать это утверждение в случае, когда матрицы T_1 и T_2 финитны. Поэтому нам достаточно доказать утверждение для случая $\dim V < \infty$, а в этом случае мы можем провести проверку на уровне римановых метрик.

Итак, пусть $T \in \mathscr{X}(V)$, а ΔT — касательный вектор в точке T. Квадрат длины ΔT равен

$$l_1^2 = \operatorname{tr}\big\{(E - T^*T)^{-1/2}(\Delta T)^*(1 - TT^*)^{-1}(\Delta T)(E - T^*T)^{-1/2}\big\}.$$

Квадрат длины вектора ΔT, перенесенного с помощью отображения $T \to \alpha T$, равен

$$l_2^2 = \operatorname{tr}\Big\{\big(E - \alpha^2 T^*T\big)^{-1/2}(\alpha\Delta T)^*\big(E - \alpha^2 TT^*\big)^{-1}(\alpha\Delta T)\big(E - \alpha^2 T^*T\big)^{-1/2}\Big\}.$$

Выражения l_1^2 и l_2^2 остаются инвариантными при преобразованиях вида $T \mapsto UTU^t$, где U — унитарная матрица. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что матрица T диагональна. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$l_1^2 = \sum \frac{|\Delta t_{ij}|^2}{(1 - \lambda_i^2)(1 - \lambda_j^2)},$$

$$l_2^2 = \alpha^2 \sum \frac{|\Delta t_{ij}|^2}{(1 - \alpha^2\lambda_i^2)(1 - \alpha^2\lambda_j^2)},$$

и теперь неравенство $l_2^2 \leqslant \alpha^2 l_1^2$ очевидно. ■

3.8. Обсуждение контрпримера из п. 3.1. Мы будем кратки и предоставим детали читателю. Наш оператор $B[S]$ разлагается в тензорное произведение операторов вида $A_j = B\begin{bmatrix} \lambda_j & 1-\lambda_j \\ 1-\lambda_j & \lambda_j \end{bmatrix}$. Поэтому $\|B[S]\| = \prod_{j=1}^{\infty} \|A_j\|$. Покажем, что

$$\|A_j\| = (1-\lambda_j)^{-1/2}.$$

Преобразование

$$z \mapsto \lambda_j + (1-\lambda_j)(1-\lambda_j z)^{-1}(1-\lambda_j)$$

единичного круга $D : |z| < 1$ в себя имеет неподвижную точку $z = 1$, которая не лежит в D. Формула (V.4.20) формально дает $\|A_j\| = (1-\lambda_j)^{-1/2}$, однако ее применение некорректно.

Пусть, далее, $x \in \mathbb{R}$ и

$$\theta_x(z) = b[1 \mid x] = \exp\left(\frac{z^2}{2} + zx\right) \notin F(\mathbb{C}^1).$$

Формальное вычисление с помощью (V.4.10) дает

$$A_j\theta_x = (1-\lambda_j)^{-1/2} e^{-(1-\lambda_j)x^2}\theta_x.$$

Далее делаем интегральное преобразование из $F(\mathbb{C}^1)$ в пространство L^2 на $\mathbb{R}$ по гауссовой мере с плотностью $e^{-x^2/2}$:

$$I : f \mapsto \int f(z) \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{2} + x\bar{z}\right) d\mu(z).$$

Этот оператор является унитарным, а IA_jI^{-1} — это оператор умножения на функцию $(1-\lambda_j)^{-1/2}e^{-(1-\lambda_j)x^2}$, и теперь с его нормой все ясно (см. также п. 1.9.D).

3.9. Замечания. Геометрия.

Задача. Пусть $\dim V < \infty$. Пусть $T_1, T_2, S_1, S_2 \in \mathscr{X}(V)$, причем

$$\varphi_j(T_1, T_2) = \varphi_j(S_1, S_2)$$

для всех j. Покажите, что существует $g \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V)$ такое, что

$$\tau(g)T_1 = S_1, \quad \tau(g)T_2 = S_2.$$

Задача. Покажите, что

$$\varphi_j(T_1, T_2) = \varphi_j(T_2, T_1).$$

Задача*. Докажите, что формула

$$\rho_p(T_1, T_2) = \sqrt[p]{\sum \varphi_j(T_1, T_2)^p} \tag{3.11}$$

задает метрику в $\mathscr{X}(V)$ для всех $p \geqslant 1$.

Теорема 3.13. Пусть $p(s_1, \ldots, s_n)$ — норма в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно перестановок координат и изменения направлений осей ($n = \frac{1}{2}\dim V$). Тогда формула

$$\rho(T_1, T_2) = p\big(\varphi_1(T_1, T_2), \ldots, \varphi_n(T_1, T_n)\big)$$

задает метрику в $\mathscr{X}(V)$.

Задача. Пусть $\dim V < \infty$, $T \in \mathscr{X}(V)$, а dT — касательный вектор в точке T. Пусть группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V)$ действует на парах (T, dT). Покажите, что единственным инвариантом пары (T, dT) является набор собственных чисел матрицы

$$(1 - T^*T)^{-1/2} dT^* (1 - TT^*)^{-1} dT (1 - T^*T)^{-1/2}.$$

Задача.

а) Покажите, что кривые вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{arth}(\lambda_1 t) & & \\ & \operatorname{arth}(\lambda_2 t) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \in Z(V) \tag{3.12}$$

(где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$) являются геодезическими относительно римановой метрики $(ds_2)^2$ (см. [Hua Loo Keng (1958)]).

б) Докажите, что для любых трех последовательных точек A_1, A_2, A_3 на кривой (3.12) выполнено

$$\varphi_j(A_1, A_2) + \varphi_j(A_2, A_3) = \varphi_j(A_1, A_3)$$

для всех j.

Целое расстояние в $\mathscr{X}(V)$ определяется формулой

$$n(T_1, T_2) = rk(T_1 - T_2).$$

Задача.

а) Покажите, что $n(\cdot\,,\cdot)$ действительно является метрикой.

б) Покажите, что $n(T_1, T_2)$ совпадает с числом ненулевых элементов в наборе $\varphi_j(T_1, T_2)$.

Сформулируем теорему, обратную к теореме о сжатии.

Теорема 3.14. Пусть $f : \mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(W)$ — голоморфное отображение такое, что

а) для всех T_1, T_2 выполнено

$$n(f(T_1), f(T_2)) \leqslant n(T_1, T_2);$$

б) существуют точки $T_1, T_2 \in \mathscr{X}(V)$ такие, что $n(T_1, T_2) > 1$.

Тогда f — обобщенно дробно-линейное отображение.

Задача.** Даны три точки T_1, T_2, T_3. Каким неравенствам удовлетворяют наборы чисел $\varphi_j(T_1, T_2), \varphi_j(T_2, T_3), \varphi_j(T_1, T_3)$? (решение неизвестно; вопрос близок к классической гипотезе Хорна (Horn) о спектре суммы двух эрмитовых матриц, недавно доказанной Клячко, см. [Klyachko (1996)]; по-видимому, ответ должен даваться на языке последовательностей Литтлвуда—Ричардсона, см. [Macdonald (1979)]).

§ 4. Аффинная симплектическая категория

4.1. Аффинные отношения. Пусть H_1 — линейное пространство. *Аффинным подпространством* $L \subset H$ мы назовем множество всех векторов в H вида $a+l$, где a — фиксированный вектор, а l пробегает некоторое линейное подпространство $R \subset H$. Подпространство R мы будем называть *направляющим подпространством* аффинного подпространства L.

Пусть V, W — линейные пространства. *Аффинным отношением* $V \rightrightarrows W$ мы назовем аффинное подпространство в $V \oplus W$. Если $P : V \rightrightarrows W$, $Q : W \rightrightarrows Y$ — аффинные отношения, то определено их произведение — аффинное отношение $QP : V \rightrightarrows Y$, а именно: $(v, y) \in QP$, если существует $w \in W$ такой, что $(v, w) \in P$, $(w, y) \in Q$.

4.2. Аффинная симплектическая категория. Объекты категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ такие же, как у $\overline{\mathbf{Sp}}$. Морфизмы категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ из V в W — это аффинные подпространства в пространстве $V \oplus W$, направляющие подпространства которых являются морфизмами категории $\overline{\mathbf{Sp}}$. Морфизмы умножаются как аффинные отношения.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$ а P° — его направляющее подпространство. Проекция P° на $W_- \oplus V_+$ вдоль $W_+ \oplus V_-$ есть все $W_- \oplus V_+$, поэтому P является графиком неоднородного линейного отображения $W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-$

$$\begin{cases} w_+ = Kw_- + Lv_+ + \varkappa^t, \\ v_- = L^t w_- + Mv_+ + \lambda^t, \end{cases}$$

где $\varkappa^t \in W_+$, $\lambda^t \in V_-$, а $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — преобразование Потапова для P°. Итак, каждому морфизму P мы можем поставить в соответствие матрицу

$$(S \mid l^t)(P) = \left(\begin{array}{cc|c} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{array}\right),$$

которую мы по-прежнему будем называть *преобразованием Потапова* морфизма P.

Предложение 4.1. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(W, Y)$, а $\left(\begin{array}{cc|c} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{cc|c} A & B & \alpha^t \\ B^t & C & \sigma^t \end{array}\right)$ — их преобразования Потапова. Тогда преобразование Потапова произведения QP равно

$$\left(S(Q^\circ P^\circ) \,\middle|\, \begin{array}{l} B(1-KC)^{-1}(K\sigma^t + \varkappa^t) + \alpha^t \\ L^t(1-CK)^{-1}(C\varkappa^t + \sigma^t) + \lambda^t \end{array} \right), \tag{4.1}$$

где $S(Q^\circ P^\circ)$ — преобразование Потапова линейного отношения $Q^\circ P^\circ$.

Доказательство. Итак,

$$\begin{cases} w_+ = Kw_- + Lv_+ + \varkappa^t, \\ v_- = L^t w_- + Mv_+ + \lambda^t, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_+ = Ay_- + Bw_+ + \alpha^t, \\ w_- = B^t y_- + Cw_+ + \sigma^t. \end{cases}$$

Исключая переменные w_+ и w_- из первого уравнения первой системы и второго уравнения второй системы, приходим к

$$w_+ = (1-KC)^{-1}\big(KB^t y_- + Lv_+ + K\sigma^t + \varkappa^t\big),$$
$$w_- = (1-CK)^{-1}\big(B^t y_- + CLv_+ + C\varkappa^t + \sigma^t\big);$$

подставляя их в два оставшихся уравнения, получаем (4.1). ■

Определим инволюцию в категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ по следующему правилу: если

$$(S \mid l^t)(P) = \left(\begin{array}{cc|c} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{array}\right),$$

то

$$(S \mid l^t)(P^*) = \left(\begin{array}{cc|c} M^* & \overline{L} & \overline{\lambda} \\ L^* & K^* & \overline{\varkappa}^t \end{array}\right).$$

4.3. Группа $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$. Легко понять, что $P \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$ содержится в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$, если его направляющее подпространство P° содержится в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$. Таким образом, группа $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$ состоит из преобразований вида

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_+ \\ h_- \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$.

Группа $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$, в частности, содержит группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$, а также группу параллельных переносов в V.

Подгруппа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V) \subset \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$ (см. п. II.8.6) состоит из преобразований вида (4.2), удовлетворяющих условию $h_+ = \overline{h}_-$. Эта группа и ее «представление Вейля» — хорошо известные объекты (см. [Березин (1965)]).

4.4. Представление Вейля категории $\overline{\mathbf{Spa}}$. Каждому объекту V категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ мы поставим в соответствие пространство $F(V_+)$. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$, а $\left[\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right]$ — его преобразование Потапова. Поставим элементу P в соответствие оператор

$$\widetilde{\mathrm{we}}(P) = B\left[\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right] : F_0(V_+) \to F_0(W_+)$$

с ядром

$$K(z, \overline{u}) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}(z \;\; \overline{u}) \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + (l \;\; m) \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix}\right\} \tag{4.3}$$

(определение пространства $F_0(H)$ см. в п. 2.2).

Теорема 4.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$, а $\left(\begin{array}{cc|c} K & L & l \\ L^t & M & m \end{array}\right)$ — его преобразование Потапова. Тогда

$$B\left[\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right] b[A \mid \alpha] =$$
$$= c(M, A, m, \alpha) b\left[K + LA(1-MA)^{-1}L^t \,\middle|\, l^t + L(1-AM)^{-1}(\alpha^t + Am^t)\right],$$

где

$$c(M, A, m, \alpha) = \det\big((1-MA)^{-1/2}\big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha \;\; m) \begin{pmatrix} -A & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^t \\ m^t \end{pmatrix}\right\}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Напомним, что оператор восстанавливается по ядру с помощью формулы (1.7). Теперь все сводится к предложению 2.1. ■

Итак, операторы $\widetilde{\mathrm{we}}(P)$ корректно определены как операторы $F_0(V_+) \to F_0(W_+)$.

Теорема 4.3.

а) $\widetilde{\mathrm{we}}(\cdot)$ является представлением категории $\overline{\mathbf{Spa}}$. Более точно, пусть $P : V \to W$, $Q : W \to Y$ — морфизмы категории $\overline{\mathbf{Spa}}$, а

$$\left(\begin{array}{cc|c} A & B & \alpha^t \\ B^t & C & \beta^t \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right)$$

— их преобразования Потапова. Тогда для любого $f \in F_0(V_+)$ выполнено

$$\widetilde{\mathrm{we}}(Q)\,\widetilde{\mathrm{we}}(P)f = c(M, A, m, \alpha)\,\widetilde{\mathrm{we}}(QP)f,$$

где $c(\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$ задается формулой (4.4).

б) $\widetilde{\mathrm{we}}$ является $*$-представлением, т.е. для любых $f \in F_0(V_+)$, $g \in F_0(W_+)$ выполнено

$$\langle \widetilde{\mathrm{we}}(P)f, g\rangle = \langle f, \widetilde{\mathrm{we}}(P^*)g\rangle.$$

Доказательство. Докажем а). Вычисление свертки ядер по формуле (1.9) с помощью предложения 2.1 даст именно такой ответ.

К сожалению, корректность подобного вычисления может вызвать сомнения. Перейдем к аккуратному доказательству. Нам нужно проверить равенство

$$B\begin{bmatrix} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{bmatrix}\left(B\begin{bmatrix} A & B & \alpha^t \\ B^t & C & \beta^t \end{bmatrix} b[T \mid \tau^t]\right) = \left(B\begin{bmatrix} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{bmatrix} B\begin{bmatrix} A & B & \alpha^t \\ B^t & C & \beta^t \end{bmatrix}\right) b[T \mid \tau^t], \quad (4.5)$$

где под произведением операторов в правой части понимается оператор с формально вычисленным ядром.

Предположим, что мы вычислили левую и правую часть. Тогда должно получаться какое-то равенство вида

$$\det(\Phi^{-1/2}) \exp(f)\, b[F \mid \varphi^t] = \det(\Pi^{-1/2}) \exp(p)\, b[P \mid \pi^t]. \quad (4.6)$$

Конечно, равенства

$$\det(\Phi^{-1/2}) = \det(\Pi^{-1/2}), \quad f = p, \quad F = P, \quad \varphi^t = \pi^t$$

можно проверить прямым вычислением. Однако выписывание соответствующих формул заняло бы слишком много места, поэтому мы предпочтем обходной путь.

Проверим сначала равенство $(F \mid \varphi^t) = (P \mid \pi^t)$. Для этого заметим, что матрица $(T \mid \tau^t)$ является преобразованием Потапова некоторого морфизма $R \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(0, V)$. При этом

$$\mathrm{we}(R)\cdot 1 = b[T \mid \tau^t].$$

Далее, легко видеть, что $(F \mid \varphi^t)$ есть преобразование Потапова от $Q(PR)$, а $(P \mid \pi^t)$ — преобразование Потапова для $(QP)R$. Но равенство $Q(PR) = (QP)R$ очевидно.

Осталось проверить совпадение числовых множителей перед $b[\cdot \mid \cdot]$ в (4.6). Прежде всего, заметим, что если матрицы K, L, M, A, B, C, T и векторы $\varkappa, \lambda, \alpha, \beta, \tau$ финитны, то вопрос сводится к вопросу о смене порядка интегрирования в интеграле по конечномерному пространству в (V.4.15) (см. доказательство теоремы V.4.7). Перестановку порядка интегрирования можно провести при ограничении

$$\left\| \begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix} \right\| < 1, \quad \left\| \begin{matrix} A & B \\ B^t & C \end{matrix} \right\| < 1,$$

а соображения непрерывности позволяют снять это ограничение.

Хотелось бы так же просто провести переход от финитных матриц и векторов к произвольным. Рассмотрим функции

$$h(K, L, M, A, B, C, T) := \det(\Phi^{-1/2}) =$$
$$= \det\Big(1 - M(A + BT(1 - CT)^{-1})B^t\Big)^{-1/2} \times$$
$$\times \det(1 - CT)^{-1/2},$$
$$g(K, L, M, A, B, C, T) := \det(\Pi^{-1/2}) =$$
$$= \ldots,$$

$$f(K, L, M, A, B, C, T, \varkappa, \lambda, \alpha, \beta, \tau) = \exp\left\{\tfrac12 (\tau \;\; \beta) \begin{pmatrix} -T & 1 \\ 1 & -C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tau^t \\ \beta^t \end{pmatrix}\right\} \times \quad (4.7)$$
$$\times \exp\Big\{\tfrac12 \Big(\big(\alpha + (\tau + \beta T)(1 - CT)^{-1}B^t\big) \quad \lambda\Big) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} -(A + BT(1 - CT)^{-1}B^t) & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} B(1 - TC)^{-1}(\tau^t + T\beta^t) + \alpha^t \\ \lambda^t \end{pmatrix}\Big\},$$

$$p(K, L, M, A, B, C, T, \varkappa, \lambda, \alpha, \beta, \tau) = \ldots .$$

Было бы естественно ввести на векторах $\varkappa$, λ, α, β, τ обычную топологию гильбертова пространства, на матрицах K, L, M, A, B, C, T — топологию пространства операторов Гильберта—Шмидта, а на матрицах C, B — слабую топологию. К сожалению, функции $h(\ldots)$, $g(\ldots)$, $f(\ldots)$, $p(\ldots)$ тогда не будут непрерывными, и соображения, связанные с предельным переходом, тут требуют большей аккуратности.

Обозначим через P_n проектор на подпространство, натянутое на первые n базисных векторов. Несложно проверить, что

$$h\big(P_nKP_n, P_nLP_n, P_nMP_n, P_nAP_n, P_nBP_n, P_nCP_n\big) \to h(K, L, M, A, B, C), \quad (4.8)$$

а также аналогичные сходимости для функций g, f, p. Проверка основывается на следующей лемме.

Лемма 4.4. Пусть B — ограниченный оператор, а X — оператор Гильберта—Шмидта. Тогда

$$P_nBP_nXP_n \to BX, \quad P_nXP_nBP_n \to XB$$

в топологии пространства операторов Гильберта—Шмидта.

Доказательство. Запишем B и X как блочные матрицы размера $(\alpha + \beta + \infty) \times (\alpha + \beta + \infty)$. Тогда

$$BX - P_{\alpha+\beta}BP_{\alpha+\beta}XP_{\alpha+\beta} =$$
$$= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & B_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} B_{13}X_{31} & B_{13}X_{32} & B_{11}X_{13}+B_{12}X_{23}+B_{13}X_{33} \\ B_{23}X_{31} & B_{23}X_{22} & B_{21}X_{13}+B_{22}X_{23}+B_{23}X_{33} \\ B_{31}X_{11}+B_{32}X_{21}+B_{33}X_{31} & B_{31}X_{12}+B_{32}X_{22}+B_{33}X_{32} & B_{31}X_{13}+B_{32}X_{23}+B_{33}X_{33} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Выберем α так, чтобы все блоки X, кроме X_{11}, были очень малы по гильберт-шмидтовской норме. После этого мы можем выбрать β так, чтобы B_{31} и B_{13} были очень малы по равномерной норме. Теперь разность (4.9) становится очень малой по гильберт-шмидтовской норме. Лемма доказана. ■

Следствие 4.5. Пусть B — ограниченный оператор, а Q_n, Q — операторы Гильберта—Шмидта, причем $Q_n \to Q$ по гильберт-шмидтовской норме. Тогда $P_nBP_nQ_nP_n \to BQ$ по гильберт-шмидтовской норме.

Доказательство.

$$BQ - P_nBP_nQ_nP_n = (BQ - P_nBP_nQP_n) + P_nBP_n(Q - Q_n)P_n,$$

и утверждение становится очевидным. ■

Теперь достаточно посмотреть на формулы (4.7), чтобы сходимости типа (4.8) стали очевидными. Теорема доказана. ■

Задача. Проверьте равенство

$$\det\left(\Phi^{-1/2}\right) = \det\left(\Pi^{-1/2}\right)$$

прямым вычислением.

4.5. Теорема ограниченности.

Теорема 4.6. Если $\|S\| < 1$, то оператор $B[S \mid l]$ ограничен.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Разложим наш оператор в произведение

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \varkappa^t \\ \lambda^t \end{matrix}\right] = s \cdot B\left[\begin{matrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \lambda^t \\ 0 \end{matrix}\right] B\left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] B\left[\begin{matrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ \mu^t \end{matrix}\right],$$

где $s \in \mathbb{C}$. При достаточно малых ε средний сомножитель ограничен (см. теорему 3.2), а потому все сводится к вопросу об ограниченности крайних сомножителей, т. е. к следующей лемме.

Лемма 4.7. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Тогда оператор

$$A = B\left[\begin{matrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \alpha^t \\ \beta^t \end{matrix}\right]$$

ограничен.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что наш оператор действует в $F(\ell_2)$. Далее, без ограничения общности можно считать, что наш оператор — симметрический (см п. V.4.9), т. е. $\alpha = \overline{\beta}$. Разложим $F(\ell_2)$ в тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^{\infty} F(\mathbb{C}^1)$. Тогда (см. п. 1.9) наш оператор разлагается в тензорное произведение операторов $A = \bigotimes_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_j : F(\mathbb{C}^1) \to F(\mathbb{C}^1)$ имеет ядро

$$K_j(z_j, \overline{u}_j) = \exp\left\{(1-\varepsilon)z_j\overline{u}_j + \alpha_j z_j + \overline{\alpha}_j\overline{u}_j\right\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} A_j f(z_j) &= e^{\alpha_j z_j}\int \exp\left\{\left((1-\varepsilon)z_j + \alpha_j\right)\overline{u}_j\right\} f(u_j)\, d\mu(u_j) = \\ &= e^{\alpha_j z_j}\left\langle f, \varphi_{(1-\varepsilon)z_j + \overline{\alpha}_j}\right\rangle = \\ &= e^{\alpha_j z_j} f\left((1-\varepsilon)z_j + \alpha_j\right). \end{aligned}$$

Подстановка показывает, что функции

$$g_m(z_j) = (-\varepsilon z_j + \overline{\alpha}_j)^m \exp\left\{\tfrac{1}{\varepsilon}\alpha_j z_j\right\}$$

являются собственными для оператора A_j, а соответствующие собственные числа равны

$$\sigma_m = (1-\varepsilon)^m \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}|\alpha_j|^2\right).$$

Покажем, что система функции g_m полна. Рассмотрим унитарный оператор $U = T(-\alpha_j/\varepsilon)$, задаваемый формулой (1.11). Тогда $Ug_m = \gamma_m z^m$, где $\gamma_m \in \mathbb{C}^*$, а функции $1, z, z^2 \ldots$ образуют базис в $F(\mathbb{C}^1)$. Итак,

$$\|A_j\| = \max|\sigma_m| = \sigma_0 = \exp\left\{\tfrac{1}{\varepsilon}|\alpha_j|^2\right\}.$$

Поэтому

$$\|A\| = \prod_j \|A_j\| = \exp\left\{\sum \tfrac{1}{\varepsilon}|\alpha_j|^2\right\} < \infty.$$

■

4.6. Замечания. Коммутационные соотношения.

Факт. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V, W)$, а $P^\circ \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V, W)$ — его направляющее подпространство, причем P получается сдвигом P° на вектор $(w_+^0, v_-^0) \in W_+ \oplus V_-$. Пусть L_V, L_W — канонические кососимметричные билинейные формы в V, W. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $A : F(V_+) \to F(W_+)$ такой, что

$$\left(\hat{a}(w) + L_W(w, w_+^0)E\right)A = A\left(\hat{a}(v) + L_V(v, v_-^0)E\right), \tag{4.10}$$

и этот оператор совпадает с $\widetilde{\mathrm{we}}(P)$.

Ввиду того, что в обеих частях равенства (4.10) стоит произведение неограниченных операторов, это высказывание не является аккуратно сформулированным. Я, однако, воздерживаюсь от более точных формулировок.

§ 5. *Соответствие «группа Ли — алгебра Ли»*

Мы подробно обсудим группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$, а потом скажем несколько слов о группах $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}}$, $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}$ и $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}$. Мы в основном следуем книге [Березин (1965)], § 6.

5.1. Что такое алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$? Группа $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$, как мы видели, состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, таких, что Ψ — оператор Гильберта—Шмидта. Обычно говорят, что «алгебра Ли» $\mathfrak{g}$ этой группы состоит из матриц вида

$$Q = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где C — существенно самосопряженный оператор, а $A = A^{\mathrm{t}}$ — оператор Гильберта—Шмидта. Мы уже объясняли (см. § I.2), что слова «алгебра Ли бесконечномерной группы» не надо понимать буквально. Ясно, например, что и сумма, и коммутатор матриц вида (5.1), вообще говоря, не определены, а если они даже и определены, они не обязаны содержаться в $\mathfrak{g}$ (т. е. если мы вычислим произведение, то блок C не обязан быть самосопряженным, а блок A — гильберт-шмидтовским). Наконец, как мы сейчас увидим, однопараметрические подгруппы в G не обязательно порождаются операторами из $\mathfrak{g}$.

Контрпример. Пусть a_j — некоторая последовательность чисел. Обозначим через $\operatorname{diag}(a_j)$ диагональную матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$. Пусть

$$L = i\begin{pmatrix} \operatorname{diag}(t_j) & \operatorname{diag}(s_j) \\ -\operatorname{diag}(s_j) & -\operatorname{diag}(t_j) \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $\exp(hL)$ равна

$$\begin{pmatrix} \operatorname{diag}\left(\cos\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h + i\frac{t_j}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h\right) & \operatorname{diag}\left(\frac{is_j\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\right) \\ \operatorname{diag}\left(\frac{-is_j\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\right) & \operatorname{diag}\left(\cos\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h - \frac{it_j}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h\right) \end{pmatrix}.$$

Если, например, $s_j = 1$, а $t_j = j+1$, то $\exp(hL) \in \mathrm{G}$ хотя блоки матрицы L, лежащие на побочной диагонали, не являются операторами Гильберта—Шмидта. Если, например, $s_j = (j)^{1/4}$, а $t_j = j+1$, то блоки матрицы L, лежащие на побочной диагонали, вообще не являются ограниченными операторами, однако $\exp(hL) \in \mathrm{G}$.

5.2. Однопараметрические группы в $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(\cdot)$.

Предложение 5.1.

а) Пусть (неограниченный) оператор A в гильбертовом пространстве имеет вид $A = S + T$, где S — самосопряженный оператор, а T — ограниченный. Тогда существует единственное слабо непрерывное семейство $U(t) = \exp(itA)$ ограниченных операторов, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{i}\,\frac{dU}{dt}f = UAf, \quad U(0) = E, \tag{5.2}$$

для любого f из области определения оператора A.

б) $$U(t)U(s) = U(s+t). \tag{5.3}$$

в) $$A = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t) - 1),$$

причем области определения обеих частей совпадают.

г) Операторы $U(t)$ переводят область определения A в себя, причем для всех t выполнено

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t).$$

д) Семейство $U(t)$ сильно непрерывно.

Замечание. Предложение 5.1 вытекает также из общих теорем об однопараметрических полугруппах, см. [Reed, Simon 1975]), § X.8.

Доказательство. Сделаем замену $U(t) = V(t)\exp(itS)$ в дифференциальном уравнении (5.2). Тогда на $V(t)$ мы получаем уравнение

$$\frac{1}{i}\,\frac{dV(t)}{dt} = V(t)T(t), \quad V(0) = E, \tag{5.4}$$

где через $T(t)$ обозначен оператор

$$T(t) = \exp(itS)\,T\exp(-itS).$$

Как обычно делается при доказательстве теорем существования и единственности, сведем дифференциальное уравнение к интегральному. Условия (5.2) равносильны вольтерровскому уравнению

$$V(t) = E + i\int_0^t V(\tau)T(\tau)\,d\tau. \tag{5.6}$$

Существование и единственность решения вольтерровского уравнения устанавливается с помощью стандартного рассуждения (см. [Колмогоров, Фомин (1981)], [Riesz, Sz.-Nagy (1965)]). При этом функция $t \mapsto V(t)$ непрерывна относительно равномерной операторной топологии (действительно, величина $\|T(\tau)\|$ ограничена, поэтому $\|V(t)\|$ локально ограничена, а поэтому интеграл непрерывен). Функция $t \mapsto \exp(itS)$ слабо непрерывна. Поэтому и функция $U(t)$ слабо непрерывна.

Далее, заметим, что функция

$$U_s(t) = U(s)^{-1}U(t+s)$$

является решением задачи Коши (5.2), и в силу уже доказанной единственности решения этой задачи мы получаем $U(s)^{-1}U(t+s) = U(t)$.

Перейдем к утверждению в). Нужно доказать, что для любого вектора h выполнено

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}\bigl(V(t)h - h\bigr) = Th.$$

Если мы это сделаем, то, дифференцируя равенство

$$U(t)h = V(t)\exp(itS)$$

по t в нуле, мы сразу получим искомое утверждение.

Покажем сначала, что функция $t \mapsto T(t)$ является сильно непрерывной. Обозначим $\exp(itS)$ через $W(t)$. Пусть $t_j \to t$. Нам нужно убедиться, что следующее выражение стремится к нулю

$$\begin{aligned} \bigl\|T(t_j)h - T(t)h\bigr\|^2 &= \bigl\|W(t_j)TW(-t_j)h - W(t)TW(-t)h\bigr\|^2 = \\ &= \bigl\|TW(-t_j)h\bigr\|^2 + \bigl\|TW(-t)h\bigr\|^2 - \\ &\quad - 2\operatorname{Re}\bigl\langle TW(-t_j)h, W(t-t_j)TW(-t)h\bigr\rangle. \end{aligned} \tag{5.6a}$$

Функции $t \mapsto W(t)$ и $t \mapsto W(-t) = W(t)^*$ сильно непрерывны. Поэтому сильно непрерывны функции $s \mapsto TW(-s)$ и $s \mapsto W(t-s)TW(-t)$. Теперь мы без труда убеждаемся, что (5.6a) стремится к 0.

Итак, функция $t \mapsto T(t)$ сильно непрерывна. Но $V(t)$ непрерывна относительно равномерной топологии, поэтому $V(t)T(t)$ сильно непрерывна, и, глядя на равенство (5.6), мы видим, что функция $t \mapsto V(t)h$ дифференцируема.

Наконец, переходя к пределу при $s \to 0$ в тождестве

$$\frac{1}{s}\,U(t)\big(U(s)-E\big) = \frac{1}{s}\,\big(U(s)-E\big)U(t),$$

мы получаем утверждение г).

д) $U(t) = V(t)\exp(itC)$, но $V(t)$ непрерывна относительно равномерной топологии, а $\exp(itC)$ сильно непрерывна. ■

Замечание. Условия этого предложения могут быть ослаблены, и один раз этот ослабленный вариант нам пригодится. А именно, условие «S — самосопряженный оператор» может быть заменено на условие «S — генератор сильно непрерывной однопараметрической группы». Иными словами, требуется, чтобы существовала однопараметрическая группа $A(t)$ ограниченных операторов такая, что

1. $S = \frac{d}{dt}A(t)$; это равенство предполагает совпадение областей определения;
2. отображение $t \mapsto A(t)$ сильно непрерывно.

Доказательство при таком усилении формулировки остается в силе.

Пусть $\mathfrak{g}$ — тот же объект, что и в предыдущем пункте.

Теорема 5.2. Пусть $iH = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C}\end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. Тогда $\exp(itH)$ содержится в G и представляется в виде

$$\exp(itH) = \begin{pmatrix} 1+K_1(t) & L_1(t) \\ \overline{L}_1(t) & 1+\overline{K_1(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(-itC) & 0 \\ 0 & \exp(it\overline{C})\end{pmatrix} = \tag{5.7a}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(-itC) & 0 \\ 0 & \exp(it\overline{C})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+K_2(t) & L_2(t) \\ \overline{L}_2(t) & 1+\overline{K_2(t)}\end{pmatrix}, \tag{5.7b}$$

где $L_1(t)$, $L_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве операторов Гильберта—Шмидта, а $K_1(t)$, $K_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве ядерных операторов.

Доказательство. Рассуждая так же, как в предыдущем доказательстве, сделаем замену

$$\exp(itH) = V(t)\exp\left\{it\begin{pmatrix} -C & \\ & \overline{C}\end{pmatrix}\right\}.$$

Переходя к вольтерровскому уравнению, получаем

$$V(t) = E + i\int_0^t V(\tau)\begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix}d\tau,$$

где $A(t) = \exp(-itC)A\exp(-it\overline{C})$.

Делая замену $\widetilde{V}(t) = V(t) - E$, мы приходим к уравнению

$$\widetilde{V}(t) = i\int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix}d\tau + i\int_0^t \widetilde{V}(\tau)\begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix}d\tau. \tag{5.8}$$

Явный вид этого уравнения позволяет получить дополнительные сведения о функции $\widetilde{V}(\tau)$. Рассмотрим банахово пространство Y, состоящее из операторов

вида $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N\end{pmatrix}$, где K и N — ядерные операторы, а M и L — операторы Гильберта—Шмидта. Норма в Y вводится по формуле

$$\left\|\begin{pmatrix} K & L \\ M & N\end{pmatrix}\right\| = \|K\|_1 + \|N\|_1 + \|L\|_2 + \|M\|_2,$$

где через $\|\cdot\|_1$ обозначена ядерная норма, а через $\|\cdot\|_2$ — гильберт-шмидтовская норма. Важно заметить, что $\begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix} \in Y$, а условия $Q \in Y$, $R \in Y$ влекут $QR \in Y$.

Теперь мы можем рассмотреть (5.8) как уравнение на Y-значную функцию $\widetilde{V}(t)$. Это уравнение, очевидно (см. [Колмогоров, Фомин (1981)], [Riesz, Sz.-Nagy (1965)]), имеет решение в классе непрерывных Y-значных функций. Существование разложения (5.7a) доказано.

Чтобы доказать непрерывную дифференцируемость функций K_1 и L_1, достаточно проверить непрерывность функции $\tau \mapsto A(\tau)$ относительно гильберт-шмидтовской топологии. Из этого будет следовать дифференцируемость правой части (5.8), а значит, и Y-значной функции $\widetilde{V}(t)$.

Рассмотрим функцию

$$h_{v,w}(t) = \big\langle v, A(t)w\big\rangle = \big\langle \exp(itC)v, A\exp(-it\overline{C})w\big\rangle.$$

Функция $t \mapsto \exp(itC)$ сильно непрерывна. Поэтому непрерывны функции $t \mapsto \exp(itC)v$, $t \mapsto \exp(-it\overline{C})w$. Следовательно, все функции $h_{v,w}(t)$ непрерывны. Итак, функция $t \mapsto A(t)$ слабо непрерывна.

Заметим далее, что величина $\|A(t)\|_2$ постоянна, т. е. $A(t)$ лежит на сфере $\|X\|_2 = \|A\|_2$ в пространстве операторов Гильберта—Шмидта. Легко понять, что на сфере в пространстве операторов Гильберта—Шмидта слабая топология совпадает с гильберт-шмидтовской, т. е. функция $\tau \mapsto A(\tau)$ непрерывна по гильберт-шмидтовской топологии. Итак, существование разложения (5.7a) доказано.

Докажем существование разложения (5.7b). Для этого запишем разложение (5.7a) для оператора H^* и затем выпишем сопряженные операторы для обеих частей полученного равенства.

Наконец,

$$\frac{1}{i}\frac{d}{ds}\left\{\exp(isH)^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}\exp(isH)\right\} =$$

$$= \exp(isH^{\mathrm{t}})\left[H^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}H\right]\exp(isH) = 0,$$

так как выражение в квадратных скобках равно 0 в силу условия $H \in \mathfrak{g}$. Таким образом, $\exp(isH) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(\cdot)$. ■

5.3. Квадратичные операторы. Обозначим через $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ множество блочных матриц вида $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ таких, что B, C — операторы Гильберта—Шмидта, а

$$Q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{t}} = 0$$

(что равносильно $D = A^{\mathrm{t}}$, $B = B^{\mathrm{t}}$, $C = C^{\mathrm{t}}$; оператор A, вообще говоря, не ограничен). Поставим в соответствие каждой такой матрице оператор $\mathrm{dwe}(Q)$

в пространстве Фока по формуле

$$\mathrm{dwe}(Q) = \frac{1}{2}\sum b_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum a_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum c_{ij} z_i z_j. \tag{5.9}$$

Пусть $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -A_1^t \end{pmatrix}$, тогда формальное вычисление дает

$$\big[\mathrm{dwe}(Q), \mathrm{dwe}(P)\big] = \mathrm{dwe}([Q, P]) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(BC_1 - B_1C)\cdot E. \tag{5.10}$$

Таким образом, если бы $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ была алгеброй Ли, то $\mathrm{dwe}(\cdot)$ был бы ее проективным представлением. Смысл (5.9), (5.10) можно придать или с помощью крайней алгебраизации, или путем честного выяснения, что значат операторы $\mathrm{dwe}(P)$.

Начнем с первого пути. Пусть $\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ — подмножество, состоящее из всех матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$ таких, что B и C — финитные операторы, а в каждой строке и каждом столбце матрицы A есть лишь конечное число ненулевых элементов. Множество $\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}$ является настоящей алгеброй Ли. Далее, рассмотрим пространство F_0 многочленов от переменных $z_1, z_2, \ldots$. Ясно, что операторы $\mathrm{dwe}(Q)$ корректно определены на F_0 при $Q \in \mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}$.

Теорема 5.3. Пусть $Q, P \in \mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}$. Тогда выполнено (5.10).

Доказательство. Утверждение доказывается простым вычислением, которое мы опускаем. ■

5.4. Самосопряженность квадратичных операторов.

Пусть $iQ \in \mathfrak{g}$. Придадим смысл выражению (5.9). Разложим пространство Фока $F(H)$ в прямую сумму $F = \bigoplus F_k(H)$, где $F_k(H)$ состоит из однородных форм степени k. Назовем вектор $f \in F(H)$ *финитным*, если f представим в виде $f = \sum_{i=0}^{N} f_k$, где $f_k \in F_k$.

Лемма 5.4. Пусть $q = \sum c_{ij} z_i z_j$ — квадратичная форма, причем $\sigma^2 = \sum |c_{ij}|^2 < \infty$. Тогда оператор $Q_k : F_k(H) \to F_{k+2}(H)$, заданный формулой $Q_k f(z) = q(z) f(z)$, ограничен, и $\|Q_k\| \leqslant \sqrt{(k+2)(k+1)}\cdot\sigma$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $q = \sum \lambda_i z_i^2$ (ср. п. IV.2.5.). Пусть

$$f = \sum \alpha_{i_1 i_2 \ldots} e_{i_1 i_2 \ldots} \in F_k, \quad qf = \sum \beta_{j_1 j_2 \ldots} e_{j_1 j_2 \ldots},$$

где $e_{\ldots}$ — элементы канонического базиса в $F(H)$ (см. п. 1.1). Тогда

$$|\beta_{i_1 i_2 \ldots}|^2 = \Big| \sum_{s: i_s \geqslant 2} \lambda_s \alpha_{i_1 \ldots i_{s-1}(i_s-2) i_{s+1} \ldots} \sqrt{i_s(i_s-1)} \Big|^2 \leqslant$$

(используем неравенство Коши—Буняковского)

$$\leqslant \Big(\sum_{s: i_s \geqslant 2} |\lambda_s|^2 |\alpha_{i_1 i_2 \ldots (i_s-2)\ldots}|^2 \Big) \Big(\sum i_s(i_s-1) \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{s: i_s \geqslant 2} |\lambda_s|^2 |\alpha_{i_1 \ldots (i_s-2)\ldots}|^2 \Big) \big((k+1)(k+2) \big)$$

(мы использовали очевидное неравенство $\sum(i_s^2 - i_s) = \sum i_s^2 - (k+2) \leqslant (k+2)^2 - (k+2)$).

Далее,

$$\|qf\|^2 = \sum |\beta_{j_1 j_2 \ldots}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (k+1)(k+2) \sum |\lambda_s|^2 \sum |\alpha_{i_1 \ldots}|^2 =$$

$$= (k+1)(k+2)\sigma^2 \|f\|^2,$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 5.5. Пусть $R_k = \sum c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}$ — оператор из $F_{k+2}(H)$ в $F_k(H)$, причем $\sigma^2 = \sum |c_{ij}|^2 < \infty$. Тогда оператор R_k ограничен и $\|R_k\| \leqslant \sqrt{(k+2)(k+1)}\,\sigma$.

Доказательство. Действительно, оператор R_k сопряжен оператору умножения на $q = \sum c_{ij} z_i z_j$. ■

Пусть C — самосопряженный оператор в пространстве H', двойственном к H. Пусть $D \subset H'$ — какое-нибудь подпространство, на котором C существенно самосопряжен. Тогда симметрическая степень $\mathrm{S}^k C$ оператора C существенно самосопряжена на подпространстве $D^{(k)} \subset F^k(H)$, состоящем из всех произведений вида $f_1 \ldots f_k$, где $f_j \in D$ (см. [Reed, Simon (1972)], VIII.10). Оператор $L = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{S}^k C$ в $F(H)$, таким образом, определен на области $\widetilde{D}$, состоящей из конечных сумм $\sum_{j=1}^{N} g_j$, где $g_j \in D^{(j)}$. Очевидно, L существенно самосопряжен на D. Этот оператор мы и обозначаем через

$$L = \sum c_{ij} z_i \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Пусть теперь $i\begin{pmatrix} -\overline{C} & -\overline{A} \\ A & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. Пусть

$$Q = \mathrm{dwe}\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum c_{ij} z_i \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum \overline{a}_{ij} z_i z_j.$$

Теорема 5.6. Оператор Q существенно самосопряжен на области D.

Доказательство. Лемма 5.4 и следствие из нее позволяют воспользоваться признаком Карлемана (см. Предварительные сведения, § 4). ■

5.5. Соответствие между однопараметрическими группами.

Теорема 5.7. Пусть $Q = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{pmatrix} \Phi(s) & \Psi(s) \\ \overline{\Psi}(s) & \overline{\Phi}(s) \end{pmatrix} = \exp\left\{ is\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix} \right\}. \tag{5.11}$$

Пусть $P(s) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$ — график оператора (5.11). Тогда

$$\exp(s\cdot\mathrm{dwe}(Q)) = \det\big(\overline{\Phi}(s)\exp(-is\overline{C})\big)^{-1/2}\,\mathrm{we}(P(s)) =$$

$$= \Big(\det\big(\overline{\Phi}(s)\exp(-is\overline{C})\big)\Big)^{-1/2} B\begin{bmatrix} \Psi(s)\overline{\Phi}(s)^{-1} & (\Phi(s)^*)^{-1} \\ \Phi(s)^{-1} & -\Phi(s)^{-1}\Psi(s) \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Замечание. Как мы видели в теореме 5.1, оператор $\overline{\Phi}(s)\exp(-is\overline{C})-E$ является ядерным, поэтому определитель в этой формуле определен корректно. Далее, он является непрерывной функцией, не обращающейся в 0 (так как $\Phi\Phi^* = 1+\Psi\Psi^*$, а $\Psi\Psi^* \geqslant 0$), поэтому мы можем выбрать однозначную ветвь корня из условия $\sqrt{\det\overline{\Phi}(0)} = 1$.

Доказательство. Я привожу единственное известное мне доказательство этой теоремы, которое удручает как своей длиной, так и отсутствием в нем каких бы то ни было идей.

Обозначим последнее выражение в равенстве (5.12) через $r(s)$. Проверим сначала, что $r(s_1+s_2) = r(s_1)r(s_2)$. С учетом того, что

$$\mathrm{we}(P(s_1))\,\mathrm{we}(P(s_2)) = \det\Big(1+\overline{\Phi}(s_1)^{-1}\overline{\Psi}(s_1)\Psi(s_2)\overline{\Phi}(s_2)^{-1}\Big)^{1/2}\mathrm{we}\Big(P(s_1+s_2)\Big),$$

нам достаточно проверить равенство предэкспоненциальных множителей:

$$\det\Big(\exp(-is_1\overline{C})\overline{\Phi}(s_1)\Big)\det\Big(1+\overline{\Phi}(s_1)^{-1}\overline{\Psi}(s_1)\Psi(s_2)\overline{\Phi}(s_2)^{-1}\Big)\det\Big(\overline{\Phi}(s_2)\exp(-is_2\overline{C})\Big) =$$
$$= \det\Big(\exp(-is_1\overline{C})\Big(\overline{\Phi}(s_1)\overline{\Phi}(s_2)+\Psi(s_1)\overline{\Psi}(s_2)\Big)\exp(-is_2C)\Big) =$$
$$= \det\Big(\overline{\Phi}(s_1+s_2)\exp\Big(-i(s_1+s_2)C\Big).$$

Таким образом, $r(s)$ — однопараметрическая подгруппа. Теперь мы хотим вычислить ее генератор

$$R = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial s}\,r(s)\Big|_{s=0}.$$

Вычисление производной ядра K_s оператора $r(s)$ по s в нуле дает выражение:

$$\frac{1}{i}\frac{dK}{ds} = \left(\frac{1}{2}\sum\overline{a}_{ij}z_iz_j + \frac{1}{2}\sum a_{ij}\overline{u}_i\overline{u}_j + \sum c_{ij}z_i\overline{u}_j\right)\exp\Big(\sum z_i\overline{u}_i\Big), \tag{5.13}$$

которое совпадает с формально вычисленным ядром оператора (5.9). Однако это вычисление не вполне корректно, и мы вынуждены прибегнуть к длинному обоснованию.

Пусть D — множество аналитических векторов оператора C (см. [Reed, Simon (1975)]); как известно, C существенно самосопряжен на D. Обозначим через $D^{(k)} \subset F_k(H)$ множество конечных линейных комбинаций функций вида $f_1\dots f_k$, где $f_j \in D$.

Лемма 5.8. $D^{(k)}$ содержится в области определения оператора R.

Доказательство. Пусть $f_1,\dots f_k \in D$. Нам нужно доказать, что $f_1\dots f_k$ содержится в области определения R. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $g_1,\dots,g_k$ в линейной оболочке функций $f_1,\dots,f_k$. С помощью обычной ортогонализации Грама—Шмидта (см. [Reed, Simon (1972)]) дополним $g_1,\dots,g_k$ до ортонормированного базиса $g_1,g_2\dots$ в $H' = F_1(H)$ такого, что все g_j содержатся в D. Без ограничения общности можно считать, что $H = \ell_2$, а $g_j(z) = z_j$.

Теперь нам достаточно доказать, что оператор R корректно определен на всех одночленах вида $\lambda(z) = z_1^{k_1}z_2^{k_2}\dots$

$$r(s)\lambda(z) = \det\Big(\overline{\Phi}\exp(-is\overline{C})\Big)^{-1/2}\times$$
$$\times\iint\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Psi\overline{\Phi}^{-1}z^{\mathrm{t}} + z(\Phi^*)^{-1}\overline{u}^{\mathrm{t}} - \tfrac{1}{2}\overline{u}\Phi^{-1}\Psi\overline{u}^{\mathrm{t}}\Big\}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\dots d\mu(u).$$

Это не что иное, как коэффициент при $\overline{u}_1^{k_1}\overline{u}_2^{k_2}\dots$ в разложении ядра K_s оператора $r(s)$ в ряд Тейлора по $\overline{u}_1,\overline{u}_2,\dots$. Поэтому $r(s)\lambda(z)$ имеет вид

$$\det\Big(\overline{\Phi}\exp(-is\overline{C})\Big)^{-1/2}\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Psi\overline{\Phi}^{-1}z^{\mathrm{t}}\Big\}\cdot Q\Big(zl_\alpha^{\mathrm{t}}, r_{\beta\gamma}\Big), \tag{5.14}$$

где l_α^{t} — матрицы-столбцы матрицы $(\Phi^*)^{-1}$, $r_{\beta\gamma}$ — матричные элементы $\Phi^{-1}\Psi$, а Q — некоторый многочлен степени $k_1+k_2+\dots$. Итак, мы хотим доказать, что выражение (5.14) дифференцируемо по s при $s=0$. Пусть

$$\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+K & L\\ \overline{L} & 1+\overline{K}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-isC} & \\ & e^{is\overline{C}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-isC} & \\ & e^{is\overline{C}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+K_1 & L_1\\ \overline{L}_1 & 1+\overline{K}_1\end{pmatrix}.$$

Как мы видели в теореме 5.2, функция $K(s) = \overline{\Phi}(s)e^{-is\overline{C}} - E$ дифференцируема по s относительно ядерной нормы, поэтому $\det\Big(\overline{\Phi}(s)e^{-is\overline{C}}\Big)$ — дифференцируемая по s функция. Далее, $K(0)=0$, $\frac{d}{ds}K\Big|_{s=0} = 0$ (последнее ясно из интегрального уравнения (5.8)). Поэтому производная от $\det\Big(\overline{\Phi}(s)e^{-is\overline{C}}\Big)$ в нуле равна 0, и мы больше не обращаем внимания на этот множитель.

Далее,

$$\overline{\Psi}\Phi^{-1} = \overline{L}e^{-isC}\Big((1+K)e^{-isC}\Big)^{-1} = \overline{L}(1+K)^{-1},$$

таким образом (по теореме 5.2), матрица $\overline{\Psi}(s)\Phi(s)^{-1}$ дифференцируема относительно гильберт-шмидтовской нормы. Аналогично, дифференцируема по гильберт-шмидтовской норме и матрица $\Phi^{-1}\Psi$.

Далее,

$$\Phi^{*-1}g_j = \Big((1+K)e^{-isC}\Big)^{*-1}g_j = (1+K^*)^{-1}e^{-isC}g_j.$$

Так как g_j — аналитический вектор оператора C, функция $s \mapsto e^{isC}g_j$ является аналитической. Учитывая, что функция $s \mapsto K(s)$ непрерывно дифференцируема, мы получаем, что векторы $l_\alpha(s)$ непрерывно дифференцируемы.

Итак, (5.14) является конечной линейной комбинацией с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами функций вида

$$\gamma(s) = \prod_{\alpha=1}^{n}\Big(m_\alpha(s)z^{\mathrm{t}}\Big)\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Theta(s)z^{\mathrm{t}}\Big\},$$

где $m_\alpha(s)$ — непрерывно дифференцируемые векторы в ℓ_2, а $\Theta(s)$ — непрерывно дифференцируемая по гильберт-шмидтовской норме операторнозначная функция. Покажем, что семейство векторов $\gamma(s)$ является непрерывно дифференцируемым. Для этого достаточно проверить, что векторнозначная функция

$$q(s,s_1,s_2,\dots,s_n) = \prod_{\alpha=1}^{n}\Big(m_\alpha(s_\alpha)z^{\mathrm{t}}\Big)\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Theta(s)z^{\mathrm{t}}\Big\}$$

имеет непрерывные частные производные по $s_1,\dots,s_n$. Эту несложную проверку мы опускаем. Лемма доказана. ∎

Вернемся к доказательству теоремы. Мы доказали существование вектора $\frac{1}{i}\frac{d}{ds}r(s)\lambda(z)\Big|_{s=0}$, где $\lambda(z) = z_1^{k_1}z_2^{k_2}\dots$. Но этот вектор нужно еще вычислить.

Иными словами, нужно вычислить

$$\frac{d}{ds}\left\{\exp\left\{\tfrac{1}{2}z\Psi\overline{\Phi}^{-1}z^{t}\right\}\cdot Q\left(zl_{\alpha}^{t}, r_{\beta\gamma}\right)\right\}\Big|_{s=0} \tag{5.15}$$

(см. (5.14)). Множитель $Q\left(zl_{\alpha}^{t}, r_{\beta\gamma}\right)$ может быть явно выписан через многочлены Эрмита. По счастью, как мы сейчас увидим, этого делать не нужно: в действительности интересны лишь слагаемые, не зависящие от $r_{\beta\gamma}$, и слагаемые, линейные по $r_{\beta\gamma}$. С точностью до членов высшего (по $r_{\beta\gamma}$) порядка

$$Q(zl_{\alpha}^{t}, r_{\beta\gamma}) = \prod_{\alpha}\left[\frac{1}{k_{\alpha}!}(zl_{\alpha}^{t})^{k_{\alpha}}\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma:k_{\beta}\geqslant 1,\,k_{\gamma}\geqslant 1} r_{\beta\gamma}\frac{1}{(k_{\beta}-1)!}(zl_{\beta}^{t})^{k_{\beta}-1}\frac{1}{(k_{\gamma}-1)!}(zl_{\gamma}^{t})^{k_{\gamma}-1}\prod_{j\neq\beta,\gamma}\left[\frac{1}{k_{j}!}(zl_{j}^{t})^{k_{j}}\right]+\ldots$$

Теперь вычисление выражения (5.15) уже не составляет никакого труда. Прежде всего, заметим, что $r_{\beta\gamma}(0)=0$. По этой причине члены старших по $r_{\beta\gamma}$ степеней в Q дадут в производную нулевой вклад. Далее, $l_{\alpha}^{t}(0)$ — это просто α-й базисный вектор, а $\Psi(0)\overline{\Phi}(0)^{-1}=0$. Наконец,

$$\frac{d}{ds}r_{\beta\gamma}(s)\Big|_{s=0} = a_{\beta\gamma},$$
$$\frac{d}{ds}\left(zl_{\alpha}^{t}(s)\right)\Big|_{s=0} = \sum_{\nu} c_{\nu\alpha}z_{\nu},$$
$$\frac{d}{ds}\left(z\Psi(s)\overline{\Phi}(s)^{-1}z^{t}\right) = \sum \bar{a}_{\tau\sigma}z_{\tau}z_{\sigma}.$$

Теперь ответ явно выписывается, и мы получаем желаемое:

$$\frac{1}{i}\frac{d}{ds}r(s)\lambda(z)\Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{2}\sum\bar{a}_{\tau\sigma}z_{\tau}z_{\sigma} + \sum_{\nu}c_{\nu\alpha}z_{\nu}\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} + \frac{1}{2}\sum a_{\beta\gamma}\frac{\partial^{2}}{\partial z_{\beta}\partial z_{\gamma}}\right)\lambda(z).$$

Итак, генератор R однопараметрической полугруппы $r(s)$ совпадает с оператором $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ на всех подпространствах $D^{(k)}\subset F_{k}(H)$, а следовательно, и на подпространстве $\widetilde{D}$, состоящем из векторов вида $\sum\limits_{k=0}^{N}p_{k}$, $p_{k}\in D^{(k)}$. Но оператор $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ существенно самосопряжен на $\widetilde{D}$. Поэтому самосопряженные операторы $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ и R совпадают. ■

5.6. Замечания. Группа $\mathrm{Aut}^{*}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(\cdot)$. Напомним, что аффинная симплектическая группа $\widetilde{\mathrm{G}}=\mathrm{Aut}^{*}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V'\oplus V)$ состоит из аффинных преобразований $(V'\oplus V)$ вида

$$\begin{pmatrix} v' \\ v \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v' \\ v \end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha \\ \bar{\alpha}\end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

где $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V\oplus V')$. Поставим в соответствие преобразованию (5.16) матрицу

$$\begin{pmatrix}\Phi & \Psi & \alpha \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Легко видеть, что произведению аффинных преобразований (5.16) соответствует обычное умножение матриц (5.17).

Алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\widetilde{\mathrm{G}}$ естественно считать множество матриц вида

$$Q=\begin{pmatrix}-C & -A & \gamma \\ \overline{A} & \overline{C} & \bar{\gamma} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

где $\gamma\in V'$ — вектор-столбец, $A=A^{t}$ — оператор Гильберта—Шмидта, а iC самосопряжен.

Наряду с «алгеброй Ли» $\tilde{\mathfrak{g}}$ естественно рассмотреть ее комплексификацию $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, состоящую из матриц вида

$$Q=\begin{pmatrix}L & M & \sigma \\ N & -L^{t} & \varkappa \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

где $M=M^{t}$, $N=N^{t}$ — операторы Гильберта—Шмидта. Каждой такой матрице мы поставим в соответствие следующий формальный оператор в пространстве Фока:

$$\mathrm{dwe}(Q)=\frac{1}{2}\sum m_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}\frac{\partial}{\partial z_{\beta}}+\sum l_{\alpha\beta}z_{\alpha}\frac{\partial}{\partial z_{\beta}}+\frac{1}{2}\sum n_{\alpha\beta}z_{\alpha}z_{\beta}+\sum\sigma_{\alpha}\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}+\sum\varkappa_{\alpha}z_{\alpha}. \tag{5.20}$$

Как и в случае пп. 5.3–5.4, есть два пути придать смысл этому «дифференциальному оператору».

Рассмотрим сначала (настоящую) алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^{0}_{\mathbb{C}}$, состоящую из матриц (5.19) таких, что M, N, σ, $\varkappa$ финитны, а в каждой строке и каждом столбце матрицы L есть лишь конечное число ненулевых элементов. Тогда (5.20) является корректно определенным оператором в пространстве многочленов. Пусть

$$Q=\begin{pmatrix}L & M & \sigma \\ N & -L^{t} & \varkappa \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}L' & M' & \sigma' \\ N' & -(L')^{t} & \varkappa' \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда простое вычисление дает

$$[\mathrm{dwe}(Q),\mathrm{dwe}(R)]=\mathrm{dwe}([Q,R])+\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(MN'-M'N)+\sum(\sigma_{j}\varkappa'_{j}-\sigma'_{j}\varkappa_{j})\right)E, \tag{5.21}$$

т. е. $\mathrm{dwe}(\cdot)$ — проективное представление алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}^{0}_{\mathbb{C}}$.

Пусть теперь $Q\in\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда мы можем определить оператор $\mathrm{dwe}(Q)$ так же, как и в п. 5.4.

Теорема 5.9. Пусть $Q\in\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда оператор $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ существенно самосопряжен в пространстве Фока.

Теорема 5.10. Пусть Q имеет вид (5.18), а

$$\exp(sQ)=\begin{pmatrix}\Phi(s) & \Psi(s) & \alpha(s) \\ \overline{\Psi}(s) & \overline{\Phi}(s) & \bar{\alpha}(s) \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\exp\left(s\,\mathrm{dwe}(Q)\right)=c(s)\,\mathrm{we}\left(\exp(sQ)\right),$$

где

$$c(s)=\left(\det\left(\Phi e^{-isC}\right)\right)^{-1/2}\exp\left\{i\int_{0}^{s}\left(\gamma^{t}\Phi^{t-1}\overline{A}\Phi^{-1}\gamma-\bar{\alpha}^{t}\Phi^{-1}\gamma\right)ds\right\}.$$

Доказательства этих теорем не содержат ничего нового по сравнению с теоремами 5.6 и 5.7, (см. [Березин (1965)]). ■

5.7. Замечания. Группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Здесь все тоже аналогично случаю $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$. Группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

сохраняющих симметричную билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем Ψ — оператор Гильберта—Шмидта.

«Алгебра Ли» $\mathfrak{p}$ группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathrm{GD}}$ состоит из матриц вида

$$Q = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix},$$

где $A = -A^t$ — оператор Гильберта—Шмидта, а C — самосопряжен.

Комплексификация $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ «алгебры Ли» $\mathfrak{p}$ состоит из матриц вида

$$Q = \begin{pmatrix} L & M \\ N & -L^t \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

где $M = -M^t$, $N = -N^t$ — операторы Гильберта—Шмидта. Заметим, что $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как алгебру Ли группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Поставим в соответствие каждой такой матрице «дифференциальный оператор» в пространстве Фока по формуле

$$\mathrm{dspin}(Q) = \frac{1}{2}\sum m_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta} + \sum l_{\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\beta} + \frac{1}{2}\sum n_{\alpha\beta}\xi_\beta\xi_\alpha. \tag{5.24}$$

Как и раньше, определим (настоящую) алгебру Ли $\mathfrak{p}^0_{\mathbb{C}}$, состоящую из матриц вида (5.23) таких, что M, N финитны, а в каждой строке и каждом столбце L есть лишь конечное число ненулевых элементов. Легко проверить, что dspin — проективное представление алгебры $\mathfrak{p}^0_{\mathbb{C}}$, причем если

$$Q = \begin{pmatrix} L & M \\ N & -L^t \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} L' & M' \\ N' & (-L')^t \end{pmatrix},$$

то

$$[\mathrm{dspin}(Q), \mathrm{dspin}(R)] = \mathrm{dspin}([Q,R]) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(MN' - M'N). \tag{5.25}$$

Далее, для любого $Q \in \mathfrak{p}$ оператор $\frac{1}{i}\,\mathrm{dspin}(Q)$ существенно самосопряжен, остается в силе и теорема о соответствии однопараметрических подгрупп.

5.8. Замечания. Группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$. Спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$ строится путем вложения $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Поэтому случай спинорного представления группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$ легко сводится к случаю группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$ Мы ограничимся тем, что выпишем алгебраические формулы для спинорного представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}$ группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$ в удобной для нас форме.

Итак, рассмотрим пространство ℓ_2, состоящее из последовательностей вида

$$(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots).$$

Пусть пространство H_- натянуто на векторы вида $(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, 0, 0, \ldots)$, а H_+ — на векторы вида $(\ldots, 0, 0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{gl}^0$, состоящую из матриц вида

$$P = \begin{pmatrix} P^{--} & P^{+-} \\ P^{-+} & P^{++} \end{pmatrix} : H_- \oplus H_+ \to H_- \oplus H_+, \tag{5.26}$$

причем матрицы P^{+-} и P^{-+} финитны, а каждая строка и каждый столбец матриц P^{--} и P^{++} содержит лишь конечное число ненулевых элементов.

Рассмотрим, далее, пространство Λ многочленов, зависящих от антикоммутирующих переменных $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$. Введем операторы b_j и b_j^* по формулам

$$b_j f = \begin{cases} \xi_j f, & \text{если} \quad j \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi_j} f, & \text{если} \quad j < 0, \end{cases} \qquad b_j^* f = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\xi_j} f, & \text{если} \quad j \geqslant 0, \\ \xi_j f, & \text{если} \quad j < 0. \end{cases}$$

Далее, каждой матрице (5.26) поставим в соответствие оператор

$$\tau(P) = \sum p_{kl}{:}b_k b_l^*{:}, \tag{5.27}$$

где : : обозначает так называемый нормальный порядок. В нашем случае это значит, что

$${:}b_k b_l^*{:} = b_k b_l^*$$

во всех случаях, кроме случая $k = l < 0$,

$${:}b_k b_k^*{:} = -b_k^* b_k \quad \text{при} \quad k < 0.$$

Легко видеть, что

$$[\tau(P), \tau(Q)] = \tau([P,Q]) + \mathrm{tr}(P^{+-}Q^{-+} - Q^{+-}P^{-+}). \tag{5.28}$$

Далее, определим в Λ семейство подпространств $\Lambda^{(\sigma)}$, где $\sigma \in \mathbb{Z}$; они натянуты на векторы вида

$$\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_p}\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_q},$$

где

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_p < 0 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_q; \quad q - p = \sigma.$$

Легко видеть, что $\Lambda = \bigoplus_{\sigma=-\infty}^{\infty} \Lambda^{(\sigma)}$; при этом подпространства $\Lambda^{(\sigma)}$ являются $\mathfrak{gl}^0$-инвариантными.

Глава VII

Представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом

§ 1. Группа диффеоморфизмов окружности и алгебра Вирасоро

Этот параграф содержит простейшие определения, связанные с группой диффеоморфизмов окружности, а также краткое введение в алгебраическую теорию представлений алгебры Вирасоро со старшим весом. К сожалению, хороших понятных текстов по теории представления алгебры Вирасоро со старшим весом (если я не ошибаюсь) на сегодняшний день нет, и по-видимому, это связано с объективным состоянием дел в этой области. Несмотря на то, что в 80-е годы эта теория была одной из самых модных в математике, действительное продвижение в этой области было не слишком велико. Удалось получить ответы на ряд естественных вопросов (условия приводимости, структура подмодулей, условия унитаризуемости), однако «естественные» доказательства в большинстве случаев пока неизвестны. Неизвестны и ответы на многие разумные вопросы, которые, по всей видимости, не являются неразрешимыми.

1.1. Группа диффеоморфизмов окружности. Через S^1 мы всюду в этой главе будем обозначать окружность, которую мы будем рассматривать или как множество $|z| = 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, или как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами; координату на отрезке $[0, 2\pi]$ мы будем, как правило, обозначать через φ.

Группу C^∞-гладких диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, мы будем обозначать через Diff.

1.2. Конечномерные подгруппы. Реализуем группу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ как группу комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$ таких, что $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Как известно, эта группа действует в круге $|z| \leqslant 1$ *мебиусовскими преобразованиями*

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha} \tag{1.1}$$

(конечно, это частный случай действия группы $\mathrm{U}(p, q)$ на матричном шаре (см. § V.2), $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SU}(1, 1)$). При этом окружность $|z| = 1$ переходит в себя. Заметим, что матрице $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ соответствует тождественное преобразование круга (окружности), поэтому фактически мы имеем действия не самой группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, а ее факторгруппы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm E\}$.

Итак, группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ канонически вкладывается в Diff.

В группе Diff есть и другие трехмерные подгруппы, а именно, n-листные накрывающие группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Задача. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Рассмотрим многозначное отображение

$$z \mapsto \left(\frac{\alpha z^n + \beta}{\bar\alpha z^n + \bar\beta} \right)^{1/n}$$

окружности S^1 в себя. Покажите, что это отображение имеет n однозначных вещественно-аналитических ветвей. Пусть $\mathrm{G}_{(n)}$ — группа всех получаемых таким способом однозначных преобразований. Покажите, что центр A группы $\mathrm{G}_{(n)}$ состоит из преобразований вида $z \mapsto \lambda z$, где $\lambda^n = 1$. Покажите, что факторгруппа $\mathrm{G}_{(n)} / A$ есть $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

1.3. Алгебра Вирасоро. Алгеброй Ли группы Diff естественно считать алгебру Ли $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{R}}$ всех C^∞-гладких векторных полей на окружности (см., например, [Арнольд (1974)], 39). Для любых векторных полей $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $w(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ определен коммутатор

$$\left[v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}, w(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \right] = \big(v(\varphi)w'(\varphi) - v'(\varphi)w(\varphi) \big) \frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{1.2}$$

Далее, для любого векторного поля $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ определена однопараметрическая группа диффеморфизмов $g_t(\varphi) : S^1 \to S^1$ из условия

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(\varphi) = v(g_t(\varphi))$$

(«поток векторного поля», см. любой учебник по дифференциальным уравнениям). В этом смысле алгебра Ли $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{R}}$ является «алгеброй Ли группы Ли» Diff. Однако здесь взаимоотношения между «группой Ли» и «алгеброй Ли» сильно отличаются от конечномерного случая. Например, оказывается, что множество диффеоморфизмов, которые могут быть включены в поток, нигде не плотно в группе Diff (см., например, [Pressley, Segal (1986)], 3.3).

Далее, через $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$ мы обозначим алгебру Ли комплексных векторных полей на окружности, т. е. выражений вида $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$, где $v(\varphi)$ — комплекснозначная C^∞-гладкая функция; коммутатор по-прежнему определяется формулой (1.2).

Выберем в $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$ базис

$$L_n = e^{in\varphi} \frac{\partial}{i\partial\varphi}, \tag{1.3}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что

$$[L_n, L_m] = (m - n) L_{n+m}. \tag{1.4}$$

Алгебра $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$ состоит из линейных комбинаций вида

$$v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} = \sum c_n L_n,$$

где коэффициенты c_n удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k |c_n| < \infty$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Обычно бывает значительно удобнее работать не со всей алгеброй $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$, а с ее подалгеброй $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, состоящей из конечных линейных комбинаций вида $\sum c_n L_n$. Введем также алгебру $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} = \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}} \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$.

Алгебра $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ имеет хорошо известное центральное расширение — *алгебру Вирасоро* (эта алгебра построена в [Гельфанд, Фукс (1968)]). Базис в алгебре Вирасоро Vir состоит из элементов L_j, где $j \in \mathbb{Z}$, и ζ, а соотношения коммутации задаются формулами

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (m-n)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n,0}\zeta, \\ [L_n, \zeta] &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Тем самым, центр алгебры Vir состоит из элементов $\alpha\zeta$, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Фактор-алгебра $\mathrm{Vir}/\mathbb{C}\zeta$, очевидно, совпадает с $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$.

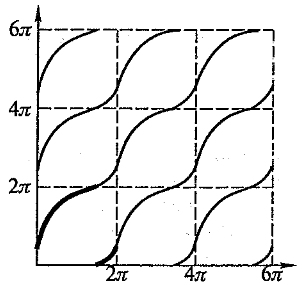


Рис. 1. Жирная линия — диффеоморфизм окружности. Тонкие линии — накрывающие его диффеоморфизмы прямой.

Задача. Пусть функция $\varphi(m,n)$ такова, что соотношения

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{n+m} + \varphi(m,n)\zeta, \quad [L_n, \zeta] = 0$$

задают структуру алгебры Ли (т. е. выполнено тождество Якоби). Покажите, что

$$\varphi(m,n) = (\alpha n^3 - \beta n)\delta_{m+n,0}.$$

Покажите, что при $\alpha \neq 0$ полученная алгебра Ли изоморфна алгебре Вирасоро, а при $\alpha = 0$ — алгебре $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}$, где через $\mathbb{C}$ обозначена одномерная (абелева) алгебра Ли.

Наконец, введем еще алгебру $\mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}$; это вещественная подалгебра в алгебре Vir, натянутая на векторы вида $\frac{1}{2i}(L_n + L_{-n})$, $\frac{1}{2}(L_n - L_n)$, $i\zeta$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача. Постройте алгебру $\overline{\mathrm{Vir}} \supset \mathrm{Vir}$ такую, что $\overline{\mathrm{Vir}}/\mathbb{C}\zeta = \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$. Постройте алгебру $\overline{\mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}} \supset \mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}$ такую, что $\overline{\mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}}/i\mathbb{R}\zeta = \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$.

Наша следующая цель — построить группу, соответствующую алгебре Вирасоро (а точнее, алгебре $\overline{\mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}}$ из последней задачи). Это будет сделано в два шага.

1.4. Универсальное накрытие над Diff. Прежде всего, заметим, что группа Diff не односвязна.

Задача. Пусть $\mathbb{T}$ — подгруппа в Diff, состоящая из поворотов $R_\theta : \varphi \mapsto \varphi + \theta$ окружности. Рассмотрим отображение $\tau : \mathrm{Diff} \to \mathbb{T}$, определяемое формулой $\tau(q) = R_{q(0)}$. Покажите, что τ является гомотопической эквивалентностью, т. е. что отображения $q \mapsto q$ и $\tau(q)$ гомотопны.

Определим группу $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ как группу диффеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$q(x + 2\pi k) = q(x) + 2\pi k.$$

Ясно, что центр Z этой группы состоит из сдвигов $T_k : x \mapsto x + 2\pi k$, а факторгруппа $\mathrm{Diff}^{(\infty)}/Z$ есть Diff (см. рис. 1).

Задача. Покажите, что $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ — универсальное накрытие над Diff.

Задача. Обозначим через $\mathrm{Diff}^{(n)}$ группу диффеоморфизмов окружности таких, что $q\big(\varphi + \frac{2\pi k}{n}\big) = q(\varphi) + \frac{2\pi k}{n}$. Покажите, что $\mathrm{Diff}^{(n)}$ есть n-листное накрытие над Diff.

1.5. Расширение Ботта. Следуя традиции, мы должны построить центральное расширение Ботта $\mathrm{Diff}^{\sim}$ группы Diff; следуя той же традиции, мы нигде не будем его использовать.

Группа $\mathrm{Diff}^{\sim}$ как пространство есть $\mathrm{Diff}^{(\infty)} \times \mathbb{R}$, умножение вводится формулой

$$(p_1, a_1)(p_2, a_2) = \big(p_2 \circ p_1, a_1 + a_2 + c(p_1, p_2)\big),$$

где $p_1, p_2 \in \mathrm{Diff}^{(\infty)}$, а $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$c(p_1, p_2) = \int_0^{2\pi} \ln\big(p_2'(p_1(x))\big)\, d\ln p_1'(x).$$

Задача. Проверьте ассоциативность умножения.

Задача. Проверьте, что алгебра Ли группы $\mathrm{Diff}^{\sim}$ есть $\overline{\mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}}$.

1.6. Унитаризуемость. Модуль M над Vir называется *унитаризуемым*, если в M существует положительно определенная эрмитова форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ такая, что для любого $R \in \mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}$ выполнено

$$\langle Rv, w\rangle = -\langle v, Rw\rangle$$

для всех $v, w \in M$. Легко видеть, что это условие равносильно условию

$$\langle L_k v, w\rangle = \langle v, L_{-k} w\rangle \tag{1.6}$$

для всех k.

Эрмитова (вообще говоря, знаконеопределенная) форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ называется *инвариантной*, если она удовлетворяет тому же тождеству (1.6).

Наконец, симметричная билинейная форма $\{\cdot,\cdot\}$ называется *инвариантной*, если для всех $v, w \in V$ и всех k выполнено

$$\{L_k v, w\} = \{v, L_{-k} w\}.$$

Естественно думать, что унитаризуемым Vir-модулям соответствуют проективные унитарные представления группы Diff. Это действительно так (по крайней мере, во всех известных случаях), но переход от алгебры к группе не очевиден.

1.7. Простейшие представления $T_{s,\alpha}$. Пусть $s \in \mathbb{C}$. Пусть группа Diff действует в $L^2(S^1)$ по формуле

$$T_s(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))\, q'(\varphi)^{1/2+is} \tag{1.7}$$

Легко видеть, что при $s \in \mathbb{R}$ эти представления унитарны. Соответствующее представление алгебры Ли $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ задается формулой

$$v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} : f(\varphi) \mapsto v(\varphi)f'(\varphi) + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)v'(\varphi)f(\varphi). \tag{1.8}$$

Обозначая через e_n векторы $e^{in\varphi} \in L^2(S^1)$, мы можем переписать формулу (1.8) в виде

$$L_k e_n = \Big(n + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)k\Big)e_{n+k}.$$

Конструкция допускает следующее незамысловатое обобщение. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$. Рассмотрим пространство гладких функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$f(x+2\pi) = e^{2\pi i\alpha} f(x).$$

Через H_α мы обозначим пополнение этого пространства по норме, определяемой скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Легко видеть, что функции $e_{n+\alpha} \doteq e^{2\pi i(n+\alpha)x}$ образуют ортогональный базис в H_α (при $\alpha \in \mathbb{R}$ этот базис является ортнормированным).

Представление $T_{s,\alpha}$ группы $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ в H_α определяется формулой

$$T_{s,\alpha} f(x) = f(q(x))q'(x)^{1/2+is}.$$

Если $\alpha, s \in \mathbb{R}$, то представление $T_{s,\alpha}$ унитарно.

Соответствующее представление алгебры Ли Vect задается формулой

$$L_k e_{n+\alpha} = \left(n+\alpha+\left(\tfrac{1}{2}+is\right)k\right)e_{n+k+\alpha}. \tag{1.9}$$

Задача. Убедитесь, что $T_{s,\alpha} \simeq T_{s,\alpha+1}$.

Задача. Среди представлений $T_{s,\alpha}$ ровно два приводимы. Какие?

1.8. Модули со старшим весом. Пусть M — модуль над Vir. Вектор $v \in M$ мы будем называть *весовым вектором* веса (h, c), если

$$L_0 v = hv, \quad \zeta v = cv,$$

где $(h, c) \in \mathbb{C}^2$. *Весовым подпространством* $M_{h,c} \subset M$ называется множество всех векторов веса (h, c).

Задача. Пусть $v \in M_{h,c}$. Тогда $L_k v \in M_{h+k,c}$.

Замечание. Оператор ζ коммутирует со всеми L_k. Поэтому в неприводимых модулях он действует как умножение на скаляр. В частности, для всех весов (h, c) неприводимого модуля число c одно и то же.

Пусть $(h, c) \in \mathbb{C}^2$. Модуль M над Vir называется *модулем со старшим весом* (h, c), если в M существует вектор v (*вектор старшего веса*) такой, что

1. $L_n v = 0$ при $n < 0$;
2. $L_0 v = hv$, $\zeta v = cv$;
3. вектор v — циклический.

Предложение 1.1. Пусть M — модуль со старшим весом (h, c) и вектором старшего веса v. Тогда M является линейной оболочкой векторов вида

$$v_{k_1,k_2,\ldots} = L_1^{k_1} L_2^{k_2}\ldots v, \tag{1.10}$$

где $k_j \in \mathbb{Z}_+$ и лишь конечное число из чисел k_j отлично от нуля.

Мы не будем приводить формального доказательства, но приведем вычисления, делающие утверждение очевидным.

Пример.

а)

$$\zeta L_1 L_2 v = L_1 \zeta L_2 v = L_1 L_2 \zeta v = c L_1 L_2 v.$$

б)

$$\begin{aligned} L_0 L_1 L_2 v &= [L_0, L_1]L_2 v + L_1 L_0 L_2 v = \\ &= L_1 L_2 v + L_1 [L_0, L_2] v + L_1 L_2 L_0 v = \\ &= L_1 L_2 v + 2 L_1 L_2 v + h L_1 L_2 v = \\ &= (h+3) L_1 L_2 v. \end{aligned}$$

Аналогично,

в)

$$L_0 v_{k_1,k_2\ldots} = \Big(h + \sum_j j k_j\Big) v_{k_1,k_2,\ldots}. \tag{1.11}$$

г)

$$\begin{aligned} L_2(L_1 L_2 v) &= [L_2, L_1] L_2 v + L_1 L_2^2 v = \\ &= -L_3 L_2 v + L_1 L_2^2 v = \\ &= -[L_3, L_2] v - L_2 L_3 v + L_1 L_2^2 v = \\ &= L_5 v - L_2 L_3 v + L_1 L_2^2 v. \end{aligned}$$

д)

$$\begin{aligned} L_{-1}(L_1 L_2 v) &= [L_{-1}, L_1] L_2 v + L_1 L_{-1} L_2 v = \\ &= -2 L_0 L_2 v + L_1 [L_{-1}, L_2] v + L_1 L_2 L_{-1} v = \\ &= -2(h+2) L_2 v + 3 L_1^2 v + 0. \end{aligned}$$

Предложение 1.2. Существует единственный универсальный модуль $M(h, c)$ со старшим весом (h, c) такой, что векторы $L_1^{k_1} L_2^{k_2}\ldots v$ образуют в нем базис.

Доказательство очевидно, см., например, [Кас (1983)]. ■

Замечание. Размерность весового подпространства $M(h, c)_{h+n,c}$ равна числу разбиений $p(n)$, т. е. числу представлений n в виде суммы положительных слагаемых

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_\alpha, \quad k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3 \geqslant \ldots.$$

Предложение 1.3. Любой модуль V со старшим весом (h, c) является фактормодулем модуля $M(h, c)$.

Доказательство. Пусть v — вектор старшего веса в $M(h, c)$, а w — вектор старшего веса в V. Тогда сюръективный сплетающий оператор $\sigma : M(h, c) \to V$ определяется из условия

$$\sigma\left(L_1^{k_1} L_2^{k_2}\ldots v\right) = L_1^{k_1} L_2^{k_2}\ldots w.$$

■

Итак, вопрос об описании всех модулей со старшим весом (h, c) сводится к вопросу о перечислении подмодулей в $M(h, c)$.

1.9. Подмодули в $M(h, c)$. Модуль $L(h, c)$.

Лемма 1.4. Пусть N — подмодуль в $M(h, c)$. Тогда

$$N = \bigoplus_j N_{h+j,c}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Представим $y \in N$ в виде суммы $y = y_0 + y_1 + \ldots + y_p$, где $y_j \in M(h,c)_{h+j,c}$. Тогда

$$L_0^k y = \sum (h+j)^k y_j.$$

Выписав эти выражения для $k = 0, 1, \ldots, p$, мы получаем систему уравнений на y_j с вандермондовским определителем; она однозначно разрешима, и, тем самым, y_j выражаются линейно через y, $L_0 y, L_0^2 y, \ldots$, т.е. $y_j \in N$, что и требовалось доказать. ∎

Следствие 1.5. Пусть M — модуль со старшим весом (h,c). Тогда

$$M = \bigoplus_j M_{h+j,c}.$$

Напомним, что подмодуль $Q \subset M$ называется *собственным*, если $Q \neq M$. Собственный подмодуль назовем *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном подмодуле.

Предложение 1.6.

а) Подмодуль $M(h,c)$ содержит единственный максимальный собственный подмодуль.

б) Существует единственный неприводимый модуль со старшим весом (h,c).

Доказательство.

а) Пусть N — собственный подмодуль. Тогда $N = \bigoplus_{j \geqslant 0} N_{h+j,c}$. Заметим, что вектор старшего веса v не содержится в N, иначе было бы $N = M(h,c)$. Поэтому

$$N = \bigoplus_{j>0} N_{h+j,c} \subset \bigoplus_{j>0} M(h,c)_{h+j,c}.$$

Пусть теперь Q — сумма всех собственных подмодулей модуля $M(h,c)$. Тогда $Q \subset \bigoplus_{j>0} M(h,c)_{h+j,c}$ т.е. $Q \neq M(h,c)$.

б) равносильно а). Утверждение доказано. ∎

Через $L(h,c)$ мы будем обозначать единственный неприводимый модуль со старшим весом (h,c). В дальнейшем нас будут интересовать главным образом модули $L(h,c)$.

1.10. Особые векторы. *Особым вектором* в Vir-модуле R мы назовем весовой вектор w такой, что $L_{-j}w = 0$ для всех $j > 0$. Пусть R — модуль со старшим весом, а w — особый вектор. Пусть $L_0 w = (h+k)w$. Число k мы назовем *степенью* особого вектора w.

Предложение 1.7. Любой собственный подмодуль N в модуле M со старшим весом содержит особый вектор.

Доказательство. Рассмотрим разложение (1.12). Рассмотрим минимальное α такое, что $N_{h+\alpha,c} \neq 0$. Тогда любой вектор из $N_{h+\alpha,c}$ является особым. ∎

Задача. Покажите, что циклическая оболочка особого вектора степени k в $M(h,c)$ изоморфна $M(h+k,c)$.

Задача. Найдите особые векторы степени $\leqslant 2$ в $M(0,0)$.

1.11. Форма Шаповалова.

Предложение 1.8.

а) В любом модуле M со старшим весом (h,c) существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая инвариантная билинейная форма Λ.

б) Ядро формы Λ совпадает с максимальным собственным подмодулем в M.

Доказательство.

а) Прежде всего, заметим, что весовые пространства должны быть попарно ортогональны. Действительно, пусть $L_0 w_1 = p w_1$, $L_0 w_2 = q w_2$ причем, $q \neq p$. Тогда

$$\begin{aligned} p\Lambda(w_1, w_2) &= \Lambda(L_0 w_1, w_2) = \\ &= \Lambda(w_1, L_0 w_2) = \\ &= q\Lambda(w_1, w_2), \end{aligned}$$

и значит, $\Lambda(w_1, w_2) = 0$.

Пусть теперь v — вектор старшего веса, $w_1 = L_1^{a_1} \ldots L_n^{a_n} v$, $w_2 = L_1^{b_1} \ldots L_k^{b_k} v$, причем $\sum j a_j = \sum j b_j$. Тогда в силу инвариантности

$$\Lambda\big(L_1^{a_1} \ldots L_n^{a_n} v, L_1^{b_1} \ldots L_k^{b_k} v\big) = \Lambda\big(v, L_{-n}^{a_n} \ldots L_{-1}^{a_1} L_1^{b_1} \ldots L_k^{b_k} v\big). \tag{1.13}$$

Но вектор $L_{-n}^{a_n} \ldots L_k^{b_k} v$ имеет вес h и поэтому имеет вид sv, где $s \in \mathbb{C}$, т.е. выражение (1.13) равно $s\Lambda(v,v)$. Итак, форма Λ однозначно определяется числом $\Lambda(v,v)$. Проверку корректности определения формы Λ мы оставляем читателю.

б) В силу инвариантности формы Λ ее ядро N является подмодулем. Допустим, что N — не максимальный подмодуль. Форма Λ индуцирует невырожденнную инвариантную билинейную форму Λ' на модуле M/N. Пусть r — особый вектор в $M\,/\,N$ степени > 0. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda'(L_1^{a_1} \ldots L_k^{a_k} v, r) &= \Lambda'(v, L_{-k}^{a_k} \ldots L_{-1}^{a_1} r) = \\ &= \Lambda(v, 0) = \\ &= 0, \end{aligned}$$

поэтому особый вектор лежит в ядре формы Λ'. Противоречие. ∎

Форма Λ называется *билинейной формой Шаповалова*.

Предложение 1.9. Пусть M — модуль со старшим весом (h,c), причем $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда в M существует единственная ненулевая инвариантная эрмитова форма, ее ядро совпадает с максимальным подмодулем в M.

Доказательство аналогично. ∎

Инвариантная эрмитова форма называется *эрмитовой формой Шаповалова*.

Важно заметить, что (в случае $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$) матрицы эрмитовой и билинейной форм Шаповалова в $M(h,c)$ в стандартном базисе $L_1^{a_1} \ldots L_p^{a_p} v$ совпадают.

1.12. Формула Каца. Пусть Λ — билинейная форма Шаповалова в $M(h,c)$. Обозначим через D_n определитель матрицы, составленной из чисел

$$\Lambda\left(L_1^{p_1}\dots L_k^{p_k}v, L_1^{s_1}\dots L_m^{s_m}v\right),$$

где v — вектор старшего веса, а $\sum jp_j = \sum js_j = n$.

Теорема 1.10.

$$D_n^2(h,c) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \prod_{\alpha\beta=j} \Phi_{\alpha,\beta}(h,c)^{p(n-j)},$$

где $p(n)$ — число разбиений, а

$$\Phi_{\alpha,\beta}(h,c) = \left(h + \tfrac{c-13}{24}(\beta^2-1) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right)\left(h + \tfrac{c-13}{24}(\alpha^2-1) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right) + \\ + \tfrac{1}{16}(\alpha^2-\beta^2)^2. \qquad (1.14)$$

Следствие. 1.11. Для существования в $M(h,c)$ особого вектора степени $\leqslant k$ необходимо и достаточно, чтобы существовали натуральные числа α,β такие, что $\alpha\beta \leqslant k$, $\Phi_{\alpha,\beta}(h,c)=0$.

Замечания. Условия
а) существует особый вектор степени k,
б) существуют α,β такие, что $\alpha\beta = k$, $\Phi_{\alpha,\beta}(h,c)=0$
не равносильны (пример: $h=c=0$, $k=5$).

Следствие 1.12. В $M(h,c)$ существует особый вектор степени k тогда и только тогда, когда существуют натуральные $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_n,\beta_n$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j = k, \qquad \Phi_{\alpha_j,\beta_j}\Bigl(h + \sum_{s=1}^{j-1}\alpha_s\beta_s, c\Bigr) = 0.$$

Замечание. На самом деле можно ограничиться случаями $n=1$ и $n=2$ (но это уже совсем не очевидно).

1.13. Условия унитаризуемости модулей $L(h,c)$.

Теорема 1.13. Модуль $L(h,c)$ унитаризуем (т. е. эрмитова форма Шаповалова на $L(h,c)$ положительно определена) тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий

а) $h \geqslant 0$, $c \geqslant 1$;

б) $c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$, $h = \frac{(\alpha p - \beta(p+1))^2-1}{4p(p+1)}$, где $\alpha,\beta,p \in \mathbb{Z}$, $p \geqslant 2$, $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, $1 \leqslant \beta \leqslant p-1$.

1.14. Литературные замечания. Общую теорию модулей со старшим весом (правда без алгебры Вирасоро) см. [Dixmier (1974)], глава 7, а также [Kac (1983)]. Автору неизвестно, кто ввел «форму Шаповалова» (Кириллов? Хариш-Чандра?). О формуле Каца см. [Kac (1979)], [Фейгин, Фукс (1982)], о подмодулях см. [Feigin, Fuchs (1990)]. В теореме 1.13 необходимость условий унитаризуемости была получена в [Friedan, Qiu, Shenker (1984)] и [Неретин (1983.1)], достаточность — в [Goddard, Kent, Olive (1986)].

Существует обширная литература о классах сопряженных элементов в Diff (см. [Арнольд (1978)]), связи ее с теорией представлений пока не видно.

§ 2. *Вложение* Diff *в бесконечномерную симплектическую группу*

2.1. Пространство V. Пусть H — пространство C^∞-гладких функций на S^1 с *нулевым средним*, т. е. функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0. \qquad (2.1)$$

Это условие равносильно тому, что f имеет однозначную первообразную на окружности. Введем в H скалярное произведение по формуле

$$\langle f,g\rangle = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| f(\varphi_1)\overline{g(\varphi_2)}\,d\varphi_1 d\varphi_2. \qquad (2.2)$$

Задача. Покажите, что

$$\ln\left|\sin\tfrac{\varphi}{2}\right| = -\ln 2 - \sum\frac{\cos nx}{n} = -\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{in\varphi}}{|n|}.$$

Вычислим

$$\left\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi}\right\rangle = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| e^{i(n\varphi_1 - m\varphi_2)}d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

($m\neq 0, n\neq 0$). Делая замену $\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi_2 = \varphi_2$, получаем

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\tfrac{\psi_1}{2}\right| e^{in\psi_1}e^{i(n-m)\psi_2}d\psi_1 d\psi_2 = \frac{\delta_{n,m}}{|n|}.$$

Таким образом, функции $e_n(\varphi) = \sqrt{n}\,e^{in\varphi}$ образуют в H ортономированный базис. Отсюда же видно, что скалярное произведение (2.2) положительно определено.

Обозначим через V пополнение H по норме, определяемой скалярным произведением (2.2). Это пространство состоит из (обобщенных) функций

$$f(\varphi) = \sum_{n\neq 0} c_n e^{in\varphi}$$

таких, что

$$\sum\frac{|c_n|^2}{|n|} < \infty.$$

Определим подпространство V_+, состоящее из функций вида $\sum_{n>0} c_n e^{in\varphi}$, и подпространство V_-, состоящее из функций вида $\sum_{n<0} c_n e^{in\varphi}$. Ясно, что $V = V_+ \oplus V_-$.

Далее, если $f(\varphi)\in V_+$, то $\overline{f(\varphi)} \in V_-$; таким образом, мы имеем каноническую антилинейную изометрию $V_+ \leftrightarrow V_-$, и тем самым пространство V наделяется структурой объекта категории $\overline{\mathbf{Sp}}$ (см. п. VI.2.1). Напомним, что в любом объекте категории $\overline{\mathbf{Sp}}$ канонически определены 2 формы: кососимметричная форма L и эрмитова форма M.

Задача.

а) Докажите, что кососимметричная билинейная форма в объекте V категории $\overline{\mathrm{Sp}}$ задается формулой

$$L(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\int_0^{\varphi} g(\psi)d\psi d\varphi, \tag{2.3}$$

или, что то же самое,

$$L\left(e^{in\varphi},e^{im\varphi}\right)=\frac{1}{n}\,\delta_{n+m,0}. \tag{2.4}$$

б) Каноническая эрмитова форма в V задается формулой

$$M(f,g)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\int_0^{\varphi}\overline{g(\psi)}\,d\psi\,d\varphi, \tag{2.5}$$

или, что то же самое,

$$M\left(e^{in\varphi},e^{im\varphi}\right)=\frac{1}{n}\,\delta_{n,m}. \tag{2.6}$$

Замечание. Подпространство $V_+\subset V$ состоит из функций вида $\sum\limits_{n>0} c_n e^{in\varphi}$. Перейдем к комплексной координате $z=e^{i\varphi}$, тогда $f(z)=\sum\limits_{n>0} c_n z^n$. Такие функции (ввиду условия $\sum\frac{|c_n|^2}{|n|}<\infty$) голоморфны в круге $|z|<1$. Аналогично, подпространство V_- можно рассматривать как пространство функций, голоморфных в диске $|z|>1$ на сфере Римана.

2.2. Вложение Diff **в** $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$. Пусть группа Diff действует в V по формуле

$$T(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi). \tag{2.8}$$

Задача. Докажите, что если f — функция с нулевым средним, то и $T(q)f$ — функция с нулевым средним.

Замечание. Может быть, более естественно считать, что элементами пространства V являются не функции f, а точные 1-формы $f(\varphi)\,d\varphi$. Действительно, замена переменной $\varphi\mapsto q(\varphi)$ переводит форму $f(\varphi)\,d\varphi$ в форму

$$f\big(q(\varphi)\big)\,dq(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)\,d\varphi,$$

т. е. мы получаем в точности то же выражение, что и в формуле (2.8).

Задача. Докажите, что оператор $T(q)$ сохраняет кососимметричную форму L, т. е.

$$L\big(T(q)f,T(q)g\big)=L(f,g).$$

Теорема 2.1.

$$T(q)\in\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V).$$

Лемма 2.2. Операторы $T^*(q)T(q)-E$ являются ядерными операторами.

Доказательство леммы. Обозначим $T^*(q)T(q)-E$ через $A(q)$.

$$\big\langle f_1,A(q)f_2\big\rangle=\big\langle T(q)f_1,T(q)f_2\big\rangle-\langle f_1,f_2\rangle=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| f_1\big(q(\varphi_1)\big)\overline{f_2\big(q(\varphi_2)\big)}q'(\varphi_1)q'(\varphi_2)\,d\varphi_1\,d\varphi_2-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| f_1(\varphi_1)\overline{f_2(\varphi_2)}\,d\varphi_1\,d\varphi_2.$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменных $\psi_1=q(\varphi_1)$, $\psi_2=q(\varphi_2)$, а во втором — $\psi_1=\varphi_1$, $\psi_2=\varphi_2$. Обозначая диффеоморфизм, обратный к q, через p, получаем, что наше выражение равно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{p(\psi_1)-p(\psi_2)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)}\right| f(\psi_1)\overline{f(\psi_2)}\,d\psi_1\,d\psi_2.$$

Обозначим выражение $\ln|\ldots|$ через $K(\psi_1,\psi_2)$. Легко видеть, что функция $K(\psi_1,\psi_2)$, определенная при $\psi_1\neq\psi_2$, может быть доопределена до C^∞-гладкой функции на всем торе $S^1\times S^1$, а именно, для этого нужно положить $K(\psi,\psi)=\ln p'(\psi)$.

Разложим функцию $K(\psi_1,\psi_2)$ в ряд Фурье:

$$K(\psi_1,\psi_2)=\sum b_{m,n}e^{im\psi_1}e^{in\psi_2}.$$

Так как K является C^∞-гладкой, ее коэффициенты Фурье быстро убывают, т. е.

$$b_{m,n}=o\big((n^2+m^2)^{-N}\big),\qquad n^2+m^2\to\infty$$

для любого N. Обозначим через $a_{m,n}$ матричные элементы матрицы $A(q)$ в базисе $e_j=\sqrt{|j|}\,\exp(ij\varphi)$. Легко видеть, что

$$a_{m,n}=\sqrt{mn}\,b_{m,n},$$

и, тем самым, числа $a_{m,n}$ быстро убывают. (В частности, $A(q)$ содержится во всех классах Шаттена $\mathscr{L}_p$ $(p>0)$, а не только в $\mathscr{L}_1$.) ■

Доказательство теоремы 2.1. Теорема является легким следствием леммы. Действительно, матрица $T(q)$ как матрица оператора $V_+\oplus V_-\to V_+\oplus V_-$ имеет вид $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$. Эта матрица псевдоунитарна, т. е. сохраняет эрмитову форму (2.6), матрица которой в базисе e_j равна $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, в частности,

$$\Phi^*\Phi-\Psi^t\overline{\Psi}=E. \tag{2.9}$$

С другой стороны, $T^*(q)T(q)-E$ — ядерный оператор. Но $T^*(q)T(q)$ имеет вид

$$T^*(q)T(q)=\begin{pmatrix}\Phi^* & \Psi^t\\ \Psi^* & \Phi^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi^*\Phi+\Psi^t\Psi & \ldots\\ \ldots & \ldots\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\Phi^*\Phi+\Psi^t\overline{\Psi}-E$ — ядерный оператор. Учитывая (2.9), получаем, что $\Psi^t\overline{\Psi}$ — ядерный оператор, т. е. Ψ — оператор Гильберта—Шмидта. ■

Ограничивая представление Вейля группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$ на группу Diff, мы получаем унитарное проективное представление группы Diff. Мы будем обозначать его через N.

2.3. Действие алгебры Ли. Посмотрим, что означает наша конструкция на уровне алгебры Ли. Пусть $\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ — векторное поле на окружности. Действие алгебры $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ в V, соответствующее действию (2.8), задается формулой

$$\tau\Big(\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)f(\varphi)=\alpha(\varphi)f'(\varphi)+\alpha'(\varphi)f(\varphi), \tag{2.10}$$

или

$$L_n e^{ik\varphi}=(n+k)\,e^{i(n+k)\varphi}.$$

Переходя к ортонормированному базису $e_k=\sqrt{|k|}e^{ik\varphi}$, получаем

$$L_n e_k=\sqrt{|k(n+k)|}\,\mathrm{sgn}(n+k)e_{n+k}.$$

Далее, заметим, что операторы L_j лежат в алгебре $\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}$ из п. VI.5.3, поэтому к ним применима формально-алгебраическая конструкция п. VI.5.3. Это дает нам следующие квадратичные операторы в пространстве многочленов от переменных $z_1, z_2, \ldots$:

$$L_k=\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j(k+j)}z_{k+j}\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k-1}\sqrt{p(k-p)}\,z_p z_{k-p},$$
$$L_0=\sum_{j=1}^{\infty}jz_j\frac{\partial}{\partial z_j}, \tag{2.11}$$
$$L_{-k}=\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j(j+k)}z_j\frac{\partial}{\partial z_{j+k}}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k-1}\sqrt{p(k-p)}\,\frac{\partial}{\partial z_p}\frac{\partial}{\partial z_{k-p}},$$

где $k>0$.

Применение формулы (VI.5.10) дает следующие коммутационные соотношения:

$$[L_k,L_n]=(n-k)L_{n+k}+\frac{n^3-n}{12}\,\delta_{n,-k}.$$

Далее, легко видеть, что вакуумный вектор является особым вектором веса $(h,c)=(0,1)$. Его циклическая оболочка H является неприводимым (см. Предварительные сведения, лемму 5.5) унитаризуемым представлением Vir, и поэтому $H\simeq L(0,1)$.

Замечание. Весовые подпространства представления N имеют размерности $p(n)$ такие же, как и у универсального модуля $M(0,1)$. Поэтому факторы ряда Жордана—Гельдера у N и $M(0,1)$ одинаковы. Известно, что факторы ряда Жордана—Гельдера $M(0,1)$ суть $L(n^2,1)$, поэтому

$$N=\bigoplus_{n=0}^{\infty}L(n^2,1).$$

2.4. Соответствие «группа Ли — алгебра Ли». Мы хотим показать, что конструкция п. 2.3 для алгебры Ли Vir в каком-нибудь точном смысле слова соответствует конструкции п. 2.2 для «группы Ли» Diff.

Пусть $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\in\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$, пусть g_t — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t(\varphi)=v(g_t(\varphi)).$$

Пусть $S(v)$ — оператор в пространстве Фока, соответствующий $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Мы хотим доказать, что операторы $\mathrm{we}(g_t)$ и $\exp(tS(v))$ совпадают с точностью до умножения на константу.

Учитывая теорему Березина VI.5.7, мы должны доказать следующее утверждение.

Предложение 2.3. Пусть $\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\in\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$. Тогда оператор $T=\tau\Big(\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$ как оператор из $V=V_+\oplus V_-$ в $V=V_+\oplus V_-$ имеет матрицу вида

$$\begin{pmatrix} iA & C\\ \overline{C} & -i\overline{A}\end{pmatrix},$$

где A — существенно самосопряженный оператор, а $C=C^t$ — оператор Гильберта—Шмидта.

Доказательство. Оператор T определен на пространстве $C^\infty(S^1)$ и переводит его в себя. Вычислим T^*+T:

$$\big\langle(T^*+T)f,g\big\rangle=\langle Tf,g\rangle+\langle f,Tg\rangle=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\ln\Big|\sin\big(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\big)\Big|\,\big(\alpha(\varphi_1)f'(\varphi_1)+\alpha'(\varphi_1)f(\varphi_1)\big)\overline{g(\varphi_2)}\,d(\varphi_1)\,d(\varphi_2)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\ln\Big|\sin\big(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\big)\Big|\,f(\varphi_1)\big(\alpha(\varphi_2)\overline{g'(\varphi_2)}+\alpha'(\varphi_2)\,\overline{g(\varphi_2)}\big)d\varphi_2\,d\varphi_1.$$

Произведя интегрирование по частям (оно требует некоторого обоснования) в обоих интегралах, получаем в итоге

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\Big[\mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\big)\,\big(\alpha(\varphi_1)-\alpha(\varphi_2)\big)\Big]\,f(\varphi_1)\overline{g(\varphi_2)}\,d\varphi_1\,d\varphi_2.$$

Обозначим через $\Theta(\varphi_1,\varphi_2)$ выражение в квадратных скобках. Оно формально не определено при $\varphi_1\neq\varphi_2$. Однако, полагая $\Theta(\varphi,\varphi)=2\alpha'(\varphi)$, мы получаем, что Θ является C^∞-гладкой функцией на всем торе $S^1\times S^1$. Итак, T^*+T — оператор Гильберта—Шмидта.

Далее, покажем, что оператор $R=i\big(T-\frac{1}{2}(T^*+T)\big)$ существенно самосопряжен на подпространстве $C^\infty(S^1)$. Идея доказательства самосопряженности оператора R проста. Оператор $T=\tau\Big(\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$ порождает однопараметрическую группу операторов

$$L(t)f(\varphi)=f\big(q_t(\varphi)\big)\,q_t'(\varphi),$$

где q_t — поток векторного поля $\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Оператор R является слабым возмущением оператора T, и поэтому естественно думать (см. предложение VI.5.1), что R тоже порождает однопараметрическую группу операторов. Но оператор R, очевидно, симметрический. Поэтому естественно думать, что он самосопряжен, а порождаемая им полугруппа унитарна.

Покажем сначала, что семейство операторов $L(t)$ сильно непрерывно. Пусть $t_j \to t$. Тогда

$$\left\|L(t_j)f - L(t)f\right\|^2 = \iint \ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| \times$$
$$\times \Big(f\big(q_{t_j}(\varphi_1)\big)\overline{f\big(q_{t_j}(\varphi_2)\big)}q'_{t_j}(\varphi_1)q'_{t_j}(\varphi_2) +$$
$$+ f\big(q_t(\varphi_1)\big)\overline{f\big(q_t(\varphi_2)\big)}q'_t(\varphi_1)q'_t(\varphi_2) -$$
$$- 2\operatorname{Re} f\big(q_{t_j}(\varphi_1)\big)\overline{f\big(q_t(\varphi_2)\big)}q'_{t_j}(\varphi_1)q'_t(\varphi_2)\Big)d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

Покажем, что подынтегральное выражение стремится к 0 при $t_j \to t$. Если f непрерывна, законность предельного перехода под знаком интеграла при $j \to \infty$ вытекает из теоремы Лебега о мажорированной сходимости (см., например, [Riesz, Sz.-Nagy (1979)], п. 19, или [Колмогоров, Фомин (1981)]). Пусть $g \in V$ произвольна, а f непрерывна, причем $\|f - g\| < \varepsilon$. Тогда

$$\left\|L(t_j)g - L(t)g\right\| \leqslant \left\|L(t_j)(g-f)\right\| + \left\|L(t_j)f - L(t)f\right\| + \left\|L(t)(f-g)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|L(t_j)\| + \left\|L(t_j)f - L(t)f\right\| + \varepsilon\|L(t)\|.$$

Поэтому для доказательства непрерывности $L(t)$ нам остается убедиться в том, что $\|L(t)\|$ ограничена на каждом конечном интервале. Пусть $A_t = L^*(t)L(t) - E$. Покажем, что гильберт-шмидтовская норма оператора A_t локально ограничена. Пусть $K(\psi_1,\psi_2) = K_t(\psi_1,\psi_2)$ — та же функция, что и в доказательстве теоремы 2.1. Легко видеть, что гильберт-шмидтовская норма оператора A_t в обозначениях доказательства теоремы 2.1 равна

$$\sum |a_{m,n}|^2 = \sum mn|b_{m,n}|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum m^2n^2|b_{m,n}|^2 =$$
$$= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial^2 K_t(\psi_1,\psi_2)}{\partial\psi_1\partial\psi_2}\right|^2 d\psi_1 d\psi_2,$$

а это число непрерывно зависит от t.

Итак, $L(t)$ — сильно непрерывная группа, и мы можем применить к ней замечание к предложению V.5.1. Следовательно, оператор $R = i\big(T - \frac{1}{2}(T^* + T)\big)$ является генератором некоторой однопараметрической группы операторов $U(t)$. Оператор $T^* + T$ имеет гладкое ядро и поэтому переводит пространство $C^\infty(S^1)$ в себя. Поэтому и R переводит $C^\infty(S^1)$ в себя. Обозначим через R_0 ограничение оператора R на $C^\infty(S^1)$. Очевидно, оператор R_0 — симметрический. В силу R-инвариантности пространства $C^\infty(S^1)$ замыкание оператора R_0 есть R (см. [Reed, Simon (1975)], теорема X.49). Поэтому R — симметрический на своей области определения. Далее, для любой f из области определения R

$$\frac{d}{dt}\big\langle U(t)f, U(t)f\big\rangle = \big\langle RU(t)f, U(t)\big\rangle + \big\langle U(t), RU(t)f\big\rangle = 0,$$

т. е. операторы $U(t)$ унитарны, поэтому R самосопряжен.

Итак, T — сумма самосопряженного оператора и оператора Гильберта—Шмидта, что и является основным утверждением предложения. Остается лишь показать, что

$$L(Tf, g) + L(f, Tg) = 0, \tag{2.12}$$

т. е. оператор T лежит в симплектической алгебре.

Задача. Проверьте тождество (2.12).

Учитывая, что в базисе $e_1(\varphi), e_2(\varphi), \ldots, e_{-1}(\varphi), e_{-2}(\varphi), \ldots$ (см. п. 2.1.) матрица формы L имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}$, мы получаем, что

$$T\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}T^{\mathrm{t}} = 0. \tag{2.13}$$

Пусть $T = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U\end{pmatrix}$. Тогда равенство (2.13) влечет $U = -X^{\mathrm{t}}$, $Y = Y^{\mathrm{t}}$, $Z = Z^{\mathrm{t}}$. С другой стороны, оператор T сохраняет подпространство вещественных функций в V, т. е. подпространство элементов вида $(f, \bar f) \in V_+ \oplus V_-$, поэтому $X + \overline{U} = 0$, $Z = \overline{Y}$. Это завершает доказательство теоремы. ■

2.5. Замечания. Универсальная бозонная конструкция. Фиксируем комплексные числа α, β. Поставим в соответствие каждому $q \in \mathrm{Diff}$ аффинное преобразование $T_{\alpha,\beta}(q)$ пространства V, задаваемое формулой

$$T_{\alpha,\beta}(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))q'(\varphi) + \alpha(q'(\varphi) - 1) + \frac{\beta q''(\varphi)}{q'(\varphi)}. \tag{2.14}$$

Легко видеть, что

$$T_{\alpha,\beta}(q_1)T_{\alpha,\beta}(q_2) = T_{\alpha,\beta}(q_1q_2).$$

Таким образом, мы получили двухпараметрическую серию вложений группы Diff в группу $G = \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V)$. В случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, группа Diff попадает в группу $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V)$. Ограничивая представление Вейля группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V)$ на Diff, мы получаем серию проективных представлений Diff. Эту серию мы обозначим через $N_{\alpha,\beta}$. При этом в случае $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ представления $N_{\alpha,\beta}$ унитарны. В случае, когда хотя бы один из параметров α, β не является вещественным, операторы $N_{\alpha,\beta}(q)$, вообще говоря, не ограничены.

Применяя далее формулу (VI.5.18), мы получаем следующий набор квадратичных операторов в пространстве многочленов от переменных $z_1, z_2, \ldots$:

$$\tilde L_k = \sum_{j>0}\sqrt{k(k+j)}z_{j+k}\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{0<p<k}\sqrt{p(k-p)}\,z_{k-p}z_p + (\alpha + i\beta k)\sqrt{k}\,z_k,$$
$$\tilde L_0 = \sum_{j>0} jz_j\frac{\partial}{\partial z_j}, \tag{2.15}$$
$$\tilde L_{-k} = \sum_{j>0}\sqrt{k(j+k)}\,z_j\frac{\partial}{\partial z_{j+k}} + \frac{1}{2}\sum_{0<p<k}\sqrt{p(k-p)}\,\frac{\partial}{\partial z_{k-p}}\frac{\partial}{\partial z_p} + (\alpha - i\beta k)\sqrt{k}\,\frac{\partial}{\partial z_k},$$

где $k > 0$.

Вычисляя коммутаторы с помощью формулы (VI.5.21), мы получаем

$$\big[\tilde L_k, \tilde L_m\big] = (m-k)\tilde L_{m+k} + \left(\frac{m^3 - m}{12}(1 + 12\beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)\delta_{m,-k}E.$$

Чтобы перейти к коммутационным соотношениям вида (1.5), мы должны рассмотреть новые операторы

$$L_0 := \tilde L_0 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad L_{\pm k} := \tilde L_{\pm k}.$$

Тогда

$$[L_k, L_m] = (m-k)L_{m+k} + \frac{m^3-m}{12}(1+12\beta^2)\delta_{m,-k}E.$$

Итак, мы получили представление алгебры Вирасоро с $c = 1 + 12\beta^2$. При этом вакуумный вектор $f(z) = 1$ является особым вектором веса

$$(h, c) = \left(\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2), 1 + 12\beta^2\right). \qquad (2.16)$$

Заметим, что любые комплексные (h, c) могут быть представлены в таком виде, поэтому в семействе модулей $N_{\alpha,\beta}$ реализуются все возможные старшие веса.

Далее, размерности весовых подпространств в $N_{\alpha,\beta}$ и $M\left(\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2), 1+12\beta^2\right)$ одинаковы, поэтому они имеют одни и те же факторы в ряде Жордана—Гельдера.

В случае $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ мы получаем унитарное представление алгебры Вирасоро (относительно обычного скалярного произведения (см. VI.1) в пространстве голоморфных функций от $z_1, z_2, \ldots$); удивительно, но эта конструкция дает не всю непрерывную серию, а лишь угол на рис. 2.

Даже в этой модели много неизвестного. В частности, неизвестны ответы на следующие вопросы.

1) Найти явную формулу для сплетающих операторов $N_{\alpha,\beta} \to N_{\alpha,-\beta}$.

2) Пусть (α, β) соответствует точке из угла NAC на рис. 2. Найти Vir-инвариантное произведение в пространстве Фока (обычное скалярное произведение в пространстве Фока не является Diff-инвариантным).

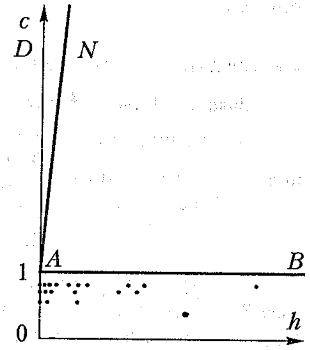


Рис. 2. Непрерывная серия унитарных представлений Vir занимает угол BAD. Дискретная серия лежит на прямых $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$, $c = \frac{7}{10}$, $c = \frac{4}{5}, \ldots$ (на k-й прямой лежит $\frac{k(k+1)}{2}$ точек). Прямая AN задается уравнением $c = 1 + 24h$. У представлений непрерывной серии из угла NAB известны явные конструкции (см. пп. 2.5, 3.3). Кроме того, явные конструкции известны у представлений $L(0,0)$, $L\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (см. п. 3.5).

2.6. Литературные замечания. Формулы (2.11) и (2.15) становятся проще, если ввести операторы

$$a_k f = \sqrt{k} z_k f, \quad a_{-k} f = \sqrt{k}\frac{\partial}{\partial z_k} f,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$[a_k, a_l] = l\delta_{k+l,0}.$$

Тогда (2.11) меняется на

$$L_k = \frac{1}{2}\sum_{j\neq 0,k} :a_j a_{k-j}:, \qquad (2.17)$$

где двоеточия обозначают виковский символ, т. е. операторы рождения (a_s при $s > 0$) ставятся впереди операторов уничтожения (a_s при $s < 0$). Соответственно, упрощаются и формулы (2.15).

Операторы L_0, L_{-1}, L_1 образуют вполне банальное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Если я не ошибаюсь, Вирасоро [Virasoro (1970)] выписал аналогичные формулы для произвольных операторов L_k и обнаружил, что они удовлетворяют хорошим соотношениям коммутации.

Формулы (2.15) обнаруживались независимо разными авторами, и я затрудняюсь сказать, кто был первым. Представление Diff из п. 2.2 было построено независимо в 1979–80 гг. Г. Сигалом (см. [Segal G. B (1981)]), автором (см. [Неретин (1982)]) и Исмагиловым ([Ismagilov (1983)]). Вложение Diff в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}} V$ построено в [Неретин (1983)].

§ 3. Вложения Diff в бесконечномерную ортогональную группу

3.1. Пространство H. Рассмотрим пространство $H = L^2(S^1)$. Рассмотрим в $L^2(S^1)$ подпространство H_+, состоящее из функций вида $\sum_{k\geqslant 0} c_k e^{ik\varphi}$, и подпространство H_-, состоящее из функций вида $\sum_{k<0} c_k e^{ik\varphi}$. Тем самым, мы ввели в H структуру объекта категории $\overline{\mathrm{GA}}$ (см. п. IV.3.1).

Замечание. Пространство H_+, конечно, отождествляется с пространством Харди H^2 в круге $|z| \leqslant 1$.

Рассмотрим в пространстве H следующий интегральный оператор

$$If(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\psi)\, d\psi. \qquad (3.1)$$

Этот интеграл, конечно, расходится, и его следует понимать в смысле главного значения:

$$If(\varphi) := \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[0,2\pi]\setminus(\varphi-\varepsilon;\varphi+\varepsilon)} \mathrm{ctg}\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\psi)\, d\psi,$$

и тогда, по крайней мере, для функций f гладкости C^1, интеграл (3.1) определен.

Оператор I — хорошо известное в анализе *преобразование Гильберта*.

Задача. Докажите, что

$$Ie^{in\varphi} = \begin{cases} ie^{in\varphi}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -ie^{in\varphi}, & n < 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что I продолжается по непрерывности до ограниченного оператора во всем пространстве $H \simeq L^2(S^1)$.

Лемма 3.1. Пусть R — ограниченный обратимый оператор в H. Тогда следующие условия равносильны:

а) $R \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$;

б) $[R, I] = RI - IR$ — оператор Гильберта—Шмидта.

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — матрица R как оператора $H_+ \oplus H_- \to H_+ \oplus H_-$. Оператор R содержится в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ тогда и только тогда, когда B, C — операторы Гильберта—Шмидта. Пусть P_0 — проектор на (одномерное) пространство констант в H. Тогда $\widetilde{I} := I + iP_0$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$. Поэтому

$$[R, \widetilde{I}] = R\widetilde{I} - \widetilde{I}R = 2i\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, $[R, \widetilde{I}] - [R, I] = [R, P_0]$ — ограниченный оператор ранга $\leqslant 2$, поэтому условия «$[R, \widetilde{I}]$ — оператор Гильберта—Шмидта» и «$[R, I]$ — оператор Гильберта—Шмидта» равносильны. Теперь утверждение становится очевидным. ∎

3.2. Вложения Diff **в** $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$**.** Пусть $s \in \mathbb{C}$. Рассмотрим следующее действие Diff в H:

$$P_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2+is}, \tag{3.2}$$

где $q \in \mathrm{Diff}$.

Теорема 3.2. $P_s(q) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$.

Доказательство. Итак, мы хотим проверить, что $[P_s(q), I]$ — оператор Гильберта—Шмидта, т. е. что ядро оператора $[P_s(q), I]$ является функцией с суммируемым квадратом. Действительно,

$$[P_s(q), I]f(\varphi) = P_s(q)If(\varphi) - IP_s(q)f(\varphi) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\Big(\frac{q(\varphi)-\psi}{2}\Big) f(\psi)\, d\psi\, q'(\varphi)^{1/2+is} -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\Big(\frac{\varphi-\psi}{2}\Big) f\big(q(\psi)\big)\, q'(\psi)^{1/2+is} d\psi.$$

Сделаем в первом интеграле замену $\psi = q(\theta)$, а во втором $\psi = \theta$. Получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\mathrm{ctg}\Big(\frac{q(\varphi)-q(\theta)}{2}\Big)q'(\varphi)^{1/2+is}q'(\theta) - \mathrm{ctg}\Big(\frac{\varphi-\theta}{2}\Big)q'(\theta)^{1/2+is}\Big] f\big(q(\theta)\big)\, d\theta.$$

Обозначим через $K(\varphi, \theta)$ выражение, стоящее в квадратных скобках.

Лемма 3.3. Функция $K(\varphi, \theta)$ ограничена.

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{K}(\varphi, \theta) = \sin\Big(\frac{\varphi-\theta}{2}\Big)^{-1} K(\varphi, \theta).$$

Легко видеть, что $K(\varphi, \theta)$ — гладкая функция, причем $K(\varphi, \varphi) = 0$, что и доказывает лемму. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Оператор $[P_s(q), I]$, таким образом, представлен в виде произведения YX двух операторов

$$Xf(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big),$$
$$Yg(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int K(\varphi, \psi)g(\psi)\, d\psi.$$

Оператор Y, как мы только что показали, является оператором Гильберта—Шмидта (т. к. $\iint |K(\varphi, \psi)|^2 < \infty$), а X является композицией $X = ZU$ унитарного оператора

$$U : f \mapsto f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2}$$

и ограниченного оператора

$$Z : g(\varphi) \mapsto g(\varphi)\, q'(\varphi)^{-1/2}.$$

Тем самым, оператор X ограничен, а значит, YX — оператор Гильберта—Шмидта. ■

Ограничивая спинорное представление $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ на группу Diff, мы получаем серию проективных представлений группы Diff. В случае, если $s \in \mathbb{R}$, образ Diff попадает в группу $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ и, следовательно, наши представления оказываются унитарными.

3.3. Замечания. Универсальная фермионная конструкция. Пусть группа $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ (универсальная накрывающая группы Diff) действует на $\mathbb{R}$ так, как описано выше (п. 1.4). Пусть $\alpha, s \in \mathbb{C}$. Рассмотрим пространство H_α функций $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$f(x + 2\pi) = e^{2\pi i\alpha} f(x),$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Введем в H_α структуру объекта категории $\overline{\mathrm{GA}}$, положив, что подпространство H^+_α натянуто на векторы $e^{i(n+\alpha)\varphi}$ при $n \geqslant 0$, а H^-_α — на векторы $e^{i(n+\alpha)\varphi}$ при $n < 0$.

Замечание. Если $\alpha = 0$, то пространство H_α является пространством 2π-периодических функций, и его естественно рассматривать как пространство функций на окружности. В итоге мы получаем пространство H из п. 3.1. Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то пространство H_α удобно рассматривать как пространство нечетных функций на окружности длины 4π, т. е. функций, удовлетворяющих условию $g(\varphi + 2\pi) = -g(\varphi)$.

Замечание. Ясно, что пространства H_α и $H_{\alpha+1}$ как гильбертовы пространства совпадают. Структуры объектов категории $\overline{\mathrm{GA}}$ в них, правда, формально различны, но тождественное отображение $H_\alpha \to H_{\alpha+1}$ является изоморфизмом категории $\overline{\mathrm{GA}}$.

Пусть группа Diff действует в H_α по формуле

$$T_{\alpha,s}(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2+is},$$

где $s \in \mathbb{C}$.

Задача. Покажите, что при $\alpha, s \in \mathbb{R}$ операторы $T_{\alpha,s}(q)$ унитарны. Покажите, что при произвольных $\alpha, s \in \mathbb{C}$ операторы $T_{\alpha,s}(q)$ ограничены.

Задача. Докажите, что

$$T_{\alpha,s}(q) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H_\alpha).$$

Действие алгебры Ли $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, соответствующее действию $T_{\alpha,s}$ группы $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$, задается формулой

$$\tau_{\alpha,s}\Big(\varkappa(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)f(\varphi) = \Big(\varkappa(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)\varkappa'(\varphi)\Big)f(\varphi),$$

или

$$L_n e^{i(k+\alpha)\varphi} = \Big(k + \alpha + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)n\Big)e^{i(k+n+\alpha)\varphi}.$$

Теперь, применяя формулу (VI.5.27), мы получаем следующий набор фермионных квадратичных операторов

$$\widetilde{L}^{(f)}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(k + \alpha + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)n\Big){:}b_{k+n}b^*_k{:}$$

Перепишем их, не используя символа «: :»:

$$\begin{aligned} \widetilde{L}^{(f)}_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(k + \alpha + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)n\Big)b_{k+n}b^*_k \quad \text{при} \quad n \neq 0, \\ \widetilde{L}^{(f)}_0 &= -\sum_{k<0}(k+\alpha)b^*_k b_k + \sum_{k\geqslant 0}(k+\alpha)b_k b^*_k. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Формула (VI.5.28) дает

$$\left[\tilde L_n^{(f)}, \tilde L_m^{(f)}\right] = (m-n)\tilde L_{m+n}^{(f)} + \left(\tfrac{m^3-m}{12}(1+12s^2) + m\left(\left(\alpha-\tfrac12\right)^2+s^2\right)\right)\delta_{m,-n}\cdot E.$$

Этот набор операторов удобно чуть-чуть изменить:

$$L_0^{(f)} := \tilde L_0^{(f)} + \tfrac12\left(\left(\alpha-\tfrac12\right)^2+s^2\right)\cdot E; \quad L_n^{(f)} := \tilde L_n^{(f)}.$$

Тогда мы получаем обычные коммутационные соотношения алгебры Вирасоро

$$\left[L_n^{(f)}, L_m^{(f)}\right] = (m-n)L_{m+n}^{(f)} + \tfrac{m^3-m}{12}(1+12s^2)\delta_{m,-n}\cdot E.$$

Далее, рассмотрим подпространства $\Lambda^{(\sigma)}$, такие же, как в п. VI.5.8; эти подпространства являются Vir-инвариантными. В каждом из подпространств $\Lambda^{(\sigma)}$ легко указать по одному особому вектору $f_\sigma(\xi)$:

$$\begin{aligned} f_0(\xi) &= 1,\\ f_\sigma(\xi) &= \xi_0\ldots\xi_{\sigma-1} \quad \text{при} \quad \sigma>0,\\ f_{-\sigma}(\xi) &= \xi_{-1}\ldots\xi_{-\sigma} \quad \text{при} \quad \sigma<0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Старшие веса этих векторов равны

$$\begin{aligned} h &= \tfrac12\left(\left(\alpha+\sigma-\tfrac12\right)^2+s^2\right),\\ c &= 1+12s^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что в случае $\alpha\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$ наше представление алгебры Vir унитарно по построению, и мы получаем серию унитарных представлений Vir. Однако фермионная конструкция унитарных представлений дает в точности те же старшие веса, что и бозонная конструкция п. 2.5. Более того, формулы (2.16) и (3.5) подозрительно похожи друг на друга. В добавлении, посвященном бозон-фермионному соответствию, мы увидим, что это не случайно.

3.4. Замечания. Вырожденные фермионные конструкции. Рассмотрим сначала пространство $H_{1/2}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$. Операция комплексного сопряжения $f(\varphi)\mapsto\overline{f(\varphi)}$ является антилинейной изометрией $H_{1/2}^+\to H_{1/2}^-$. Таким образом, $H_{1/2}$ становится объектом категории $\overline{\mathbf{GD}}$.

Симметричная билинейная форма в $H_{1/2}$ задается формулой

$$\{f,g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)g(\varphi)\,d\varphi.$$

В пространстве $H_{1/2}$ действует двулистная накрывающая $\mathrm{Diff}^{(2)}$ группы Diff (см. п. 1.4) по формуле

$$T_{1/2,0}(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2}, \tag{3.6}$$

где $q\in\mathrm{Diff}^{(2)}$. Эти операторы лежат в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}$ и коммутируют с комплексным сопряжением. Следовательно, они сохраняют структуру объекта категории $\overline{\mathbf{GD}}$. Итак, мы получили вложение $\mathrm{Diff}^{(2)}$ в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(H_{1/2})$. Более того, операторы (3.6) унитарны, и поэтому образ группы $\mathrm{Diff}^{(2)}$ на самом деле содержится в $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(H_{1/2})$. Ограничивая спинорное представление группы $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(H_{1/2})$ на $\mathrm{Diff}^{(2)}$, мы получаем унитарное проективное представление группы Diff.

Запишем формулы для соответствующего действия алгебры Ли Vect в фермионном пространстве Фока. Введем антикоммутирующие переменные $\xi_{1/2},\xi_{3/2},\xi_{5/2},\ldots$. Тогда $(n>0)$

$$L_n = \sum\left(\alpha+\tfrac n2\right)\xi_{\alpha+n}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} + \frac14\sum_{\alpha+\beta=n}(\alpha-\beta)\xi_\alpha\xi_\beta,$$

$$L_0 = \sum \alpha\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha},$$

$$L_{-n} = \sum\left(\alpha+\tfrac n2\right)\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha+n}} + \frac14\sum_{\alpha+\beta=n}(\alpha-\beta)\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}.$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_m,L_n] = (n-m)L_{m+n} + \tfrac{n^3-n}{12}\cdot\tfrac12\,\delta_{m,-n}\cdot E.$$

Далее, подпространства Λ^+ и Λ^-, состоящие соответственно из четных и нечетных функций, очевидно, Vir-инвариантны. Векторы $1\in\Lambda_+$ и $\xi_{1/2}\in\Lambda_-$, как легко видеть, являются особыми векторами (их веса равны соответственно $(h,c)=\left(0,\frac12\right)$ и $\left(\frac12,\frac12\right)$). Поэтому их Vir-циклические оболочки являются модулями $L\left(0,\frac12\right)$ и $L\left(\frac12,\frac12\right)$. На самом деле $\Lambda_+\simeq L\left(0,\frac12\right)$, $\Lambda_-\simeq L\left(\frac12,\frac12\right)$, но доказательство этого требует привлечения дополнительных соображений.

Перейдем к рассмотрению другой «вырожденной конструкции». Рассмотрим пространство $H_0\simeq L^2(S^1)$ и снабдим его структурой объекта категории $\overline{\mathbf{B}}$. Для этого представим H_0 в виде $H_0=H_0^-\oplus H_0^0\oplus H_0^+$, где H_0^- состоит из функций вида $\sum_{k<0}c_ke^{ik\varphi}$, H_0^+ — из функций $\sum_{k>0}c_ke^{ik\varphi}$, а H_0^0 — из констант. Антилинейная изометрия $H_0^+\to H_0^-$ есть обычная операция комплексного сопряжения. Симметричная билинейная форма в H_0 задается формулой

$$\{f,g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)g(\varphi)\,d\varphi.$$

Далее, группа Diff действует в H_0 преобразованиями

$$T(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2}.$$

Несложно убедиться, что $T(q)\in\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{B}}}(H_0)$. Ограничивая спинорное представление группы $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{B}}}(H_0)$ на Diff, мы получаем унитарное проективное представление Diff.

На уровне алгебры Ли оно задается формулами

$$L_n = \sum_{k>0}\left(k+\tfrac n2\right)\xi_{k+n}\frac{\partial}{\partial\xi_k} + \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\left(k-\tfrac n2\right)\xi_k\xi_{n-k} + \tfrac n2\xi_n,$$

$$L_0 = \sum k\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_k} + \frac1{16},$$

$$L_{-n} = \sum_{k>0}\left(k+\tfrac n2\right)\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_{k+n}} + \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\left(k-\tfrac n2\right)\frac{\partial}{\partial\xi_{n-k}}\frac{\partial}{\partial\xi_k} + \frac n2\frac{\partial}{\partial\xi_n},$$

где k,n — целые, $n>0$.

Легко видеть, что функция $f(\xi)=1$ является особым вектором веса $(h,c)=\left(\frac1{16},\frac12\right)$. Можно показать, что наше представление неприводимо, и, тем самым, изоморфно $L\left(\frac1{16},\frac12\right)$.

3.5. Замечания. Теорема интегрируемости. Итак, мы получили явные конструкции унитарных представлений Diff, соответствующие модулям $L(h,c)$ при

а) $1\leqslant c\leqslant 24h+1$;

б) $c=\frac12$; $h=0,\ \frac1{16},\ \frac12$;

в) $h=0$, $c=0$ (это одномерное представление).

Еще кое-что может быть получено с помощью тензорных произведений. Легко видеть, однако, что мы таким образом не получаем всех (h,c), при которых $L(h,c)$ унитаризуем.

Теорема 3.4. Любой унитаризуемый модуль $L(h,c)$ интегрируется до унитарного проективного представления группы Diff.

Такая формулировка теоремы не совсем аккуратна, и нужно поточнее сказать, что значит слово «интегрируется». Сейчас мы перечислим точно свойства соответствия между представлением $l=L(h,c)$ алгебры Vect и соответствующим представлением ρ группы Diff (см. [Goodman, Wallach (1985)]).

1. Обозначим через N пополнение модуля $L(h,c)$ по этому инвариантному скалярному произведению. Назовем вектор $v \in N$ гладким, если v содержится в области определения всех операторов L_0^k, $k > 0$. Тогда для любого гладкого векторного поля $v = \sum c_n e^{in\varphi} \frac{\partial}{i\partial\varphi}$ оператор (неограниченный) $l(v) = \sum c_n L_n$ переводит пространство гладких векторов в себя (это простое утверждение).

2. Для любого элемента $v = \sum c_n L_n \in \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$ оператор $l(v) = \sum c_n L_n$ в N существенно самосопряжен и

$$\exp\bigl(tl(v)\bigr) = \lambda(t)\rho_{h,c}\bigl(\exp(tv)\bigr),$$

где ρ — представление группы Diff, а $|\lambda(t)| = 1$.

3. Для любого $g \in \mathrm{Diff}$ и любого $v = p(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \in \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$ выполнено

$$l\bigl(\mathrm{Ad}(g)v\bigr) = \mu(g,v)\rho(g)^{-1}l(v)\rho(g),$$

где $\mu(g,v)$ — комплексное число, по модулю равное 1, а через $\mathrm{Ad}(g)v$ обозначен образ векторного поля v под действием диффеоморфизма g (т. е. $\mathrm{Ad}(g)\left(p(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = p\bigl(g(\varphi)\bigr)g'(\varphi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\varphi}$).

Доказательство этой теоремы основано на простой и красивой идее. Для тех модулей, для которых у нас есть явная конструкция, высказывание проверяется без труда. После этого достаточно доказать следующее утверждение: пусть модули $L(h_1,c_1)$ и $L(h_2,c_2)$ унитаризуемы. Тогда интегрируемость $L(h_1,c_1) \otimes L(h_2,c_2)$ и $L(h_1,c_1)$ влечет интегрируемость $L(h_2,c_2)$. Проверка этого высказывания в принципе несложна, но требует некоторого труда. ■

Теорема 3.5. Любое (не обязательно унитарное) представление $L(h,c)$ интегрируется до проективного представления Diff.

Мы не будем уточнять смысл этого утверждения, заметим лишь, что «универсальная фемионная конструкция» дает представления со всеми возможными старшими весами (h,c).

§ 4. *Полугруппа* Γ

Мы переходим к изучению категорной оболочки группы Diff. Естественно начать с полугрупповой оболочки Γ группы Diff, а уже потом перейти к категорной. При этом нам будет проще работать не с группой Diff, а с ее подгруппой Diff_a, состоящей из аналитических диффеоморфизмов окружности.

4.1. Первое определение. Элемент *полугруппы трубок* Γ — это тройка (R, r_+, r_-), где R — одномерное комплексное многообразие с краем (*риманова поверхность*), топологически эквивалентное кольцу, а r_+, $r_- : S^1 \to R$ — аналитические параметризации компонент края, при этом при обходе контура $r_+(e^{i\varphi})$ поверхность остается по правую руку, а при обходе $r_-(e^{i\varphi})$ — по левую (см. рис. 3a).

Две тройки (R, r_+, r_-) и (R', r'_+, r'_-) считаются одинаковыми, если существует билогоморфное отображение $\varkappa : R \to R'$ такое, что $r'_\pm = \varkappa \circ r_\pm$.

Напомним, что отображение называется *биголоморфным*, или *конформным*, если оно голоморфно вместе со своим обратным.

Пусть $\mathscr{R} = (R, r_+, r_-)$, $\mathscr{Q} = (Q, q_+, q_-)$ — два элемента полугруппы Γ. Определим их произведение $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-)$ по следующему правилу. Рассмотрим несвязное объединение $R \cup Q$ и склеим точки $r_-(e^{i\varphi})$ и $q_+(e^{i\varphi})$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. Таким образом мы получим кольцеобразную поверхность P, при этом края поверхности сохраняют те параметризации, которые у них уже есть (т. е. $p_+(e^{i\varphi}) := r_+(e^{i\varphi})$, $p_-(e^{i\varphi}) := q_-(e^{i\varphi})$), см. рис. 3b (линия склейки «забывается»).

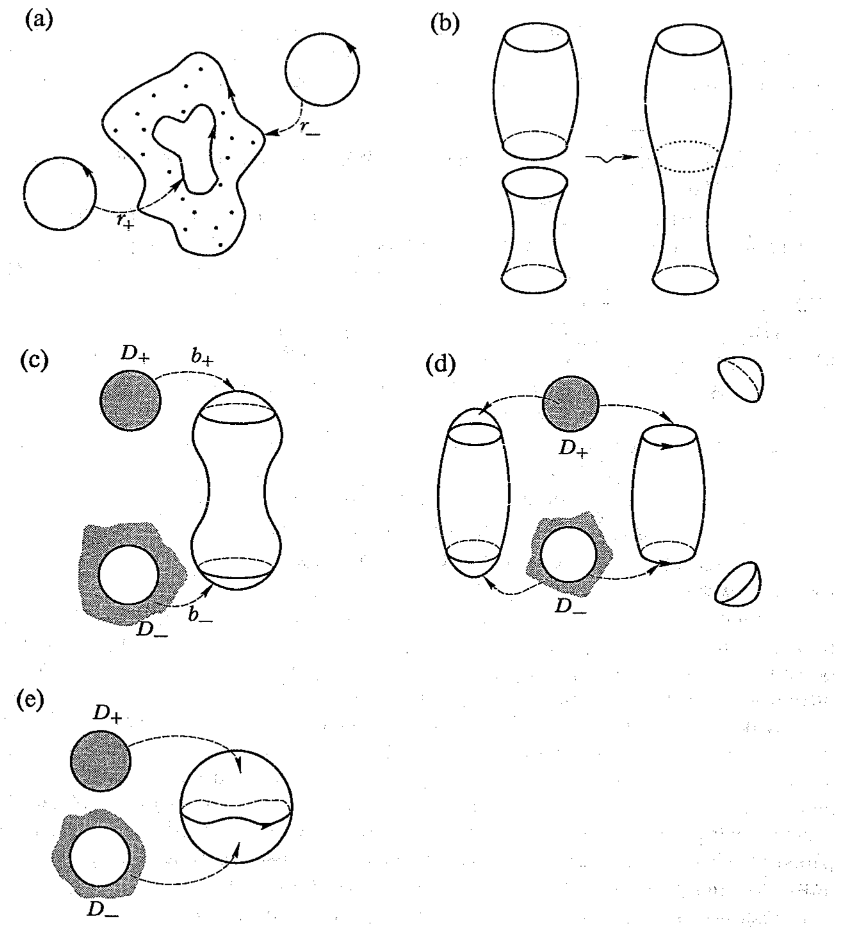


Рис. 3

4.2. Корректность определения. Здесь мы должны сделать небольшое отступление и ответить на два простых вопроса: что значит «аналитическая параметризация края» и почему P является комплексно аналитическим многообразием. Напомним сначала следующую классическую теорему комплексного анализа (см. [Hurwitz, Courant (1952)], [Голузин (1966)]).

Теорема 4.1 (об униформизации кольца).

а) Пусть Q — одномерное комплексное многообразие, топологически эквивалентное открытому кольцу. Тогда Q биголоморфно эквивалентно некоторому кольцу вида $r < |z| < R$ (где $r \geqslant 0$, $R \leqslant \infty$).

б) Кольца $0 < r < |z| < R$ и $0 < r_1 < |z| < R_1$ эквивалентны лишь в случае $\frac{r}{R} = \frac{r_1}{R_1}$ или $\frac{r}{R} = \frac{R_1}{r_1}$. Биголоморфные отображения кольца $r < |z| < R$ в себя исчерпываются поворотами $z \mapsto e^{i\varphi}z$ и отображениями $z \mapsto e^{i\varphi}rRz^{-1}$.

в) Пусть $\overline{Q}$ — замкнутая кольцеобразная область на плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная двумя замкнутыми аналитическими кривыми. Тогда каноническое биголоморфное отображение $\overline{Q}$ на кольцо $r \leqslant |z| \leqslant R$ вещественно аналитично вплоть до границы.

(Четыре разных доказательства этой теоремы можно найти в [Голузин (1966)] § V.1, V.2, V.6, VI.4.)

Из теоремы 4.1, в частности, следует, что на крае кольцеобразной римановой поверхности есть каноническая структура вещественного аналитического многообразия (потому что такая структура есть на окружностях $|z| = r$, $|z| = R$, и эту структура уважается конформными автоморфизмами кольца).

Итак, пусть $\mathscr{R} = (R, r_+, r_-)$, $\mathscr{Q} = (Q, q_+, q_-) \in \Gamma$. В силу аналитичности отображений r_-, q_+ существует окрестность $\mathscr{O}$ окружности $|z| = 1$ такая, что

1. отображение q_+ продолжается до голоморфного отображения $\tilde{q}_+$ множества $\mathscr{O}_+ := \{z \in \mathscr{O}; |z| < 1\}$ в Q;

2. отображение q_- продолжается до голоморфного отображения $\tilde{q}_-$ множества $\mathscr{O}_- := \{z \in \mathscr{O}; |z| > 1\}$ в R.

Многообразие P получается склейкой трех комплексных многообразий $R \setminus r_-(S^1)$, $Q \setminus q_+(S^1)$, $\mathscr{O}$. Многообразие $Q \setminus q_+(S^1)$ склеивается с $\mathscr{O}$ путем отождествления $z \in \mathscr{O}_+$ с $\tilde{q}_+(z) \in Q$. Многообразие $R \setminus r_-(S^1)$ склеивается с $\mathscr{O}$ путем отождествления $z \in \mathscr{O}_-$ с $\tilde{r}_-(z) \in R$.

Теперь ясно, что P — комплексное многообразие. С корректностью определения уже все понятно, но здесь нам удобно обсудить случай произвольной (не обязательно кольцеобразной) римановой поверхности. Пусть M — компактная риманова поверхность без края (топологически она представляет из себя сферу с g ручками), а $D_1, \ldots, D_p$ — замкнутые связные непересекающиеся множества на M, причем каждое из них содержит больше одной точки. Покажем, что множество $M \setminus (\bigcup D_j)$ имеет каноническую компактификацию, эта компактификация является двумерным (вещественным) многообразием с краем, а край обладает канонической структурой вещественного аналитического многообразия (см. например, [Abikoff (1980)]). Под *компактными римановыми поверхностями с краем* мы будем понимать полученные таким образом компактификации.

Рассмотрим аналитическую несамопересекающуюся кривую C_α на M, охватывающую открытую область N_α, эквивалентную кругу, при этом $N_\alpha \supset D_\alpha$, а $N_\alpha \cup C_\alpha$ не пересекается со всеми остальными областями D_j $(j \neq \alpha)$. Далее, отобразим область $N_\alpha \setminus D_\alpha$ конформно на кольцо $r < |z| < R$ (важно заметить, что $N_\alpha \setminus D_\alpha$ отображается на настоящее кольцо, а не на проколотый круг; в противном случае обратное отображение по теореме об устранимой особенности продолжалось бы в круг голоморфно, а потому множество D_α состояло бы из одной точки). Пусть, например, компонента границы $|z| = R$ соответствует кривой C_α, а компонента $|z| = r$ соответствует D_α. Теперь мы можем добавить окружность $|z| = r$ к кольцу $r < |z| < R$; соответственно добавляется и замкнутая кривая к области $N_\alpha \setminus D_\alpha$. Компактификация построена.

Возникает вопрос, не зависит ли ответ от выбора кривой C_α. Возьмем другую замкнутую аналитическую кривую C'_α, охватывающую D_α. Без ограничения общности можно считать, что C'_α лежит внутри C_α. Тогда образ $N'_\alpha \setminus D_\alpha$ в кольце $r < |z| < R$ является кольцом с аналитической границей, и теперь утверждение становится очевидным.

4.3. Второе определение полугруппы Γ. Обозначим через D_+ круг $|z| \leqslant 1$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, а через D_- — диск $|z| \geqslant 1$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Через D_+^0 мы обозначим открытый круг $|z| < 1$, а через D_-^0 — открытый диск $|z| > 1$.

Напомним, что отображение f открытой области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ в риманову поверхность называется *однолистным*, если f голоморфно и $f(z_1) \neq f(z_2)$ для любых различных точек $z_1, z_2 \in D$. Функцию f, определенную в замкнутой области $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, мы будем называть *однолистной*, если f однолистно продолжается в некоторую открытую область $D \supset E$.

Элементом полугруппы Γ мы назовем тройку $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$, где

1. B — компактная риманова поверхность с краем, конформно эквивалентная сфере Римана;

2. b_+ — однолистное отображение $D_+ \to B$, а b_- — однолистное отображение $D_- \to B$, при этом области $b_+(D_+)$ и $b_-(D_-)$ не пересекаются (см. рис. 3c).

Мы используем в обозначении $[B, b_+, b_-]$ квадратные скобки, чтобы было различие с обозначениями п. 4.1.

Два элемента $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$ и $\mathscr{B}' = [B', b'_+, b'_-]$ мы считаем совпадающими, если существует конформное отображение $q : B \to B'$ такое, что $b'_\pm(z) = q\big(b_\pm(z)\big)$.

Пусть, далее, $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$, $\mathscr{C} = [C, c_+, c_-] \in \Gamma$. Определим их произведение $\mathscr{A} = [A, A_+, a_-]$ так, что

1. $\mathscr{A}$ получается склейкой $B \setminus b_-(D_-^0)$ и $C \setminus c_+(D_+^0)$ путем отождествления точек $b_-(e^{i\varphi}) \in B \setminus b_-(D_-^0)$ и $c_+(e^{i\varphi}) \in C \setminus c_+(D_+^0)$ для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$;

2. $a_+ = b_+, a_- = c_-$.

Убедимся в равносильности определений. Пусть $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$ — элемент Γ в смысле второго определения. Определим по $\mathscr{B}$ элемент $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-)$ в смысле первого определения. Для этого положим

$$P = B \setminus \big(b_+(D_+^0) \cup b_-(D_-^0)\big); \quad p_\pm(e^{i\varphi}) = b_\pm(e^{i\varphi})$$

(см. рис. 3d).

Обратно, пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-)$. Восстановим по нему элемент $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$. Для этого подклеим к кольцу P диск D_+, отождествляя точки $e^{i\varphi} \in D_+$ с $p_+(e^{i\varphi}) \in P$, а также подклеим диск D_-, отождествляя точки $e^{i\varphi} \in D_+$ с $p_-(e^{i\varphi}) \in P$. Таким образом, мы получим сферу B. При этом, по построению, фиксированы отображения $D_+ \to B$ и $D_- \to B$.

4.4. Диффеоморфизмы как предельные элементы полугруппы Γ. Рассмотрим полугруппу $\overline{\overline{\Gamma}}$, которая определяется так же, как и Γ в п. 4.3, только требование «$b_+(D_+)$ не пересекается $b_-(D_-)$» заменим на «$b_+(D_+^0)$ не пересекается с $b_-(D_-^0)$». Может быть, более правильным объектом является $\overline{\overline{\Gamma}}$, а не полугруппа $\overline{\Gamma}$, определенная чуть ниже, но автор не умеет доказывать для $\overline{\overline{\Gamma}}$ некоторых теорем, справедливых для $\overline{\Gamma}$, а потому предпочитает работать с $\overline{\Gamma}$.

Определим в $\overline{\overline{\Gamma}}$ подмножество Δ, состоящее из всех троек $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-] \in \overline{\overline{\Gamma}}$ таких, что $b_+(D_+) \cup b_-(D_-) = B$ (см. рис. 3e). Ясно, что множество Δ замкнуто относительно умножения.

Сейчас мы построим канонический изоморфизм $\Delta \leftrightarrow \mathrm{Diff}_a$.

Пусть $[B, b_+, b_-] \in \Delta$. Тогда элемент $q \in \mathrm{Diff}_a$ задается формулой

$$q(e^{i\varphi}) = b_+^{-1}\big(b_-(e^{i\varphi})\big).$$

Обратно, пусть $q \in \mathrm{Diff_a}$. Построим по нему элемент $[B, b_+, b_-]$. Сфера B получается склейкой дисков D_+ и D_- путем отождествления точек $e^{i\varphi} \in D_-$ и $q(e^{i\varphi}) \in D_+$. При этом сами собой фиксируются отображения $D_+ \to B$ и $D_- \to B$ (а именно, каждой точке диска ставится в соответствие она сама, но рассматриваемая уже как точка сферы B).

Через $\overline{\Gamma}$ мы обозначим подполугруппу $\Delta \cup \Gamma \subset \overline{\overline{\Gamma}}$, при этом группу $\mathrm{Diff_a}$ мы будем отождествлять с подгруппой $\Delta \subset \overline{\Gamma}$.

4.5. Каноническое разложение. Пусть теперь $\mathscr{R} = (R, r_+, r_-) \in \Gamma$. Отобразим R конформно на кольцо C вида $e^{-t} \leqslant |z| \leqslant 1$ так, чтобы контур $r_-(e^{i\varphi})$ отобразился в контур $|z| = 1$ (а $r_+(e^{i\varphi})$ — соответственно в $|z| = e^{-t}$).

Теперь следующее высказывание становится очевидным.

Теорема 4.2. Любой элемент $\mathscr{P} \in \Gamma$ допускает разложение вида

$$\mathscr{P} = q_1 \mathscr{A}_t q_2, \tag{4.2}$$

где $q_1, q_2 \in \mathrm{Diff_a} = \Delta$, а $\mathscr{A}_t = (A, a_+, a_-)$, где A — кольцо $e^{-t} \leqslant |z| \leqslant 1$,

$$a_-(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}, \quad a_+(e^{i\varphi}) = e^{-t} e^{i\varphi}.$$

При этом равенство

$$q_1 \mathscr{A}_t q_2 = q_1' \mathscr{A}_{t'} q_2'$$

возможно лишь в случае

$$t = t', \quad q_1' = q_1 R_\theta, \quad q_2' = R_\theta^{-1} q_2,$$

где R_θ — поворот на угол θ.

Разложение (4.2) мы будем называть *каноническим разложением* $\mathscr{P}$. Заметим, что его можно сделать единственным, если потребовать $q_2(1) = 1$.

4.6. Интерпретация некоторых элементов полугруппы Γ. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех аналитических отображений q окружности $|z| = 1$ в круг $|z| < 1$, удовлетворяющих условиям:

а) производная $q'(e^{i\varphi})$ не обращается в 0;

б) $q(e^{i\varphi})$ — несамопересекающаяся кривая, проходимая против часовой стрелки.

Построим по каждому $q \in \mathcal{M}$ канонически определенный элемент $\mathscr{P}_q = (P, p_+, p_-) \in \Gamma$ по следующему правилу: P есть замкнутая область на комплексной плоскости, заключенная между кривыми $|z| = 1$ и $q(e^{i\varphi})$, а

$$p_-(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}, \quad p_+(e^{i\varphi}) = q(e^{i\varphi}).$$

Важно заметить, что далеко не все элементы полугруппы Γ представимы в виде $\mathscr{P}_q$, где $q \in \mathcal{M}$. Пусть q_1 и $q_2 \in \mathcal{M}$. Пусть q_1 однолистно продолжается в замкнутую кольцевую область, ограниченную кривыми $e^{i\varphi}$ и $q_2(e^{i\varphi})$. Тогда корректно определена композиция $q_1 \circ q_2$ (точнее, композиция q_1 с голоморфным продолжением q_2), и при этом $q_1 \circ q_2 \in \mathcal{M}$. Легко видеть, что

$$\mathscr{P}_{q_1 q_2} = \mathscr{P}_{q_1} \mathscr{P}_{q_2}.$$

Рассмотрим теперь полугруппу $\mathcal{B}$, состоящую из однолистных отображений q круга $|z| \leqslant 1$ в круг $|z| < 1$. Пусть $q \in \mathcal{B}$. Тогда ограничение q на окружность $|z| = 1$ является элементом $\mathcal{M}$. Таким образом, мы видим, что $\mathcal{B}$ является подполугруппой в Γ.

Замечание. Каноническое разложение из п. 4.5 можно интерпретировать следующим образом: любой элемент $\mathscr{P} \in \Gamma$ представим в виде произведения $\mathscr{P} = q_1 R_t q_2$, где $q_1, q_2 \in \mathrm{Diff_a}$, а R_t — отображение $z \mapsto e^{-t} z$.

Задача. Пусть $\mathscr{P} = [P, p_+, p_-] \in \Gamma$. Рассмотрим отображение $p_+ \circ (p_-^{-1})$, определенное на кривой $p_-(e^{i\varphi})$ и переводящее эту кривую в кривую $p_+(e^{i\varphi})$. Покажите, что $\mathscr{P} \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $p_+ \circ (p_-^{-1})$ продолжается до однолистного отображения $P \setminus p_-(D_-^0) \to p_+(D_+)$.

Полугруппа $\mathcal{B}$ содержит подполугруппу $\mathcal{B}_0$, состоящую из отображений q таких, что $q(0) = 0$.

Задача. Покажите, что любой элемент $\mathscr{P} \in \Gamma$ представим в виде произведения $q \cdot g$, где $q \in \mathcal{B}_0$, $g \in \mathrm{Diff_a}$.

4.7. Экспоненты от векторных полей. Пусть $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}}$ — алгебра (вещественно) аналитических вещественных векторных полей на окружности, а $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{C}}$ — алгебра аналитических комплексных векторных полей на окружности. Элементы $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{C}}$ удобно записывать в виде $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$, где $v(z)$ — функция, вещественно аналитическая на окружности $|z| = 1$ (а, следовательно, голоморфно продолжимая в некоторую окрестность окружности).

Пусть $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ — голоморфное векторное поле в некоторой области U на плоскости $\mathbb{C}$. Поставим ему в соответствие вещественное векторное поле

$$I_v = v(z)\,\frac{\partial}{\partial z} + \overline{v(z)}\,\frac{\partial}{\partial \bar z}$$

в области U на плоскости $\mathbb{R}^2$; напомним, что $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, а $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Таким образом, голоморфные векторные поля $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ можно отождествлять с «настоящими» векторными полями на плоскости. Заметим, что поля $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ и $\overline{w(z)}\frac{\partial}{\partial \bar z}$ коммутируют. Поэтому

$$[I_\alpha, I_\beta] = I_{[\alpha,\beta]}$$

для любых голоморфных векторных полей $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$, $\beta = w(z)\frac{\partial}{\partial z}$.

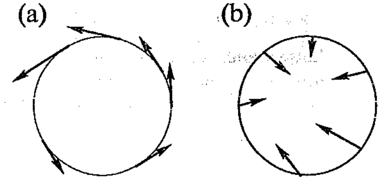


Рис. 4

Рассмотрим далее в алгебре $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}}$ конус C, состоящий из векторных полей $a(\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi}$ таких, что $a(\varphi) > 0$. С геометрической точки зрения это означает, что векторное поле во всех точках окружности направлено против часовой стрелки (см. рис. 4а). Легко увидеть, что конус C — выпуклое $\mathrm{Diff_a}$-инвариантное подмножество в вещественной алгебре Ли $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим далее в комплексной алгебре Ли $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{C}}$ множество $\widetilde{C} = \overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}} + iC$. Иными словами, $\widetilde{C}$ состоит из векторных полей

$a(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ таких, что $\operatorname{Im} a(\varphi) > 0$. С геометрической точки зрения это означает, что векторное поле $a(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ направлено строго внутрь окружности (см. рис. 4b).

Сейчас мы покажем, что любое векторное поле, лежащее в конусе $\widetilde{C}$, порождает однопараметрическую полугруппу в Γ.

Проще всего случай, когда векторное поле $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ голоморфно продолжается в круг $|z| \leqslant 1$. В этом случае векторное поле имеет вид

$$\sum_{n\geqslant -1} c_n z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{n\geqslant -1} c_n L_n.$$

Поэтому векторное поле I_α определено во всем круге $|z| \leqslant 1$, а в силу условия $\alpha \in \widetilde{C}$ мы получаем, что I_α направлено на окружности строго внутрь круга. Поэтому поток g_t векторного поля I_α корректно определен при всех $t \geqslant 0$ и представляет из себя однопараметрическую полугруппу отображений круга в себя. В силу голоморфности векторного поля $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ отображения g_t являются голоморфными, т. е. g_t лежит в полугруппе $\mathcal{B}$ (см. п. 4.6).

Пусть теперь $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ — произвольный элемент $\widetilde{C}$. Продолжим $v(z)$ голоморфно в некоторую открытую область U, содержащую окружность $|z| = 1$. Пусть W — некоторая открытая область, замыкание которой содержится в U. Тогда поток g_t векторного поля I_α определен, вообще говоря, лишь при малых $|t|$ и отображает область W в область U. При достаточно малых $t > 0$ отображение g_t как отображение окружности $|z| = 1$ в круг $|z| < 1$ содержится в множестве $\mathcal{M}$ (см. п. 4.6). Но $\mathcal{M}$ вкладывается в Γ, поэтому мы получаем семейство $\mathscr{P}_{g_t}$ (см. п. 4.6) элементов Γ, определенное в некотором интервале $0 \leqslant t < \varepsilon$ и удовлетворяющее условию

$$\mathscr{P}_{g_{t_1+t_2}} = \mathscr{P}_{g_{t_1}}\mathscr{P}_{g_{t_2}},$$

если $t_1 + t_2 < \varepsilon$. Теперь мы уже можем определить однопараметричекую полугруппу $\exp\bigl(tv(z)\frac{\partial}{\partial z}\bigr) \in \Gamma$ по правилу

$$\exp\Bigl(tv(z)\frac{\partial}{\partial z}\Bigr) := \mathscr{P}_{g_{t_1}}\mathscr{P}_{g_{t_2}}\ldots\mathscr{P}_{g_{t_N}}$$

для любых положительных $t_1, t_2, \ldots, t_N$ таких, что

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_N = t, \quad t_1 < \varepsilon, \quad \ldots, \quad t_N < \varepsilon.$$

Замечание. Алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$ соответствует группа Diff. Но алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ никакой группы не соответствует (проще всего в этом убедиться, заметив, что группы $\mathrm{G}_{(n)}$ из п. 1.2 при $n > 2$ не имеют комплексной оболочки). Однако мы только что видели, как полугруппа Γ в некотором смысле соответствует алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$. Таким образом, Γ — своего рода «существующая часть» несуществующей комплексной оболочки группы Diff.

Замечание. Рассмотрим в $\overline{\mathrm{Vect}^a_{\mathbb{C}}}$ повышающую («борелевскую») подалгебру $\mathfrak{b}_0$, состоящую из векторных полей, голоморфно продолжимых в круг, и обращающихся в 0 в точке $z = 0$. Такие поля имеют вид

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{n\geqslant 0} c_n L_n.$$

Экспоненты от векторных полей $\alpha \in \mathfrak{b}_0$ лежат в полугруппе $\mathcal{B}_0$ (см. п. 4.6). Таким образом, $\mathcal{B}_0$ оказывается своего рода «борелевской подполугруппой» в полугруппе Γ.

4.8. Замечания. А. Универсальное накрытие $\widetilde{\Gamma}$ над Γ. Рассмотрим одномерное (некомпактное) комплексное многообразие R с краем, топологически эквивалентное полосе $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b$. Рассмотрим какое-нибудь биголоморфное отображение $\theta := R \to R$, сохраняющее компоненты края.

Задача. Покажите, что любое биголоморфное отображение полосы $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b$ в себя, переводящее прямую $\operatorname{Im} z = a$ в себя (а $\operatorname{Im} z = b$ в себя) есть сдвиг $z \mapsto z + \alpha$.

Элемент полугруппы $\widetilde{\Gamma}$ есть четверка (R, θ_R, r_+, r_-), где R — комплексное одномерное многообразие с краем, топологически эквивалентное полосе, $\theta_R : R \to R$ — биголоморфное отображение без неподвижных точек, сохраняющее компоненты края, а $r_\pm : \mathbb{R} \to R$ — аналитические параметризации компонент края такие, что

$$r_\pm(x + 2\pi) = \theta_R(x). \tag{4.3}$$

При этом при прохождении контура $r_+(x)$ поверхность остается справа, а при прохождении $r_-(x)$ — слева.

Два элемента $(R, \theta_R, r_+, r_-), (Q, \theta_Q, q_+, q_-) \in \widetilde{\Gamma}$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $h : R \to Q$ такое, что

$$\theta_Q = h \circ \theta_R \circ h^{-1}, \quad q_+ = h \circ r_+, \quad q_- = h \circ r_-.$$

Произведение (R, θ_R, r_+, r_-) и (Z, θ_Z, z_+, z_-) — это тройка (Y, θ_Y, y_+, y_-), где

1. Y получается склейкой R и Z путем отождествления точек $r_-(x)$ и $z_+(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
2. $\theta_Y = \theta_R$ на R, и $\theta_Y = \theta_Z$ на Z;
3. $y_+ = r_+$, $y_- = r_-$.

Построим каноническое отображение $\pi : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$. Каждому $(R, \theta_R, r_+, r_-) \in \widetilde{\Gamma}$ ставится в соответствие тройка (R', r'_+, r'_-) такая, что

1. R' — фактор R по отношению эквивалентности $z \sim \theta_R(z)$ для всех $z \in R$;
2. $r'_\pm(e^{ix})$ есть композиция проекции $R \to R'$ и $r_\pm$.

Задача. Опишите ядро гомоморфизма π.

B. Топология в Γ. Пусть $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-] \in \Gamma$. Без ограничения общности можно считать, что $B = \overline{\mathbb{C}}$. Группа биголоморфных автоморфизмов сферы есть $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Для любых различных $u_1, u_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ такое, что $gu_1 = 0$, $gu_2 = \infty$. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что

$$b_+(0) = 0, \quad b_-(\infty) = \infty. \tag{4.4}$$

Пусть теперь $\mathscr{B}^{(j)} = \bigl[\overline{\mathbb{C}}, b_+^{(j)}, b_-^{(j)}\bigr]$, $\mathscr{B} = \bigl[\overline{\mathbb{C}}, b^+, b^-\bigr] \in \overline{\Gamma}$. Мы положим $\mathscr{B}_j \to \mathscr{B}$, если существует последовательность $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ такая, что

а) $\lambda_j b_j^+(z) \to b^+(z)$ равномерно на любом круге $|z| < 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$,

б) $[\lambda_j b_j^-(z)]^{-1} \to [b^-(z)]^{-1}$ равномерно на любом диске $|z| > 1 + \varepsilon$ в $\overline{\mathbb{C}}$ $(\varepsilon > 0)$.

Задача*. Докажите, что группа Diff_a плотна в $\overline{\Gamma}$.

Указание. Выберем $\mathscr{B}_j = \bigl[\overline{\mathbb{C}}, b_j^+, b_j^-\bigr] \in \Delta \simeq \mathrm{Diff}_a$ чтобы кривая, разделяющая $b_j^+(D^+)$ и $b_j^-(D_-)$ была такой, как на рисунке 5.

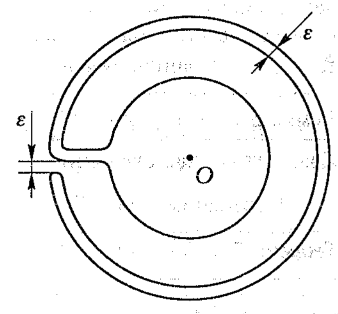


Рис. 5

Покажите, что из $\mathscr{B}_j$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу $\mathscr{A}$ из п. 4.5. Для этого нужно воспользоваться теоремой Каратеодори о сходимости однолистных функций (см., например, [Голузин (1966)], § II.5 или [Hurwitz, Courant (1952)]). Использованный прием очень распространен в теории однолистных функций, см. [Duren (1981)].

Замечание. Я не знаю, являются ли представления полугруппы $\overline{\Gamma}$ (см. следующий параграф) непрерывными в этой топологии.

4.9. Литературные замечания. Гипотеза о существовании комплексной оболочки группы Diff была высказана Г. И. Ольшанским. Она была навеяна теорией инвариантных выпуклых конусов в алгебрах Ли и теорией полугрупп Ли (см. оригинальные работы [Винберг (1980)], [Ольшанский (1981)], [Paneitz (1981)] или монографию [Hilgert, Hoffmann, Lawson (1989)]); несмотря на тесную связь этой теории с бесконечномерными группами, мне пришлось отказаться от обсуждения ее в этой книге. Полугруппа Γ была построена в [Неретин (1987)], см. также [Неретин (1989)], [Segal G. B. (1988)].

§ 5. Вложения полугруппы Γ в полугруппы линейных отношений

5.1. Вложение Γ в полугруппу $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}$. Пусть V — тот же объект категории $\overline{\mathbf{Sp}}$, что и в п. 2.1. Группа Diff_a вкладывается в группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$; наша цель — продолжить это вложение до вложения

$$T : \overline{\Gamma} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V).$$

Пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-) \in \Gamma$. Рассмотрим элемент $f \in V$. Построим по нему 1-форму $f\,d\varphi$ на окружности. Отображения p_+ и p_- отождествляют окружность с компонентами края поверхности P, поэтому 1-формы на окружности переносятся на кривые $p_\pm(e^{i\varphi})$. Итак, обозначим через $p_\pm^*(f\,d\varphi)$ образы 1-формы $f\,d\varphi$ на кривых $p_\pm(e^{i\varphi})$.

Построим теперь по каждому $\mathscr{P} \in \Gamma$ линейное отношение $T(\mathscr{P}) : V \rightrightarrows V$, которое на самом деле окажется элементом $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$. Пусть $(f_+, f_-) \in V \oplus V$. Положим $(f_+, f_-) \in T(\mathscr{P})$, если существует голоморфная 1-форма F на поверхности P такая, что ограничения F на кривые $p_\pm(e^{i\varphi})$ суть $p_\pm^*(f_\pm d\varphi)$.

Здесь возникает следующий вопрос: функции $f_\pm(\varphi)$, вообще говоря, являются обобщенными. Поэтому форма F, вообще говоря, не является непрерывной на краю поверхности P, а тогда не совсем ясно, что значат слова «ограничение голоморфной формы на край»?

5.2. Аккуратное изложение конструкции п. 5.1. Пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-) \in \Gamma$. Определим сначала линейное отношение $T^0(\mathscr{P}) : V \rightrightarrows V$. Положим $(f_+, f_-) \in T^0(\mathscr{P})$, если существует голоморфная 1-форма F на P, аналитическая вплоть до границы, такая, что ограничения F на компоненты края $p_\pm(e^{i\varphi})$ суть 1-формы $p_\pm^*(f\,d\varphi)$.

Лемма 5.1. $T^0(\mathscr{P}\mathscr{R}) = T^0(\mathscr{P})T^0(\mathscr{R})$.

Доказательство: очевидно. ■

Обозначим через $T(\mathscr{P})$ замыкание линейного отношения $T^0(\mathscr{P})$.

Теорема 5.2. $T(\mathscr{P}) \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$.

Следствие 5.3. $\mathscr{P} \mapsto T(\mathscr{P})$ есть гомоморфизм полугруппы Γ в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$.

Доказательство следствия. Действительно, в силу леммы 5.1

$$T(\mathscr{P})T(\mathscr{R}) \supset T^0(\mathscr{P})T^0(\mathscr{R}) \supset T^0(\mathscr{P}\mathscr{R}).$$

Учитывая, что подпространство $T(\mathscr{P})T(\mathscr{R})$ замкнуто, получаем, что

$$T(\mathscr{P})T(\mathscr{R}) \supset T(\mathscr{P}\mathscr{R}).$$

Но с обеих сторон стоят морфизмы категории $\overline{\mathbf{Sp}}$, поэтому мы имеем равенство. ■

Доказательство теоремы. Пусть

$$\mathscr{P} = q_1 \mathscr{A} q_2$$

— каноническое разложение $\mathscr{P}$ (см. п. 4.5). Легко видеть, что

$$T^0(\mathscr{P}) = T(q_1)T^0(\mathscr{A})T(q_2),$$

где ограниченные операторы $T(q_j)$ те же, что в п. 2.2. Поэтому нам достаточно доказать, что $T(\mathscr{A}) \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$.

Рассмотрим в V стандартный базис $\sqrt{1}\,e^{i\varphi}$, $\sqrt{2}\,e^{2i\varphi}$, $\sqrt{3}\,e^{3i\varphi}, \dots$; $\sqrt{1}\,e^{-i\varphi}$, $\sqrt{2}\,e^{-2i\varphi}, \dots$ и отождествим V с координатным пространством $\ell_2 \oplus \ell_2$. Тогда линейное отношение $T^0(\mathscr{A})$ состоит из всех пар $(f_+, f_-) \in V \oplus V$ вида

$$(f_+, f_-) = \Big(\big(\alpha_1 e^{-t}, \alpha_2 e^{-2t}, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots\big), \big(\alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1 e^{-t}, \beta_2 e^{-2t}, \dots\big) \Big), \tag{5.1}$$

причем в силу того, что F аналитична вплоть до границы, существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sum |\alpha_j|(1+\varepsilon)^j < \infty, \quad \sum |\beta_j|(1+\varepsilon)^j < \infty \tag{5.2}$$

(мы использовали то, что голоморфная аналитичная вплоть до границы функция продолжается в чуть большую область).

Замыкание $T(\mathscr{A})$ подпространства $T^0(\mathscr{A})$ состоит из всех векторов вида (5.1), только условие (5.2) заменяется на

$$\sum |\alpha_j|^2 < \infty, \quad \sum |\beta_j|^2 < \infty.$$

Преобразование Потапова подпространства $T(\mathscr{A})$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$, где

$$A = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{-2t} & & \\ & & e^{-3t} & \\ & & & \dots \end{pmatrix},$$

т. е. удовлетворяет условиям п. VI.2.1. Теорема доказана. ■

Итак, мы построили вложение Γ в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$. Ранее мы определили вложение Diff в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$, тем самым мы получаем вложение $\overline{\Gamma} = \mathrm{Diff}_a \cup \Gamma$ в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$.

Ограничивая представление Вейля we(·) полугруппы $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$ на $\overline{\Gamma}$, мы получаем проективное представление полугруппы $\overline{\Gamma}$.

Предложение 5.4. Операторы $\mathrm{we}(T(\mathscr{P}))$ ограничены для всех $\mathscr{P} \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{P} = q_1 \mathscr{A} q_2$ — каноническое разложение $\mathscr{P}$. Тогда

$$\mathrm{we}\big(T(\mathscr{P})\big) = \mathrm{we}\big(T(q_1)\big)\,\mathrm{we}\big(T(\mathscr{A})\big)\,\mathrm{we}\big(T(q_2)\big).$$

Крайние сомножители унитарны с точностью до умножения на константу, а ограниченность оператора $\mathrm{we}(T(\mathscr{A}))$ очевидна. ■

Задача. Докажите, что операторы $\mathrm{we}(T(\cdot\mathscr{A}))$ ядерны (и, более того, лежат в любом классе Шаттена $\mathscr{L}_p$).

5.3. Замечания. §§ 2–3 содержат несколько конструкций вложений Diff (или ее накрывающих) в группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{K}}}(\cdot)$, где $\overline{\mathbf{K}} = \overline{\mathbf{Sp}}, \overline{\mathbf{Spa}}, \overline{\mathbf{GA}}, \overline{\mathbf{GD}}, \overline{\mathbf{B}}$. В п. 5.1–5.2 вложение Diff $\to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(\cdot)$ было продолжено до вложения $\overline{\Gamma} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(\cdot)$. Точно так же остальные вложения $\mathrm{Diff}(\infty) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{K}}}(\cdot)$ продолжаются до вложений универсальной накрывающей $\widetilde{\Gamma}$ полугруппы Γ (см. п. 4.8) в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{K}}}(\cdot)$. Конструкции почти дословно повторяют конструкцию п. 5.1–5.2, и мы оставляем их построение читателю в качестве упражнения (см. также [Неретин (1989.1)], [Неретин (1989.2)]).

§ 6. *Категория* Shtan *Концевича—Сигала*

6.1. Первое определение. Объектами категории **Shtan** являются неотрицательные целые числа $0, 1, 2, \ldots$. Морфизм $m \to n$ — это набор

$$\mathscr{R} = (R, r_j^+, r_l^-), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

где

1. R — компактная (быть может, несвязная) риманова поверхность с аналитическим краем, причем край состоит из $m+n$ окружностей $C_1, \ldots, C_m, D_1, \ldots, D_n$ (номера окружностей фиксированы);

2. $r_\alpha^+ : S^1 \to R$ — аналитические параметризации окружностей $C_1, \ldots, C_m$, причем при проходе пути $C_\alpha = r_\alpha^+(e^{i\varphi})$ поверхность остается по правую руку. Далее, $r_l^- : S^1 \to R$ — аналитические параметризации окружностей $D_1, \ldots, D_n$. При этом при обходе контура $D_l = r_-(e^{i\varphi})$ поверхность остается по левую руку (см. рис. 6a).

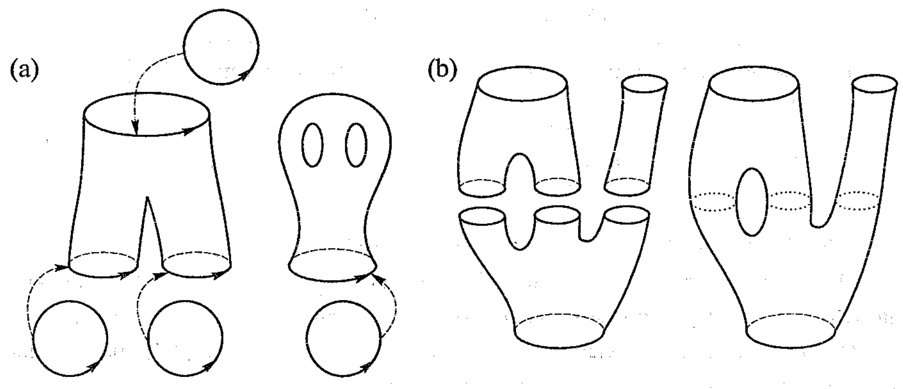


Рис. 6

Два морфизма $\mathscr{R} = (R, r_j^+, r_l^-)$, $\mathscr{P} = (P, p_j^+, p_l^-) : m \to n$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $\sigma : P \to R$ такое, что $r_j^+ = \sigma \circ p_j^+$, $r_l^- = \sigma \circ p_l^-$ для всех j, l.

Пусть, далее, $\mathscr{R} = (R, r_i^+, r_j^-) : m \to n$ и $\mathscr{S} = (S, s_j^+, s_\alpha^-) : n \to k$ — морфизмы категории **Shtan**. Определим их произведение $\mathscr{B} = (B, b_i^+, b_j^-) : m \to k$. Риманова

поверхность B получается склейкой всевозможных пар точек $r_j^-(e^{i\varphi})$ с $s_j^+(e^{i\varphi})$ по всем $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $j = 1, \ldots, n$. Далее, $b_i^+(e^{i\varphi}) = r_i^+(e^{i\varphi})$, а $b_\alpha^-(e^{i\varphi}) = s_\alpha^-(e^{i\varphi})$ (см. рис. 6b).

6.2. Второе определение. Объекты категории **Shtan** — по-прежнему целые числа. Морфизмы $m \to n$ — это наборы

$$\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-]; \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

где

1. R — компактная замкнутая риманова поверхность (быть может, несвязная);
2. $r_j^+ : D_+ \to R$ — однолистные вплоть до границы отображения (области $D_\pm$, $D_\pm^0$ определены в п. 4.3);
3. $r_l^- : D_- \to R$ — однолистные вплоть до границы отображения;
4. все множества $r_\alpha^\pm(D_\pm)$ попарно не пересекаются.

Два морфизма $\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-]$, $\mathscr{P} = [P, p_j^+, p_l^-] : m \to n$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $\tau : R \to P$ такое, что $p_j^+ = \tau \circ r_j^+$ для всех j и $p_l^+ = \tau \circ r_l^+$ для всех l.

Так же, как и в п. 4.3, мы, чтобы не путать определения, используем квадратные скобки.

Пусть $\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-] : m \to n$, $\mathscr{S} = [S, s_l^+, s_\alpha^-] : n \to k$ — два морфизма. Определим их произведение $\mathscr{B} = \mathscr{S}\mathscr{R}$ как набор $\mathscr{B} = [B, b_j^+, b_\alpha^-]$, где

1. риманова поверхность B получается склейкой поверхностей

$$\widetilde{R} = R \setminus \Big(\bigcup_l r_l^-(D_-^0)\Big) \quad \text{и} \quad \widetilde{S} = S \setminus \Big(\bigcup_l s_l^+(D_+^0)\Big)$$

путем отождествления всевозможных пар точек $r_l^-(e^{i\varphi}) \in \widetilde{R}$ с $s_l^+(e^{i\varphi}) \in \widetilde{S}$;

2.
$$b_j^+(z) = r_j^+(z) \in \widetilde{R} \subset B,$$
$$b_\alpha^-(z) = s_\alpha^-(z) \in \widetilde{S} \subset B.$$

Равносильность определений устанавливается точно так же, как в п. 4.3. А именно, пусть $\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-]$ — элемент $\mathrm{Mor}(m, n)$ в смысле второго определения. Рассмотрим риманову поверхность

$$P = R \setminus \Big\{\Big(\bigcup_j r_j^-(D_+^0)\Big) \cup \Big(\bigcup_l r_l^-(D_-^0)\Big)\Big\},$$

далее положим $p_j^+(e^{i\varphi}) := r_j^+(e^{i\varphi})$, $p_l^-(e^{i\varphi}) := r_l^-(e^{i\varphi})$. Тогда (P, p_j^+, p_l^-) — элемент $\mathrm{Mor}(m, n)$ в смысле первого определения.

6.3. Вложение категории Shtan в категорию $\overline{\mathbf{GA}}$. Пусть H — тот же объект категории $\overline{\mathbf{GA}}$, что и п. 3.1. Обозначим через $H^{(n)}$ n-кратную прямую сумму $H \oplus \ldots \oplus H$. Снабдим $H^{(n)}$ структурой объекта категории $\overline{\mathbf{GA}}$, положив

$$H_\pm^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^n H_\pm.$$

Фиксируем число $\nu \in \mathbb{Z}$ и построим по каждому $\mathscr{P} = (P, p_j^+, p_l^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$ линейное отношение $T_\nu(\mathscr{P}) : H^{(m)} \rightrightarrows H^{(n)}$.

Пусть $f \in H$. Поставим в соответствие функции f плотность $f(\varphi)(d\varphi)^\nu$ на окружности. Отображения $p_\alpha^\pm$ отождествляют окружность S^1 с компонентами края P. Поэтому отображение $p_\alpha^\pm$ отождествляет плотности веса ν на окружности S^1 и плотности веса ν на кривой $p_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$. Обозначим через $(p_\alpha^\pm)^*\bigl(f(\varphi)(d\varphi)^\nu\bigr)$ образ плотности $f(\varphi)(d\varphi)^\nu$ на контуре $p_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$.

Пусть $v = \bigl((f_1^+, \dots, f_m^+), (f_1^-, \dots, f_n^-)\bigr)$ — некоторый элемент пространства $H^{(m)} \oplus H^{(n)}$. Мы положим, что $v \in T_\nu(\mathscr{P})$, если существует голоморфная плотность F веса ν на P такая, что ограничения F на контуры $p_\alpha^\pm$ суть плотности $(p_\alpha^\pm)^*\bigl(f_\alpha^\pm(d\varphi)^\nu\bigr)$.

Как и в п. 5.1, здесь возникает вопрос об аккуратном определения граничного значения формы F; этот вопрос обсуждается в следующем пункте.

Теперь положим $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{P})$, если риманова поверхность P не содержит замкнутых компонент связности (т. е. римановых поверхностей без края), и $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) =$ = null в противном случае. Как мы вскоре увидим, $\mathscr{P} \mapsto \widetilde{T}_\nu(\mathscr{P})$ является функтором из категории **Shtan** в категорию $\overline{\mathbf{GA}}$.

6.4. Граничные значения форм. Пусть C — кольцо $r \leqslant |z| \leqslant R$. Определим пространство Харди $H^2(C)$ как пространство голоморфных внутри кольца $r < |z| < R$ функций

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

таких, что

$$\sum_{k>0}\Bigl(\frac{|c_{-k}|}{r^k}\Bigr)^2 < \infty, \qquad \sum_{k>0}\bigl(|c_k|R^k\bigr)^2 < \infty. \tag{6.1}$$

Легко видеть, что в случае $f(z) \in H^2(C)$ корректно определены граничные значения функции $f(z)$ на окружностях $|z| = R$, $|z| = r$. Действительно, рассмотрим, например, окружность $|z| = R$. Функции $\bigl(\frac{z}{R}\bigr)^k$ образуют ортогональный базис в L^2 на окружности $|z| = R$. Очевидно,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k R^k\Bigl(\frac{z}{R}\Bigr)^k.$$

Мы хотим показать, что этот ряд сходится в L^2 на окружности $|z| = R$, т. е. что $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\bigl(|c_k|R^k\bigr)^2 < \infty$. Но это — очевидное следствие неравенств (6.1). Итак, ограничение $f \in H^2(C)$ на окружности $|z| = R$, $|z| = r$ есть корректно определенный элемент L^2 на окружности.

Лемма 6.1 (о стирании особенности). Пусть C_1 — кольцо $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$, а C_2 — кольцо $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_3$. Рассмотрим функции $f_1 \in H^2(C_1)$, а $f_2 \in H^2(C_2)$, граничные значения которых на окружности $|z| = r_2$ совпадают. Тогда функция

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f_1(z), & r_1 < |z| < r_2, \\ f_2(z), & r_2 < |z| < r_3, \end{cases}$$

продолжается до голоморфной функции в кольце $r_1 < |z| < r_3$.

Доказательство. Действительно, пусть

$$f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \qquad f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k.$$

Тогда граничные значения f_1, f_2 на окружности $|z| = r_2$ суть функции

$$\sum (a_k r_2^k)\Bigl(\frac{z}{r_2}\Bigr)^k; \qquad \sum (b_k r_2^k)\Bigl(\frac{z}{r_2}\Bigr)^k.$$

Эти функции равны как элементы L^2, а поэтому равны и их коэффициенты Фурье, т. е. $a_k r_2^k = b_k r_2^k$ для всех k. Итак, $a_k = b_k$. ■

Пусть, далее, $\mathscr{P} = (P, p_j^+, p_l^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$. Пусть F — голоморфная плотность веса ν на внутренности поверхности P. Рассмотрим, например, отображение p_i^+. Оно вещественно аналитично на окружности $|z| = 1$, поэтому оно комплексно аналитически продолжается в некоторое кольцо $1 \leqslant |z| \leqslant 1 + \varepsilon_i$. Тем самым, плотности F соответствует плотность $((p_i^+)^{-1})^* F$ на кольце $1 \leqslant |z| \leqslant 1 + \varepsilon_i$. Но пространство плотностей веса ν на кольце канонически отождествляется с пространством функций на кольце, а именно, функции $f(z)$ соответствует плотность

$$f(z)\Bigl(\frac{dz}{iz}\Bigr)^\nu = f(z)\Bigl(d\,\frac{1}{i}\,\ln z\Bigr)^\nu.$$

Обозначим через $\tilde{f}_i^+(z)$ голоморфную функцию в кольце, соответствующую плотности $\bigl((p_i^+)^{-1}\bigr)^* F$.

Аналогично определим функции $\tilde{f}_i^-(z)$.

Мы скажем, что голоморфная плотность F на P имеет граничные значения в смысле H^2, если все функции $\tilde{f}_i^\pm(z)$ имеют граничные значения в смысле H^2 на окружности $|z| = 1$. Обозначим эти граничные значения через $f_\alpha^\pm$.

Итак, рассмотрим голоморфную плотность F на P, имеющую граничные значения в смысле H^2. Такой плотности соответствует набор функций

$$\bigl(f_1^+, f_2^+, \dots, f_m^+; f_1^-, \dots, f_n^-\bigr) \in H^{(m)} \oplus H^{(n)}.$$

Множество таких наборов (для всевозможных F) образует подпространство в $H^{(m)} \oplus H^{(n)}$, т. е. линейное отношение $H^{(m)} \rightrightarrows H^{(n)}$. Обозначим это линейное отношение через $T_\nu(\mathscr{P})$.

Теорема 6.2.

а) Пусть $\mathscr{P} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$. Тогда $T_\nu(\mathscr{P}) \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}\bigl(H^{(m)}, H^{(n)}\bigr)$.

б) Пусть $\mathscr{P} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$, $\mathscr{R} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(n, k)$. Тогда

$$T_\nu(\mathscr{R}\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{R})T_\nu(\mathscr{P}) \tag{6.2}$$

в смысле произведения линейных отношений.

в) Пусть $\mathscr{P} = (P, p_i^+, p_j^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$. Положим $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{P})$, если P не содержит замкнутых компонент связности. Положим $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) =$ null в противном случае. Тогда $\mathscr{P} \mapsto \widetilde{T}_\nu(\mathscr{P})$ является функтором из категории **Shtan** в категорию $\overline{\mathbf{GA}}$.

6.5. Доказательство теоремы 6.1.

Лемма 6.3. Пусть $\mathscr{P} = (P, p_i^+, p_j^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Shtan}}(m, n)$, причем P — сфера с дырками. Тогда $T_\nu(\mathscr{P}) \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}\big(H^{(m)}, H^{(n)}\big)$.

Лемма 6.4. Рассмотрим непересекающиеся окружности $M_1 : |z-a| = \rho$ и $M_2 : |z-b| = r$ на $\mathbb{C}$ такие, что одна из них не лежит внутри другой. Через $H^2_-(M_1)$ мы обозначим подпространство в $L^2(M_1)$, состоящее из функций, голоморфно продолжимых в область $|z-a| > \rho$ на $\mathbb{C}$. Через $H^2_+(M_2)$ мы обозначим обычное пространство Харди, т. е. подпространство в $L^2(M_2)$, состоящее из функций, голоморфно продолжимых в круг $|z-b| < r$. Тогда оператор $B : H^2_-(M_1) \to H^2_+(M_2)$, ставящий в соответствие функции $f \in H^2_-(M_1)$ ее ограничение на M_2, является ядерным.

Доказательство леммы 6.4. Рассмотрим в $H^2_-(M_1)$ ортонормированный базис $\left(\frac{z-a}{\rho}\right)^{-k}$, а в $H^2_+(M_2)$ — ортонормированный базис $\left(\frac{z-b}{r}\right)^n$. Тогда матричные элементы $b_{\alpha\beta}$ матрицы B в этом базисе суть

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\rho^\alpha r^\beta}{(b-a)^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{(-\alpha)(\alpha-1)\ldots(-\alpha-\beta+1)}{\beta!}.$$

Введем обозначения

$$h_1 = \frac{\rho}{|b-a|}, \quad h_2 = \frac{r}{|b-a|}$$

(отметим, что $h_1 + h_2 \leqslant 1$). Тогда

$$|b_{\alpha\beta}| = h_1^\alpha h_2^\beta \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\beta!}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha,\beta} |b_{\alpha\beta}| = h_1 \sum_{n=0}^{\infty} (h_1+h_2)^n = \frac{h_1}{1-h_1-h_2} < \infty.$$

■

Доказательство леммы 6.3. Известно, что риманова поверхность, топологически изоморфная сфере с дырками, может быть биголоморфно отображена на «плоскую круговую область», т. е. сферу Римана с k круговыми дырками (см., например, [Голузин (1966)]). Итак, без ограничения общности можно считать, что риманова поверхность P — это область на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, задаваемая условиями

$$|z - a_i^+| \geqslant \rho_i^+, \quad |z - a_j^-| \geqslant \rho_j^-, \quad i \leqslant m, \quad j \leqslant n,$$

причем круги $|z - a_\alpha^\pm| \leqslant \rho_\alpha^\pm$ попарно не пересекаются, окружности $|z - a_i^+| = \rho_i^+$ проходятся против часовой стрелки, а окружности $|z - a_j^-| = \rho_j^-$ — по часовой стрелке.

Далее, мы видели в § 3, что для любого гладкого диффеоморфизма окружности q операторы (3.2) лежат в группе $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ (ν и s связаны соотношениями $\nu = \frac{1}{2} + is$). Поэтому утверждение леммы не зависит от того, какие параметризации $p_\alpha^\pm$ мы выберем: при изменении параметризаций линейное отношение $T_\nu(\mathscr{P})$ умножается слева и справа соответственно на элементы групп

$$\underbrace{\mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \ldots \times \mathrm{G}}_{n \text{ раз}} \quad \text{и} \quad \underbrace{\mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \ldots \times \mathrm{G}}_{m \text{ раз}}.$$

Поэтому мы можем считать, что

$$p_\alpha^\pm(e^{i\varphi}) = a_\alpha^\pm + \rho_\alpha^\pm e^{\pm i\varphi}. \tag{6.3}$$

Обозначим через $V_\alpha^\pm$ пространство L^2 функций на окружности $|z - a_\alpha^\pm| = \rho_\alpha^\pm$. Обозначим через $(V_\alpha^\pm)_+$ подпространство в $V_\alpha^\pm$, состоящее из функций вида $\sum_{k \geqslant 0} c_k (z - a_\alpha^\pm)^k$, а через $(V_\alpha^\pm)_-$ — подпространство функций вида $\sum_{k<0} c_k (z - a_\alpha^\pm)^k$. Легко видеть, что линейное отношение $T_\nu(\mathscr{P})$ является графиком линейного оператора

$$S : \Big(\bigoplus_i (V_i^-)_-\Big) \oplus \Big(\bigoplus_j (V_j^+)_-\Big) \to \Big(\bigoplus_i (V_i^-)_+\Big) \oplus \Big(\bigoplus_j (V_j^+)_+\Big),$$

при этом блоки матрицы S устроены следующим образом. Рассмотрим пространство функций $(V_j^\sigma)_-$, голоморфных вне круга $|z - a_j^\sigma| < \rho_j^\sigma$ (где $\sigma = +$ или $-$). Функция $f \in (V_j^\sigma)_-$, в частности, голоморфна в круге $|z - a_i^\varkappa| \leqslant \rho_i^\varkappa$, т. е. ограничение f на окружность $|z - a_i^\varkappa| = \rho_i^\varkappa$ есть элемент пространства $(V_i^\varkappa)_+$.

В силу леммы 6.4 все блоки матрицы S являются ядерными операторами. Поэтому и сама матрица S ядерна.

Матрица S не является преобразованием Потапова линейного отношения $T_\nu(\mathscr{P})$, но она очень близка к преобразованию Потапова. Действительно, параметризации (6.2) отождествляют пространство H с каждым из пространств $V_i^\pm$. А именно, функции $f(\varphi) \in H$ на окружности соответствуют функции

$$f\Big(\frac{z-a_i^+}{\rho_i^+}\Big)\Big(\frac{dz}{z}\Big)^\alpha \in V_i^+,$$

$$f\Big(\frac{\rho_i^-}{z-a_i^-}\Big)\Big(\frac{dz}{z}\Big)^\alpha \in V_i^-.$$

Таким образом, $H^{(m)}$ отождествляется с $\bigoplus_i V_i^+$, а $H^{(n)}$ — с $\bigoplus_j V_i^-$. Легко видеть, что $H_+^{(m)} \oplus H_-^{(n)}$ сравнимо (в смысле п. IV.3.6) с $\Big(\bigoplus_i (V_i^-)_-\Big) \oplus \Big(\bigoplus_j (V_j^+)_-\Big)$, а $H_-^{(m)} \oplus H_+^{(n)}$ сравнимо с $\Big(\bigoplus_i (V_i^-)_-\Big) \oplus \Big(\bigoplus_j (V_j^+)_+\Big)$. Это и завершает доказательство леммы. ■

Задача. Вычислите дефект размерности линейного отношения $T_\nu(\mathscr{P})$.

Доказательство утверждения б). Включение

$$T_\nu(\mathscr{R}\mathscr{P}) \subset T_\nu(\mathscr{R})T_\nu(\mathscr{P})$$

очевидно. Обратное включение следует из леммы о стирании особенностей. ∎

Доказательство утверждения а). Любой морфизм $\mathscr{P}$ представим в виде

$$\mathscr{P} = \mathscr{R}_1\mathscr{R}_2\ldots\mathscr{R}_q, \quad \mathscr{R}_p = \left(R^{(p)}, r_{i_p}^{(p)+}, r_{j_p}^{(p)-}\right),$$

где $R^{(p)}$ — объединение сфер с дырками. Из леммы 6.3 вытекает, что $T_\nu(\mathscr{R}_p) \in \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}$. Но в силу (6.2)

$$T_\nu(\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{R}_1)\ldots T_\nu(\mathscr{R}_q),$$

и поэтому $T_\nu(\mathscr{P})$ есть морфизм категории $\overline{\mathbf{GA}}$. ∎

Доказательство утверждения в). Пусть $\mathscr{P} : m \to n$, $\mathscr{R} : n \to k$ — морфизмы категории **Shtan**. Выяснить, верно ли

$$\mathrm{Indef}\, T_\nu(\mathscr{P}) \cap \mathrm{Ker}\, T_\nu(\mathscr{R}) \neq 0, \tag{6.4}$$

очень легко. А именно, пусть при склейке римановых поверхностей не возникает замкнутых компонент связности. Тогда (6.4) противоречило бы теореме единственности для голоморфных функций (мы имели бы плотность, у которой граничные значения равны 0).

Далее, пусть при склейке римановых поверхностей возникает замкнутая компонента связности L. Тогда в некоторых случаях можно сразу сказать, что (6.4) неверно. Действительно, пусть род L больше 0 (т. е. L — не сфера). Тогда для любого $\nu \geqslant 0$ на L есть голоморфная плотность веса ν, и, тем самым, (6.4) не выполнено. Далее, пусть L — сфера. Тогда для любого $\nu \leqslant 0$ на L есть голоморфные плотности веса ν, и, тем самым, (6.4) не выполнено.

Проверить, выполняется ли условие

$$\mathrm{Im}\, T_\nu(\mathscr{P}) + D\big(T_\nu(\mathscr{R})\big) = H^{(n)}, \tag{6.5}$$

чуть сложней. Эта проверка требует привлечения соображений двойственности (см. п. II.7.2.). Введем спаривание $H^{(m)} \times H^{(m)} \to \mathbb{C}$ по формуле

$$\sigma_m\big((f_1, \ldots, f_m), (g_1, \ldots, g_m)\big) = \sum \int_0^{2\pi} f_j g_j \, d\varphi.$$

Легко видеть, что линейные отношения $T_\nu(\mathscr{P})$ и $T_{1-\nu}(\mathscr{P})$ удовлетворяют условию

$$(v, w) \in T_\nu(\mathscr{P}),\ (v', w') \in T_{1-\nu}(\mathscr{P}) \Rightarrow \sigma_m(v, v') - \sigma_n(w, w') = 0. \tag{6.6}$$

Действительно, пусть F_1 и F_2 — соответственно голоморфные плотности веса ν и $1-\nu$ на P. Тогда F_1F_2 есть плотность веса 1, т. е. 1-форма. Теперь высказывание (6.6) превращается в интегральную теорему Коши (интеграл от 1-формы по границе римановой поверхности равен 0).

На самом деле, $T_\nu(\mathscr{P})$ и $T_{1-\nu}(\mathscr{P})$ являются двойственными линейными отношениями (в этом достаточно убедиться в случае выполнения условий леммы 6.3, тогда все сводится к вычислению дефекта размерности, которое проводится без труда; мы его опускаем). Таким образом, (6.5) равносильно

$$\mathrm{Indef}\, T_{1-\nu}(\mathscr{P}) \cap \mathrm{Ker}\, T_{1-\nu}(\mathscr{R}) = 0,$$

и теперь утверждение становится очевидным. ∎

6.6. Представления. Ограничивая спинорное представление категории $\overline{\mathbf{GA}}$ на категорию **Shtan**, мы получаем представление категории **Shtan**. Легко видеть, что операторы представления **Shtan** ограничены не только в топологии полинормированного пространства Фока, но и в топологии гильбертова пространства Фока (см. теорему IV.2.4 и лемму 6.4).

6.7. Замечания. А. Обобщенные борелевские подалгебры в $\mathrm{Vect}_\mathbb{C}$. Рассмотрим в $\overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ обычную повышающую (борелевскую) подалгебру B, натянутую на генераторы $L_0, L_{-1}, L_{-2}, \ldots$. Напомним, что

$$L_k = e^{-ik\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi} = z^{-k+1}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким образом, B состоит из векторных полей вида

$$\sum_{j\geqslant 0} c_j z^{-j+1}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{6.7}$$

Записывая (6.7) в координате $u = z^{-1}$, мы получаем

$$-\sum_{j\geqslant 0} c_j u^{j+1}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Эти векторные поля голоморфны в области $|u| < 1$ и равны 0 в точке $u = 0$.

Итак, алгебру B можно интерпретировать как алгебру векторных полей на окружности $|z| = 1$, голоморфно продолжимых в область $|z| > 1$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и равных 0 в точке $z = \infty$. В таком виде конструкция повышающей подалгебры допускает естественное обобщение.

Рассмотрим набор

$$\mathscr{R} = (R, r^-, \rho_1, \ldots, \rho_n), \tag{6.8}$$

где R — компактная риманова поверхность, край которой состоит из одной окружности; $r^- : S^1 \to R$ — фиксированная аналитическая параметризация края, при этом при обходе края поверхность остается по левую руку; наконец, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — отмеченные точки на R. Рассмотрим, далее, алгебру Ли $\mathfrak{A}_R$, состоящую из голоморфных векторных полей на R, обращающихся в 0 в точках $\rho_1, \ldots, \rho_n$ и аналитических вплоть до границы. Подалгебра $\mathfrak{B}_R \subset \overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ состоит, по определению, из векторных полей на окружности S^1, являющихся прообразами полей $v(z) \in \mathfrak{A}_{\mathscr{R}}$ при отображении $r^- : S^1 \to R$.

Естественно встает вопрос об $\mathfrak{B}_R$-особых векторах в представлениях Vir и о Vir-модулях с $\mathfrak{B}_R$-старшим весом. Этот вопрос изучался в работах [Кричевер, Новиков (1987)], [Кричевер, Новиков (1989)], основная конструкция этих работ равносильна конструкции п. 6.3 для $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(1, 1)$. Известны отдельные примеры $\mathfrak{B}_R$-старших векторов, но вопрос об описании всех $\mathfrak{B}_{\mathscr{R}}$-старших векторов пока не решен.

Замечание. Элементы $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(0, n)$ соответствуют нестандартным борелевским подалгебрам в $\overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}} \times \overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ (n раз).

В. Действия полугруппы Γ. Обозначим через $\Omega_{g,n}$ множество всех наборов вида (6.8) таких, что род (т. е. число ручек) поверхности R равен g. Полугруппа Γ действует на каждом из пространств $\Omega_{g,n}$ достаточно очевидным образом. Пусть $\mathscr{R} = (R, r^-, \rho_1, \ldots, \rho_n) \in \Omega_{g,n}$, а $\mathscr{P} = (P, p^+, p^-) \in \overline{\Gamma}$. Склеим поверхности $\mathscr{R}$ и $\mathscr{P}$, отождествляя точки $r^-(e^{i\varphi})$ и $p^+(e^{i\varphi})$. Тогда мы получим риманову поверхность рода g с фиксированной параметризацией края и с n отмеченными точками, т. е. элемент $\Omega_{g,n}$. Действие $\overline{\Gamma}$ на $\Omega_{g,n}$ построено.

С. Однолистные функции. Нам будет приятнее рассматривать вместо $\Omega_{0,1}$ область $\mathscr{K}$, состоящую из наборов $[R, r_+, \rho]$, где $R \simeq \overline{\mathbb{C}}$, $r_+ : D_+ \to R$ — однолистное вплоть до границы отображение, а $\rho \in R \setminus r_+(D_+)$ (понятно, что существенной разницы между $\Omega_{0,1}$ и $\mathscr{K}$ нет).

Покажем сначала, что $\mathscr{K}$ является Diff_a-однородным пространством. Действительно, $\mathscr{K}$ можно рассматривать как множество наборов (P, p_+, π), где P — риманова поверхность, конформно эквивалентная кругу; $p_+ : S^1 \to P$ — фиксированная параметризация края, а π — внутренняя точка P. Легко видеть, что группа $\mathrm{Diff}_a \subset \Gamma$ действует на $\mathscr{K}$ заменами параметризации края. Отождествим теперь P со стандартным кругом $D_+ : |z| \leqslant 1$. Группа биголоморфных преобразований круга состоит из мебиусовых преобразований. Любая точка $\pi \in D_+$ может быть переведена мебиусовым преобразованием в 0. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\pi = 0$. Теперь Diff_a-однородность $\mathscr{K}$ становится очевидной: любая точка из $\mathscr{K}$ может быть действием элемента Diff_a переведена в точку $L = (D_+, p_+, 0)$, где $p_+(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$.

Задача. Покажите, что стабилизатор точки L есть группа $\mathbb{T}$ вращений окружности.

Итак, $\mathscr{K} \simeq \mathrm{Diff}_a / \mathbb{T}$.

Рассмотрим теперь пространство $\mathscr{S}$, состоящее из функций $f : D_+ \to \mathbb{C}$, однолистных вплоть до границы, с тейлоровским разложением вида

$$p(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1}. \tag{6.9}$$

Покажем, что $\mathscr{K}$ канонически отождествляется с $\mathscr{S}$. Действительно, пусть $[R, r_+, \rho] \in \mathscr{K}$. Отождествим R со сферой Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Группа биголоморфных преобразований сферы Римана состоит из дробно-линейных отображений $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$. Любая пара точек на $\mathbb{C}$ подходящим дробно-линейным отображением может быть переведена в пару $\{0, \infty\}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $r_+(0) = 0$, $\rho = \infty$. В таком случае $p_+(z)$ имеет разложение вида $p_+(z) = \sum_{j>0} d_j z^j$. Далее, дробно-линейные преобразования, оставляющие 0 и ∞ на месте, суть преобразования $z \mapsto \lambda z$. Выбирая подходящим образом λ, мы можем сделать $d_1 = 1$. Таким образом, каждой точке $[R, r_+, \rho] \in \mathscr{K}$ мы поставили в соответствие однолистную функцию $p_+(z)$ вида (6.9).

Итак, мы видим, что пространство $\mathscr{S}$ однолистных функций канонически отождествляется с однородным пространством $\mathrm{Diff}_a / \mathbb{T}$. Удивительно, что этот факт был обнаружен лишь в [Кириллов (1986)], хотя теория однолистных функций уже давно является большой и содержательной ветвью математики (по-существу, она началась с работы [Köbe (1904)]). Таким образом, пространство $\mathscr{S}$ оказывается бесконечномерным аналогом ограниченных областей Картана (см. главу V).

Задача. Покажите, что область $\Omega_{0,0}$ как Diff_a-однородное пространство эквивалентно $\mathrm{Diff}_a / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Мы продолжим обсуждение взаимоотношений теории однолистных функций и теории представлений в добавлении С.

D. Полугруппа $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(1,1)$**.** Известна следующая конструкция восстановления группы Ли по ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ — группа автоморфизмов G. Тогда алгебра Ли группы G есть сама алгебра $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим теперь в качестве $\mathfrak{g}$ алгебру $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$. Конечно, группа Diff действует на $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ автоморфизмами. Оказывается, однако, что алгебра $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ имеет больше «внутренних симметрий», чем это кажется на первый взгляд.

Пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(1,1)$. Построим по элементу $\mathscr{P}$ линейное отношение $T_{-1}(\mathscr{P})$ в $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}} \oplus \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ по следующему правилу: $(v^+, v^-) \in \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}} \oplus \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ содержится в $T_{-1}(\mathscr{P})$, если существует голоморфное гладкое вплоть до границы векторное поле V на P такое, что прообразы V при отображениях $p^{\pm} : S^1 \to P$ суть $v^{\pm}$.

Пусть $(v^+, v^-), (w^+, w^-) \in T_{-1}(\mathscr{P})$. Тогда $([v^+, v^-], [w^+, w^-]) \in T_{-1}(\mathscr{P})$. Таким образом, линейное отношение $T_{-1}(\mathscr{P})$ в алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ в некотором смысле слова сохраняет операцию коммутирования. При желании можно рассматривать линейное отношение $T_{-1}(\mathscr{P})$ как график неограниченного оператора $L(\mathscr{P}) : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, который, таким образом, оказывается «неограниченным эндоморфизмом» алгебры $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$. Очевидно также, что $L(\mathscr{P})L(\mathscr{R}) = L(\mathscr{P}\mathscr{R})$.

Е. Конформная квантовая теория поля. Согласно конформной квантовой теории поля, частица представляет из себя не точку, а замкнутую линию в пространстве — так называемую «струну». Двигаясь в пространстве-времени, струна заметает собою цилиндрообразную поверхность. По физическим соображениям (которые я не берусь повторять) на этой поверхности канонически определена конформная структура.

Представим себе, что некоторая частица, т. е. струна, распадается на две части. Это соответствует картинке вида

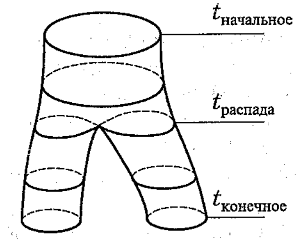


Рис. 7

Более сложным явлениям соответствуют более сложные картинки.

Если мы хотим проквантовать струну, мы должны поставить в соответствие каждой римановой поверхности с краем некоторый оператор (в этом месте в физической литературе часто говорят о континуальных интегралах, но этот язык, кажется, равносилен операторному языку). Таким образом, встает вопрос о представлениях категории.

Я не знаю, до какой степени конформная квантовая теория поля является теорией представлений категории **Shtan**, неизвестно также, имеет ли какой-либо физический смысл сама конформная квантовая теория поля. Не вызывает сомнений лишь то, что категория **Shtan** явно бедновата для описания реальных физических явлений, она является также бедноватым объектом и для теории представлений группы Diff (см. ниже § IX.6).

6.8. Литературные замечания. Категория **Shtan** введена в [Концевич (устное сообщение)], [Segal G.B (1988)]. Конструкция п. 6.3 получена в [Неретин (1989.2)], те же операторы построены в [Alvarez-Gaume, Gomez, Moore, Vafa (1988)]. Конструкций представлений полугруппы Γ плохо переносятся на категорию **Shtan** (об аналоге конструкции п. 5.1 см. [Неретин (1989.1)]). Препятствием является то, что при попытках голоморфного продолжения представлений группы Diff получаются многозначные операторнозначные функции, и они плохо ведут себя при склейках по нескольким дыркам.

Хороший учебник по однолистным функциям (написанный, правда, до доказательства гипотезы Бибербаха) — [Duren (1983)].

Глава VIII

Тяжелые группы

Вводимое нами понятие тяжелой группы является эвристическим и включает в себя следующие группы:

1. полную бесконечную симметрическую группу S_∞;

2. группу $U(\infty)$ всех унитарных операторов в комплексном гильбертовом пространстве, а также группу $O(\infty)$ всех ортогональных операторов в вещественном гильбертовом пространстве и группу $Sp(\infty)$ всех унитарных операторов в кватернионном гильбертовом пространстве;

3. группу автоморфизмов лебеговского пространства с конечной (или σ-конечной) мерой.

На первый взгляд, нет ничего такого, что могло бы выделить эти три типа бесконечномерных групп среди остальных и оправдать введение для них специального термина. В этой главе мы увидим, что все эти группы обладают одним и тем же набором удивительных свойств.

В нашей книге тяжелые группы имеют двоякое значение. С одной стороны, теория представлений этих групп довольно проста, но на них отчетливо видны некоторые общие явления. С другой стороны, многие важные бесконечномерные группы (не все!) содержат тяжелую подгруппу, что сильно упрощает их изучение.

В § 1 этой главы приводятся «образцовые» рассуждения, которые, в основном, являются общими для всех тяжелых групп.

§ 1. Симметрическая группа S_∞

1.1. Симметрическая группа S_∞. Пусть S_n — группа перестановок множества из n элементов. Пусть S_∞ — группа всех перестановок натурального ряда. Через S_∞^n обозначим подгруппу в S_∞, состоящую из перестановок, оставляющих на месте элементы $1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$. Введем на S_∞ топологию, положив, что подгруппы

$$S_\infty^1 \supset S_\infty^2 \supset S_\infty^3 \supset \dots$$

открыты и образуют фундаментальную систему окрестностей нуля.

Последовательность $\sigma_i \in S_\infty$ сходится к $\sigma \in S_\infty$, если для любого $j \in \mathbb{N}$ для достаточно больших k выполнено $\sigma_k j = \sigma j$.

Поставим в соответствие каждому $\sigma \in S_\infty$ бесконечную матрицу $R = \rho(\sigma)$, положив $r_{ij} = 1$, если $\sigma i = j$, и $r_{ij} = 0$ в противном случае. Таким образом, мы реализовали группу S_∞ как группу всех матриц из нулей и единиц, у которых в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна единица.

1.2. Категория частичных биекций. Объекты категории $\overline{\mathbf{PB}}$ частичных биекций — это множества вида $\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \dots, \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Мы их будем обозначать соответственно через $K_0, K_1, \dots, K_\infty$. Морфизм $I : K_\alpha \to K_\beta$ — это *частичная биекция*, т. е. биекция некоторого (например, пустого) подмножества $L \subset K_\alpha$ на некоторое подмножество $L' \subset K_\beta$. Множество $L = D(I)$ мы будем называть *областью определения* I (обозначение: $L = D(I)$), а L' — *образом* I (обозначение: $L' = \operatorname{Im} I$). Число элементов в $D(I)$ мы будем называть *рангом* L (обозначение: $\operatorname{rk} I$).

Умножение морфизмов — это обычная композиция частично определенных отображений. Скажем это аккуратнее: пусть $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$, $J \in \operatorname{Mor}(K_\beta, K_\gamma)$. Тогда $D(JI)$ состоит из тех $a \in D(I)$, для которых $Ia \in D(J)$. Если $a \in D(JI)$, то $(JI)a := J(Ia)$.

Через $\mathbf{PB}$ мы обозначим подкатегорию в $\overline{\mathbf{PB}}$, объектами которой являются $K_0, K_1, \dots$ (но не K_∞), а морфизмы — частичные биекции.

Назовем 0-1-*матрицей* матрицу из нулей и единиц, у которой в каждой строке и каждом столбце стоит не более одной единицы. Пусть $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$. Поставим в соответствие морфизму I некоторую 0-1-матрицу $R = \rho(I)$ размера $\alpha \times \beta$ по правилу $r_{ij} = 1$, если $ri = j$, и $r_{ij} = 0$ в противном случае. Легко видеть, что для любых $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$, $J \in \operatorname{Mor}(K_\beta, K_\gamma)$ выполнено $\rho(JI) = \rho(J)\rho(I)$, т. е. мы получаем представление категории $\overline{\mathbf{PB}}$. Мы будем отождествлять частичную биекцию и соответствующую 0-1-матрицу.

Введем в $\overline{\mathbf{PB}}$ структуру топологической категории. Пусть $I_k, I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$. Последовательность I_k сходится к I, если для любых $i \in K_\alpha, j \in K_\beta$ условие $Ii = j$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $I_m i = j$, начиная с некоторого m. Отметим, что условие $I_k \to I$ равносильно слабой сходимости 0-1-матриц $\rho(I_k) \to \rho(I)$.

Конечно, в случае $\alpha < \infty$, $\beta < \infty$ на конечном множестве $\operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$ мы получаем дискретную топологию. Легко видеть, что $\operatorname{Aut}(K_n) \simeq S_n$, $\operatorname{Aut}(K_\infty) \simeq S_\infty$.

Лемма 1.1. Группа $\operatorname{Aut}(K_\infty)$ плотна в полугруппе $\operatorname{End}(K_\infty)$.

Доказательство. Пусть $J \in \operatorname{End}(K_\infty)$. Определим частичную биекцию $J_n \in \operatorname{End}(K_\infty)$ следующим образом: $J_n i = j$ тогда и только тогда, когда выполнены три условия: $i \leqslant n$, $j \leqslant n$, $Ji = j$. Далее, легко видеть, что для любого n существует $A_n \in S_\infty$ такой, что для любых $i \leqslant n$, $j \leqslant n$ условие $J_n i = j$ равносильно $A_n i = j$ (т. е. частичная биекция J_n может быть продолжена до настоящей биекции). Ясно, что A_n сходится к J. (Эти операции очень наглядны на языке 0-1-матриц.) ■

Введем в категории $\overline{\mathbf{PB}}$ инволюцию, положив, что для любого $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$, элемент $I^* \in \operatorname{Mor}(K_\beta, K_\alpha)$ есть обратная частичная биекция (т. е. $Ii = j$ равносильно $I^* j = i$).

Наконец, введем в $\overline{\mathbf{PB}}$ структуру упорядоченной категории (см. § III.4). Пусть $\alpha < \beta$. Определим $\lambda_{\alpha\beta} \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$ так, что $\lambda_{\alpha\beta} i = i$ для всех $i \leqslant \alpha$. Определим также $\mu_{\beta\alpha} := \lambda_{\alpha\beta}^*$ (т. е. $\mu_{\beta\alpha} i = i$ для всех $i \leqslant \alpha$, причем $D(\mu_{\beta\alpha}) = \{1, 2, \dots, \alpha\}$). Наконец, введем так же, как в § III.4, элементы $\theta_\beta^\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}$. На уровне 0-1-матриц $\theta_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} E_\alpha & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

Наша дальнейшая программа действий следующая. Мы покажем, что любое представление группы S_∞ продолжается по непрерывности до представления полугруппы $\operatorname{End}(K_\infty)$, а любое представление полугруппы $\operatorname{End}(K_\infty)$ продолжается до представления категории $\overline{\mathbf{PB}}$. Далее показывается, что любое представление категории $\overline{\mathbf{PB}}$ однозначно определяется своим ограничением на подкатегорию $\mathbf{PB}$. После этого останется расклассифицировать все представления категории $\mathbf{PB}$.

1.3. Неподвижные векторы. Пусть τ — унитарное представление группы S_∞ в пространстве H. Обозначим через $H_n \subset H$ пространство всех векторов, неподвижных относительно любого оператора вида $\rho(g)$, где $g \in \mathrm{S}^n_\infty$. Ясно, что $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$.

Предложение 1.2. $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} H_j$ плотно в H.

Мы докажем это утверждение в следующей форме.

Предложение 1.3. Пусть ρ — унитарное представление топологической группы G в пространстве H. Пусть $\mathrm{G} \supset \mathrm{G}_1 \supset \mathrm{G}_2 \supset \ldots$ — семейство подгрупп в G, причем для любой окрестности U единицы в группе G найдется подгруппа G_k такая, что $\mathrm{G}_k \subset U$. Пусть H_k — множество векторов в H, неподвижных относительно G_k. Тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k$ плотно в H.

Доказательство. Мы хотим показать, что произвольный вектор $v \in H$ можно аппроксимировать с любой точностью некоторым G_k-неподвижным вектором (где k достаточно велико). Пусть $\mathrm{U}(\infty)$ — группа всех унитарных операторов в H, снабженная слабой топологией. Рассмотрим в $\mathrm{U}(\infty)$ окрестность единицы V, состоящую из всех операторов A, удовлетворяющих условию $\|Av - v\| < \varepsilon$.

Задача. Покажите, что V — действительно окрестность единицы.

Далее, рассмотрим в G окрестность единицы W такую, что $\rho(W) \subset V$. Пусть $\mathrm{G}_k \subset W$. Пусть Q — замкнутая выпуклая оболочка множества всех векторов вида $\rho(g)v$, где g пробегает G_k.

Задача. Покажите, что в любом замкнутом выпуклом множестве в гильбертовом пространстве существует единственный вектор минимальной длины (см. [Riesz, Sz.-Nagy (1952)], 145).

Пусть $w \in Q$ — вектор минимальной длины. Множество Q очевидным образом инвариантно относительно G_k. Поэтому и вектор w является G_k-инвариантным. При этом $\|w - v\| \leqslant \varepsilon$. Утверждение доказано. ■

1.4. Двойные классы смежности $\mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty$. Рассмотрим двойные классы смежности $\mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty$. Построим каноническую биекцию

$$I : \mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty \longleftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n). \tag{1.1}$$

Пусть $\gamma \in \mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty$, а $g_1, g_2 \in \gamma$. Тогда для любых $i \leqslant n$, $j \leqslant m$ условия $g_1 j = i$, $g_2 j = i$ равносильны. Поэтому для любого $\gamma \in \mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty$ определен элемент $I(\gamma) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$, а именно: $I(\gamma)i = j$ тогда и только тогда, когда $gi = j$ для некоторого $g \in \gamma$.

Задача. Проверьте, что I — действительно биекция.

Особенно наглядно соответствие (1.1) выглядит на уровне 0-1-матриц. В этом случае каждой 0-1-матрице $g \in \mathrm{S}_\infty$ ставится в соответствие ее левый верхний угол $[g]_{mn}$ размера $m \times n$:

$$g = \begin{pmatrix} [g]_{mn} & * \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto [g]_{mn}.$$

С этого места мы отождествляем множества $\mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty$ и $\mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$.

Пусть, по-прежнему, τ — представление группы S_∞ в пространстве H, пусть H_j — пространство S^j_∞-неподвижных векторов. Для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$ мы определим канонический оператор

$$\tau(\gamma) : H_m \to H_n$$

по формуле

$$\tau(\gamma) := P_n \tau(g)\big|_{H_m}, \tag{1.2}$$

где $g \in \gamma \in \mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty$, а P_n — проектор на подпространстве H_n (символ $\tau(g)\big|_{H_m}$ обозначает ограничение оператора $\tau(g)$ на подпространство H_m).

Задача. Проверьте, что $\tau(\gamma)$ не зависит от выбора элемента $g \in \gamma$.

Забавно заметить, что γ мы выше интерпретировали как «уголок» $[g]_{mn}$ матрицы g, а $\tau(\gamma)$ — тоже в каком-то смысле «уголок» матрицы $\tau(g)$. Ниже мы увидим, что $\gamma \mapsto \tau(\gamma)$ является представлением категории $\mathbf{PB}$.

Введем также операторы

$$\tilde{\tau}(\gamma) := P_n \tau(g) P_m : H \to H$$

(где по-прежнему $g \in \gamma$). Легко видеть, что матрица $\tilde{\tau}(\gamma)$ как матрица оператора $H_m \oplus H_m^\perp \to H_n \oplus H_n^\perp$ имеет вид

$$\tilde{\tau}(\gamma) = \begin{pmatrix} \tau(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5. Продолжение представлений группы S_∞ на полугруппу $\mathrm{End}(K_\infty)$.

Теорема 1.4. Пусть τ — унитарное представление группы S_∞. Тогда

а) τ однозначно продолжается до непрерывного $*$-представления $\overline{\tau}$ полугруппы $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\infty)$;

б) для любого $\gamma \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\infty)$ выполнено $\|\overline{\tau}(\gamma)\| \leqslant 1$;

в) $\tau(\theta^k_\infty) = P_k$, где P_k — проектор на подпространство H_k всех S^k_∞-неподвижных векторов.

Доказательство. Прежде всего, вспомним, что группа S_∞ плотна в полугруппе $\mathrm{End}(K_\infty)$, поэтому единственность продолжения и утверждение б) теоремы в доказательстве не нуждаются.

Докажем существование продолжения.

Пусть $J \in \mathrm{End}(K_\infty)$. Пусть $J_n = \theta^n_\infty J \theta^n_\infty$; на уровне 0-1-матриц это означает, что

$$J_n = \begin{pmatrix} [J]_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $[J]_{nn}$ по-прежнему обозначает левый верхний уголок матрицы J.

Далее, выберем $g_n \in S_\infty$ такой, что $\theta^n_\infty g \theta^n_\infty = J_n$. Пусть $\gamma_n \in S^n_\infty \setminus S_\infty / S^n_\infty$ — двойной класс смежности, содержащий g_n (ему соответствует морфизм $[J]_{nn} \in \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_n, K_n)$).

Заметим, что $g_{n+j} \in \gamma_n$ для всех $j \geqslant 0$ (что означает $[g_{n+j}]_{nn} = J_{nn}$). Поэтому

$$P_n \tau(g_{n+j}) P_n = P_n \tau(g_n) P_n = \bar\tau(\gamma_n).$$

Учитывая, что $H_n \subset H_{n+j}$, получаем $P_n P_{n+j} = P_{n+j} P_n = P_n$. Поэтому

$$P_n \tau(g_{n+j}) P_n = P_n P_{n+j} \tau(g_{n+j}) P_{n+j} P_n = P_n \bar\tau(\gamma_{n+j}) P_n.$$

Итак,

$$P_n \bar\tau(\gamma_{n+j}) P_n = \bar\tau(\gamma_n). \tag{1.3}$$

Рассмотрим последовательность операторов $\bar\tau(\gamma_n)$. Тогда $\|\bar\tau(\gamma_n)\| \leqslant 1$, и для любого k и любых $h_1, h_2 \in H_k = \mathrm{Im}\, P_k$ последовательность $\langle h_1, \bar\tau(\gamma_n) h_2 \rangle$ стабилизируется (см. равенство (1.3)). Поэтому $\bar\tau(\gamma_n)$ сходится слабо к некоторому оператору, который мы обозначим через $\bar\tau(J)$ (см. критерий слабой сходимости, п. I.4.1). Заметим, что $P_n \bar\tau(J) P_n = \tau(\gamma_n)$. Отсюда, в частности, вытекает слабая непрерывность отображения $J \mapsto \bar\tau(J)$, а из слабой непрерывности вытекает равенство

$$\bar\tau(J_1 J_2) = \bar\tau(J_1)\bar\tau(J_2). \tag{1.4}$$

Действительно, пусть $g_k \to J_1$, а $q_l \to J_2$, где $g_k, q_l \in S_\infty$. Тогда

$$\tau(g_k q_l) = \tau(g_k)\tau(q_l).$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, получаем $\bar\tau(g_k J_2) = \tau(g_k)\bar\tau(J_2)$: переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем (1.4).

Осталось проверить утверждение в) теоремы.

Мы имеем $(\theta^n_\infty)^2 = \theta^n_\infty$, $(\theta^n_\infty)^* = \theta^n_\infty$, поэтому $\tau(\theta^n_\infty)$ является ортогональным проектором. Далее, для любого $g \in S^n_\infty$ выполнено $g\theta^n_\infty = \theta^n_\infty$. Поэтому для любого $v \in \mathrm{Im}\, \tau(\theta^n_\infty)$ выполнено

$$\begin{aligned}\tau(g)v &= \tau(g)\tau(\theta^n_\infty)v = \\ &= \tau(\theta^n_\infty)v = \\ &= v.\end{aligned}$$

Поэтому $\mathrm{Im}\, \tau(\theta^n_\infty) \subset H_n$.

Пусть, далее, $w \in H_n = \mathrm{Im}\, P_n$. Пусть последовательность $p_j \in S^n_\infty$ сходится к θ^n_∞. Тогда $\tau(p_j)w = w$, а потому и $\tau(\theta^n_\infty)w = w$. Т. е. $\mathrm{Im}\, \tau(\theta^n_\infty) \supset H_n$. ■

Следующее высказывание становится теперь тавтологией. Оно, однако, заслуживает того, чтобы быть сформулированным.

Следствие. 1.5. Пусть $g_j \in S^n_\infty$ — последовательность, сходящаяся к θ^n_∞. Пусть τ — унитарное представление S_∞. Тогда $\tau(g_j) \to P_n$ слабо.

1.6. Продолжение представлений полугруппы $\mathrm{End}(K_\infty)$ на категорию $\overline{\mathbf{PB}}$.

Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\alpha, K_\beta)$. Рассмотрим элемент

$$F(\gamma) = \lambda_{\beta\infty}\gamma\mu_{\infty\alpha} \in \mathrm{End}(K_\infty).$$

Вопрос. Что это значит на уровне 0-1-матриц?

Учитывая, что $\mu_{\infty\beta}\lambda_{\beta\infty} = 1$, мы получаем, что для любых $\gamma_1 \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\alpha, K_\beta)$, $\gamma_2 \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\beta, K_\delta)$ выполнено

$$F(\gamma_2\gamma_1) = F(\gamma_2)F(\gamma_1). \tag{1.5}$$

Итак, мы получили гомоморфизм группоида морфизмов категории $\overline{\mathbf{PB}}$ в полугруппу $\mathrm{End}(K_\infty)$.

Пусть, далее, τ — некоторое $*$-представление полугруппы $\mathrm{End}(K_\infty)$ в пространстве H. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$. Введем операторы

$$\bar\tau(\gamma) := \tau(F(\gamma)) : H \to H.$$

В силу (1.5) мы получаем

$$\bar\tau(\gamma_2\gamma_1) = \bar\tau(\gamma_2)\bar\tau(\gamma_1).$$

Учитывая, что для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\alpha, K_\beta)$ выполнено

$$\theta^\beta_\infty F(\gamma) = F(\gamma) = F(\gamma)\theta^\alpha_\infty,$$

мы получаем, что

$$\mathrm{Im}\, \bar\tau(\gamma) \subset \mathrm{Im}\, \tau(\theta^\beta_\infty), \qquad \mathrm{Ker}\, \bar\tau(\gamma)^\perp \subset \mathrm{Im}\, \tau(\theta^\alpha_\infty).$$

Поэтому $\bar\tau(\gamma)$ можно рассматривать как оператор $\mathrm{Im}\, \tau(\theta^\alpha_\infty) \to \mathrm{Im}\, \tau(\theta^\beta_\infty)$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1.6. Пусть τ — некоторое $*$-представление полугруппы $\mathrm{End}(K_\infty)$ в пространстве H. Положим $T(K_\alpha) = \mathrm{Im}\, \tau(\theta^\alpha_\infty)$ для всех $\alpha = 0, 1, \ldots, \infty$. Для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$ определим оператор $\tau(\gamma) : T(K_\alpha) \to T(K_\beta)$ по формуле

$$\tau(\gamma) := \tau(\lambda_{\beta\infty}\gamma\mu_{\infty\alpha})\big|_{T(K_\alpha)}. \tag{1.6}$$

Тогда $\mathsf{T} = (T, \gamma)$ является $*$-представлением категории $\overline{\mathbf{PB}}$.

В качестве следствия мы получаем следующую *«теорему мультипликативности»*.

Теорема 1.7. Пусть τ — унитарное представление S_∞ в пространстве H, пусть H_n — пространство S^n_∞-неподвижных векторов, а P_n — проектор на H_n. Для любого $m < \infty$ положим $T(K_m) = H_m$, а для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$

$$\tau(\gamma) = P_n \tau(g)\big|_{H_m},$$

где $g \in \gamma \in S^n_\infty \setminus S_\infty / S^m_\infty \simeq \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{PB}$.

1.7. Теорема аппроксимации.

Теорема 1.8. Любое $*$-представление категории $\mathbf{PB}$ единственным образом продолжается до непрерывного $*$-представления категории $\overline{\mathbf{PB}}$.

Таким образом, мы видим, что существуют канонические биекции между следующими множествами

$$\left\{\begin{matrix}\text{унитарные}\\ \text{представления}\\ \text{группы } \mathrm{S}_\infty\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}*\text{-представления}\\ \text{полугруппы}\\ \mathrm{End}(K_\infty)\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}*\text{-представления}\\ \text{категории } \overline{\mathbf{PB}}\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}*\text{-представления}\\ \text{категории } \mathbf{PB}\end{matrix}\right\}.$$

В следующем параграфе мы увидим, что описание всех представлений категории $\mathbf{PB}$ — задача несложная, а ее решение автоматически влечет описание остальных трех множеств.

Теорема 1.8 вытекает из следующей леммы и теоремы 1.10.

Лемма 1.9. Для любого $*$-представления $\mathrm{T} = (T, \gamma)$ категории $\mathbf{PB}$ и для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}$ выполнено $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$.

Доказательство. Группоид морфизмов категории $\mathbf{PB}$ порожден группами $\mathrm{S}_n \simeq \mathrm{Aut}(K_n)$ и элементами λ_{mn}, μ_{nm}. Для $g \in \mathrm{S}_n$ операторы $\tau(g)$ унитарны, а

$$\tau(\mu_{nm})\tau(\mu_{nm})^* = \tau(\mu_{nm}\mu_{nm}^*) = \tau(1) = 1.$$

Поэтому $\|\tau(\mu_{nm})\| = 1$, а $\tau(\lambda_{mn}) = \tau(\mu_{nm})^*$. ■

1.8. Абстрактная теорема аппроксимации. Пусть $\overline{\mathbf{K}}$ — топологическая упорядоченная категория с инволюцией, пусть объекты $\overline{\mathbf{K}}$ нумеруются элементами частично упорядоченного множества $\overline{\Sigma}$. Пусть $\Sigma \subset \overline{\Sigma}$, при этом для любых $\alpha, \beta \in \Sigma$ существует $\gamma \in \Sigma$ такое, что $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$. Пусть $\mathbf{K}$ — категория, объекты которой нумеруются элементами множества Σ, причем $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V_\alpha, V_\beta) = \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{K}}}(V_\alpha, V_\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \Sigma$. Мы скажем, что подкатегория $\mathbf{K}$ *аппроксимирует* $\overline{\mathbf{K}}$ (или *аппроксимативна* в $\overline{\mathbf{K}}$), если она удовлетворяет следующим условиям:

а) для любого $\alpha \in \overline{\Sigma}$ существует неубывающая цепь $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$ в Σ такая, что $\alpha = \sup \alpha_j$ (т.е. $\alpha \geqslant \alpha_j$ для всех j, и для любого β, большего всех α_j, выполнено $\beta \geqslant \alpha$);

б) пусть $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots, \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots$ — элементы Σ, пусть $\alpha = \sup \alpha_j$, $\beta = \sup \beta_j$, тогда для любого $P \in \mathrm{Mor}(V_\alpha, V_\beta)$ выполнено

$$\theta_\alpha^{\alpha_l} P \theta_\beta^{\beta_k} \to P$$

при $k, l \to \infty$.

Пример. Категория $\mathbf{PB}$ аппроксимативна в $\overline{\mathbf{PB}}$.

Теорема 1.10. Пусть категория $\mathbf{K}$ аппроксимативна в $\overline{\mathbf{K}}$. Любое $*$-представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{K}$ такое, что $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$ для всех $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}$, единственным образом продолжается до представления категории $\overline{\mathbf{K}}$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что при $\varphi < \psi$ оператор $\tau(\lambda_{\varphi\psi})$ отождествляет пространство $T(V_\varphi)$ с подпространством в $T(V_\psi)$. Пусть $\alpha \in \overline{\Sigma} \setminus \Sigma$, а $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$ — последовательность в Σ такая, что $\alpha = \sup \alpha_j$. Пространство $T(V_\alpha)$ мы определим как пополнение объединения пространств $T(V_{\alpha_j})$:

$$T(V_{\alpha_1}) \subset T(V_{\alpha_2}) \subset \ldots.$$

Пусть, далее, $\alpha, \beta \in \overline{\Sigma}$, а $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{K}}}(V_\alpha, V_\beta)$, пусть $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$, $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots$, $\alpha = \sup \alpha_j$, $\beta = \sup \beta_j$. Пусть P_β^i — проектор на $T(V_{\beta_i})$ в $T(V_\beta)$, а P_α^i — проектор на $T(V_{\alpha_i})$ в $T(V_\alpha)$. Оператор $\tau(Q)$ мы определим из условий

$$P_\beta^i \tau(Q) P_\alpha^j = \tau\big(\mu_{\beta\beta_i} Q \lambda_{\alpha_j\alpha}\big) \tag{1.7}$$

для всех i, j. Если представить себе оператор $\tau(Q)$ как блочную матрицу

$$\tau(Q) : \bigoplus_j \big(T(V_{\alpha_j}) \ominus T(V_{\alpha_{j-1}})\big) \to \bigoplus_i \big(T(V_{\beta_i}) \ominus T(V_{\beta_{i-1}})\big),$$

то условие (1.7) просто определяет верхние левые уголки этой матрицы.

Задача. Проверьте согласованность условий (1.7).

Наконец, очевидным образом $\|\tau(Q)\| \leqslant 1$.

Задача. Покажите, что $\tau(Q_1Q_2) = \tau(Q_1)\tau(Q_2)$.

Пусть, далее, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$, $\alpha_1' \leqslant \alpha_2' \leqslant \ldots$, причем $\sup \alpha_j = \sup \alpha_j' = \alpha$. Тогда, вроде бы, мы можем построить пространство $T(V_\alpha)$ двумя разными способами. Но оператор $\tau(1_{V_\alpha})$ отождествляет эти пространства. Теорема доказана. ■

1.9. Замечания. Категорию $\overline{\mathbf{PB}}$ можно было бы определить как категорию, объектами которой являются конечные или счетные множества, а морфизмами — частичные биекции. В некоторых отношениях (например, с точки зрения рассуждений следующего параграфа), такой взгляд был бы приятней.

Задача. Сформулируйте аналог теоремы 1.7 при таком определении категории $\overline{\mathbf{PB}}$.

§2. Классификация представлений группы S_∞

2.1. Представления полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{PB}}(K_n)$. Пусть $n < \infty$, а $\Gamma_n := \mathrm{End}_{\mathbf{PB}}(K_n)$. Пусть $A \subset K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, пусть $\mathrm{card}(A)$ — число элементов множества A. Обозначим через θ_A частичную биекцию множества K_n на себя с областью определения A и тождественную на A. Ясно, что

$$\theta_A\theta_B = \theta_{A\cap B}, \quad \theta_A^* = \theta_A, \quad \theta_A^2 = \theta_A.$$

Пусть τ — некоторое *неприводимое* $*$-представление полугруппы Γ_n в пространстве H. Полугруппа Γ конечна, поэтому $\dim H < \infty$ (действительно, циклическая оболочка любого вектора должна быть конечномерной). Пусть $P_A := \tau(\theta_A)$, а $H_A := \mathrm{Im}\, P_A$. Ясно, что P_A — ортогональный проектор ($P_A^2 = P_A$, $P_A^* = P_A$) на H_A. При этом

$$P_AP_B = P_BP_A = P_{A\cap B}, \tag{2.1}$$

а следовательно,

$$H_A \cap H_B = H_{A\cap B}. \tag{2.2}$$

Пусть $g \in S_n = \mathrm{Aut}(K_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau(g)^{-1} P_A \tau(g) = \tau\big(g^{-1}\theta_A g\big) &= \\ = \tau(\theta_{gA}) &= \\ = P_{gA}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. Существует число $p = p(\tau)$ такое, что $P_A = 0$ при $\operatorname{card} A < p$ и $P_A \neq 0$ при $\operatorname{card}_A \geqslant p$.

Доказательство. См. равенства (2.1), (2.3). ■

Пусть ниже $p = p(\tau)$ такое же, как в лемме 2.1.

Следствие 2.2. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Оператор $\tau(\gamma)$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk}\gamma \geqslant p(\tau)$.

Доказательство. Действительно, γ представимо в виде $\gamma = g\theta_B$, где $g \in S_n$. ■

Лемма 2.3.

$$H = \bigoplus_{A:\operatorname{card}(A)=p(\tau)} H_A. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A') = p(\tau)$, а $A \neq A'$. Тогда $\operatorname{card}(A \cap A') < p(\tau)$, поэтому $P_{A\cap A'} = 0$, а поэтому (см. (2.1)) H_A ортогонально $H_{A'}$. Кроме того, правая часть (2.4) инвариантна относительно S_n и элементов θ_B, что и завершает доказательство. ■

Задача. Как действует $\tau(\theta_B)$ в (2.4)?

Рассмотрим подмножество $K_p = \{1, \dots, p\}$ в K_n. Обозначим через S_p подгруппу в $S_n \simeq \mathrm{Aut}(K_n)$, состоящую из элементов, оставляющих $p+1, p+2, \dots \in K_n$ на месте. Через S^p мы обозначим подгруппу, состоящую из элементов, оставляющих на месте $1, 2, \dots, p$.

Лемма 2.4. Подпространство H_{K_p} является S_p-инвариантным. Любой элемент подпространства H_{K_p} неподвижен под действием группы S^p.

Доказательство. Пусть $h \in H_{K_p}$, а $g \in S_p$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau(g)h = \tau(g)\tau(\theta_{K_p})h &= \\ = \tau(\theta_{K_p})\tau(g)h &= \\ = P_{K_p}(\tau(g)h) &\in H_{K_p}. \end{aligned}$$

Пусть $g \in S^p$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau(g)h = \tau(g)\tau(\theta_{K_p})h &= \\ = \tau(g\theta_{K_p})h &= \\ = \tau(\theta_{K_p})h &= \\ = h. \end{aligned}$$

■

Итак, с каждым неприводимым представлением τ полугруппы Γ_n связано некоторое представление $\rho = \rho(\tau)$ группы $S_{p(\tau)}$ в пространстве $H_{K_{p(\tau)}}$.

Лемма 2.5. Представление $\rho(\tau)$ неприводимо.

Доказательство. Пусть V — некоторое S_p-инвариантное подпространство в H_{K_p}, пусть W — циклическая оболочка V под действием Γ_n. Нам достаточно показать, что

$$W \subset V \oplus \Big[\bigoplus_{A \neq K_p, \operatorname{card} A = p} H_A\Big]. \tag{2.5}$$

Пусть $\gamma \in \Gamma$. Представим γ в виде $\gamma = g\theta_B$, где $g \in S_n$. Заметим, что $\tau(\theta_B)|_V$ есть 0 или 1. Пусть $g \in S_n$. Тогда $\tau(g)V \subset \tau(g)H_{K_p} = H_{gK_p}$. Если $gK_p = K_p$, то $g \in S_p \times S^p$, и в силу леммы 2.4 мы имеем $\tau(g)V = V$. Если $gK_p \neq K_p$, то H_{gK_p} содержится в слагаемом $[\dots]$. Включение (2.5) и вместе с ним лемма доказаны. ■

Теорема 2.6. Число $p = p(\tau)$ и неприводимое представление $\rho = \rho(\tau)$ группы S_p полностью определяют неприводимое представление τ полугруппы Γ_n.

Доказательство. Утверждение очевидно, и мы предоставляем читателю убедиться в этом. Мы же дадим короткое доказательство. Пусть τ и τ' — два таких представления в пространствах H и H'. Рассмотрим их прямую сумму. Пусть V — график S_p-сплетающего оператора $H_{K_p} \to H'_{K_p}$. Тогда точно так же, как в доказательстве леммы 2.5, мы получаем, что циклическая оболочка W подпространства V содержится в

$$V \oplus \Big[\bigoplus_{A \neq K_p, \operatorname{card} A = p} (H_A \oplus H'_A)\Big].$$

Итак, $W \neq H_1 \oplus H_2$. Но проекции W на H_1 и H_2 являются подпредставлениями в H_1 и H_2, в силу неприводимости τ и τ' проекции сюръективны, при этом в силу той же неприводимости $W \cap H_1 = 0$, $W \cap H_2 = 0$, а поэтому W — график обратимого сплетающего оператора $H_1 \to H_2$. Теорема доказана. ■

2.2. Явное описание представлений полугруппы Γ_n и спускающий функтор. Пусть $p = 0, 1, 2, \dots$, а ρ — неприводимое представление группы S_p. Построим по этим данным неприводимое представление $\tau = \tau_n(p, \rho)$ полугруппы Γ_n в некотором пространстве $H_n(p, \rho)$.

Пусть Ω_n^p — множество всех p-точечных подмножеств множества $K_n = \{1, \dots, n\}$. Пространство $H = H_n(p, \rho)$ мы определим как пространство функций на Ω_n^p со значениями в пространстве V_ρ представления ρ. Скалярное произведение в $H_n(p, \rho)$ мы определим по формуле

$$\langle f, g\rangle = \sum_{A \in \Omega_n^p} \big\langle f(A), g(A)\big\rangle_{V_\rho},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_\rho}$ — скалярное произведение в V_ρ.

Пусть $\gamma \in \Gamma$, определим оператор $\tau(\gamma)$ в H по формуле

$$\tau(\gamma)f(A) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad A \not\subset D(\gamma), \\ \rho(g)f(\gamma A), & \text{если} \quad A \subset D(\gamma), \end{cases}$$

где $D(\gamma)$ — как и раньше область определения γ, а элемент $g = g(A,\gamma) \in S_p$ определяется из условия

$$a_i < a_j \Leftrightarrow \gamma a_{gi} < \gamma a_{gj},$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ — элементы множества A. Множество γA состоит из всех b, имеющих вид $b = \gamma a_k$, где $a_k \in A$.

Задачи.

а) Как действуют в $H_n(p,\rho)$ проекторы вида P_A?

б) Покажите, что $p(\tau_n(p,\rho)) = p$, а $\rho(\tau_n(p,\rho)) = \rho$.

Задача. Проверьте, что спускающий функтор (см. § III.4) для категории **PB** имеет вид

$$\mathrm{F}^n_{n-1}\tau_n[p,\rho] = \begin{cases} 0, & n = p, \\ \tau_{n-1}[p,\rho], & n > p. \end{cases}$$

2.3. Представления категории PB. Зная перечень неприводимых представлений полугрупп Γ_n и явный вид спускающего функтора, мы в качестве очевидного следствия получаем описание всех представлений **PB**. Сейчас мы их все построим.

Пусть $p = 0, 1, 2, \ldots$, а ρ — неприводимое унитарное представление S_p. Построим неприводимое $*$-представление $(T,\tau) = (T,\tau)(p,\rho)$ категории **PB**. Пространства $T(K_n)$ — это пространства $H_n(p,\rho)$ из предыдущего пункта. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}(K_n, K_m)$. Оператор $\tau(\gamma) : H_n(p,\rho) \to H_m(p,\rho)$ задается формулой

$$\tau(\gamma)f(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \not\subset D(\gamma), \\ \rho(g)f(\gamma A), & \text{если } A \subset D(\gamma), \end{cases}$$

где $g = g(\gamma, A) \in S_p$ определяется из условия

$$a_i < a_j \Leftrightarrow \gamma a_{gi} < \gamma a_{gj}, \tag{2.6}$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ — элементы множества A. Множество γA состоит из всех b, имеющих вид $b = \gamma a_k$, где $a_k \in A$.

2.4. Представления категории $\overline{\mathbf{PB}}$ и группы $\underline{S_\infty}$. Мы уже знаем, что любое $*$-представление категории **PB** продолжается на $\overline{\mathbf{PB}}$. Явный вид этого продолжения очевиден, оно записывается теми же формулами, только индексы m и n теперь могут принимать значение ∞.

Заодно мы построили и все унитарные представления группы S_∞. А именно, представления S_∞ нумеруются парой (p,ρ), где $p \in \mathbb{Z}_+$, а ρ — неприводимое представление S_p. Они реализуются в пространствах $H_\infty(p,\rho)$ по формуле

$$\tau(\gamma)f(A) = \rho(g)f(\gamma A),$$

где $g \in S_p$ определяется из условия (2.6).

2.5. Замечания.

Задача. Покажите, что любое унитарное представление S_∞ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений, и это разложение единственно (в том смысле, что при любом разложении набор неприводимых представлений будет один и тот же).

Задача. Покажите, что тензорные степени $\rho^{\otimes n}$ тождественного представления ρ группы S_∞ содержат (в качестве подпредставлений) все неприводимые представления S_∞.

2.6. Литературные замечания. Классификация всех унитарных представлений S_∞ была получена Либерманом [Lieberman (1972)]. Мы в §§ 1–2 в основном следуем статье [Ольшанский (1985)], см. также [Ольшанский (1980)].

§ 3. *Категорная оболочка группы* O(∞)

3.1. Группа O(∞). Через $\mathrm{O}(\infty)$ мы обозначим группу всех ортогональных операторов в вещественном гильбертовом пространстве ℓ_2, снабженную слабой операторной топологией.

3.2. Категория $\overline{\mathbf{O}}$. Объекты категории $\overline{\mathbf{O}}$ — вещественные гильбертовы пространства (конечномерные и бесконечномерные). Морфизмы $H_1 \to H_2$ — это *сжатия*, т. е. операторы с нормой $\leqslant 1$. Множество $\mathrm{Mor}(H_1, H_2)$ мы снабдим слабой операторной топологией. Инволюция в $\overline{\mathbf{O}}$ — обычное сопряжение операторов.

Через **O** мы обозначим подкатегорию в $\overline{\mathbf{O}}$, объекты которой — вещественные евклидовы пространства, а морфизмы — те же самые, что и в $\overline{\mathbf{O}}$.

Ясно, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{O}(n)$, а $\mathrm{Aut}(\ell_2) \simeq \mathrm{O}(\infty)$.

Легко видеть, что **O** является упорядоченной категорией. В самом деле, выберем в **O** по одному объекту $\mathbb{R}^n$ каждой размерности. Тогда $\lambda_{m,n}$ и $\mu_{n,m}$ задаются формулами ($m < n$)

$$\lambda_{m,n}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mu_{n,m}(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Предложение 3.1. Группа $\mathrm{O}(\infty)$ плотна в $\mathrm{End}(\ell_2)$.

Доказательство. См. § 4 главы I. ■

3.3. Двойные классы смежности. Обозначим через $\mathrm{O}^n(\infty)$ подгруппу в $\mathrm{O}(\infty)$, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Задача. Покажите, что для любой окрестности U единицы в $\mathrm{O}(\infty)$ найдется n такое, что $\mathrm{O}^n(\infty) \subset U$.

Пусть $[A]_{mn}$, как и раньше, обозначает верхний угол размера $m \times n$ матрицы A.

Ясно, что если A_1 и A_2 лежат в одном классе смежности $\mathrm{O}^m(\infty)\backslash\mathrm{O}(\infty)/\mathrm{O}^n(\infty)$, то $[A_1]_{mn} = [A_2]_{mn}$. Кроме того, очевидно, что для $A \in \mathrm{O}(\infty)$ выполнено $\|[A]_{mn}\| \leqslant 1$, т. е. $[A]_{mn} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Теорема 3.2. Отображение

$$A \mapsto [A]_{mn}$$

осуществляет биекцию $\mathrm{O}^m(\infty) \setminus \mathrm{O}(\infty) / \mathrm{O}^n(\infty) \leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Доказательство.

а) *Сюръективность.* Пусть C — сжатие $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда $C = [A]_{mn}$, где

$$A = \begin{pmatrix} C & (1 - CC^*)^{1/2} & \\ (1 - C^*C)^{1/2} & -C^* & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

б) *Инъективность*. Пусть, например, $m < n$. Ортонормированные базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ можно выбрать так, что матрица C будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \dots \\ & \lambda_2 & 0 & \dots \\ & & \ddots\ \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$. Посмотрим, как можно достроить матрицу C до ортогональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \oplus V \to \mathbb{R}^m \oplus W,$$

где V и W — бесконечномерные гильбертовы пространства. При этом нас интересуют двойные классы смежности, т. е. ортонормированные базисы в V и W мы можем выбирать так, как нам захочется.

Заметим, что строки матрицы P — попарно ортогональные векторы с длинами $(1 - \lambda_j^2)^{1/2}$. Выбирая базис в V, мы можем добиться, чтобы матрица P имела вид

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda_1^2} & & 0 & \dots \\ & \sqrt{1-\lambda_2^2} & 0 & \dots \\ & & \ddots\ \vdots & \dots \end{pmatrix}.$$

Аналогично, можно считать, что матрица Q имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1_{n-m} \\ \hline \sqrt{1-\lambda_1^2} & & & \\ & \sqrt{1-\lambda_2^2} & & \\ & & \ddots & \end{array}\right).$$

Из того, что строки матрицы $(Q \quad R)$ должны быть ортогональны строкам матрицы $(C \quad P)$, легко увидеть, что матрица R теперь выписывается однозначно и имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \\ -\lambda_1 & & \\ & -\lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\end{matrix}}\right\} n-m \\ \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

■

Задача. Пусть V, W — вещественные (или комплексные) гильбертовы пространства одной размерности, $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$, причем $\dim W_2 \geqslant \dim V_1$, $\dim V_2 \geqslant \dim W_1$. Докажите, что любое сжатие $C : V_1 \to W_1$ достраивается до ортогонального оператора

$$A = \begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} : V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2,$$

причем матрица A единственна с точностью до эквивалентности

$$\begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & M \end{pmatrix},$$

где $L \in \mathrm{O}(W_2)$, $M \in \mathrm{O}(V_2)$.

Замечание. См. также [Sz.-Nagy, Foiaş (1967)]. С несравненно более тонкими задачами этого рода мы встретимся в следующей главе.

3.4. Категорное продолжение.

Теорема 3.3. Любое унитарное представление τ группы $\mathrm{O}(\infty)'$ в пространстве H продолжается единственным образом до $*$-представления $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\overline{\mathbf{O}}$. При этом пространства $T(\mathbb{R}^n)$ можно отождествить с пространствами H_n всех $\mathrm{O}^n(\infty)$-неподвижных векторов в H. Если $\gamma \in \mathrm{O}^m(\infty)\backslash\mathrm{O}(\infty)/\mathrm{O}^n(\infty) \simeq \mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, то оператор $\tau(\gamma)$ из $T(\mathbb{R}^n) \simeq H_n$ в $T(\mathbb{R}^m) \simeq H_m$ задается формулой

$$\tau(\gamma) = P_m \tau(g)\Big|_{H_n},$$

где P_m — проектор на H_m, а $g \in \gamma$.

Доказательство дословно повторяет рассуждения § 1. Нужно лишь заменить S_∞ на $\mathrm{O}(\infty)$. ■

Теорема 3.4. Любое $*$-представление $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{O}$ такое, что $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$ для всех $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{O}}$, допускает единственное продолжение до $*$-представления категории $\overline{\mathbf{O}}$.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 1.10. ■

3.5. Классификационная теорема. Пусть $\overline{\mathbf{A}}$ — категория, объектами которой являются комплексные гильбертовы пространства, а морфизмами — ограниченные операторы. Инволюция в $\mathbf{A}$ — обычное сопряжение операторов.

Напомним, как по диаграмме

$$\overset{a_1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!\overset{a_2}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!\overset{a_3}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!\overset{a_4}{\circ}\!\!-\!\!-\ \dots \tag{3.1}$$

($a_j \in \mathbb{Z}_+, a_j = 0$ для больших j) построить неприводимое голоморфное представление категории $\overline{\mathbf{A}}$. Выберем по одному объекту V каждой размерности: $V = \mathbb{C}^0, \mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2, \dots, \ell_2$, и в k-мерном объекте возьмем стандартный базис $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots$. Положим для любого объекта V

$$T(V) = \bigotimes_j (\Lambda^j V)^{\otimes a_j},$$

а для любого оператора $P : V \to W$ определим оператор

$$\tau(V) = \bigotimes_j (\Lambda^j P)^{\otimes a_j} : T(V) \to T(W)$$

(заметим, что все тензорные произведения на самом деле конечны). Далее, выберем в каждом пространстве $T(V)$ вектор

$$Z(V) = \bigotimes_j \left(e_1^{(k)} \wedge e_2^{(k)} \wedge \dots \wedge e_j^{(k)}\right)^{\otimes a_j}$$

и возьмем $\mathrm{End}(V)$-циклическую оболочку $R(V)$ вектора $Z(V)$ (для всех V). Набор подпространств $R(V)$ задает неприводимое подпредставление в $\mathsf{T} = (T, \tau)$, это подпредставление мы будем обозначать через $\mathsf{R}_{\alpha_1\alpha_2\dots} = (R_{\alpha_1\alpha_2\dots}, \rho_{\alpha_1\alpha_2\dots})$.

Корректность конструкции устанавливается буквально теми же соображениями, что и в конечномерном случае (см. п. III.4.6).

Представления $\mathsf{R}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ мы будем называть *голоморфными тензорными представлениями* категории $\overline{\mathbf{A}}$.

Теорема 3.5.

а) Ограничение $\mathsf{U}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ голоморфного тензорного представления $\mathsf{R}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ категории $\overline{\mathbf{A}}$ на категорию $\overline{\mathbf{O}}$ неприводимо.

б) Представления $\mathsf{U}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ попарно различны.

в) Неприводимые $*$-представления категории $\overline{\mathbf{O}}$ исчерпываются представлениями $\mathsf{U}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$.

Понятно, что вместе с тем мы получили и классификацию представлений группы $\mathrm{O}(\infty)$.

Задача. Докажите, что ограничения представлений $\mathsf{R}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ на категорию $\overline{\mathbf{O}}$ неприводимы и попарно различны.

Указание. Использовать теорему единственности для голоморфных функций.

Мы переходим к доказательству теоремы (приведенная только что задача тоже решится сама собой). Понятно, что классификационную теорему достаточно доказать для категории $\mathbf{O}$.

3.6. Доказательство теоремы 3.5. Чтобы расклассифицировать представления категории $\mathbf{O}$, мы сначала расклассифицируем все представления полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.6. Любое неприводимое $*$-представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$\tau(\gamma) = \det(\gamma)^s \rho(\gamma),$$

где $s \geqslant 0$, а $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — некоторое неприводимое представление категории $\mathbf{A}$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ подполугруппу Γ_n^0, состоящую из обратимых операторов. Полугруппа Γ_n^0 является одновременно подполугруппой в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, при этом $\Gamma_n^0 \supset \mathrm{O}(n)$. Важно заметить, что Γ_n^0 имеет нетривиальный центр Z, состоящий из матриц вида $L_t = e^{-t} \cdot 1$, где $t \geqslant 0$.

Лемма 3.7. Любое неприводимое $*$-представление τ полугруппы Γ_n^0 продолжается до представления группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющего условию $\tau(g) = \tau(g)^*$.

Доказательство. В силу неприводимости τ центр Z действует скалярными операторами $\tau(L_s) = a^{-s} \cdot E$, где $a > 0$. Пусть $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Выберем s так, чтобы $L_s g \in \Gamma_n^0$ и положим $\tau(g) := a^s \tau(L_s g)$. Лемма доказана. ■

Предложение 3.8. Любое неприводимое представление τ группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющее условию

$$\tau(g^t) = \tau(g)^*, \tag{3.2}$$

конечномерно.

Доказательство предложения. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Выберем в $\mathfrak{g}$ базис $X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q$ так, что

$$X_j^* = -X_j, \quad Y_k^* = Y_k.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует в пространстве H представления τ операторами, которые мы тоже будем обозначать через $\tau(\cdot)$. Прежде всего, заметим, что операторы X_j образуют алгебру Ли группы $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, а эта группа действует в H унитарными операторами (в силу равенства (3.2)). Поэтому операторы $i\tau(X_j)$ существенно самосопряжены. Далее, $\tau(\exp(sY_k))$ — однопараметрическая группа ограниченных самосопряженных операторов. Поэтому $\tau(Y_k)$ — ограниченные самосопряженные операторы. Но X_j выражается линейно через коммутаторы вида $[Y_k, Y_l]$ (легко проверить, что любая кососимметричная матрица есть линейная комбинация коммутаторов симметричных матриц). Поэтому и операторы $\tau(X_j)$ ограничены.

Далее, матрицы вида

$$Z = \sum a_j X_j + i \sum b_k Y_k,$$

где $a_j, b_k \in \mathbb{R}$, образуют алгебру Ли $\mathfrak{u}(n)$ группы $\mathrm{U}(n)$. Поэтому в пространстве H мы имеем унитарное представление алгебры Ли $\mathfrak{u}(n)$, которое, в силу ограниченности операторов представления, интегрируется до представления соответствующей группы, т. е. универсальной накрывающей $\widetilde{\mathrm{U}}(n)$ группы $\mathrm{U}(n)$. Но все неприводимые представления $\widetilde{\mathrm{U}}(n)$ конечномерны. Предложение доказано. ■

Теперь доказательство теоремы превращается в упражнение по теории представлений. Мы будем кратки.

Любое неприводимое конечномерное представление группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ имеет вид

$$\tau_{s;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(g) = \det(g)^s \rho_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(g), \tag{3.3}$$

где $\rho_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ — неприводимое представление категории $\mathbf{A}$ с числовыми отметками $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots)$. При этом $\tau_{s+1;\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \simeq \tau_{s;\alpha_1,\ldots,\alpha_n+1}$.

Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\alpha_n = 0$. Условие (3.2) влечет $s \in \mathbb{R}$.

Итак, все $*$-представления полугруппы Γ_n^0 перечислены. Остается посмотреть, когда они продолжаются по непрерывности на всю полугруппу $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$.

Для этого рассмотрим в $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ подполугруппу M, состоящую из элементов вида

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & z \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant z \leqslant 1$. Пусть v — вектор старшего веса. Легко видеть, что $\tau(M_z)v = z^{s+\alpha_n}v$. Поэтому при $s + \alpha_n < 0$ оператор $\tau(M_0)$ не определен. Теорема 3.6 доказана. ■

Спускающий функтор имеет вид

$$\mathsf{F}_{n-1}^n \tau_{s;\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \begin{cases} 0 & \text{при } s + \alpha_n > 0, \\ \tau_{0;\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}} & \text{при } s = \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Поэтому согласованная система представлений σ_n полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ задается некоторым набором чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, 0, \ldots$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_k > 0$;

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n < k, \\ \tau_{0;\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots,0} & \text{при } n \geqslant k, \end{cases}$$

что, собственно, и требовалось доказать в теореме 3.5. ■

3.7. Замечания. Пусть $U(\infty)$ — полная унитарная группа гильбертова пространства, снабженная слабой топологией.

Теорема 3.9. Любое неприводимое унитарное представление $U(\infty)$ имеет вид

$$\rho_{\alpha_1\alpha_2\ldots}(g)\otimes\bar{\rho}_{b_1b_2\ldots}(g), \tag{3.4}$$

где представление ρ — то же, что и в п. 3.5, а черта означает комплексное сопряжение. Все представления вида (3.4) попарно различны.

Пусть $Sp(\infty)$ — унитарная группа кватернионного гильбертова пространства, снабженная слабой топологией.

Теорема 3.10. Любое унитарное неприводимое представление группы $Sp(\infty)$ имеет вид $\rho_{\alpha_1\alpha_2\ldots}(g^{\mathbb{C}})$, где $g^{\mathbb{C}}$ — матрица g, рассматриваемая как комплексная матрица. Все представления такого вида попарно различны.

Обе теоремы доказываются так же, как теорема 3.5.

Задача*. Докажите следующую теорему [Ольшанский (1978)].

Теорема 3.11. Любое унитарное представление группы $O(\infty)$ (соответственно $U(\infty)$, $Sp(\infty)$) имеет тип I и раскладывается в сумму неприводимых представлений.

3.8. Литературные замечания. Первая попытка классификации представлений $U(\infty)$ была сделана в [Segal I. E. (1958)], там классификация проводится при довольно сильных дополнительных ограничениях. Кириллов [Кириллов (1973)] анонсировал ответ в общем случае. Доказательство опубликовано в [Ольшанский (1978)], и мы, в основном, следуем этой статье.

§ 4. *Группа автоморфизмов пространства с мерой и марковская категория*

4.1. Лебеговские пространства. Под пространством (M,μ) с мерой μ мы будем всегда понимать лебеговское пространство с борелевской мерой. Аксиоматическое описание лебеговских пространств содержится в § 3 Предварительных сведений, и сейчас мы лишь напомним их конструктивное описание.

Лебеговское пространство — это пространство, представимое в виде объединения промежутка прямой (конечного, бесконечного или пустого), снабженного мерой Лебега, и счетного, конечного или пустого множества точек, имеющих ненулевую меру. Мы всегда считаем, что мера определена на борелевской σ-алгебре.

Пусть M_1, M_2 — пространства с мерой. *Изоморфизмом* $\varphi: M_1\to M_2$ называется отображение, переводящее измеримые множества в измеримые, сохраняющее меру и биективное с точностью до множеств меры 0.

Известно, что большинство разумных пространств с мерой являются лебеговскими (т. е. изоморфны лебеговским). Приведем несколько примеров, убеждающих в правильности этой точки зрения.

Задача. Пусть D — множество из двух точек 0 и 1 с мерой $\frac{1}{2}$, а D^∞ — произведение счетного числа множеств D, снабженное естественной мерой на произведении. Докажите, что отображение $(x_1,x_2,\ldots)\mapsto\sum x_j 2^{-j}$ из D^∞ в отрезок $[0,1]$ является изоморфизмом.

Так как $D^\infty\times D^\infty$ изоморфно D^∞, мы получаем, что квадрат $[0,1]\times[0,1]$ изоморфен отрезку $[0,1]$.

Задача. Пусть $[0,1]^\infty$ — произведение счетного числа экземпляров отрезков $[0,1]$. Покажите, что $[0,1]^\infty$ изоморфно $[0,1]$.

Задача. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ из п. VI.1.9 изоморфно $[0,1]$.

Меру подмножества A пространства (M,μ) мы обозначаем через $\mu(A)$.

4.2. Группа Ams. Пусть M — лебеговское пространство с непрерывной вероятностной мерой (т. е. $M\sim[0,1]$). Через Ams мы обозначим группу *автоморфизмов* M (автоморфизм M — это изоморфизм M в себя). Два автоморфизма считаются совпадающими, если они равны всюду, кроме множества меры 0.

Дадим три равносильных определения *слабой топологии* в Ams.

1) Последовательность $g_k\to g$, если для любых измеримых множеств $A\subset M$, $B\subset M$ имеет место сходимость

$$\mu(g_kA\cap B)\to\mu(gA\cap B).$$

2) Пусть $g\in\mathrm{Ams}$. Определим оператор $\tau(g)$ в $L^2(M)$ по формуле

$$\tau(g)f(m)=f(gm). \tag{4.1}$$

Ясно, что этот оператор унитарен. Слабая топология в унитарной группе индуцирует слабую топологию в Ams.

3) Пусть $\mathfrak{h}: M=\bigcup M_i$, $\mathfrak{n}: M=\bigcup N_j$ — два конечных разбиения M. Определим для $g\in\mathrm{Ams}$ матрицу пересечения

$$\varphi_{ij}(g)=\mu(gM_i\cap N_j).$$

Последовательность g_k сходится к g, если последовательность матриц пересечения $\varphi(g_k)$ сходится к матрице $\varphi(g)$.

Задача. Проверьте равносильность определений.

Теперь заметим, что формула (4.1) задает унитарное представление группы Ams. Это представление приводимо по тривиальной причине: функция $f=1$ является Ams-инвариантной. Соответственно, является инвариантным и пространство $L^2_0(M)$, состоящее из функций с нулевым средним. Представление группы Ams в пространстве $L^2_0(M)$ мы обозначим через τ_0.

Задача. Покажите, что τ_0 неприводимо.

Задача. Опишите слабое замыкание множества всех операторов вида $\tau(g)$ в пространстве всех операторов в $L^2(\mathbb{R})$.

4.3. Марковская категория. Объекты *марковской категории* $\overline{\mathbf{Mar}}$ — лебеговские пространства с вероятностной мерой. Морфизмом $(M,\mu)\to(N,\nu)$ называется борелевская мера $\varkappa$ на $M\times N$ такая, что проекция $\varkappa$ на M есть μ, а проекция $\varkappa$ на N есть ν. Морфизмы категории $\overline{\mathbf{Mar}}$ мы будем называть *полиморфизмами* (в литературе используется также термин «*стохастические ядра*»).

Мера $\varkappa$ индуцирует на почти всех «слоях» вида $m\times N$, где $m\in M$, условные вероятностные меры $\varkappa_m(\cdot)$ на N. Напомним (см. Предварительные сведения, § 4), что эти меры определяются из условия: для любого измеримого подмножества $L \subset M \times N$ выполнено

$$\varkappa(L) = \int_M \varkappa_m((m \times N) \cap L)\, d\mu(m).$$

Это условие равносильно следующему: для любой ограниченной измеримой функции f на $M \times N$ выполнено

$$\iint_{M\times N} f(m,n)\, d\varkappa(m,n) = \int_M \left(\int_N f(m,n)\, d\varkappa_m(n) \right) d\mu(m).$$

Задача. Вычислите условные меры $\varkappa_m(n)$ в случае, когда $\varkappa$ имеет плотность $\varphi(m,n)$ относительно меры $\mu \times \nu$.

Полиморфизм $\varkappa$ неформально следует понимать как «отображение» M в N, которое каждую точку $m \in M$ «размазывает» по множеству N в меру $\varkappa_m$. В этом смысле полиморфизмы напоминают многозначные отображения, но образ точки в нашем случае — не множество, а мера.

Пример. Пусть $g \in \mathrm{Ams}$. Построим по g меру ξ_g на $M \times M$, сосредоточенную на графике отображения $g: M \to M$, такую, что и проекция меры ξ_g на M есть μ. Легко видеть, что ξ_g — действительно полиморфизм.

Задача. Пусть $A \subset M$, $B \subset M$. Покажите, что

$$\xi_g(A \times B) = \mu(gA \cap B).$$

Задача. Как выглядят в случае $\varkappa = \xi_g$ условные меры $\varkappa_m$?

Пример. Пусть (M,μ), (N,ν) — пространства с мерой. Тогда мера $\mu \times \nu$ является полиморфизмом $M \to N$. Этот полиморфизм тоже имеет чрезвычайно наглядный смысл: каждая точка $m \in M$ «размазывается» по N равномерно.

Пример. Пусть пространства (M,μ) и (N,ν) конечны, а $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $n_1, n_2, \ldots, n_q$ — их точки. Тогда полиморфизм $\varkappa: M \to N$ можно понимать как матрицу $\{\varkappa_{ij}\}$ размера $p \times q$, а именно, каждой точке $m_i \times n_j \in M \times N$ ставится в соответствие ее мера $\varkappa_{ij} := \varkappa(m_i \times n_j)$. При этом

$$\sum_i \varkappa_{ij} = \nu(n_j), \quad \sum_j \varkappa_{ij} = \mu(m_i), \quad \varkappa_{ij} \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Теперь мы должны определить произведение полиморфизмов, т. е. формализовать операцию «двукратного размазывания». Пусть $\varkappa : (M,\mu) \to (N,\nu)$ и $\psi : (N,\nu) \to (L,\lambda)$ — полиморфизмы. Определим их произведение в терминах условных мер $\varphi = \psi\varkappa : (M,\mu) \to (L,\lambda)$ из условия

$$\varphi_m = \int \psi_n\, d\varkappa_m(n).$$

Задача. Проверьте корректность определения и ассоциативность умножения.

Пусть теперь M, N, L конечны. Тогда, как легко видеть, матрица $\varphi = \{\varphi_{ij}\}$ вычисляется по формуле

$$\varphi = \psi \cdot \begin{pmatrix} \nu(n_1) & & \\ & \nu(n_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \cdot \varkappa. \tag{4.3}$$

Здесь стоит остановиться и объяснить, что, по существу, мы имеем дело с элементарными общеизвестными объектами теории вероятностей. Пусть (M,μ) и (N,ν) — конечные пространства с мерой, а $\varkappa : (M,\mu) \to (N,\nu)$ — полиморфизм, т. е. матрица, удовлетворяющая (4.2). Рассмотрим матрицу

$$\tilde{\varkappa} = \varkappa \cdot \begin{pmatrix} \mu(m_1) & & \\ & \mu(m_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1}.$$

Тогда

$$\sum_j \tilde{\varkappa}_{ij} = 1,$$

и мы видим, что $\tilde{\varkappa}$ — это просто марковская матрица перехода. Формула (4.3) тогда переписывается в виде

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}\tilde{\varkappa}. \tag{4.4}$$

Наконец, мы должны ввести инволюцию на категории $\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть $\varkappa \in \mathrm{Mor}\big((M,\mu),(N,\nu)\big)$. Тогда $\varkappa^*$ — это та же самая мера на $M \times N$, но рассматриваемая как морфизм $N \to M$.

Определим подкатегорию $\mathbf{Mar}$ в $\overline{\mathbf{Mar}}$. Объекты $\mathbf{Mar}$ — конечные пространства с вероятностной мерой, а $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Mar}}(M,N) = \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Mar}}}(M,N)$.

4.4. Топология. Пусть (M,μ), (N,ν) — пространства с мерой. Пусть $\varkappa_j$, $\varkappa$ — полиморфизмы $(M,\mu) \to (N,\nu)$. Мы положим, что $\varkappa_j$ сходится к $\varkappa$, если для любых измеримых подмножеств $A \subset M$, $B \subset N$ имеет место сходимость

$$\varkappa_j(A \times B) \to \varkappa(A \times B).$$

Задача. Покажите, что множество $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M,N)$ компактно.

Пусть $(M,\mu) \simeq [0,1]$.

Задача. Проверьте, что $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M)$ — это группа Ams.

Теорема 4.1. Группа Ams плотна в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots$ — последовательность конечных разбиений M такая, что $\mathfrak{h}_j$ является измельчением разбиения $\mathfrak{h}_{j-1}$. Пусть $M_1^{(j)}, M_2^{(j)}, \ldots, M_{N_j}^{(j)}$ — элементы j-го разбиения. Пусть $\max_k \mu(M_k^{(j)}) \to 0$ при $j \to \infty$. Фиксируем $\varkappa \in \mathrm{End}(M)$. Рассмотрим набор матриц $A^{(j)}$ с матричными элементами

$$a_{pq}^{(j)} = \varkappa\big(M_p^{(j)} \times M_q^{(j)}\big).$$

Возьмем какой-нибудь $g_j \in \mathrm{Ams}$ такой, что

$$\mu\big(gM_p^{(j)} \cap M_q^{(j)}\big) = a_{pq}^{(j)}.$$

Легко видеть, что g_j сходится к $\varkappa$ (в топологии $\mathrm{End}(M)$). ■

4.5. Действие категории $\overline{\mathrm{Mar}}$ на пространствах L^2. Построим простейшее представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ категории $\overline{\mathrm{Mar}}$ (оно соответствует действию Ams в $L^2[0,1]$).

Пусть (M, μ), $(N, \nu) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathrm{Mar}})$.

Положим $T(M) = L^2(M)$. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mor}(M, N)$. Определим оператор $\tau(\varphi) : L^2(M) \to L^2(N)$ по формуле

$$\tau(\varphi)f(n) = \int\limits_M f(m)\, d\varphi_n(m), \tag{4.5}$$

где через φ_n обозначены условные меры на слоях $n \times M$.

Теорема 4.2. Формула (4.5) задает корректно определенный оператор $L^2(M) \to L^2(N)$, при этом

а) $\|T(\varphi)\| \leqslant 1$;

б) если $f(m) \geqslant 0$ всюду на M, то $T(\varphi)f \geqslant 0$ всюду на N;

в) $\tau(\varphi)1 = 1$, $\tau^*(\varphi)1 = 1$.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь а). Пусть $\|f\|_{L_2} \leqslant 1$, $\|g\|_{L_2} \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\langle \tau(\varphi)f, g\rangle\right| &= \left|\iint\limits_{M\times N} f(m)\, g(n)\, d\varphi(m,n)\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{M\times N} \left(|f(m)|^2 + |g(n)|^2\right) d\varphi(m,n) = \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_{M\times N} |f(m)|^2 d\varphi(m,n) + \frac{1}{2}\iint\limits_{M\times N} |g(n)|^2 d\varphi(m,n) = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_M |f(m)|^2 d\mu(m) + \frac{1}{2}\int\limits_N |g(n)|^2 d\nu(n) \leqslant \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

■

Задача*. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Покажите, что формула (4.5) задает корректно определенный оператор $L^p(M) \to L^p(N)$, при этом по-прежнему $\|\tau(\varphi)\| \leqslant 1$.

Иногда важно знать, как восстановить полиморфизм φ по оператору $\tau(\varphi)$.

Лемма 4.3. Пусть $A \subset M$, $B \subset N$. Рассмотрим функции χ_A на M и χ_B на N, заданные равенствами

$$\chi_A(m) = \begin{cases} 1, & m \in A, \\ 0, & m \notin A; \end{cases} \qquad \chi_B(n) = \begin{cases} 1, & n \in B, \\ 0, & n \notin B. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi(A \times B) = \left\langle \tau(\varphi)\chi_A, \chi_B \right\rangle.$$

Доказательство очевидно. ■

Назовем ограниченный оператор $L^2(M) \to L^2(N)$ *марковским*, если он удовлетворяет утверждениям б) и в) теоремы 4.2.

Теорема 4.4.

а) Любой марковский оператор имеет вид $T(\varphi)$ для некоторого полиморфизма φ.

б) Отображение $\varphi \mapsto \tau(\varphi)$ является гомеоморфизмом множества $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M, N)$ на множество марковских операторов $L^2(M) \to L^2(N)$, снабженное слабой топологией.

Это утверждение нам не понадобится, и мы оставляем его в качестве задачи (см., например, [Вершик (1977)]).

Представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ очевидным образом приводимо, так как константы переводятся операторами $\tau(\varphi)$ в константы. Обозначим через $\mathrm{T}_0 = (T_0, \tau_0)$ подпредставление в T такое, что $T_0(M) = L^2_0(M)$ (так мы обозначали пространство функций с нулевым средним).

4.6. Структура упорядоченной категории на $\overline{\mathrm{Mar}}$. Определим сначала некоторые канонические полиморфизмы.

Пусть $(N, \nu) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathrm{Mar}})$, а $\mathfrak{h} : N = \bigcup N_i$ — его конечное разбиение. Через $n_1, n_2, \ldots$ обозначим точки пространства $N / \mathfrak{h}$, соответствующие $N_1, N_2, \ldots \subset N$.

Определим полиморфизм $\mu_\mathfrak{h} : N \to N / \mathfrak{h}$ по следующему правилу. Мера $\mu_\mathfrak{h}$ сосредоточена на множествах $N_i \times n_i$, при этом на каждом множестве $N_i \times n_i$ эта мера совпадает с мерой ν на N_i ($N_i \times n_i$ отождествляется с N_i).

Далее, положим

$$\lambda_\mathfrak{h} := \mu_\mathfrak{h}^* : N / \mathfrak{h} \to N.$$

Рассмотрим теперь в N два разбиения, $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, причем $\mathfrak{h}_2$ является измельчением разбиения $\mathfrak{h}_1$. Тогда определены два факторпространства, $N / \mathfrak{h}_1$ и $N / \mathfrak{h}_2$. При этом разбиение $\mathfrak{h}_2$ индуцирует на $N / \mathfrak{h}_1$ разбиение, которое мы обозначим через $\mathfrak{h}_2 / \mathfrak{h}_1$. Легко видеть, что

$$\mu_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1}\mu_{\mathfrak{h}_2} = \mu_{\mathfrak{h}_1}, \quad \lambda_{\mathfrak{h}_2}\lambda_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1} = \lambda_{\mathfrak{h}_1}.$$

Кроме того,

$$\mu_\mathfrak{h}\lambda_\mathfrak{h} = 1 : N / \mathfrak{h} \to N / \mathfrak{h}.$$

Далее, определим полиморфизм

$$\theta_\mathfrak{h} := \lambda_\mathfrak{h}\mu_\mathfrak{h} : N \to N.$$

Мера $\theta_\mathfrak{h}$ сосредоточена на объединении множеств $N_i \times N_i$ и на каждом таком множестве равна $\frac{1}{\nu(N_i)}\nu \times \nu$. Легко видеть, что

$$\theta_\mathfrak{h}^2 = \theta_\mathfrak{h}, \quad \theta_\mathfrak{h}\lambda_\mathfrak{h} = \lambda_\mathfrak{h}, \quad \mu_\mathfrak{h}\theta_\mathfrak{h} = \mu_\mathfrak{h}.$$

Иногда полезно уметь обобщать морфизмы $\lambda_\mathfrak{h}$, $\mu_\mathfrak{h}$, $\theta_\mathfrak{h}$ на случай произвольных измеримых разбиений. Это достаточно сделать для $\mu_\mathfrak{h}$. Итак, пусть $N = \bigcup N_\alpha$, ν — мера на N, а $d\alpha$ — мера на $N / \mathfrak{h}$. Тогда на почти каждом множестве N_α определена условная мера ν_α так, что для любого измеримого множества $B \subset N$ выполнено

$$\nu(B) = \int\limits_{N/\mathfrak{h}} \nu_\alpha(B \cap N_\alpha)\, d\alpha.$$

Мера $\mu_{\mathfrak{h}}$ на $N \times (N / \mathfrak{h})$ определяется формулой

$$\mu_{\mathfrak{h}}(Q) = \int_{N/\mathfrak{h}} \nu_\alpha(B \cap (N_\alpha \times \alpha))\, d\alpha.$$

Легко видеть, что мера $\mu_{\mathfrak{h}}$ сосредоточена на объединении множеств $\bigcup_{\alpha \in N/\mathfrak{h}} N_\alpha \times \alpha$.

Теперь мы готовы ввести на $\overline{\mathbf{Mar}}$ структуру упорядоченной категории. Для этого нужно совершить некоторое насилие (которое на самом деле присутствовало и во всех предыдущих случаях ($\overline{\mathbf{PB}}$, $\overline{\mathbf{O}}$), но менее бросалось в глаза).

Построим чисто упорядоченную категорию $\overline{\mathbf{K}}$, эквивалентную $\overline{\mathbf{Mar}}$. Точки $\overline{\mathbf{K}}$ нумеруются измеримыми разбиениями отрезка $[0,1]$. Мы пишем $\mathfrak{h}_1 \leqslant \mathfrak{h}_2$, если разбиение $\mathfrak{h}_2$ является измельчением разбиения $\mathfrak{h}_1$. Если $\mathfrak{h}_1 \leqslant \mathfrak{h}_2$, то определены операторы $\lambda_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1}$ и $\mu_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1}$, обладающие всеми необходимыми свойствами.

4.7. Двойные классы смежности. Пусть $M \simeq [0,1]$, а $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{i=1}^{p} M_i$ — конечное измеримое разбиение M, причем $\mu(M_j) > 0$. Обозначим через $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ группу всех автоморфизмов M, переводящих каждое из множеств M_j в себя. Легко видеть, что группа $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ изоморфна сумме p экземпляров группы Ams.

Пусть $\mathfrak{h}_1 : M = \bigcup_{i=1}^{p} M_i$, $\mathfrak{h}_2 : M = \bigcup_{j=1}^{q} M'_j$ — два конечных разбиения. Поставим в соответствие каждому $g \in \mathrm{Ams}$ матрицу $\varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g)$ размера $p \times q$ с матричными элементами

$$\varphi_{ij}^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g) = \mu\bigl(gM_i \cap M'_j\bigr).$$

Лемма 4.5. Элементы $g_1, g_2 \in \mathrm{Ams}$ содержатся в одном классе смежности

$$\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_2} \setminus \mathrm{Ams} / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_1}$$

тогда и только тогда, когда выполнено равенство матриц

$$\varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g_1) = \varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g_2).$$

Доказательство очевидно. ■

С другой стороны, матрицу $\varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g)$ можно рассматривать как элемент $\mathrm{Mor}\bigl(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\bigr)$. Таким образом, установлена каноническая биекция

$$\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_2} \setminus \mathrm{Ams} / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_1} \leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{Mar}}\bigl(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\bigr).$$

Задача. Покажите, что элемент множества $\mathrm{Mor}\bigl(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\bigr)$, соответствующий $g \in \mathrm{Ams}$, можно записать в виде

$$\mu_{\mathfrak{h}_2} g \lambda_{\mathfrak{h}_1}.$$

Задача. Пусть $N, K \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathbf{Mar}})$. Покажите, что существуют такие разбиения $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$ отрезка $[0,1]$, что $N \simeq [0,1]/\mathfrak{n}$, $K \simeq [0,1]/\mathfrak{m}$, причем любой полиморфизм $P : N \to K$ представим в виде

$$\pi = \mu_{\mathfrak{m}} g \lambda_{\mathfrak{n}},$$

где $g \in \mathrm{Ams}$.

4.8. Категорные продолжения.

Теорема 4.6. Любое непрерывное унитарное представление группы Ams допускает единственное продолжение до $*$-представления категории $\overline{\mathbf{Mar}}$.

Доказательство дословно повторяет доказательства теорем 1.4. и 1.8. ■

Так же, как в § 1, доказывается теорема мультипликативности для двойных классов смежности, дающая частичное конструктивное описание категорного продолжения.

Пусть τ — непрерывное унитарное представление группы Ams в пространстве H. Для любого конечного разбиения $\mathfrak{h}$ рассмотрим пространство $H(\mathfrak{h})$ всех $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$-неподвижных векторов и ортогональный проектор $P(\mathfrak{h})$ на $H(\mathfrak{h})$.

Следующая задача дает возможность для применения предложения 1.2.

Задача. Пусть $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \mathfrak{h}_3 < \ldots$ последовательность разбиений $[0,1]$, причем мера элементов разбиения стремится к 0. Тогда для любой окрестности U единицы в Ams найдется j такое, что $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_j} \subset U$ (а следовательно, в силу предложения 1.2, подпространство $\bigcup H(\mathfrak{h}_j)$ плотно в H).

Пусть $M \simeq [0,1]$. Пусть $\mathbf{K}$ — подкатегория в категории $\overline{\mathbf{K}}$ из п. 4.6, состоящая из конечных пространств $M / \mathfrak{h}$.

Теорема 4.7. Пусть τ — непрерывное унитарное представление группы Ams в пространстве H. Положим для любого объекта $M / \mathfrak{h}$ категории $\mathbf{K}$

$$T(M / \mathfrak{h}) = H(\mathfrak{h}),$$

а для любого морфизма $\varkappa : M / \mathfrak{h}_1 \to M / \mathfrak{h}_2$

$$\tau(\varkappa) := P(\mathfrak{h}_2)\tau(g)\Big|_{H(\mathfrak{h}_1)} : T(M / \mathfrak{h}_1) \to T(M / \mathfrak{h}_2)$$

для произвольного $g \in \varkappa \in \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_2} \setminus \mathrm{Ams} / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_1} \simeq \mathrm{Mor}\bigl(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\bigr)$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$.

Эта теорема является следствием теоремы 4.6.

Теорема 4.8. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — $*$-представление категории $\mathbf{Mar}$, причем $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$ для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Mar}}$. Тогда T допускает единственное продолжение до непрерывного $*$-представления категории $\overline{\mathbf{Mar}}$.

Доказательство. Применяем теорему аппроксимации (теорему 1.10) к категориям $\overline{\mathbf{K}}$ и $\mathbf{K}$. ■

4.9. Классификация представлений.

Теорема 4.9. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — неприводимое представление категории $\overline{\mathbf{A}}$ с числовыми отметками $(a_1, a_2, \ldots)$. Тогда композиция R и простейшего представления $\mathsf{T}_0 = (T_0, \tau_0)$ категории $\overline{\mathbf{Mar}}$ неприводима, и любое неприводимое $*$-представление категории $\overline{\mathbf{Mar}}$ имеет такой вид.

Для доказательства нужно прежде всего получить описание всех представлений полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{Mar}}(M)$. Итак, пусть M состоит из p точек с ненулевыми мерами $\mu_1, \ldots, \mu_p$.

Задача. Пусть Γ — множество всех матриц X размера $p \times p$, удовлетворяющих условию

$$\sum_i x_{ij} = \mu_j, \quad \sum_j x_{ij} = \mu_i, \quad x_{ij} \in \mathbb{R}$$

с законом умножения

$$X \cdot Y := X \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_p \end{pmatrix}^{-1} Y.$$

Покажите, что Γ — полугруппа, изоморфная полугруппе всех операторов в $\mathbb{R}^{p-1}$.

Обозначим через G группу всех обратимых элементов полугруппы Γ; очевидно, $\mathrm{G} \simeq \mathrm{GL}(p-1, \mathbb{R})$. Через Γ_0 мы обозначим полугруппу $\Gamma_0 = \mathrm{End}_{\mathbf{Mar}}(M) \cap \mathrm{G}$.

Задача.

а) Покажите, что центр полугруппы Γ_0 состоит из матриц Z_s вида

$$z_{ij} = s\mu_i\delta_{ij} + (1-s)\mu_i\mu_j,$$

где $0 < s \leqslant 1$.

б) Пусть $X \in \mathrm{G}$. Тогда для достаточно малых $s > 0$ выполнено $Z_s X \in \Gamma_0$.

По этой причине любое неприводимое $*$-представление τ полугруппы Γ_0 продолжается на группу $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(p-1, \mathbb{R})$, при этом представление группы удовлетворяет условию $\rho(g^t) = \rho(g)^*$. Теперь мы получаем возможность применить предложение 3.8 и тем самым получить классификацию $*$-представлений Γ_0.

Задача. Какие неприводимые $*$-представления Γ_0 продолжаются на $\mathrm{End}(M)$?
Ответ такой же, как в теореме 3.6.

Вычисление спускающего функтора и описание согласованных систем совпадают с рассуждениями п. 3.6 буквально.

4.10. Замечания.

А. Группа Ams_∞. Пусть N — лебеговское пространство с непрерывной бесконечной мерой, т.е. $N \simeq \mathbb{R}$. Группу преобразований пространства N, сохраняющих меру, мы обозначим через Ams_∞.

Эта группа действует в $L^2(N)$ унитарными преобразованиями

$$\tau(g) : f(m) \mapsto f(gm), \tag{4.6}$$

и слабая операторная топология в $L^2(N)$ индуцирует топологию в Ams_∞.

Задача. Покажите, что представление τ неприводимо.

Задача. Опишите слабое замыкание группы Ams_∞ в пространстве операторов в $L^2(N)$.

Определим категорию $\overline{\mathbf{Mar}}^\circ$. Ее объекты — лебеговские пространства с мерой, конечной или бесконечной. Морфизмы $(M, \mu) \to (N, \nu)$ — это борелевские меры $\varkappa$ на $M \times N$ такие, что проекция $\varkappa$ на M мажорируется мерой μ, а проекция $\varkappa$ на N мажорируется мерой ν. Умножение морфизмов и инволюция задаются так же, как и в $\overline{\mathbf{Mar}}$.

Пусть $N \simeq \mathbb{R}$, а $\mathfrak{h} : N = N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_p$ — конечное измеримое разбиение, причем мера подмножества N_0 бесконечна, а мера всех остальных подмножеств N_i конечна. Через $\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}}$ мы обозначим группу всех сохраняющих меру преобразований, переводящих каждое множество N_j в себя ($j = 0, 1, \ldots, p$).

Задача. Опишите двойные классы смежности

$$\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}_1} \setminus \mathrm{Ams}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}_2}$$

Задача. Докажите, что любое унитарное непрерывное представление Ams_∞ продолжается единственным образом до $*$-представления категории $\overline{\mathbf{Mar}}^\circ$.

Теорема 4.10. Любое неприводимое унитарное представление группы Ams_∞ есть композиция голоморфного тензорного представления категории $\overline{\mathrm{A}}$ и представления (4.6).

(Самое сложное место доказательства — конечномерность неприводимых представлений полугрупп $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Mar}}^\circ}(M)$, где M — конечное пространство.)

В. Задача*. Группа $\mathrm{O}(\infty)$ действует в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ (см. п. VI.1.9). Это действие в силу теоремы 3.3 продолжается до непрерывного действия полугруппы сжатий. Поэтому полугруппа сжатий вкладывается в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Mar}}}(\mathbb{R}^\infty)$. Напишите явные формулы для этого вложения (см. [Nelson (1973)]).

С. Джойнинги. Рассмотрим пространства с мерой $(M_1, \mu_1), \ldots, (M_k, \mu_k)$ и автоморфизмы $g_j \in \mathrm{Ams}(M_j)$. *Джойнингом* (*$k$-джойнингом*) называется мера $\varkappa$ на $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ такая, что

а) проекция $\varkappa$ на M_j есть μ_j;

б) $\varkappa$ инвариантна относительно $g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_k$.

Точно так же, как полиморфизмы являются в естественном смысле морфизмами пространств с мерой, в 2-джойнинге естественно видеть морфизм динамических систем. Что касается k-джойнингов, то это аналог инвариантных полилинейных форм.

Джойнинги дают возможность строить инварианты элемента $g \in \mathrm{Ams}(M)$ с точностью до сопряжения. Например, таким инвариантом является полугруппа всех джойнингов g с g. Рассмотрим также замыкание A_g множества $1, g, g^2, g^3, \ldots$ в группе полиморфизмов, а также выпуклую оболочку B_g множества $1, g, g^2, \ldots$. Тогда любой $q \in \mathrm{B}_g$ является джойнингом, и структура полугрупп A_g, B_g также является инвариантом элемента g.

4.11. Литературные замечания. О лебеговских пространствах см. [Рохлин (1947)]. Группе Ams посвящена огромная литература (см., например, [Корнфельд, Синай, Фомин (1980)]), правда, наша проблематика отличается от обычной: в эргодической теории изучаются инварианты классов сопряженных элементов в Ams. Полиморфизмы (стохастические ядра) введены в [Hopf (1954)], см. также [Krengel (1985)], [Вершик (1977)]. Классификация представлений группы Ams получена в [Неретин (1992.1)]. О джойнингах см., например, [Rudolph (1979)], [Рыжиков (1993)].

§ 5. (G, K)-*пары. Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского*

Теория представлений полупростых групп Ли во многом опирается на теорию представлений компактных групп: наличие в полупростой группе G «большой» компактной подгруппы K во многом упрощает изучение представлений G.

Мы только что видели, что теория представлений тяжелых групп S_∞, $\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$, Ams, Ams_∞ довольно проста, и естественно думать, что наличие в некоторой группе G тяжелой подгруппы K дало бы способ изучения представлений группы G. Как показывает оставшаяся часть книги, эвристическое понятие (G, K)-пары — группы с тяжелой подгруппой — очень важно и очень полезно. В этом параграфе мы делаем попытку дать определение (G, K)-пары. Это определение не претендует на то, чтобы выделить все «разумные» объекты этого типа из «неразумных». Скорее всего, это определение является слишком широким. У нас, однако, будет возможность убедиться в его полезности, в частности, оно избавит нас от многократного повторения одних и тех же рассуждений.

5.1. Еще о тяжелых группах. Итак, мы увидели, что внешне совсем разные группы

$$S_\infty, O(\infty), U(\infty), Sp(\infty), \mathrm{Ams}, \mathrm{Ams}_\infty \tag{5.1}$$

оказываются поразительно похожими. Я затрудняюсь выделить тот набор свойств, которыми обеспечивается их сходство. Сейчас же я перечислю некоторые из тех их общих свойств, которые будут важны в дальнейшем.

Итак, каждая тяжелая группа K из списка (5.1) вкладывается в качестве всюду плотного подмножества в некоторую компактную полугруппу $\overline{K}$, при этом отображение $g \mapsto g^{-1}$ продолжается до инволюции $g \mapsto g^*$ в полугруппе K ($(gh)^* = h^*g^*$). Любое унитарное представление π группы K продолжается до $*$-представления полугруппы $\overline{K}$, которое мы тоже будем обозначать через π.

Полугруппа $\overline{K}$ содержит некоторое замечательное семейство идемпотентов θ_∞^α:

$$(\theta_\infty^\alpha)^2 = \theta_\infty^\alpha, \quad (\theta_\infty^\alpha)^* = \theta_\infty^\alpha.$$

Эти идемпотенты нумеруются элементами α некоторого частично упорядоченного множества Σ, причем при $\alpha > \beta$ выполнено

$$\theta_\infty^\alpha \theta_\infty^\beta = \theta_\infty^\beta \theta_\infty^\alpha = \theta_\infty^\beta.$$

Напомним, как выглядят полугруппы $\overline{K}$ и идемпотенты θ_∞^α для всех групп вида (5.1).

1) В случае S_∞ полугруппа $\overline{K}$ есть полугруппа частичных биекций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Множество Σ есть $\mathbb{Z}_+$, а θ_∞^n имеет область определения $\{1, 2, \ldots n\}$ и оставляет все элементы области определения на месте.

2) В случае $K = O(\infty), U(\infty), Sp(\infty)$ полугруппа $\overline{K}$ — это полугруппа сжатий (т. е. операторов с нормой $\leqslant 1$) в пространстве ℓ_2 над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.

Множество Σ есть $\mathbb{Z}_+$, а

$$\theta_\infty^n = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

3a) В случае группы Ams полугруппа $\overline{K}$ есть полугруппа полиморфизмов $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M)$, где $M = [0, 1]$. Множество Σ есть множество конечных измеримых разбиений, а $\theta_\infty^{\mathfrak{h}}$ суть $\theta_{\mathfrak{h}}$ из п. 4.6.

3b) В случае группы Ams_∞ полугруппа $\overline{K}$ есть полугруппа «полиморфизмов с исчезающей мерой» $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}^\circ$. Множество Σ есть множество конечных разбиений $\mathfrak{h} : M = \mathbb{R} = M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_k$, в которых M_0 имеет бесконечную меру, а остальные M_j — конечную. Мера $\theta_\infty^{\mathfrak{h}}$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ сосредоточена на объединении множеств $M_1 \times M_1, \ldots, M_k \times M_k$ и на каждом $M_j \times M_j$ равна $\frac{1}{\mu(M_j)} \mu \times \mu$.

Далее, группа K содержит замечательное семейство подгрупп K^α, а именно, группа K^α состоит из всех $g \in K$ таких, что

$$\theta_\infty^\alpha g \theta_\infty^\alpha = \theta_\infty^\alpha.$$

При этом для любого унитарного представления π группы K оператор $\pi(\theta_\infty^\alpha)$ совпадает с проектором на подпространство всех K^α-неподвижных векторов.

Стоит еще добавить, что подпространство $\bigcup_\alpha \mathrm{Im}\, \pi(\theta_\infty^\alpha)$ плотно в пространстве представления π.

5.2. (G, K)-пары. Итак, пусть G — топологическая группа с тяжелой подгруппой K. Рассмотрим множество $K^\alpha \setminus G / K^\beta$, снабженное естественной фактортопологией. Фактортопологии на подобных множествах могут быть устроены довольно плохо.

Задача*. Опишите топологию на множестве классов сопряженных элементов группы $U(\infty)$.

На самом деле, для наших целей почти можно ограничиться случаем, когда все пространства $K^\alpha \setminus G / K^\beta$ отделимы по Хаусдорфу, но, в действительности, бывают разумные (G, K)-пары, для которых это не так, и ничего страшного в этом нет. Рассмотрим всевозможные хаусдорфовы пространства X и всевозможные сюръективные отображения $\varphi : K^\alpha \setminus G / K^\beta \to X$. Среди таких отображений есть универсальное сюръективное отображение $\varphi : K^\alpha \setminus G / K^\beta \to Z$ такое, что любое другое отображение $\psi : K^\alpha \setminus G / K^\beta \to X$ имеет вид $\psi = \nu \cdot \varphi$, где ν — непрерывное отображение $Z \to X$ (см. [Bourbaki (1942)]). Обозначим это универсальное пространство Z через $\left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right]$. Его элементы являются подмножествами в G, мы будем называть их *приведенными двойными классами смежности*. Еще раз подчеркнем, что в этой книге почти всегда $\left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right] = K^\alpha \setminus G / K^\beta$.

Мы скажем, что группа G является (G, K)-*парой*, если выполнено следующее свойство (A):

(A) *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$. Рассмотрим*

$$r \in \left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right], \quad p \in \left[K^\beta \setminus G / K^\gamma\right]$$

и $x \in r$, $y \in p$. Пусть $g_j \in K_\beta$ — последовательность, сходящаяся к θ_∞^β, а $q_j \in \left[K_\alpha \setminus G / K_\gamma\right]$ — приведенный двойной класс смежности, содержащий $x g_j y$. Тогда q_j имеет предел $q \in K_\alpha$, и этот предел не зависит от выбора последовательности g_j.

Свяжем теперь с (G, K)-парой некоторую категорию $\mathbf{L} = \mathbf{L}(G, K)$, которую мы назовем *шлейфом* группы G. Объекты $\mathbf{L}$ нумеруются индексами $\alpha \in \Sigma$, а

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\beta, \alpha) := \left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right].$$

Пусть $r \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\beta, \alpha)$, $p \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\gamma, \beta)$. Тогда в силу свойства (A) канонически определен элемент $q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\gamma, \alpha)$, который мы и назовем *произведением* p и r.

Здесь возникает естественный вопрос: действительно ли у нас получится категория, т. е. действительно ли умножение будет ассоциативным? Я не знаю, и сильно сомневаюсь в том, что ассоциативность может быть выведена из свойства (A). Однако вся эта деятельность имеет смысл лишь в случае, если двойные классы смежности и их умножение удастся описать явно. А в таких случаях никаких сложностей с проверкой ассоциативности не возникает.

Задача. Что дает эта конструкция, если группа G совпадает со своей подгруппой K?

Задача. Пусть $\mathrm{Isom}(\ell_2) = U(\infty) \ltimes \ell_2$ — группа изометрий гильбертова пространства (на $U(\infty)$ введена слабая топология, на ℓ_2 — сходимость по норме). Опишите умножение в полугруппе $U(\infty) \setminus \mathrm{Isom}(\ell_2) / U(\infty)$.

Задача. Пусть Gms — группа преобразований отрезка $[0,1]$, оставляющих меру Лебега квазиинвариантной. Введите на ней какую-нибудь топологию и опишите полугруппу Ams \ Gms / Ams.

Пусть теперь ρ — унитарное представление группы G в пространстве H. Построим каноническое представление $\mathrm{R} = (R, \rho)$ категории $\mathbf{L}$. Положим, что $R(\alpha)$ есть пространство K^α-неподвижных векторов в H; напомним, что $R(\alpha)$ совпадает с образом проектора $\rho(\theta_\infty^\alpha)$. Пусть $q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\beta, \alpha)$, тогда оператор $\rho(q) : R(\beta) \to R(\alpha)$ задается формулой

$$\rho(q) := \rho(\theta_\infty^\alpha)\rho(g)\Big|_{R(\beta)},$$

где $g \in \mathrm{G}$ содержится в $q \in \left[\mathrm{K}^\alpha \setminus \mathrm{G} / \mathrm{K}^\beta\right]$.

Теорема 5.1. («теорема мультипликативности»). Если $\mathbf{L}$ — действительно категория, то $\mathrm{R} = (R, \rho)$ — ее представление.

Доказательство. Пусть все обозначения те же, что в формулировке свойства (А). Введем операторы

$$\tilde{\rho}(r) = \rho(\theta^\alpha)\rho(x)\rho(\theta^\beta) : H \to H.$$

Нам достаточно доказать тождество

$$\tilde{\rho}(pr) = \tilde{\rho}(p)\tilde{\rho}(r).$$

Прежде всего, заметим, что операторнозначная функция $p \mapsto \tilde{\rho}(p)$ слабо непрерывна на $\mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\beta, \alpha)$. В частности,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(pr) = \tilde{\rho}(q) &= \lim_{j\to\infty} \tilde{\rho}(q_j) = \\ &= \lim_{j\to\infty} \rho(\theta_\infty^\alpha)\rho(xg_jy)\rho(\theta_\infty^\gamma) = \\ &= \rho(\theta_\infty^\alpha)\rho(x)\Big[\lim_{j\to\infty}\rho(g_j)\Big]\rho(y)\rho(\theta_\infty^\gamma) = \\ &= \rho(\theta_\infty^\alpha)\rho(x)\rho(\theta_\infty^\beta)\rho(y)\rho(\theta_\infty^\gamma) = \\ &= \left[\rho(\theta_\infty^\alpha)\rho(x)\rho(\theta_\infty^\beta)\right]\left[\rho(\theta_\infty^\beta)\rho(y)\rho(\theta_\infty^\gamma)\right] = \\ &= \tilde{\rho}(p)\tilde{\rho}(r).\end{aligned}$$

■

Наконец, в категории $\mathbf{L}$ нужно ввести инволюцию. Это очень просто: инволюция $g \mapsto g^{-1}$ в группе G индуцирует инволюцию

$$\mathrm{K}^\alpha \setminus \mathrm{G} / \mathrm{K}^\beta \leftrightarrow \mathrm{K}^\beta \setminus \mathrm{G} / \mathrm{K}^\alpha.$$

Как описать все унитарные представления (G, K)-пары? Только что описанная теорема позволяет свести этот вопрос к описанию $*$-представлений категории $\mathbf{L}$. Категория $\mathbf{L}$ для (кажется) всех рассматривавшихся в литературе групп описана явно (хотя во многих ситуациях не все ясно с топологией на множестве морфизмов). Однако довести до победного конца классификацию представлений $\mathbf{L}$ удалось пока в очень немногих случаях. Правда, для очень многих (G, K)-пар описаны все K-сферические представления.

Существует 3 разных типа тяжелых групп и, соответственно, 3 разных типа (G, K)-пар. О (G, K)-парах, связанных с симметрической группой, мы немного поговорим в следующем параграфе. Случаи $\mathrm{K} = \mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$ обсуждаются в следующей главе, а случай $\mathrm{K} = \mathrm{Ams}, \mathrm{Ams}_\infty$ — в главе X.

5.3. Замечания. Как строить мантию? Мы уже говорили, что бесконечномерная группа G должна вкладываться в некоторую «невидимую невооруженным глазом» полугруппу Γ. Соображения этого параграфа дают два способа поиска Γ для (G, K)-пары, оба они на самом деле оказываются довольно тяжелыми (примерный ответ получается просто, а, например, точно описать топологию нелегко).

1-й способ. Угадываем объект категории $\mathbf{L}$ с бесконечным номером α, зная объекты с конечными номерами.

2-й способ. Рассмотрим, например, случай $\mathrm{K} = \mathrm{O}(\infty)$. Пусть $\theta \in \overline{\mathrm{K}}$ — проектор такой, что $\operatorname{rk}\theta = \operatorname{rk}(1-\theta) = \infty$. Пусть K^∞ — группа матриц $g \in \mathrm{K}$, удовлетворяющих условию $\theta g \theta = \theta$. Естественно думать, что $\Gamma \simeq \mathrm{K}^\infty \setminus \mathrm{G} / \mathrm{K}^\infty$.

§ 6. *О бесконечной бисимметрической группе*

Симметрические группы S_n имеют много бесконечных аналогов. Объект, который мы выбрали в качестве примера, на первый взгляд кажется странным. На самом деле большая часть литературы по бесконечной симметрической группе посвящена именно этому объекту. Некоторые дополнительные пояснения см. в пп. 6.6, F.14.

6.1. Группа $(\mathrm{G}, \mathrm{K}) = (\mathrm{S}_\infty \times \mathrm{S}_\infty, \mathrm{S}_\infty)$. Рассмотрим два экземпляра $\mathbb{N}'$ и $\mathbb{N}''$ множества $\mathbb{N}$. Элементы $\mathbb{N}'$ мы будем обозначать через $1', 2', 3', \dots$, а элементы $\mathbb{N}''$ — через $1'', 2'', 3'', \dots$. Элементом группы $\mathrm{G} = (\mathrm{S}_\infty \times \mathrm{S}_\infty, \mathrm{S}_\infty)$ является пара перестановок $\sigma' \in \mathrm{S}_\infty$, $\sigma'' \in \mathrm{S}_\infty$, где σ' действует на $\mathbb{N}'$, а σ'' — на $\mathbb{N}''$, при этом для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\sigma' n' = m' \Leftrightarrow \sigma'' n'' = m''.$$

Подгруппа $\mathrm{K} \simeq \mathrm{S}_\infty$ в G состоит из пар (σ', σ'') таких, что $\sigma' = \sigma''$, т.е. для всех $n = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\sigma' n' = m' \Leftrightarrow \sigma'' n'' = m''.$$

Замечание. Группа G содержится в $\mathrm{S}_\infty \times \mathrm{S}_\infty$. Но сама она произведением групп не является!

Через $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ мы обозначим группу финитных перестановок $\mathbb{N}$, снабженную дискретной топологией.

Определим топологию на G как слабейшую топологию, относительно которой следующие три отображения непрерывны:

1. отображение $(\sigma', \sigma'') \mapsto \sigma'$ в S_∞;
2. отображение $(\sigma', \sigma'') \mapsto \sigma''$ в S_∞;
3. отображение $(\sigma', \sigma'') \mapsto (\sigma')^{-1}\sigma''$ в $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$.

В частности, подгруппа $\mathrm{K} \simeq \mathrm{S}_\infty$ снабжена обычной топологией группы S_∞.

6.2. Примеры представлений группы G. Введем на дискретной группе $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ меру так, что мера каждой точки равна 1. Группа G действует в $\ell^2(\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}})$ преобразованиями вида

$$\tau(\sigma', \sigma'')f(p) = f\big((\sigma')^{-1}p\sigma''\big).$$

Следующий пример более содержателен. Пусть V и W — два гильбертовых пространства. Пусть $h \in V \otimes W$ — вектор длины 1. Рассмотрим счетное произведение $Z = (V \otimes W)^{\otimes\infty}$ с отмеченными векторами $h \in V \otimes W$ (см. Предварительные сведения, п. 4.11). Определим действие группы G в Z. Пусть $(\sigma', \sigma'') \in \mathrm{G}$. Тогда σ' переставляет сомножители вида V в Z, а σ'' переставляет сомножители вида W.

Задача. Убедитесь в корректности конструкции.

Стоит обсудить, от каких параметров в действительности зависит построенное представление.

Задача. Покажите, что единичный вектор $h \in V \otimes W$ приводится унитарной заменой координат в V и W к виду

$$\sum \alpha_j^{1/2} e_j \otimes f_j,$$

где $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\sum \alpha_j = 1$, векторы e_j образуют ортонормальную систему в V, а f_j — ортонормальная система в W.

Задача. Покажите, что в Z есть ровно один K-инвариантный вектор, а именно, $y = h^{\otimes\infty}$.

В частности (см. лемму 5.5 из Предварительных сведений), циклическая оболочка этого вектора является неприводимым представлением группы G, мы обозначим это представление через $\tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$.

Задача. Покажите, что сферическая функция

$$\langle \tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots](\sigma', \sigma'')y, y \rangle$$

представления $\tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ задается формулой

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots\right)^{m_k}, \tag{6.1}$$

где m_k — число циклов длины k в перестановке $(\sigma')^{-1}\sigma''$.

Отсюда, в частности, вытекает попарная неэквивалентность представлений $\tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$.

6.3. Двойные классы смежности. Рассмотрим в $K = S_\infty$ подгруппу $K^n = S_\infty^n$ (см. п. 1.1). Мы хотим описать множество $K^n \setminus G / K^m$.

Пусть $(\sigma', \sigma'') \in G$. Поставим в соответствие (σ', σ'') диаграмму вида, изображенную на рис. 1.

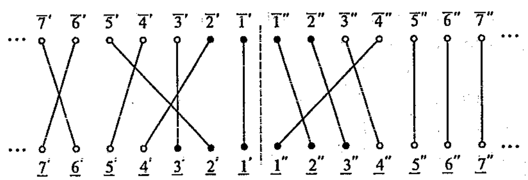


Рис. 1

А именно, кружочек $\overline{k}'$ в верхнем ряду соединен с кружочком $\underline{l}'$ в нижнем ряду, если $\sigma' k' = l'$. Аналогично, кружочек $\overline{p}''$ в верхнем ряду соединен с кружочком $\underline{q}''$ в нижнем, если $\sigma'' p'' = q''$. При этом кружочки $1', 2', \ldots, m'$; $1'', \ldots, m''$ верхнего ряда, а также кружочки $1', 2', \ldots, n'$; $1'', \ldots, n''$ нижнего ряда закрашены в черное (у нас $m = 2, n = 3$).

Вопрос. Как интерпретировать умножение в G с помощью таких диаграмм?

Теперь соединим всевозможные пары *белых* кружочков l', l'' верхнего ряда горизонтальной дугой. То же самое сделаем со всеми возможными парами s', s'' белых кружочков нижнего ряда, см. рисунок 2.

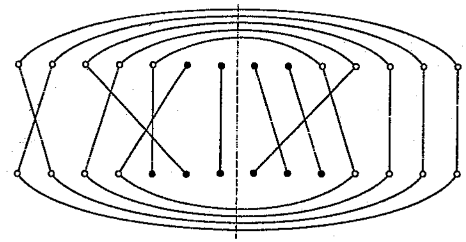


Рис. 2

На каждой дуге, ведущей сверху вниз (т. е. из верхнего ряда в нижний) мы напишем цифру 0, а на каждой горизонтальной дуге — число $\frac{1}{2}$ (так сказать, «вес» кривой).

В случае нашей картинки все распадается на следующий набор сплошных линий:

$\overline{1}'\ \underline{1}'$	0
$\overline{2}'\ \underline{4}'\ \underline{4}''\ \overline{3}''\ \overline{3}'\ \underline{3}'$	1
$\overline{1}''\ \underline{2}''$	0
$\overline{2}''\ \underline{3}''$	0
$\underline{2}'\ \overline{5}'\ \overline{5}''\ \underline{5}''\ \underline{5}'\ \overline{4}'\ \overline{4}''\ \underline{1}''$	$\frac{3}{2}$
$\overline{6}'\ \underline{7}'\ \underline{7}''\ \overline{7}''\ \overline{7}'\ \underline{6}'\ \underline{6}''\ \overline{6}''\ \overline{6}'$	2
...	

где в правом столбце записан суммарный вес участков линии (последняя линия замкнута).

Замечание. На рисунке 2 вес кривой равен половине числа ее пересечений с вертикальной пунктирной линией.

Теперь забудем о белых кружках и оставим в памяти лишь то, какие черные кружки соединены между собой и каков вес соединяющих их линий, запомним также вес замкнутых линий.

В частности, для диаграммы, изображенной на рис. 2, мы получим картину, изображенную на рисунке 3.

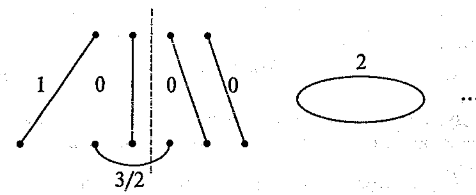


Рис. 3

Число замкнутых линий, конечно, получится бесконечным, но в силу определения G лишь конечное число из них имеет длину > 1. О циклах длины 1 мы забудем.

Правильной диаграммой типа (m, n) мы назовем картинку, изображенную на рисунке 4.

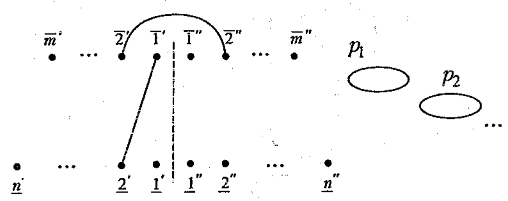


Рис. 4

Множество всех кружочков на диаграмме разбито на пары, что на картинке изображается линиями, соединяющими кружочки. При этом допустимы лишь линии следующих типов

$$\overline{k}'\underline{l}'; \quad \overline{p}''\underline{q}''; \quad \overline{a}'\overline{b}''; \quad \underline{s}'\underline{t}''.$$

Проще говоря, «горизонтальные» линии должны соединять точки левой половины с точками правой половины, а «вертикальные» линии могут соединять лишь точки, лежащие в одной и той же половине. Кроме того, на диаграмме присутствует конечное число замкнутых циклов.

Далее, на каждой линии отмечено целое или полуцелое неотрицательное число («вес») по правилу

1. на «горизонтальных» линиях (т. е. линиях типа $\overline{a}'\overline{b}''$ и $\underline{s}'\underline{t}''$) — числа вида $\frac{2k+1}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$;

2. на «вертикальных» линиях (т. е. линиях типа $\overline{k}'\underline{l}'$ и $\overline{p}''\underline{q}''$) — целое число $\alpha \in \mathbb{Z}_+$;

3. на замкнутых циклах — целые числа > 1.

Замечание. Может быть, правильные диаграммы естественней представлять в форме, изображенной на рисунке 5.

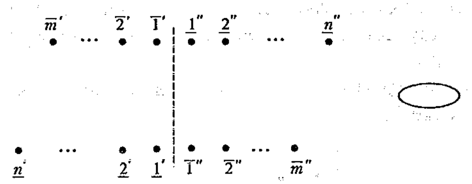


Рис. 5

Тогда все линии будут идти сверху вниз (такая перестановка похожа на преобразование Потапова, превращающее линейные отношения в операторы).

Таким образом, нами построено каноническое отображение R из группы $G = (S_\infty \times S_\infty, S_\infty)$ в множество $\Delta(m, n)$ правильных диаграмм типа (m, n).

Теорема 6.1. Отображение R постоянно на смежных классах $K^n \setminus G / K^m$, более того, оно устанавливает биекцию

$$K^n \setminus G / K^m \leftrightarrow \Delta(m, n).$$

Доказательство. Эта теорема становится очевидной после некоторого созерцания. ■

6.4. Категория SS. Объекты категории SS — неотрицательные целые числа. Множество $\mathrm{Mor}_{SS}(m, n)$ совпадает с $\Delta(m, n)$. Правило умножения мы сейчас объясним. Пусть у нас есть две диаграммы (мы не пишем весов на линиях), изображенные на рисунке 6.

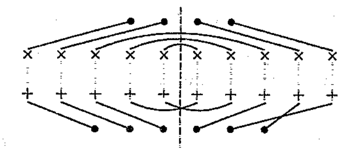


Рис. 6

Отождествим верхние крестики с нижними плюсиками и забудем о них. Тогда у нас снова получится правильная диаграмма (при этом веса на линиях складываются, а циклы длины 1 мы забываем). Мы получаем диаграмму, изображенную на рис. 7.

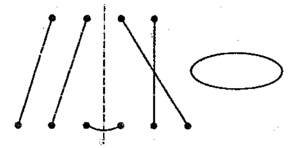


Рис. 7

(обращаем внимание, что при умножении образовался замкнутый цикл).

Задача. Покажите, что $\mathrm{Aut}_{SS}(m) = S_m \times S_m$.

Задача. Придумайте сюръективный функтор $\mathbf{SS} \to \mathbf{PB}$.

Теорема 6.2. Группа G удовлетворяет свойству (А) из п. 5.2. При этом умножение двойных классов смежности

$$\left(K^m \setminus G / K^n\right) \times \left(K^n \setminus G / K^l\right) \to \left(K^m \setminus G / K^l\right)$$

совпадает с умножением морфизмов категории SS.

Доказательство. Эта теорема тоже очевидна. Пусть $\gamma \in K^m \setminus G / K^n$, а $\delta \in K^n \setminus G / K^l$, $(\sigma', \sigma'') \in \gamma$, $(\varkappa', \varkappa'') \in \delta$ — элементы G. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma', \sigma'', \varkappa', \varkappa'' \in S_\infty^{\mathrm{fin}}$. Обозначим через $\mathrm{mob}(\sigma)$ множество всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\sigma k \neq k$. Пусть последовательность $(\psi_j, \psi_j) \in K^n$ сходится к идемпотенту θ^n. Тогда начиная с некоторого номера j выполнено следующее свойство:

$$\psi_j\left(\mathrm{mob}(\varkappa') \setminus \{1', \ldots, n'\}\right) \cap \left(\mathrm{mob}(\sigma') \setminus \{1', \ldots, n'\}\right) = \varnothing,$$

$$\psi_j\left(\mathrm{mob}(\varkappa'') \setminus \{1', \ldots, n'\}\right) \cap \left(\mathrm{mob}(\sigma'') \setminus \{1'', \ldots, n''\}\right) = \varnothing$$

(см. рисунок 8, где изображена лишь правая половина картины).

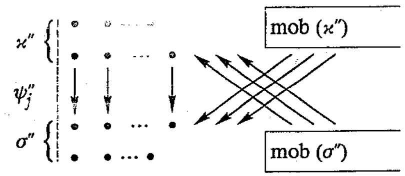


Рис. 8

Теперь утверждение становится очевидным. ■

6.5. Примеры представлений категории SS.

Пример 1. Каждому $P \in \mathrm{Mor}_{SS}(m, n)$ ставится в соответствие 0-1-матрица $m \times n$, причем в i-й строке и j-м столбце стоит единица тогда и только тогда, когда $\bar{i}'$ и $\underline{j}'$ соединены в диаграмме линией веса 0.

Пример 2. Пусть V — гильбертово пространство, конечномерное или бесконечномерное, с базисом $e_1, e_2, \dots$, а V' и V'' — два экземпляра пространства V с базисами e'_j и e''_j. Пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots > 0$ (чисел α_j столько же, сколько векторов e_j), причем $\sum \alpha_j = 1$. Построим по каждому такому набору α_j представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ категории **SS**.

Пусть $m \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SS})$. Тогда $T(V) = (V' \times V'')^{\otimes m}$. Операторы $\tau(P)$ мы определим на образующих группоида морфизмов.

а) Пусть $P \in \mathrm{Aut}(m) \simeq \mathrm{S}_m \times \mathrm{S}_m$. Тогда первый экземпляр группы S_m переставляет в произведении $(V' \times V'')^{\otimes m}$ пространства V', а второй экземпляр S_m переставляет пространства V''.

б) Пусть диаграмма Q имеет вид, изображенный на рисунке 9.

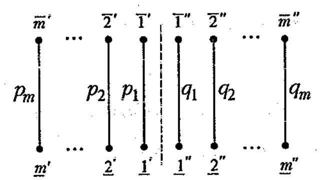


Рис. 9

Тогда

$$Q\Big(\big(e'_{j_1} \otimes e''_{i_1}\big) \otimes \ldots \otimes \big(e'_{j_m} \otimes e''_{i_m}\big)\Big) = \prod_s \big(\alpha_{j_s}^{p_s} \alpha_{i_s}^{q_s}\big)\Big(\big(e'_{j_1} \otimes e''_{i_1}\big) \otimes \ldots \otimes \big(e'_{j_m} \otimes e''_{i_m}\big)\Big).$$

в) Для диаграммы $R \in \Delta(m, m+1)$, изображенной на рисунке 10, оператор $\tau(R)$ есть оператор $(V' \otimes V'')^m \to (V' \otimes V'')^m$ умножения на вектор $z = \sum \sqrt{\alpha_j} e'_j \otimes e''_j$ справа.

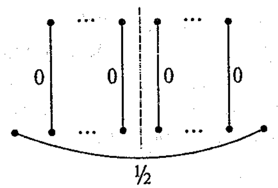


Рис. 10

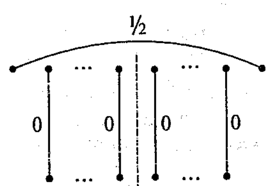


Рис. 11

г) Для диаграммы $H \in \Delta(m+1, m)$, изображенной на рисунке 11, оператор H есть оператор проектирования на подпространство $(V' \otimes V'')^{\otimes m} \otimes z$, отождествляемое с $(V' \otimes V'')^{\otimes m} = T(m)$.

Задача. Проверьте корректность конструкции. Как влияет на оператор $\tau(P)$ наличие в диаграмме P циклов?

Задача. Покажите, что представлениям категории **SS** из примера 2 соответствуют представления $(\mathrm{S}_\infty \times \mathrm{S}_\infty, \mathrm{S}_\infty)$ из п. 6.2. Что соответствует представлению из примера 1?

6.6. Замечания. Представления Тома и факторпредставления.

Пусть ρ — унитарное представление группы G. Оно называется *факторпредставлением*, если множество операторов $\rho(g)$ порождает фактор фон Неймана типа II_1 (см., например, [Кириллов (1972)]). Рассмотрим след $\mathrm{tr}(\cdot)$ на этом факторе, нормированный так, что $\mathrm{tr}(E) = 1$. Легко видеть, что функция $\chi(g) = \mathrm{tr}\,\rho(g)$ (*характер факторпредставления* ρ) удовлетворяет условиям:

1. $\chi(e) = 1$;
2. χ центральна $(\chi(h^{-1}gh) = \chi(g))$;
3. χ положительно определена (о положительно определенных функциях см., например, [Dixmier (1969)]).

Теорема 6.3. Функция χ на G является характером факторпредставления тогда и только тогда, когда χ является крайней точкой множества центральных положительно определенных функций.

В работе [Thoma (1964)] было получено описание всех характеров факторпредставлений группы $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$.

Теорема Тома. Все характеры факторпредставлений $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ имеют вид

$$\chi(g) = \prod_{k \geqslant 2} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k + (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k\Big)^{r_k(g)}, \tag{6.5}$$

где $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\sum \alpha_j + \sum \beta_j \leqslant 1$, а через $r_k(g)$ обозначено число циклов длины k в перестановке g.

После работы Тома́ был предпринят ряд попыток описания факторпредставлений других групп, однако интересные явления (если я не ошибаюсь) были обнаружены лишь для индуктивных пределов $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{U}(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{O}(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Sp}(n)$, см. [Voiculescu (1976)], [Stratila, Voiculescu (1982)], [Вершик, Керов (1982)].

Как заметил Г. И. Ольшанский ([Ольшанский (1983)], подробнее [Ольшанский (1989)]), факторпредставления могут быть сведены к обычным унитарным представлениям следующим образом. Пусть K — группа; рассмотрим произведение $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$ и рассмотрим диагональное вложение $\mathrm{K} \to \mathrm{K} \times \mathrm{K}$, обозначим его образ через $\tilde{\mathrm{K}}$.

Теорема 6.4. Существует каноническая биекция между факторпредставлениями K, определенными с точностью до квазиэквивалентности, и неприводимыми $\tilde{\mathrm{K}}$-сферическими представлениями $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$.

Доказательство. Сферическая функция $\varphi(g_1, g_2)$ неприводимого представления группы $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$ является крайней точкой множества положительно определенных функций, постоянных на двойных классах смежности $\tilde{\mathrm{K}} \setminus (\mathrm{K} \times \mathrm{K}) / \tilde{\mathrm{K}}$, удовлетворяющих условию $\varphi(e, e) = 1$. Теперь замечаем, что функция, постоянная на двойных классах смежности, имеет вид

$$\varphi(g_1, g_2) = \chi(g_1^{-1} g_2),$$

где χ — центральная функция. Поэтому сферические функции группы $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$ и характеры группы K — одно и то же. ■

Пусть ρ — сферическое представление $K \times K$. Тогда соответствующее факторпредставление K есть ограничение ρ на сомножитель $K \times \{e\}$.

Таким образом, факторпредставления S_∞^{fin} — это примерно то же самое, что сферические представления группы $S_\infty^{\mathrm{fin}} \times S_\infty^{\mathrm{fin}}$. Несложно показать (см. [Ольшанский (1989)]), что сферические представления группы $S_\infty^{\mathrm{fin}} \times S_\infty^{\mathrm{fin}}$ продолжаются по непрерывности на группу $(S_\infty \times S_\infty, S_\infty)$. Часть этих сферических представлений обсуждалась выше в пп. 6.2, 6.5.

6.7. Замечания. Двойственность Брауэра. Объекты *категории Брауэра* $\mathbf{Br}$ — неотрицательные целые числа. Морфизмом $m \to n$ называется диаграмма вида, изображенного на рис. 12.

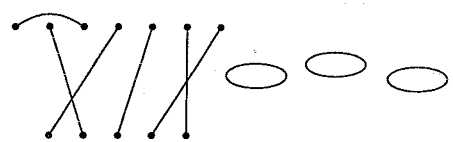


Рис. 12

В верхнем ряду диаграммы стоит m точек, в нижнем n точек (точки упорядочены). Это множество из $m+n$ точек разбито на пары (в частности, морфизмы из m в n существуют лишь в случае, когда m и n имеют одну и ту же четность), точки из одной пары соединены линиями. Кроме того, диаграмма может содержать несколько замкнутых линий.

Правило умножения достаточно ясно из рисунка 13.

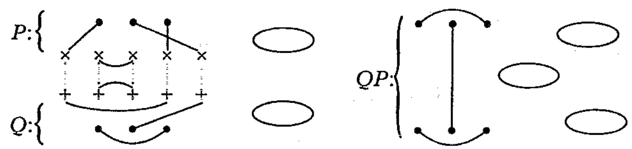


Рис. 13

Мы отождествляем плюсики с соответствующими крестиками и забываем о них. После этого некоторые пары черных кружочков оказываются соединенными линиями. Кроме того, могут добавиться дополнительные циклы (что и произошло на рисунке 13).

Пусть V — комплексное пространство (размерности > 1), снабженное невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot\}$. Рассмотрим категорию $\mathbf{K}$, объекты которой суть пространства $V^{\otimes k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, а группоид морфизмов порожден следующими операторами

1. перестановка сомножителей в $V^{\otimes k}$;
2. оператор $V^{\otimes k} \to V^{\otimes(k+2)}$ умножения справа на $O(V)$-инвариантный элемент $V \otimes V$;
3. оператор $V^{\otimes(k+2)} \to V^{\otimes k}$, переводящий $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_{k+2}$ в $\{v_{k+1}, v_{k+2}\} v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$.

Задача. Покажите, что категория $\mathbf{K}$ эквивалентна категории $\mathbf{Br}$.

Задача. Обобщите это высказывание на случай пространства V, снабженного кососимметричной билинейной формой.

Задача. Докажите теорему *двойственности Брауэра*. Любой $O(V)$-сплетающий оператор $V^{\otimes k} \to V^{\otimes m}$ есть линейная комбинация морфизмов категории $\mathbf{K}$. Обратно, любой $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V^{\otimes k})$-сплетающий оператор в $V^{\otimes k}$ является линейной комбинацией операторов $g^{\otimes k}$, где $g \in O(V)$ (см. [Brauer (1937)], там, собственно, речь идет о полугруппах $\mathrm{End}_{\mathrm{Br}}(n)$), см. также [Керов (1987)].

6.8. Замечания. Одна странная группа. Описанная нами ниже группа кажется кошмарным порождением человеческой фантазии. Она, однако, интересна по двум причинам. Во-первых, посвященная ей статья [Ольшанский (1980)] была одной из ключевых работ по бесконечномерным группам (см. также [Исмагилов (1969)]). Во-вторых, она не лишена интереса и сама по себе. Отметим также, что она появлялась в работах по «exchangeability» (см. п. F.13).

Напомним, что *деревом* называется связный граф без циклов. Рассмотрим дерево J_∞, у которого из каждой вершины выходит счетное число ребер (неформально говоря, J_∞ — «самое большое» дерево, которое содержит все другие деревья). Через $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ мы обозначим группу автоморфизмов дерева J_∞. Пусть $X \subset J_\infty$ — конечное непустое поддерево. Обозначим через $\mathrm{Aut}_X(J_\infty) \subset \mathrm{Aut}(J_\infty)$ стабилизатор поддерева X, т. е. множество всех преобразований дерева J_∞, оставляющих все вершины X на месте. На $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ вводится топология из условия: подгруппы $\mathrm{Aut}_X(J_\infty)$ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы.

Приведем примеры неприводимых представлений группы $\mathrm{Aut}_X(J_\infty)$.

1. Каспидальные представления. Пусть Y — конечное дерево. Рассмотрим в J_∞ (счетное) множество A_Y всех поддеревьев, изоморфных Y. Группа $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ действует очевидным образом сдвигами в пространстве $\ell_2(A_Y)$ (конструкция может быть чуть-чуть обобщена, см. [Ольшанский (1980)]).

2. Сферические представления. Обозначим через $l(v_1, v_2)$ расстояние между вершинами дерева v_1, v_2 (т. е. число ребер в кратчайшем пути, связывающем v_1, v_2). Пусть $0 < \lambda < 1$. Рассмотрим гильбертово пространство H_λ, порожденное векторами e_v, где v пробегает все вершины дерева, причем скалярное произведение между $e_v, e_{v'}$ определяется формулой

$$\langle e_v, e_{v'} \rangle = \lambda^{l(v,v')}.$$

Задача. Покажите, что эта формула действительно определяет положительно определенное скалярное произведение.

Группа $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ действует в H_λ преобразованиями $T_\lambda(g) : e_v \mapsto e_{gv}$.
Пусть $\mathrm{Aut}_0(J_\infty)$ — стабилизатор некоторой выделенной вершины v_0 графа J_∞.

Задача. Покажите, что представление T_λ имеет единственный $\mathrm{Aut}_0(J_\infty)$-неподвижный вектор. Покажите, что $\mathrm{Aut}_0(J)$-сферическая функция представления T_λ задается формулой

$$\psi(g) = \lambda^{l(v_0, gv_0)}.$$

Задача. Введем на каждом ребре дерева ориентацию (произвольным образом). Пусть M — пространство ℓ_2 на множестве Q ребер дерева. Для любого $g \in \mathrm{Aut}(J_\infty)$ рассмотрим путь L_g, ведущий из v_0 в gv_0. Определим функцию $\gamma_g(\vec{q})$ на Q из условия:

$$\gamma_g = \begin{cases} +1, & \text{если ребро } \vec{q} \text{ лежит на } L_g \text{ и направлено в сторону } gv_0, \\ -1, & \text{если ребро } \vec{q} \text{ лежит на } L_g \text{ и направлено к } v_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Фиксируем $s \in \mathbb{R}$ и рассмотрим отображение Z_s пространства M в себя, заданное формулой

$$Z_s(g) f(\vec{q}) = \sigma(g, \vec{q}) f(g\vec{q}) + s\gamma_g(\vec{q}),$$

где $\sigma(g, \vec{q}) = +1$, если отображение g сохраняет ориентацию ребра $\vec{q}$, и $\sigma(g, \vec{q}) = -1$ в противном случае. Отображение Z_s задает вложение $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ в $\mathrm{Isom}(M)$. Покажите, что ограничение представления Exp группы $\mathrm{Isom}(M)$ на $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ содержит представление T_λ.

Теперь рассмотрим категорию $\mathbf{K}$, объектами которой являются конечные деревья, а морфизмы $X \to Y$ бывают двух типов:

1-й тип: частичные биекции $X \to Y$, т. е. изоморфные отображения поддерева $A \subset X$ на поддерево $B \subset Y$;

2-й тип: морфизм есть тройка (x, y, n), где $x \in X$, $y \in Y$, а $n \in \mathbb{N}$; такие морфизмы удобно изображать с помощью картинки, приведенной на рисунке 14.

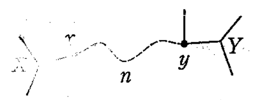


Рис. 14

Задача. Покажите, что $\mathrm{Aut}_Y(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_X(J_\infty)$ отождествляется естественным образом с $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X, Y)$.

Определим умножение морфизмов.

а) Пусть $\psi : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$ — морфизмы первого типа. Пусть ψ отображает поддерево $A \subset X$ на поддерево $B \subset Y$, а φ — поддерево $\widetilde{B} \subset Y$ на поддерево $C \subset Z$. Если $B \cap \widetilde{B}$ не пусто, то произведение $\varphi\psi$ есть обычная композиция частично определенных отображений. Пусть пересечение $B \cap \widetilde{B}$ пусто, пусть $b \in B$, $\tilde{b} \in \widetilde{B}$ — ближайшие точки множеств B и $\widetilde{B}$. Тогда $\varphi\psi$ есть тройка $\left(\psi^{-1}(b), \varphi(\tilde{b}), l(b, \tilde{b})\right)$, см. рисунок 15.

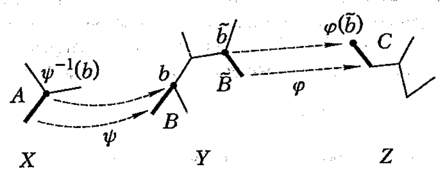


Рис. 15

б) Пусть $\psi : X \to Y$ — морфизм первого типа, отображающий поддерево A на поддерево B, а $\varphi : Y \to Z$ — морфизм второго типа, $\varphi = (y, z, n)$. Пусть q — ближайшая к y вершина поддерева B. Тогда $\varphi\psi = \left(\psi^{-1}(q),\ z,\ n + l(q, y)\right)$. Произведение морфизма второго типа на морфизм первого типа определяется дословно так же.

в) Пусть $\psi : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$ — морфизмы второго типа, $\psi = (x, y, n)$, $\varphi = (\tilde{y}, z, m)$. Элемент $\varphi\psi = \left(x, z, n + m + \rho(y, \tilde{y})\right)$ изображен на рисунке 16.

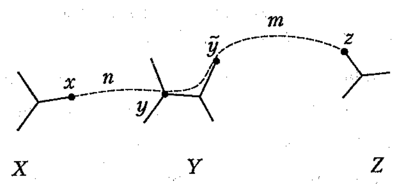


Рис. 16

Задача. Покажите, что умножение двойных классов смежности

$$\mathrm{Aut}_X(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_Y(J_\infty) \times \mathrm{Aut}_Y(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_Z(J_\infty) \to$$
$$\to \mathrm{Aut}_X(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_Z(J_\infty)$$

корректно определено и соответствует умножению морфизмов категории $\mathbf{K}$.

Задача. Как действует категория $\mathbf{K}$ в каспидальных представлениях $\mathrm{Aut}(J_\infty)$? В сферических представлениях?

6.9. Литературные замечания. В п. 6.1–6.5 мы в основном следуем статье [Ольшанский (1989)]. В этой статье была также предпринята попытка расклассифицировать все унитарные представления $(S_\infty \times S_\infty, S_\infty)$, или, что то же самое, категории **SS**. В этой же работе рассматриваются и другие (G, K)-пары, связанные с бесконечной симметрической группой. Классификация была завершена в [Окуньков (1994)].

О реализациях представлений Тома см. [Вершик, Керов (1981)], [Ольшанский (1989)]. О других сюжетах, связанных с бесконечной симметрической группой см. [Вершик, Керов (1981a)], [Вершик, Шмидт (1977)], см. также ниже п. F.14.

Глава IX

Бесконечномерные классические группы и почти инвариантные структуры

В этой главе мы обсуждаем бесконечномерные аналоги классических групп.

Пусть $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}),\ldots$ обозначают соответственно полную унитарную, полную ортогональную, полную линейную группу гильбертова пространства (вещественного или комплексного) и т. д. Пусть $\mathrm{G}(\infty)\supset \mathrm{K}(\infty)$ — две группы такого типа. Обозначим через $\big(\mathrm{G}(\infty),\mathrm{K}(\infty)\big)$ группу операторов $A\in \mathrm{G}(\infty)$ таких, что A представим в виде $A=B(1+T)$, где $B\in\mathrm{K}(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта. Несколько групп такого типа нам уже встречалось. Мы не ставим целью полное изложение теории представлений таких групп в том виде, в котором она сейчас существует, и обсуждаем лишь два типичных образца: $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ и $\big(\mathrm{U}(\infty),\mathrm{O}(\infty)\big)$, в особенности последний. В § 5 мы делаем некоторые замечания о других группах, §§ 6–7 содержат некоторые приложения рассматриваемой теории. В §§ 1–5 мы в основном следуем статьям Г. И. Ольшанского [Ольшанский (1983)], [Olshanskii (1990)], [Olshanskii (1991)a–b].

§ 1. Группа $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$ и ее представления

1.1. Группа $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ состоит из всех обратимых вещественных операторов в ℓ_2, представимых в виде $A(1+T)$, где $A\in\mathrm{O}(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Лемма 1.1. Следующие условия равносильны:

а) $X\in\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$;

б) $X^{\mathrm{t}}X-E$ — оператор Гильберта—Шмидта;

в) оператор X представим в виде $(1+S)B$, где $B\in\mathrm{O}(\infty)$, а S — оператор Гильберта—Шмидта.

Доказательство.

а) $\Leftrightarrow$ в): $A(1+T)=(1+ATA^{-1})A$.

а) $\Rightarrow$ б) очевидно. Пусть выполнено б). Пусть $X=UZ$ — полярное разложение X. Тогда $Z=\sqrt{X^{\mathrm{t}}X}$, и теперь высказывание очевидно. ■

1.2. Топология. Условие «T — оператор Гильберта—Шмидта» после конструкций глав IV и VI выглядит достаточно естественно. Тем не менее, стоит его еще раз обсудить.

Рассмотрим семейство групп $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_p$, состоящих из всевозможных вещественных матриц, представимых в виде $A(1+T)$, где $A\in\mathrm{O}(\infty)$, а T лежит в классе Шаттена $\mathscr{L}_p$ (где $0<p\leqslant\infty$). Введем топологию на $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_p$. Пусть $X_j,X\in\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_p$, пусть $X_j=U_jZ_j$, $X=UZ$ — их полярные разложения. Мы полагаем, что последовательность X_j сходится к X тогда и только тогда, когда $U_j\to U$ слабо, а $Z_j-E\to Z-E$ в топологии $\mathscr{L}_p$.

Лемма 1.2.

а) Функция $D(g)=|\det(g)|$, определенная на матрицах вида $1+P$, где P — конечномерный оператор, имеет непрерывное продолжение на $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_1$.

б) Для любых $g_1,g_2\in\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_1$ выполнено

$$D(g_1g_2)=D(g_1)D(g_2). \tag{1.1}$$

Доказательство.

а) Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ — сингулярные числа g. Тогда $D(g)=\prod\lambda_j$, и теперь утверждение очевидно.

б) Равенство (1.1) выполнено для финитных матриц, а финитные матрицы плотны в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_1$. ■

Мы видим, что группа $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_1$ имеет семейство одномерных унитарных представлений $g\mapsto D^{is}(g)$, где $s\in\mathbb{R}$; эти представления не продолжаются на группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_{1+\varepsilon}$.

Но, по-видимому, этим и исчерпывается разница между представлениями различных групп $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ при $0\leqslant p\leqslant 2$. При $p>2$ группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_p$ вообще не имеют нетривиальных унитарных представлений (см. [Нессонов (1986)], [Pickrell (1990)]). Этим и вызвано то, что мы выбрали $p=2$.

Если наша цель — построение теории представлений групп $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_p$, то, видимо, разумнее всего работать с самой маленькой группой $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_0$ (при этом можно полностью перейти на язык финитных матриц, как это делается в статьях Ольшанского). С другой стороны, с точки зрения приложений важно продолжить представления $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_0$ на как можно большую группу. Для представлений Diff со старшим весом можно было бы обойтись группой $\bigcap_{p>0}\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)_p$ операторов с «быстро убывающими» сингулярными числами. Но в приводимых ниже примерах (§§ 6–7) такая группа недостаточна.

1.3. Простейшее представление группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$. Реализуем группу $\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R})$ как группу матриц вида $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}$. Ее подгруппу $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ мы выделим условием: Ψ — оператор Гильберта—Шмидта. Подгруппа $\mathrm{U}(\infty)\subset\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & \overline{A}\end{pmatrix}$, где A унитарна.

Рассмотрим вложение $\tau_0:\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)\mapsto\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$, задаваемое формулой

$$\begin{aligned}\tau_0(g)&=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g&\\&(g^{t})^{-1}\end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\\&=\frac12\begin{pmatrix}g+(g^{t})^{-1}&g-(g^{t})^{-1}\\g-(g^{t})^{-1}&g+(g^{t})^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Ограничивая представление Вейля группы $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ на подгруппу $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$, мы получим представление

$$T_0(g)=\mathrm{we}(\tau_0(g))$$

группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$.

Замечание. Еще более просто выглядит конструкция, если группу $\big(\mathrm{Sp}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ реализовать как группу вещественных матриц вида $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, таких, что $A-D$, $B+C$ — операторы Гильберта—Шмидта (подгруппа $\mathrm{U}(\infty)\subset\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ в этом случае состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}$). Вложение τ_0 задается формулой

$$g\mapsto\begin{pmatrix}g&\\&(g^{t})^{-1}\end{pmatrix}.\tag{1.3}$$

Оказывается, что эту конструкцию можно пошевелить.

1.4. Фундаментальные представления группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$. Пусть $s\in\mathbb{R}$. Рассмотрим серию вложений $\tau_s:\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)\mapsto\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$, задаваемых формулой

$$\begin{aligned}\tau_s(g)&=\begin{bmatrix}1-\frac{is}{2}&\frac{is}{2}\\-\frac{is}{2}&1+\frac{is}{2}\end{bmatrix}\tau_0(g)\begin{bmatrix}1-\frac{is}{2}&\frac{is}{2}\\-\frac{is}{2}&1+\frac{is}{2}\end{bmatrix}^{-1}=\\&=\begin{pmatrix}\frac{1+is}{2}g+\frac{1-is}{2}(g^{t})^{-1}&\frac{1-is}{2}\big(g-(g^{t})^{-1}\big)\\\frac{1-is}{2}\big(g-(g^{t})^{-1}\big)&\frac{1+is}{2}g+\frac{1+is}{2}(g^{t})^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Важно заметить, что

$$\begin{bmatrix}1-\frac{is}{2}&\frac{is}{2}\\-\frac{is}{2}&1+\frac{is}{2}\end{bmatrix}\in\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\tag{1.5}$$

поэтому и матрица (1.4) содержится в $\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R})$. Далее, $g-(g^{t})^{-1}=(gg^{t}-1)(g^{t})^{-1}$, и теперь условие $\tau_s(g)\in\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ становится очевидным.

Ограничивая представление Вейля группы $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ на образ вложения τ_s, мы получаем серию унитарных представлений

$$T_s(g)=\mathrm{we}(\tau_s(g))$$

группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$.

Замечание. Следует подчеркнуть, что матрица (1.5) не лежит в $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$, иначе конструкция была бы тривиальной.

1.5. Линеаризация представлений T_s. По построению, представления T_s являются проективными, т. к. представление Вейля является проективным. На самом деле представления T_s линеаризуемы, но это не вполне очевидно.

Теорема 1.3. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ — сингулярные числа оператора $g\in\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ (с учетом кратности). Пусть

$$\varphi_s(g)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac12(\lambda_j+\lambda_j^{-1})+\frac{is}{2}(\lambda_j-\lambda_j^{-1})}}{\lambda_j^{is}}.\tag{1.6}$$

Тогда формула

$$\widetilde{T}_s=\varphi_s^{-1}(s)\,\mathrm{we}(\tau_s(g))$$

задает линейное представление группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$.

Доказательство. Рассмотрим в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ подгруппу G_0, состоящую из финитных матриц с положительными определителями. Ее образ в $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ попадает в группу Sp_0, состоящую из финитных матриц. Пусть $\begin{pmatrix}\Phi&\Psi\\\overline{\Psi}&\overline{\Phi}\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_0$. Тогда, как мы видели в п. V.4.13, формула

$$\widetilde{\mathrm{we}}(g)=\pm\det(\Phi)^{-1/2}\,\mathrm{we}(g)$$

задает проективное унитарное представление группы Sp_0, причем

$$\widetilde{\mathrm{we}}(q_1q_2)=\pm\,\widetilde{\mathrm{we}}(q_1)\,\widetilde{\mathrm{we}}(q_2).\tag{1.7}$$

В нашем случае

$$\det(\Phi)=\det\Big(\tfrac{1+is}{2}\,g+\tfrac{1-is}{2}\,(g^{t})^{-1}\Big).$$

Пусть $g=U_1\Lambda U_2$, где Λ — матрица с собственными числами $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ldots$ ($\lambda_j>0$), а матрицы U_1, U_2 ортогональны. Тогда

$$\det(\Phi)=\det(U_1)\prod_j\Big(\tfrac12(\lambda_j+\lambda_j^{-1})+\tfrac{is}{2}(\lambda_j-\lambda_j^{-1})\Big)\det(U_2).$$

При $s = 0$ мы имеем

$$\det(U_1)\det(U_2) = \operatorname{sgn}\det(\Phi) = \operatorname{sgn}\det(g) = 1.$$

Поэтому

$$\det(\Phi) = \prod_j \bigl(\tfrac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_j^{-1}) + \tfrac{is}{2}(\lambda_j - \lambda_j^{-1})\bigr). \tag{1.8}$$

Далее, для любого фиксированного s определим непрерывную ветвь функции

$$\nu_s(\lambda) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}) + \tfrac{is}{2}(\lambda - \lambda^{-1})}$$

так, что $\nu_s(1) = 1$. Поэтому мы можем определить однозначный корень $\sqrt{\det(\Phi)}$ по формуле

$$\psi_s(g) = \prod_j \sqrt{\tfrac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_j^{-1}) + \tfrac{is}{2}(\lambda_j - \lambda_j^{-1})} := \prod_j \nu_s(\lambda_j). \tag{1.9}$$

Определим операторнозначную функцию

$$T_s'(g) = \psi_s(g)^{-1}\,\mathrm{we}(\tau_s(g)).$$

Тогда в силу (1.7) выполнено

$$T_s'(g_1 g_2) = \pm T_s'(g_1) T_s'(g_2).$$

Но из соображений непрерывности знак в правой части этого равенства всегда один и тот же (группа G_0 связна, а функция $T_s(g)$ однозначна, причем при $g_1 = g_2 = E$ мы имеем знак $+$).

Итак $T_s'(g)$ — линейное представление группы G_0. Но функция $\psi(g)$ корректно определена лишь на группе $\bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)_1$, т.е. продолжается по непрерывности лишь на группу $\bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)_1$, а не на $\bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$, как нам этого бы хотелось. Рассмотрим, однако, представление

$$\widetilde{T}_s(g) = D(g)^{-is} T_s'(g) = \left[\frac{\psi_s(g)}{D(g)^{is}}\right]^{-1} \mathrm{we}(\tau_s(g))$$

группы $\bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)_1$. Легко видеть, что дробь в квадратных скобках (это и есть (1.6)) продолжается непрерывно на всю группу $\bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)_2$ (хотя ни числитель, ни знаменатель на $\bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)_2$ корректно не определены). ■

1.6. Неэквивалентность представлений $T_s(g)$. Прежде всего заметим, что представления $T_s(g)$ приводимы уже потому, что приводимо представление we (we сохраняет подпространства четных и нечетных функций в пространстве Фока). Обозначим через $T_s^+(g)$ и $T_s^-(g)$ подпредставления в $T_s(g)$, реализующиеся соответственно в четных и нечетных функциях.

Предложение 1.4. Представления $T_s^\pm$ неприводимы.

Доказательство. Мы докажем неприводимость T_s^+. Ограничим T_s^+ на подгруппу $\mathrm{O}(\infty)$. Заметим, что ограничение вложения τ_s на $\mathrm{O}(\infty)$ есть тождественное вложение $\mathrm{O}(\infty)$ в $\mathrm{U}(\infty) \subset \bigl(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$. Поэтому ограничение T_s^+ на $\mathrm{O}(\infty)$ есть сумма симметрических степеней $\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathrm{S}^{2j}\rho$, где ρ — тождественное представление $\mathrm{O}(\infty)$ ($\mathrm{S}^{2j}\rho$ действует в многочленах степени $2j$ на ℓ_2). Но все симметрические степени $\mathrm{S}^k\rho$ неприводимы (см. ниже). Допустим, что представление T_s^+ группы $\bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$ приводимо, $T_s^+ = D_1 \oplus D_2$. Тогда каждое из представлений D_1, D_2 разлагается в сумму некоторых симметрических степеней $\mathrm{S}^{2k}\rho$. Пусть, например, $\mathrm{S}^0\rho$ (т.е. вакуумный вектор $f(z) = 1$) содержится в D_1. Пусть $g \in \bigl(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr) \setminus \mathrm{O}(\infty)$. Тогда вектор $T_s(g)\cdot 1$ имеет вид $\lambda \exp\bigl(\sum \alpha_{ij} z_i z_j\bigr)$, причем $\lambda \neq 0$, и форма $\sum \alpha_{ij} z_j z_j$ не равна 0 тождественно. Но проекции вектора $\exp\bigl(\sum \alpha_{ij} z_i z_j\bigr)$ на подпространства $\mathrm{S}^{2k}\rho$ суть векторы $\bigl(\sum \alpha_{ij} z_j z_j\bigr)^k \neq 0$, поэтому D_1 разлагается в сумму всех симметрических степеней $\mathrm{S}^{2k}\rho$, т.е. $D_1 = T_s^+$. Нам осталось доказать лишь лемму.

Лемма 1.5. Симметрические степени $\mathrm{S}^k\rho$ тождественного представления группы $\mathrm{O}(\infty)$ неприводимы.

Доказательство. Реализуем $\mathrm{S}^k\rho$ так же, как в предыдущем доказательстве, т.е. как пространство однородных форм в бозонном пространстве Фока. Продолжим наше представление на полугруппу $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$ всех сжимающих операторов по формуле $(\mathrm{S}^k\rho)(A)f(z) \mapsto f(Az)$. Это продолжение непрерывно, поэтому неприводимость представления $\mathrm{S}^k\rho$ группы $\mathrm{O}(\infty)$ и соответствующего представления $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$ равносильны ($\mathrm{O}(\infty)$ плотна в $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$). Далее, рассмотрим в $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$ подполугруппу Λ, состоящую из всех диагональных матриц. Легко видеть, что всевозможные одночлены $z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots$ являются Λ-инвариантными, причем представления Λ в различных (весовых) подпространствах $\mathbb{C}z^{i_1} z^{i_2} \ldots$ попарно неэквивалентны. Поэтому любое Λ-инвариантное (а значит, и любое $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$-инвариантное) подпространство разлагается в прямую сумму (весовых) подпространств вида $\mathbb{C}z^{i_1} z^{i_2} \ldots$. Пусть D — некоторое $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$-инвариантное подпространство, содержащее z_1^k. Выберем $A \in \Gamma\mathrm{O}(\infty)$ так, что все матричные элементы a_{1j} отличны от 0. Тогда

$$(\mathrm{S}^k\rho)(A) z_1^k = \bigl(\sum a_{1j} z_j\bigr)^k.$$

Но проекции этого вектора на все весовые подпространства $\mathbb{C}z^{i_1} z^{i_2} \ldots$ отличны от 0. Поэтому $D = \mathrm{S}^k\rho$. Лемма доказана. ■

Предложение 1.6. Представления T_s^+ при различных s попарно не эквивалентны.

Доказательство. Каждое из представлений T_s, как мы видели при доказательстве предыдущего предложения, содержит ровно один $\mathrm{O}(\infty)$-инвариантный вектор. Допустим, $T_s \simeq T_{s'}$. Обозначим через v, v' единичные векторы, инвариантные относительно $\mathrm{O}(\infty)$ в T_s и $T_{s'}$. Тогда сферические функции $\bigl\langle T_s(g)v, v\bigr\rangle$ и $\bigl\langle T_{s'}(g)v', v'\bigr\rangle$

этих представлений должны совпадать. Но

$$\langle T_s(g)v, v\rangle = \varphi_s(g)^{-1},$$

где $\varphi_s(g)$ задается формулой (1.6), а функции $\varphi_s(g)$ при разных s явно различны. Предложение доказано. ■

Доказательство попарной неэквивалентности представлений T_s^- мы оставляем в качестве упражнения.

1.7. Гипотеза об описании представлений $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. О тензорных произведениях представлений T_s известно следующее (см. [Ольшанский (1990)]).

а) Тензорные степени $T_s^{\otimes n}$ (где $n > 0$) разлагаются точно так же, как тензорные степени представления Вейля (см. добавление А), т. е. представления $\mathrm{we}^{\otimes n}$ и $T_s^{\otimes n}$ имеют одни и те же подпредставления. Подпредставления в $T_s^{\otimes n}$ мы будем называть *представлениями, сосредоточенными в точке* s.

б) Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — неприводимые представления $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$, сосредоточенные в $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Тогда представления

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_k \tag{1.10}$$

неприводимы и попарно различны (т. е. совпадение тензорных произведений вида (1.10) влечет совпадение наборов $(s_1, \ldots, s_k)$, а также всех сомножителей).

Гипотеза ([Ольшанский (1990)]). Любое неприводимое унитарное представление $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ имеет вид (1.10).

Конструкция §4 проясняет как утверждения а), б), так и гипотезу.

1.8. Замечания.

Задача. Пусть $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ действует на $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ (см. п. VI.1.9) по формуле

$$T_s(g)f(x) = f(gx)\left[\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}\right]^{\frac{1+is}{2}},$$

где $\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}$ — производная Радона—Никодима. Покажите, что представления $T_s(g)$ эквивалентны представлениям $T_s(g)$ из п. 1.4.

§ 2. *Группа* $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$ *и ее представления*

Группа $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ состоит из унитарных матриц в комплексном ℓ_2, представимых в виде $A = B(1 + T)$, где B — вещественная ортогональная матрица, а T — оператор Гильберта—Шмидта. В этом параграфе мы построим три серии «фундаментальных» проективных представлений группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Вопрос о возможности их линеаризации мы обсудим в замечаниях к этому параграфу (п. 2.6).

2.1. Спинорное представление группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Рассмотрим в кватернионном пространстве ℓ_2 группу $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ всех кватернионно-унитарных матриц, представимых в виде $A(1 + T)$, где A — унитарная матрица с комплексными коэффициентами, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Более удобно рассматривать группу $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ как группу унитарных комплексных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}$ таких, что B — оператор Гильберта—Шмидта. Подгруппа $\mathrm{U}(\infty) \subset \big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} L & \\ & \overline{L}\end{pmatrix}$, где L унитарна.

Теперь вложим группу $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ в $\big(\mathrm{O}(4\infty), \mathrm{U}(2\infty)\big)$ по формуле

$$\varkappa : \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & & & B \\ & \underline{A} & -\underline{B} & \\ & \overline{B} & \overline{A} & \\ -\overline{B} & & & \overline{A}\end{pmatrix}.$$

Ограничивая спинорное представление группы $\big(\mathrm{O}(4\infty), \mathrm{U}(2\infty)\big)$ на подгруппу $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$, мы получаем унитарное (проективное) представление группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$; это (приводимое) представление мы тоже будем называть *спинорным* и обозначать через $\mathrm{spin}_\mathbb{C}$.

Задача. Покажите, что ограничение представления $\mathrm{spin}_\mathbb{C}$ на $\mathrm{U}(\infty)$ эквивалентно

$$\mathrm{spin}_\mathbb{C}\big|_{\mathrm{U}(\infty)} = \bigoplus_{k,l=0}^{\infty}\big(\Lambda^k\rho \otimes \Lambda^l\rho\big),$$

где ρ — тождественное представление группы $\mathrm{U}(\infty) \subset \big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ $(\rho(g) = g)$.

Замечание. С группой $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ мы уже встречались. А именно, $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ есть группа Aut^* бесконечномерного объекта категории $\overline{\mathbb{C}}$, а $\mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}$ — это не что иное, как спинорное представление Aut^*.

Замечание. Рассмотрим $\mathrm{Sp}(\infty)$ как группу кватернионно унитарных матриц. Рассмотрим кватернионное пространство ℓ_2 как вещественное гильбертово пространство, в этом вещественном гильбертовом пространстве в свою очередь введем комплексную структуру, положив, что умножение на i есть умножение на матрицу $jE \in \mathrm{Sp}$. Пусть H — полученное пространство. Тогда любая кватернионная почти унитарная матрица (т. е. элемент $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$) оказывается ортогональной почти унитарной матрицей в H, т. е. элементом $\big(\mathrm{O}(4\infty), \mathrm{U}(2\infty)\big)$, и мы еще раз описали вложение $\varkappa$.

2.2. Фермионные фундаментальные представления $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Рассмотрим тривиальное вложение $\tau_0 : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \mapsto \big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$, которое каждой унитарной матрице $g \in \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ ставит в соответствие унитарную матрицу $\begin{pmatrix} g & \\ & \overline{g}\end{pmatrix} \in \big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Теперь мы можем рассмотреть представление $\mathrm{spin}_\mathbb{C} \circ \tau_0$ группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Ничего интересного мы при этом не получим (см. задачу из предыдущего пункта). Эту тривиальную конструкцию можно, однако, чуть-чуть пошевелить и получить нетривиальный результат.

Рассмотрим серию вложений $\sigma_w : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$, определяемых формулой

$$\sigma_w(g) = \begin{pmatrix} \cos\frac{w}{2} & \sin\frac{w}{2} \\ -\sin\frac{w}{2} & \cos\frac{w}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \bar g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{w}{2} & \sin\frac{w}{2} \\ -\sin\frac{w}{2} & \cos\frac{w}{2} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (g+\bar g) + \cos w \cdot (g - \bar g) & -\sin w \cdot (g-\bar g) \\ -\sin w \cdot (g - \bar g) & (g+\bar g) - \cos w \cdot (g-\bar g) \end{pmatrix},$$

где $0 < w < \frac{\pi}{2}$. Ограничивая спинорное представление $\mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}$ группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ на $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, мы получим серию S_w унитарных представлений группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$:

$$S_w(g) = \mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}(\sigma_w(g)).$$

Замечание. Можно показать, что S_w приводимо, но его разложение на неприводимые подпредставления устроено точно так же, как у представления $\mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}$ группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ (см. [Olshanskii (1990)]).

2.3. Бозонные фундаментальные представления группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Теперь рассмотрим серию μ_s вложений $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Снова мы начнем с тривиального вложения $\mu_0 : g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix}$, или, иначе,

$$\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \hookrightarrow \mathrm{U}(\infty) \hookrightarrow \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

Задача. Покажите, что

$$\mathrm{we} \circ \mu_0 = \bigoplus_{j=0}^{\infty} S^j \rho,$$

где ρ — тождественное представление $g \mapsto g$ группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Теперь мы снова возмутим конструкцию и рассмотрим серию вложений $\mu_s : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, задаваемых формулой

$$\mu_s(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} & \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} \\ \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} & \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} & \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} \\ \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} & \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (g+\bar g) + \mathrm{ch}\, s \cdot (g-\bar g) & -\mathrm{sh}\, s \cdot (g - \bar g) \\ \mathrm{sh}\, s \cdot (g-\bar g) & (g + \bar g) - \mathrm{ch}\, s \cdot (g - \bar g) \end{pmatrix},$$

где $s > 0$. Ограничивая представление Вейля группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ на подгруппу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, мы получаем серию унитарных проективных представлений

$$M_s(g) = \mathrm{we}(\mu_s(g))$$

группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Задача. Покажите, что при $s \neq 0$ представление M_s есть сумма двух неприводимых представлений.

2.4. Комментарии. Итак, мы уже трижды (пп. 1.3, 2.2, 2.3) получали нетривиальную конструкцию из тривиальной путем сопряжения подходяще выбранной матрицей.

Обсудим, например, ситуацию п. 2.3. Рассмотрим тривиальное вложение $\mu_0 : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ и рассмотрим образ группы $\mathrm{O}(\infty)$. Он состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$, где L — вещественная ортогональная матрица. Централизатор C группы $\mathrm{O}(\infty)$ в $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}) \supset \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ состоит из блочно-скалярных матриц вида

$$H = \begin{pmatrix} \alpha E & \beta E \\ \bar\beta E & \bar\alpha E \end{pmatrix},$$

где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. В частности, как абстрактная группа централизатор C изоморфен группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Для любой матрицы $H \in \mathrm{C}$ определено отображение

$$\mu_H(g) = H \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} H^{-1}$$

из $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ в $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, а следовательно, и унитарное проективное представление

$$M_H(g) = \mathrm{we}(\mu_H(g))$$

группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Но не все подобные представления различны.

Действительно, обозначим через Z централизатор группы $\mathrm{U}(\infty)$ в $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$; он состоит из блочно-диагональных матриц вида

$$T = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} E & \\ & e^{-i\varphi} E \end{pmatrix}.$$

Для любого $T \in \mathrm{Z}$

$$\mu_{HT}(g) = HT \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} T^{-1} H^{-1} =$$

$$= H \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} H^{-1} =$$

$$= \mu_H(g).$$

В частности, представления M_H и M_{HT} совпадают.

Рассмотрим, далее, в $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$ подгруппу $\mathrm{K} = \mathrm{C} \cap \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Она состоит из матриц вида

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\psi} E & \\ & e^{-i\psi} E \end{pmatrix}$$

(по случайным причинам $\mathrm{K} = \mathrm{Z}$). Пусть $S \in \mathrm{K}$. Тогда

$$M_{SH}(g) = \mathrm{we}\left(SH \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} H^{-1} S^{-1} \right) =$$

$$= \mathrm{we}(S) M_{SH}(g)\, \mathrm{we}(S^{-1}),$$

и тем самым $M(SH)$ эквивалентно $M(H)$.

Итак, представление M_H зависит не от самого элемента $H \in \mathrm{C}$, а от двойного класса смежности $\mathrm{K} \setminus \mathrm{C} / \mathrm{Z}$. Далее остается лишь выбрать из каждого двойного класса смежности по одному представителю.

2.5. Околоединичные представления. Рассмотрим пространство H, состоящее из симметричных матриц Гильберта—Шмидта в ℓ_2 со скалярным произведением $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$. Рассмотрим аффинное действие T_ν группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ на H по формуле

$$T_\nu(g)X = g^{\mathrm{t}}Xg + \nu^2\big(g^{\mathrm{t}}g - E\big),$$

где $\nu > 0$. Таким образом мы получили серию вложений $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ в группу $\mathrm{Isom}(H)$ (см. п. VI.1.8). Ограничивая представления Exp группы $\mathrm{Isom}(H)$ на $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, мы получаем серию унитарных (проективных) представлений группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

2.6. Замечания. Линеаризация представлений (см. [Olshanskii (1990)]). Обозначим через $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$ группу унитарных операторов в ℓ_2, представимых в виде $A(1+B)$, где $A \in \mathrm{O}(\infty)$, а $B \in \mathscr{L}_p$.

Задача. Покажите, что функция $D(g) = \det^2(g)$ продолжается по непрерывности на группу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$ и не продолжается на $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_{1+\varepsilon}$.

Далее, оказывается, что все построенные выше представления $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ линеаризуются на группе $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$. Это делается точно так же, как это было сделано для $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$. Но трюк с погашением расходимости с помощью дробной степени функции $D(g)$ применить уже не удается, потому что дробные степени функции $D(g)$ не определены. Оказывается, однако, что построенные выше представления $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ могут быть линеаризованы на построенном ниже накрытии группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Пусть $\psi : S^1 \to S^1$ — монотонное (т. е. сохраняющее циклический порядок точек) взаимно однозначное гладкое отображение окружности $|z| = 1$ в себя. Пусть $\psi(1) = 1$, $\psi'(1) = 0$. Пусть $g \in \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — собственные числа gg^{t}. Определим отображение $L : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to S^1$ по формуле

$$L(g) = \prod_{j=1}^{\infty} \psi(\lambda_j).$$

Далее, определим (непрерывное) отображение $M : S^1 \to \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ по формуле

$$M(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} \psi^{-1}(e^{i\varphi}) & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда $L \circ M : S^1 \to S^1$ — тождественное отображение, поэтому $M(e^{i\varphi})$ — нестягиваемая петля в $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Теперь мы можем рассмотреть накрытие, на котором эта петля разматывается.

§ 3. *Умножение двойных классов смежности для* $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$

3.1. Группа $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$**.** С группой $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ связано семейство групп $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$, состоящих из унитарных операторов, отличающихся от ортогонального на комплексный оператор из шаттеновского класса $\mathscr{L}_p$. Мы рассмотрим самую маленькую из этих групп, $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$; a priori эта группа имеет больше всего представлений (хотя, по-видимому, серьезной разницы в запасе унитарных представлений для разных групп $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$ при $p \leqslant 2$ нет).

Группа $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ состоит из унитарных операторов A в ℓ_2, представимых в виде

$$A = B(1+T); \quad A \in \mathrm{O}(\infty), \quad \mathrm{rk}\, T < \infty. \tag{3.1}$$

Минимально возможный для данного A ранг оператора T мы назовем *дефектом* оператора A.

Обозначим через G_k множество элементов $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ дефекта $\leqslant k$. Введем топологию на G_k, положив, что окрестность $O(V, \varepsilon)$ точки $A = B(1+T)$ состоит из матриц $\widetilde{A} = \widetilde{B}(1+\widetilde{T})$, где $\widetilde{B} \in \mathrm{O}(\infty)$ лежит в фиксированной окрестности V точки B (в слабой = сильной топологии) на $\mathrm{O}(\infty)$, а $\|\widetilde{T} - T\| < \varepsilon$. Положим, что множества $O(V, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей.

Группу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 = \bigcup_k \mathrm{G}_k$ мы снабдим топологией индуктивного предела $\varinjlim \mathrm{G}_k$ (множество $Q \subset \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ открыто, если $Q \cap \mathrm{G}_k$ открыто в G_k для любого k).

3.2. Категория Uo. Обозначим через $\mathrm{O}^{(n)}$ подгруппу в $\mathrm{O}(\infty)$, состоящую из матриц, оставляющих на месте первые n базисных векторов.

Объектами категории Uo являются числа $0, 1, 2, \dots$. Морфизм из k в n — это унитарная финитная матрица, определенная с точностью до умножения на матрицу из $\mathrm{O}^{(k)}$ справа и на матрицу из $\mathrm{O}^{(n)}$ слева. Мы будем изображать морфизмы в виде матриц

$$n\{\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{k} \in \mathrm{U}(\infty),$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} E_n & \\ & U_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_k & \\ & U_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $U_1, U_2 \in \mathrm{O}(\infty)$, мы считаем эквивалентными. Пусть $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}(k, n)$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}(n, m)$. Умножение морфизмов определяется формулой

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) * \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & T \end{array}\right) := \left(\begin{array}{c|cc} AP & B & AQ \\ \hline CP & D & CD \\ R & 0 & T \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & & Q \\ & 1 & \\ R & & T \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Важно заметить, что итоговая матрица имеет именно те размеры, какие нужно, а не бóльшие, как кажется на первый взгляд.

Умножение морфизмов можно задать также формулой

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} AP & AQ & B \\ CP & CQ & D \\ R & T & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

которая, как легко видеть, равносильна (3.3), но выглядит несколько симметричней.

Инволюция в категории **Uo** определяется формулой

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, что множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n,k)$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$.

Лемма 3.1. В каждом двойном классе смежности $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$ есть финитная матрица.

Доказательство. Для (комплексного) линейного подпространства V в ℓ_2 обозначим через $\overline{V}$ множество векторов $h \in \ell_2$ таких, что $\overline{h} \in V$. Через $\ell_2^{(p)}$ мы обозначим множество векторов $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ таких, что $x_1 = \dots = x_p = 0$. Пусть $g \in \gamma \in \mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$. Представим g в виде $g = B(1+T)$, $B \in \mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{rk}\, T < \infty$. Пусть

$$L = \operatorname{Ker} T \cap \overline{\operatorname{Ker} T} \cap \ell_2^{(n)} \cap g^{-1} \ell_2^{(k)}.$$

Легко видеть, что L имеет конечную коразмерность (обозначим ее через q), причем $L = \overline{L} \subset \ell_2^{(n)}$, а $gL = \overline{gL} \subset \ell^{(k)}$. Теперь мы можем выбрать $h_1 \in \mathrm{O}^{(n)}$, $h_2 \in \mathrm{O}^{(k)}$ так, что

$$h_1 \ell_2^{(q)} = L, \quad h_2(gL) = \ell_2^{(q)}.$$

Тогда оператор $\tilde{g} = h_2 g h_1$ переводит $\ell_2^{(q)}$ в себя, и его ограничение r на $\ell_2^{(q)}$ — ортогональный оператор. Рассмотрим оператор $\tilde{r} = \begin{pmatrix} E & \\ & r \end{pmatrix}$ из $\mathbb{C}^q \oplus \ell_2^{(q)}$ в себя. Тогда $\tilde{r}^{-1}\tilde{g}$ — искомая финитная матрица. ∎

3.3. Умножение двойных классов смежности. Итак, множества $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n,k)$ и $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$ естественным образом отождествляются. Покажем теперь, что умножение в категории **Uo** соответствует умножению двойных классов смежности в смысле § VIII.5.

Теорема 3.2. Пусть $\gamma_1 \in \mathrm{O}^{(n)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(k)}$, $\gamma_2 \in \mathrm{O}^{(m)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$, а $g_1 \in \gamma_1$, $g_2 \in \gamma_2$. Пусть последовательность $x_j \in \mathrm{O}^{(n)}$ слабо сходится к матрице $\begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим двойной класс смежности $\mu_j \in \mathrm{O}^{(m)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(k)}$, содержащий $g_2 x_j g_1$. Тогда последовательность μ_j сходится в фактортопологии $\mathrm{O}^{(m)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(k)}$ к произведению $\gamma_1\gamma_2$ в смысле категории **Uo**.

Доказательство. Пусть g_2, g_1 имеют вид

$$g_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \\ & \quad 1 \end{array}\right), \qquad g_2 = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & T \\ & \quad 1 \end{array}\right),$$

причем матрицы D и T конечны. Пусть последовательность

$$x_j = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} \\ & \underbrace{X_{21}^{(j)}}_{N} & X_{22}^{(j)} \end{array}\right) \}N$$

слабо сходится к $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Сразу отметим, что в этом случае $X_{11}^{(j)} \to 0$ по норме. Пусть N фиксировано, и пусть N больше, чем размеры матриц D и T.

$$g_2 x_j g_1 = \begin{pmatrix} AP + BX_{11}^{(j)}R & AQ + BX_{11}^{(j)}T & BX_{12}^{(j)} \\ CP + DX_{11}^{(j)}R & CQ + DX_{11}^{(j)}T & DX_{12}^{(j)} \\ X_{21}^{(j)}R & X_{21}^{(j)}T & X_{22}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Далее (см. теорему VIII.3.2), выберем ортогональные матрицы U_1, U_2 так, чтобы произведение

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & U_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} \\ & X_{21}^{(j)} & X_{22}^{(j)} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & U_2 \end{array}\right)$$

имело вид

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & & & \\ \hline & X_{11}^{(j)} & \sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} & 0 \\ \hline & \sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}} & -(X_{11}^{(j)})^* & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Тогда

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & U_1 \end{array}\right) g_2 x_j g_1 \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & U_2 \end{array}\right)$$

имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} AP + BX_{11}^{(j)}R & AQ + BX_{11}^{(j)}T & B\sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} & 0 \\ \hline CP + DX_{11}^{(j)}R & CQ + DX_{11}^{(j)}T & D\sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} & 0 \\ \hline \sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}}R & \sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}}T & -(X_{11}^{(j)})^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Теперь $X_{11}^{(j)} \to 0$, $\sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}} \to 1$, $\sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} \to 1$, и в пределе мы получаем матрицу (3.4). Теорема доказана. ∎

Замечание. Мы сейчас не утверждаем, что $\gamma_1\gamma_2$ является единственным пределом последовательности μ_j, т. е. мы не утверждаем, что топология на $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(m)}$ отделима.

Пусть теперь ρ — унитарное представление группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ в пространстве H, пусть H_n — пространство $\mathrm{O}^{(n)}$-неподвижных векторов, а P_n — проектор на H_n. Поставим в соответствие каждому $k \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Uo})$ пространство $R(k) := H_k$. Тогда (см. § VIII.5) мы можем сопоставить каждому $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k,n)$ оператор

$\rho(\gamma) : H_k \to H_n$ по формуле

$$\rho(\gamma) = P_n \rho(g)\big|_{H_k},$$

где $g \in \gamma \in \mathrm{O}^{(n)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(k)} \simeq \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$.

Теорема 3.3. $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — представление категории **Uo**.

Доказательство. Это очевидное следствие теоремы 3.2. ■

§ 4. *Характеристические функции*

4.1. Характеристическая функция. Сейчас мы построим функтор, который каждому морфизму категории **Uo** ставит в соответствие голоморфную функцию на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ со значениями в пространстве линейных отношений.

Каждому объекту $n = 0, 1, 2, \ldots$ категории **Uo** мы поставим в соответствие линейное пространство $V_{2n} = V_{2n}^+ \oplus V_{2n}^- := \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, снабженное двумя формами: эрмитовой формой

$$M\big((v_+, v_-); (w_+, w_-)\big) = \sum \big(v_+^j \overline{w}_+^j - v_-^j \overline{w}_-^j\big)$$

и кососимметричной билинейной формой

$$L\big((v_+, v_-); (w_+, w_-)\big) = \sum \big(v_+^j w_-^j - v_-^j w_+^j\big).$$

Таким образом, V_{2n} является объектом категории **Sp** (и, что тоже будет для нас существенно, объектом категории **C**).

Теперь каждому морфизму $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$ и каждому $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ мы поставим в соответствие линейное отношение $\chi_P(\lambda) : V_{2k} \rightrightarrows V_{2n}$ по следующему правилу. Элемент $\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in V_{2k} \oplus V_{2n}$ содержится в $\chi_P(\lambda) = \chi(\lambda)$, если существуют векторы x_-, y_+ такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

или, что то же самое,

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Замечание. При $\lambda = \infty$ мы должны вместо (4.1) писать

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ x_+ \\ p_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ 0 \\ q_- \\ y_- \end{pmatrix}.$$

Мы получили функцию $\chi_P(\lambda)$ на $\overline{\mathbb{C}}$ со значениями в пространстве линейных отношений. Ее мы будем называть *характеристической функцией*.

Легко видеть, что при замене матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} A & BU_2 \\ U_1 C & U_1 D U_2 \end{pmatrix}$, где $U_1, U_2 \in \mathrm{O}(\infty)$, характеристическая функция не меняется. Иными словами, характеристическая функция определяется морфизмом категории **Uo**, а не матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Теорема 4.1.

а) $\chi(\lambda) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(V_{2k}, V_{2n})$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$.

б) Функция $\chi(\lambda)$ голоморфна на $\overline{\mathbb{C}}$.

в) Пусть $(q, p) \in \chi(\lambda) \subset V_{2k} \oplus V_{2n}$. Тогда при $|\lambda| < 1$ выполнено $M(q, q) \geqslant M(p, p)$, при $|\lambda| = 1$ выполнено $M(q, q) = M(p, p)$, а при $|\lambda| > 1$ выполнено $M(q, q) \leqslant M(p, p)$. Более того, при $|\lambda| < 1$ линейное отношение $\chi(\lambda)$ является морфизмом категории **Sp** (а при $|\lambda| > 1$ линейное отношение $\chi(\lambda)^\square$ является морфизмом категории **Sp**).

г) (симметрия относительно нуля)

$$\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in \chi(\lambda) \iff \big(q_+, -q_-; p_+ - p_-\big) \in \chi(-\lambda).$$

д) (симметрия относительно окружности)

$$\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in \chi(\lambda) \iff \big(\overline{p}_+, \overline{p}_-; \overline{q}_+, \overline{q}_-\big) \in \chi(\overline{\lambda}^{-1}).$$

Замечание. Пусть $k = n$. Тогда для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме конечного числа, линейное отношение $\chi_P(\lambda)$ является графиком оператора $\mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$. Таким образом, мы можем рассматривать $\chi_P(\lambda)$ как мероморфную функцию $\overline{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C})$, которая на окружности $|\lambda| = 1$ принимает значения в $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R}) = \mathrm{U}(k, k) \cap \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C})$, а в круге $|\lambda| < 1$ — в M-сжатиях. Мы получаем матричнозначный аналог того, что в комплексном анализе называется *внутренней функцией* (см. [Потапов (1955)]).

Теорема 4.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n, m)$. Тогда для любого $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ выполнено равенство

$$\chi_{QP}(\lambda) = \chi_Q(\lambda)\chi_P(\lambda) \tag{4.3}$$

в смысле произведения линейных отношений.

Замечание. Еще раз подчеркнем, что в (4.3) стоит произведение линейных отношений, а не морфизмов категории **C**!

Теорема 4.3. $\chi_{P^*}(\lambda) = \chi_P(\lambda^{-1})^\square$. Иными словами, $(q, p) \in \chi_{P^*}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $(p, q) \in \chi_P(\lambda^{-1})$.

4.2. Доказательство теоремы 4.1. Проверка симметричности. Докажем утверждения г) и д).

г) Пусть $\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in \chi(\lambda)$. Тогда существуют x_-, y_+ такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ -p_- \\ -x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ -q_- \\ -\lambda y_+ \end{pmatrix},$$

что, в свою очередь, равносильно $\left(q_+, -q_-; p_+, -p_-\right) \in \chi(-\lambda)$.

д) Пусть $\left(q_+, q_-; p_+, p_-\right) \in \chi(\lambda)$, т. е. (в силу (4.1))

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & \\ C & D & & \\ & & \overline{A} & \overline{B} \\ & & \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} p_- \\ x_- \\ p_+ \\ \lambda x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} & & \\ \overline{C} & \overline{D} & & \\ & & A & B \\ & & C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_- \\ \lambda y_+ \\ q_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \bar{p}_- \\ \bar{x}_- \\ \bar{p}_+ \\ \lambda \bar{x}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & \\ C & D & & \\ & & \overline{A} & \overline{B} \\ & & \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_- \\ \lambda \bar{y}_+ \\ \bar{q}_+ \\ \bar{y}_+ \end{pmatrix},$$

что и означает $\left(\bar{p}_-, \bar{p}_+ ; \bar{q}_-, \bar{q}_+\right) \in \chi(\overline{\lambda}^{-1})$.

4.3. Доказательство теоремы 4.1. Свойства форм L и M. Пусть p_+, p_-; q_+, q_-, y_+, x_- удовлетворяют системе (4.1). Тогда в силу унитарности матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$\|p_+\|^2 + \|\lambda x_-\|^2 = \|q_+\|^2 + \|y_+\|^2, \quad \|p_-\|^2 + \|x_-\|^2 = \|q_-\|^2 + \|\lambda y_+\|^2.$$

Вычитая эти равенства, получаем, что

$$\left(\|p_-\|^2 - \|p_+\|^2\right) - \left(\|q_-\|^2 - \|q_+\|^2\right) = \left(|\lambda|^2 - 1\right)\left(\|y_+\|^2 + \|x_-\|^2\right).$$

При $|\lambda| < 1$ мы получаем $M(q,q) \leqslant M(p,p)$. При $|\lambda| = 1$ мы получаем $M(q,q) = M(p,p)$, а при $|\lambda| > 1$ — соответственно $M(q,q) \geqslant M(p,p)$.

Допустим, что $|\lambda| \leqslant 1$, а $M(q,q) = M(p,p)$. Тогда должно быть выполнено $x_- = 0$, $y_+ = 0$. Отсюда вытекает (см. (4.1)), что $p = 0$ влечет $q = 0$, а $q = 0$ влечет $p = 0$.

Итак, мы доказали все неравенства, необходимые для проверки утверждения в), но само утверждение в) пока еще не доказано.

Далее, любая матрица вида $\begin{pmatrix} R & \\ & (R^{\mathrm{t}})^{-1} \end{pmatrix}$ сохраняет симплектическую форму $\{\cdot,\cdot\}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Пусть p_+, p_-, q_+, q_-, y_+, x_-, а также $\tilde{p}_+$, $\tilde{p}_-$, $\tilde{q}_+$, $\tilde{q}_-$, $\tilde{y}_+$, $\tilde{x}_-$ удовлетворяют системе (4.1). Тогда условие сохранения формы $\{\cdot,\cdot\}$ влечет

$$\sum\left(p_j^+\tilde{p}_j^- - p_j^-\tilde{p}_j^+\right) + \sum\left(\lambda x_j^-\tilde{x}_j^- - \lambda x_j^-\tilde{x}_j^-\right) = \sum\left(q_j^+\tilde{q}_j^- - q_j^-\tilde{q}_j^+\right) + \sum\left(\lambda y_j^+\tilde{y}_j^+ - \lambda y_j^+\tilde{y}_j^+\right).$$

Вторые слагаемые в обеих частях равенства равны 0, что и означает

$$L\left((p_+, p_-); (\tilde{p}_+, \tilde{p}_-)\right) = L\left((q_+, q_-); (\tilde{q}_+, \tilde{q}_-)\right).$$

Итак, $\chi(\lambda)$ является изотропным подпространством в $V_{2k} \oplus V_{2n}$ (но мы еще не доказали, что $\chi(\lambda)$ — максимальное изотропное подпространство).

4.4. Доказательство теоремы 4.1. Голоморфность. Перепишем равенство (4.2) в виде

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ q_- \\ \lambda x_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & B \\ A^{\mathrm{t}} & 0 & C^{\mathrm{t}} & 0 \\ 0 & C & 0 & D \\ B^{\mathrm{t}} & 0 & D^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- \\ q_+ \\ x_- \\ y_+ \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Матрицу, стоящую в правой части, мы обозначим через S. Из этого равенства легко выписывается уравнение, которому должен удовлетворять вектор $\left(q_+, q_- ; p_+, p_-\right) \in \chi(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ q_- \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & C \\ B^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} p_- \\ q_+ \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda B(\lambda^2 - D^{\mathrm{t}}D)^{-1}B^{\mathrm{t}} & A + B(\lambda^2 - D^{\mathrm{t}}D)^{-1}D^{\mathrm{t}}C \\ A^{\mathrm{t}} + C^{\mathrm{t}}(\lambda^2 - DD^{\mathrm{t}})^{-1}DB^{\mathrm{t}} & \lambda C^{\mathrm{t}}(\lambda^2 - DD^{\mathrm{t}})^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_- \\ q_+ \end{pmatrix}. \tag{4.4$'$}$$

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ является конечномерным возмущением матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, а та, в свою очередь, является конечномерным возмущением ортогональной матрицы. Поэтому матрица $D^{\mathrm{t}}D$ имеет лишь конечное число собственных значений. Обозначим их через λ_j^2. Таким образом, везде, кроме точек $\pm\lambda_j$, линейное отношение задается формулой (4.4$'$). В частности, везде, кроме, быть может, точек $\pm\lambda_j$, линейное отношение $\chi(\lambda)$ имеет половинную размерность и голоморфно зависит от λ.

Далее, заметим, что $\|D\| \leqslant 1$. Поэтому в области $|\lambda| > 1$ функция $\chi(\lambda)$ голоморфна. Из соображений симметрии (см. утверждение д) теоремы) функция $\chi(\lambda)$ голоморфна и в круге $|\lambda| < 1$. Осталось убедиться в том, что $\chi(\lambda)$ голоморфна в точках $\pm\lambda_j$, лежащих на окружности $|\lambda| = 1$. Пусть v — собственный вектор матрицы $D^{\mathrm{t}}D$, соответствующий собственному значению λ_j^2. Тогда $v' = (\lambda_j^{-1}Dv, v)$ является собственным вектором матрицы $\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix}$ с собственным значением λ_j. Учитывая, что матрица S унитарна, а $|\lambda_j| = 1$, мы получаем, что v' является собственным вектором матрицы S. Покажем, что и комплексно-сопряженный вектор $\overline{v}'$ является собственным для S. Действительно, учитывая, что матрица $S = S^{\mathrm{t}}$ унитарна, получаем

$$S\overline{v}' = \overline{(\overline{S}v')} = \overline{(S^{-1}v')} = \overline{\lambda_j^{-1}v'} = \lambda_j\overline{v}'.$$

Поэтому в пространстве $\operatorname{Ker}(\lambda_j^2 - D^{\mathrm{t}}D)$ мы можем выбрать базис $v_1, v_2, \ldots$, целиком состоящий из вещественных векторов. Далее, заметим, что S — унитарная матрица, определенная с точностью до сопряжения с помощью ортогональной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & U & \\ & & & V \end{pmatrix}.$$

Векторы $(\lambda_j^{-1}Dv_\alpha, v_\alpha)$ — собственные для блока $\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix}$ матрицы S. Так как $|\lambda_j| = 1$, а матрица S унитарна, мы получаем, что векторы $v_\alpha^* = (0, 0, \lambda_j^{-1}Dv_\alpha, v_\alpha)$

являются собственными векторами для S (иначе было бы $\|Sv_\alpha^*\| \geqslant \|v_\alpha^*\|$). Выбирая векторы v_α^* в качестве базисных, мы можем привести матрицу S к виду

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & A & 0 & B' & 0 & 0 \\ A^{\mathrm{t}} & 0 & (B')^{\mathrm{t}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & C' & 0 & D' & 0 & 0 \\ (B')^{\mathrm{t}} & 0 & (D')^{\mathrm{t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H^{\mathrm{t}} & 0 \end{array}\right),$$

где собственные числа D' отличны от λ_j. Повторяя эту процедуру, мы получаем, что любой морфизм категорий $\mathbf{Uo}$ при подходящем выборе координат принимает вид

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} A & \widetilde{B} & \\ \hline \widetilde{C} & \widetilde{D} & \\ & & \Lambda \end{array}\right),$$

где $\begin{pmatrix} A & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{pmatrix}$ — квадратная матрица, Λ — унитарная матрица, а $\widetilde{D}$ не имеет собственных значений, лежащих на окружности $|\lambda| = 1$. Легко видеть, что характеристическая функция морфизма P задается формулой (4.4′), и теперь формула (4.4′) уже не имеет особенностей на окружности.

Итак, голоморфность доказана. Кроме того, мы убедились, что линейное отношение $\chi(\lambda)$ имеет половинную размерность при всех λ, а значит, доказали утверждения а) и в).

4.5. Доказательство теоремы 4.2.

Пусть $P = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$, $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n, m)$. Пусть $(q_+, q_-; p_+, p_-) \in \chi_Q(\lambda)$; $(r_+, r_-; q_+, q_-) \in \chi_P(\lambda)$. Тогда существуют x_-, y_+, u_-, v_+ такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & \\ & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} q_+ \\ \lambda u_- \\ q_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L & \\ M & N & \\ & & \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+ \\ v_+ \\ r_- \\ \lambda v_+ \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ \lambda u_- \\ p_- \\ x_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & & \\ C & D & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ \lambda u_- \\ q_- \\ \lambda y_+ \\ u_- \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A & B & & & \\ C & D & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & & L & \\ & 1 & & \\ M & & N & \\ & & & \begin{pmatrix} K & & L \\ & 1 & \\ M & & N \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+ \\ y_+ \\ v_+ \\ r_- \\ \lambda y_+ \\ \lambda v_+ \end{pmatrix},$$

откуда (см. (3.3)) следует, что $(r_+, r_-; p_+, p_-) \in \chi_{QP}(\lambda)$, т. е.

$$\chi_{QP}(\lambda) \supset \chi_Q(\lambda)\chi_P(\lambda).$$

Обратно, пусть $(r_+, r_-; p_+, p_-) \in \chi_{QP}(\lambda)$. Тогда существуют x_-, y_+, u_-, v_+ такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ \lambda u_- \\ p_- \\ x_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & & \\ C & D & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & & L & \\ & 1 & & \\ M & & N & \\ & & & \begin{pmatrix} K & & L \\ & 1 & \\ M & & N \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+ \\ y_+ \\ v_+ \\ r_- \\ \lambda y_+ \\ \lambda v_+ \end{pmatrix}.$$

Положив $q_+ = Kr_+ + \lambda L v_+$, $q_- = \overline{K} r_+ + \lambda \overline{L} v_-$ (напомним, что $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} = \begin{pmatrix} \overline{K} & \overline{L} \\ \overline{M} & \overline{N} \end{pmatrix}$), мы получаем равенства (4.5).

4.6. Доказательство теоремы 4.3. Пусть $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, тогда $P^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$. Пусть $(q_+, q_-; p_+, p_-) \in P^*$. Тогда существуют x_-, y_+, такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & \\ & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_+ \end{pmatrix},$$

таким образом, $(p_+, p_-; q_+, q_-) \in \chi(\lambda^{-1})$.

4.7. «Центральное расширение». Морфизм категории $\mathbf{Uo}$ не восстанавливается однозначно по своей характеристической функции. Действительно, пусть

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & 1 \end{array}\right), \quad P' = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & F \end{array}\right)$$

(отметим, что матрица F в этом случае должна быть унитарной). Тогда $\chi_P(\lambda) = \chi_{P'}(\lambda)$ (проще всего в этом убедиться, взглянув на формулу (4.4′)).

Введем на $\overline{\mathbb{C}}$ еще одну функцию — функцию $n_P(\lambda)$, принимающую значения $0, 1, 2, \ldots, \infty$, — по следующему правилу: $n_P(\lambda)$ есть размерность пространства всех (x_-, y_+), удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & \\ & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \\ 0 \\ \lambda y_+ \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Лемма 4.4.

а) Функция $n(\lambda)$ равна нулю всюду, кроме конечного числа точек, лежащих на окружности $|\lambda| = 1$.

б) $n(\pm 1) = \infty$, в остальных точках значения функции конечны.

в) $n(\lambda) = n(-\lambda)$.

Доказательство. Перепишем (4.7) в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \\ \hline \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ x_- \\ 0 \\ y_+ \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \end{pmatrix}$ является собственным для оператора

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

с собственным значением λ^2. Теперь высказывания а), б) становятся очевидными.

Далее, (4.7) равносильно

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ -x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \\ 0 \\ -\lambda y_+ \end{pmatrix},$$

откуда сразу следует в). Лемма доказана. ■

Теорема 4.5.

$$n_{QP}(\lambda) = n_Q(\lambda) + n_P(\lambda) + c(Q, P; \lambda), \tag{4.9}$$

где

$$c(Q, P; \lambda) = \dim\bigl(\operatorname{Ker} \chi_Q(\lambda) \cap \operatorname{Indef} \chi_P(\lambda)\bigr).$$

Доказательство. Величина $n_{QP}(\lambda)$ равна размерности пространства решений системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ \lambda u_- \\ 0 \\ x_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & & & \\ C & D & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \overline{A} & \overline{B} & \\ & & & \overline{C} & \overline{D} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & & L & & & \\ & 1 & & & & \\ M & & N & & & \\ & & & \overline{K} & & \overline{L} \\ & & & & 1 & \\ & & & \overline{M} & & \overline{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \\ v_+ \\ 0 \\ \lambda y_+ \\ \lambda v_+ \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Введем дополнительные переменные

$$q_+ = Lv_+, \quad q_- = \lambda\overline{L}v_-.$$

Тогда система уравнений переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ -x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & \\ C & D & & \\ & & \overline{A} & \overline{B} \\ & & \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$\begin{pmatrix} q_+ \\ \lambda y_- \\ q_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L & & \\ M & N & & \\ & & \overline{K} & \overline{L} \\ & & \overline{M} & \overline{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_+ \\ 0 \\ \lambda v_+ \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

(это система уравнений на x_-, y_+, v_+, u_-, q_+, q_-). Чтобы существовали x_-, y_+, удовлетворяющие первому равенству, необходимо, чтобы $\bigl(q_+, q_-; 0, 0\bigr) \in \chi_Q(\lambda)$, т. е. $(q_+, q_-) \in \operatorname{Ker} Q$. Аналогично, должно быть выполнено условие $(q_+, q_-) \in \operatorname{Indef} \chi_P(\lambda)$. Далее, фиксируем $(q_+, q_-) \in \operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P$. Тогда система (4.10) распадается на две независимые системы: система (4.11) на переменные x_-, y_+ и система (4.12) на u_-, v_+. Размерность пространства решений системы (4.11) равна $n_Q(\lambda)$, а размерность пространства решений системы (4.12) равна $n_P(\lambda)$. Теперь утверждение очевидно. ■

4.8. Замечания. Используя общие теоремы об операторных узлах и их характеристических функциях (см. добавление Е), можно показать, что для любой пары функций $\bigl(\chi(\lambda), n(\lambda)\bigr)$, удовлетворяющих утверждениям теорем 4.1 и 4.4, существует единственный морфизм P категории **Uo** такой, что $\chi(\lambda) = \chi_P(\lambda)$, $n_\lambda(\lambda) = n_P(\lambda)$.

§ 5. *Иерархия вложений Ольшанского*

Группы $\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$ и $\bigl(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$ являются частными случаями (G, K)-пар Г. И. Ольшанского.

5.1. Список. Пусть, как обычно, $\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$, ... обозначает соответственно полную ортогональную, полную унитарную, полную линейную и т. д. группы гильбертова пространства. Пусть $\mathrm{G}(\infty) \supset \mathrm{K}(\infty)$ — две группы подобного типа. Пусть $\bigl(\mathrm{G}(\infty) \supset \mathrm{K}(\infty)\bigr)$ — группа операторов $A \in \mathrm{G}(\infty)$, представимых в виде $A = B(1 + T)$, где $B \in \mathrm{K}(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта. Г. И. Ольшанский [Ольшанский (1983)], [Olshanskii (1990)] предложил следующий список естественных пар $\bigl(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\bigr)$:

I.1.	$\bigl(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.1.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.2.	$\bigl(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.2.	$\bigl(\mathrm{U}(2\infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.3.	$\bigl(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.3.	$\bigl(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.4.	$\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$	II.4.	$\bigl(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$
I.5.	$\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.5.	$\bigl(\mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.6.	$\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{H}), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$	II.6.	$\bigl(\mathrm{U}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$
I.7.	$\bigl(\mathrm{O}(\infty, \infty), \mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty)\bigr)$	II.7.	$\bigl(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty)\bigr)$
I.8.	$\bigl(\mathrm{O}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$	II.8.	$\bigl(\mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$
I.9.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$	II.9.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$
I.10.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty, \infty), \mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$	II.10.	$\bigl(\mathrm{Sp}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$

5.2. Явный вид вложений $\mathrm{K}(\infty) \to \mathrm{G}(\infty)$ почти во всех случаях не вызывает сомнений, однако, чтобы избежать двусмысленностей, мы должны их перечислить.

Пары I.4, I.5, I.6. Группа $\mathrm{G}(\infty)$ есть группа линейных операторов в пространстве ℓ_2 над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (ниже $\ell_2(\mathbb{K}) = \ell_2(\mathbb{R})$, $\ell_2(\mathbb{C})$, $\ell_2(\mathbb{H})$), а группа $\mathrm{K}(\infty)$ — группа унитарных операторов в $\ell_2(\mathbb{K})$).

Пары I.2, I.7, I.10. Рассмотрим в пространстве $\ell_2(\mathbb{K}) \oplus \ell_2(\mathbb{K})$ эрмитову форму с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из ограниченных операторов, сохраняющих эту форму, а подгруппа $\mathrm{K}(\infty)$ — из операторов, оставляющих инвариантными подпространства $\ell_2(\mathbb{K}) \oplus 0$ и $0 \oplus \ell_2(\mathbb{K})$.

Пары II.2, II.7, II.10 определяются точно так же, только группа $\mathrm{G}(\infty)$ сохраняет эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пары II.5, II.8, II.9. Группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ в $\ell_2(\mathbb{K}) \oplus \ell_2(\mathbb{K})$, причем A и B унитарны, а подгруппа $\mathrm{K}(\infty)$ — из матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Пары II.1, II.4. В случае II.1 группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из унитарных операторов в $\ell_2(\mathbb{H})$, а подгруппа $\mathrm{K}(\infty)$ — из операторов, сохраняющих подпространство $\ell_2(\mathbb{C}) \subset \ell_2(\mathbb{H})$. Случай II.2 аналогичен $(\ell_2(\mathbb{C}) \supset \ell_2(\mathbb{R}))$.

Пары II.3, II.6. В случае II.3 группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из вещественно-линейных ортогональных операторов в $\ell_2(\mathbb{C})$, а $\mathrm{K}(\infty)$ — из унитарных (комплексно-линейных) операторов. Случай II.6 аналогичен.

Пара I.8. Группа $\mathrm{O}(\infty, \mathbb{C})$ состоит из ограниченных операторов в $\ell_2(\mathbb{C})$, сохраняющих форму $\sum x_i^2$, а $\mathrm{O}(\infty)$ — из операторов, сохраняющих вещественное подпространство $\ell_2(\mathbb{R})$.

Пара I.9. Группа $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{C})$ состоит из ограниченных операторов в $\ell_2(\mathbb{C})\oplus\ell_2(\mathbb{C})$, сохраняющих билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а ее подгруппа $\mathrm{Sp}(\infty)$ — из унитарных операторов, сохраняющих ту же форму.

Пара I.1. См. выше, п. 1.2.

Пара I.3. Группа $\mathrm{SO}^*(2\infty)$ состоит из ограниченных матриц в $\ell_2(\mathbb{H})$, сохраняющих антиэрмитову форму $\sum\limits_{\alpha} x_\alpha i \overline{y_\alpha}$, а ее подгруппа $\mathrm{U}(\infty)$ — из комплексных матриц, сохраняющих ту же форму.

Безусловно, встает вопрос о том, почему список содержит ровно эти 20 групп, а не больше и не меньше. Мы воздержимся от обсуждения этого вопроса. Заметим лишь, что, как мы видели в главе VI, группа $(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty))$ является группой движений бесконечномерного симметрического пространства. Группы списка Г. И. Ольшанского являются в точности группами движений бесконечномерных симметрических пространств, к ним, правда, нужно добавить еще три группы «конечного ранга»:

$$\mathrm{O}(p, \infty), \quad \mathrm{U}(p, \infty), \quad \mathrm{Sp}(p, \infty).$$

Хотя перечисленные 20 групп обладают некоторой индивидуальностью, степень этой индивидуальности очень невелика, все «некомпактные» пары (т. е. группы **I.1–I.10**) очень похожи на $(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$, а «компактные» пары (т. е. группы **II.1–II.10**) — на $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$. По этой причине мы будем очень кратки. По-существу, ниже обсуждаются лишь вложения (G, K)-пар в группы $(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty))$, $(\mathrm{O}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$, $\mathrm{Isom}(\cdot)$; имея такие вложения, мы автоматически имеем и представления (G, K)-пар.

5.3. Иерархия вложений: «некомпактный случай». Существует много вложений «некомпактных» (G, K)-пар Ольшанского **I.1–I.10** в группу $(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty))$. Общая картина вложений изображена в таблице на странице 297.

В этой таблице жирные стрелки соответствуют вложениям, зависящим от (одного) параметра. Надпись «удв» (удвоение) на стрелке означает, что вложение проводится не в группу $(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty))$, а в группу $(\mathrm{G}(2\infty), \mathrm{K}(2\infty))$.

Большинство стрелок в этой таблице достаточно очевидны. Все «основные» вложения, ведущие из первого столбца во второй, соответствуют «забыванию» структуры. Не нуждаются в пояснениях и вложения $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2\infty, \mathbb{R})$ и $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{H}) \to \mathrm{GL}(2\infty, \mathbb{C})$.

ОСНОВНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{O}(\infty,\infty),\ \mathrm{O}(\infty)\times\mathrm{O}(\infty)) \arrow[r, "\text{удв}"] & (\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\ \mathrm{O}(\infty)) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\ \mathrm{U}(\infty)) \\
(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\ \mathrm{U}(\infty)) \arrow[ur, "\text{удв}"'] & & \\
(\mathrm{O}(\infty,\mathbb{C}),\ \mathrm{O}(\infty)) \arrow[dr] & & \\
(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{C}),\ \mathrm{Sp}(\infty)) \arrow[r, "\text{удв}"] & (\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}),\ \mathrm{U}(\infty)) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[uuu, "\text{удв}"'] & (\mathrm{U}(\infty,\infty),\ \mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)) \arrow[uuu, "\text{удв}"'] \\
(\mathrm{U}(\infty,\infty),\ \mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)) \arrow[ur, "\text{удв}"'] & & \\
(\mathrm{Sp}(\infty,\infty),\ \mathrm{Sp}(\infty)\times\mathrm{Sp}(\infty)) \arrow[r, "\text{удв}"] & (\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{H}),\ \mathrm{Sp}(\infty)) \arrow[r, Rightarrow, "\text{удв}"] \arrow[uu, "\text{удв}"'] & (\mathrm{SO}^*(2\infty),\ \mathrm{U}(\infty)) \arrow[uu] \\
(\mathrm{SO}^*(2\infty),\ \mathrm{U}(\infty)) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

$$(\mathrm{O}(\infty,\infty),\ \mathrm{O}(\infty)\times\mathrm{O}(\infty)) \longrightarrow (\mathrm{U}(\infty,\infty),\ \mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)) \xleftarrow{\text{удв}} (\mathrm{Sp}(\infty,\infty),\ \mathrm{Sp}(\infty)\times\mathrm{Sp}(\infty))$$

$$(\mathrm{O}(\infty,\mathbb{C}),\ \mathrm{O}(\infty)) \longrightarrow (\mathrm{SO}^*(2\infty),\ \mathrm{U}(\infty))$$

$$(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{C}),\ \mathrm{Sp}(\infty)) \longrightarrow (\mathrm{Sp}(4\infty,\mathbb{R}),\ \mathrm{U}(\infty))$$

Объясним остальные вложения.

а) $\big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(4\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(2\infty)\big)$.

Группа $\big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$ действует в $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus \ell_2(\mathbb{C})$, сохраняя эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. Мнимая часть эрмитовой формы является кососимметричной формой в овеществленном $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus \ell_2(\mathbb{C})$. Вложение построено.

б) $\big(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Группа $\mathrm{SO}^*(2\infty)$ состоит из операторов в $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus \ell_2(\mathbb{C})$, сохраняющих ортогональную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. В частности, они сохраняют эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вложение построено.

Построим по одному вложению, отвечающему жирным стрелкам.

в) $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Тогда на $H \oplus H$ определена эрмитова форма

$$\big\langle (h, \tilde{h}), (p, \tilde{p}) \big\rangle = \tfrac{1}{i}\big(\langle h, \tilde{p}\rangle - \langle \tilde{h}, p\rangle\big).$$

г) $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Аналогично, см. § 1.

д) $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{H}), \mathrm{Sp}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{SO}^*(4\infty), \mathrm{U}(2\infty)\big)$.

Пусть H — кватернионное гильбертово пространство. Тогда на $H \oplus H$ определена антиэрмитова форма

$$\big\langle (h, \tilde{h}), (p, \tilde{p}) \big\rangle = \langle h, \tilde{p} \rangle - \langle \tilde{h}, p \rangle.$$

Вложения, зависящие от параметра, получаются после применения процедуры с централизатором, описанной в п. 2.4.

Наконец, особое вложение $\big(\mathrm{O}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ получается ограничением с вложения $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$.

5.4. Иерархия вложений: «компактный случай». Существует много вложений «компактных» (G, K)-пар **II.1–II.10** в группу $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, группу $\big(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ и группу Isom H изометрий гильбертова пространства. Общая картина вложений изображена на странице 299.

Вертикальные пунктирные стрелки уже описаны, вертикальные стрелки, состоящие из точек, достаточно очевидны (забывание структуры).

Перейдем к описанию вложений

$$\big(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\big) \to \big(\widetilde{\mathrm{G}}(\infty), \widetilde{\mathrm{K}}(\infty)\big),$$

зависящих от параметра (жирные стрелки). Заметим, что во всех 6 случаях $\mathrm{G}(\infty) = \widetilde{\mathrm{K}}(\infty)$, поэтому одно вложение определено тривиальным образом. Вложение, зависящее от параметра, получается, если применить прием с централизатором из п. 2.4.

Опишем аффинные действия, зависящие от параметра. Случай $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ уже разобран (п. 2.5). Группа $\big(\mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ действует на пространстве гильберт-шмидтовских матриц по формуле

$$(g_1, g_2) : h \to g_1^{-1} h g_2 + \lambda\big(g_1^{-1} g_2 - E\big).$$

Реализуем, далее, группу U(2∞) как группу унитарных блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, ее подгруппа Sp(∞) состоит из матриц, удовлетворяющих условию

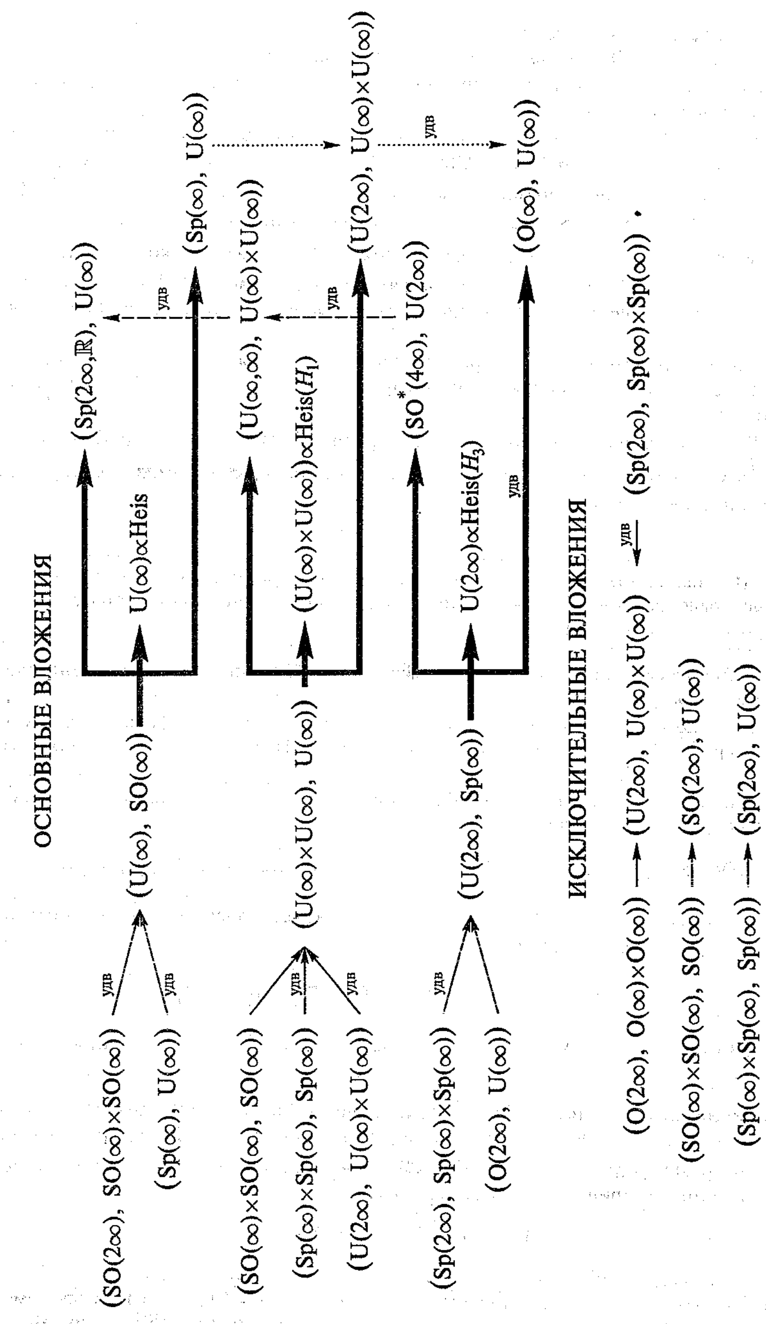
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть H — пространство гильберт-шмидтовских матриц X, удовлетворяющих условию

$$X^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа $\big(\mathrm{U}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\big)$ действует на гильбертовом пространстве H преобразованиями

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \\ + \lambda \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - E \right)$$



5.5. Замечания. а) Как мы отмечали, все (G, K)-пары вида **I.1–I.10** и **II.1–II.10** очень похожи друг на друга. Однако некоторая разница между ними все-таки есть.

Прежде всего, отметим наличие трех «этажей» (или трех столбцов) в иерархии вложений; эти три столбца явно играют разную роль.

Группы третьего столбца тесно связаны с «классическими категориями», а именно, «некомпактные» группы $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{U}(\infty,\infty),\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{SO}^*(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ являются группами автоморфизмов бесконечномерных объектов категорий $\overline{\mathbf{Sp}}$, $\overline{\mathbf{U}}$, $\overline{\mathbf{SO}}^*$. Группы $\big(\mathrm{O}(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ и $\big(\mathrm{Sp}(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ являются группами Aut^* для бесконечномерных объектов категорий $\overline{\mathbf{GD}}$ и $\overline{\mathbf{C}}$, а группа $\big(\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)\big)$ является компонентой связности единицы в группе Aut^* одного из объектов категории $\overline{\mathbf{GA}}$ (см. п. IV.3.4). Эти шесть (и, по-видимому, лишь эти шесть) групп имеют проективные представления, не линеаризующиеся на накрытии.

Почти все группы второго и третьего столбцов появляются в теории представлений группы диффеоморфизмов окружности и групп петель, см. ниже §§6–7 и, подробнее, [Неретин (1988)].

б) Теория K-сферических представлений групп $\big(\mathrm{G}(\infty),\mathrm{K}(\infty)\big)=\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{O}(\infty)\times\mathrm{O}(\infty),\mathrm{O}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{Sp}(\infty)\times\mathrm{Sp}(\infty),\mathrm{Sp}(\infty)\big)$ может быть истолкована как теория фактор-представлений, см. п. VIII.6.6.

в)

Гипотеза (Ольшанский). Все (G, K)-пары Ольшанского имеют тип I. Все неприводимые унитарные представления (G, K)-пар входят в разложения тензорных произведений только что построенных представлений.

Для сферических представлений некомпактных (G, K)-пар это утверждение доказано (см. [Pickrell (1990)]).

г) Для некоторых (G, K)-пар получена классификация всех K-сферических представлений (см. [Вершик, Керов (1982)], [Ольшанский (1986)], [Нессонов (1986)], см. также [Pickrell (1990)]).

д) Есть еще несколько (G, K)-пар, которые, по-видимому, близки по свойствам к только что перечисленным, в частности:

$$\big(\mathrm{O}(2\infty+1),\mathrm{U}(\infty)\big),\quad \big(\mathrm{U}(2\infty+1),\mathrm{Sp}(\infty)\big),\quad \big(\mathrm{U}(p,\infty)\times\mathrm{U}(q,\infty),\mathrm{U}(\infty)\big).$$

Например, группа $\big(\mathrm{O}(2\infty+1),\mathrm{U}(\infty)\big)=\mathrm{Aut}^*_{\mathbf{B}}$ состоит из вещественно-линейных операторов A в $\ell_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{R}$, представимых в виде

$$A=\begin{pmatrix} B & \\ & 1\end{pmatrix}(1+T):\ell_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{R}\to\ell_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{R},$$

где B — унитарный оператор в $\ell_2(\mathbb{C})$, а T — вещественно-линейный оператор Гильберта—Шмидта.

5.6. Замечания. (G, K)**-пары Нессонова.** Являются ли объекты следующего типа разумными, не совсем ясно. Во всяком случае, они резко не похожи на (G, K)-пары Ольшанского.

Рассмотрим группу $\mathrm{G}=\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$. Она состоит из пар вещественных ограниченных матриц (A,B), представимых в виде

$$A=P(1+T),\quad B=P(1+S),$$

где $P\in\mathrm{O}(\infty)$ (матрица P — одна и та же для A и B!), а T и S — операторы Гильберта—Шмидта. Умножение определяется формулой $(A,B)(A',B')=(AA',BB')$. Реализуем группу $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ так же, как в конце п. 1.3. Фиксируем $k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$ $(l+k>0)$. Рассмотрим

вложение G в $\big(\mathrm{Sp}(2(k+l)\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$, задаваемое формулой

$$\sigma:(A,B)\mapsto\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} A &&&&&&&&& \\ &\ddots&&&&&&&& \\ &&A&&&&&&& \\ &&&B&&&&&& \\ &&&&\ddots&&&&& \\ &&&&&B&&&& \\ \hline &&&&&&A^{t-1}&&& \\ &&&&&&&\ddots&& \\ &&&&&&&&A^{t-1}& \\ &&&&&&&&&B^{t-1} \\ &&&&&&&&&&\ddots \\ &&&&&&&&&&&B^{t-1} \end{array}\right),$$

где A и A^{t-1} встречаются по k раз, а B и B^{t-1} — по l раз. Образ $\sigma\big(\mathrm{O}(\infty)\big)$ группы $\mathrm{O}(\infty)\subset\mathrm{G}$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} P&&& \\ &\ddots&& \\ \hline &&\ddots& \\ &&&P\end{array}\right),$$

где P ортогональна. Централизатор Z подгруппы $\sigma\big(\mathrm{O}(\infty)\big)$ состоит из блочно-скалярных симплектических матриц и изоморфен $\mathrm{Sp}(2(k+l),\mathbb{R})$. Пусть $Q\in Z$. Тогда мы можем рассмотреть вложение

$$\sigma_Q(A,B):=Q^{-1}\sigma(A,B)Q$$

группы G в $\mathrm{Sp}(2(k+l)\infty,\mathbb{R})$ и ограничить представление Вейля на образ группы G.

Задача.

а) От скольких параметров зависит полученное представление?

б) Что случится, если мы применим ту же конструкцию для группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$?

§ 6. *Конструкции представлений группы диффеоморфизмов окружности*

6.1. Вложения Diff **в** $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$. Рассмотрим в пространстве гладких функций на окружности скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\overline{g(\psi)}\,d\varphi d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}},\tag{6.1}$$

где $0<s<1$.

Это хорошо известное в теории представлений скалярное произведение для дополнительной серии унитарных представлений $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (см. [Bargmann (1948)]).

Лемма 6.1.
а) При $0 < s < 1$ скалярное произведение (6.1) положительно определено.
б) Векторы

$$e_n = \sqrt{c_n^{-1}} e^{in\varphi}, \tag{6.2}$$

где

$$c_n = \frac{\pi^2 2^{1-s}}{(s+1)B\left(\frac{s+1}{2} - n, \frac{s+1}{2} + n\right)} = c_0 \prod_{k=1}^{|n|} \frac{k - \frac{1}{2} - \frac{s}{2}}{k - \frac{1}{2} + \frac{s}{2}}, \tag{6.3}$$

образуют полную ортонормированную систему.

Доказательство. Вычислим

$$\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi} \rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\varphi} e^{-im\psi} d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{in(\varphi-\psi)} e^{i(n-m)\psi}\, d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}.$$

Делая замену $\theta = \varphi - \psi$, $\varkappa = \psi$, мы приходим к выражению

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left|\sin \tfrac{\theta}{2}\right|^{s-1} e^{i(n-m)\varkappa} d\theta\, d\varkappa.$$

При $n \neq m$ мы очевидным образом получаем 0. При $n = m$ мы получаем

$$2\pi \int_0^{2\pi} \left|\sin \tfrac{\theta}{2}\right|^{s-1} e^{in\theta} d\theta = c_n.$$

Этот интеграл можно найти в любых таблицах (см. также [Лобачевский (1834)]), и мы получаем (6.3); в частности, мы видим, что $c_n > 0$. Наконец, нужно еще проверить, что $\langle f, e^{ik\varphi} \rangle = 0$ для всех k влечет $f = 0$. Пусть $f = \sum \alpha_n e^{in\varphi}$, ряд сходится равномерно (напомним, что f — гладкая), поэтому интеграл $\langle f, e^{ik\varphi} \rangle$ можно разложить в ряд, и мы мгновенно получаем $\langle f, e^{ik\varphi} \rangle = \alpha_k c_k$. Лемма доказана. ■

Замечание. Пусть $n \to \infty$. Тогда формула Стирлинга для Γ-функции дает асимптотику

$$c_n \sim a \cdot n^{-s}. \tag{6.4}$$

Обозначим через H_s пополнение пространства гладких функций по скалярному произведению (6.1). Пусть группа Diff гладких диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, действует в H_s по формуле

$$T_s(q) f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big) q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}}. \tag{6.5}$$

Отметим, что эти операторы переводят пространство вещественных функций в себя.

Предложение 6.2. Пусть q — мебиусовское преобразование окружности. Тогда оператор $T(q)$ унитарен относительно скалярного произведения (6.1).

Доказательство

$$\big\langle T_s(q) f, T_s(q) g \big\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\big(q(\varphi)\big)\overline{g\big(q(\psi)\big)} q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}} q'(\psi)^{\frac{1+s}{2}}\, d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}.$$

Пусть p — преобразование, обратное к q. Тогда интеграл переписывается в виде

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{g(\psi)} \left(\frac{p'(\varphi)p'(\psi)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\,(p(\varphi) - p(\psi))\right)} \right)^{(1-s)/2} d\varphi\, d\psi.$$

Необходимо проверить, что выражение

$$\frac{d\varphi\, d\psi}{\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^2}$$

является инвариантным относительно мебиусовских преобразований. В координатах $z = e^{i\varphi}$, $u = e^{i\psi}$ это выражение переписывается в виде

$$\frac{dz\, du}{(z-u)^2}.$$

Прямое вычисление показывает, что это выражение инвариантно относительно всех дробно-линейных преобразований сферы Римана. Лемма доказана. ■

Унитарное представление T_s группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ в H_s называется *представлением дополнительной серии*.

Задача. Докажите, что оператор $T_s(q)$ унитарен тогда и только тогда, когда q — мебиусовское преобразование.

Теорема 6.3. Оператор $T_s(q)$ содержится в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ для любого $q \in \mathrm{Diff}$.

6.2. Доказательство теоремы 6.3.

Доказательство. Нам достаточно проверить, что оператор $H(q) = T_s(q)^* T_s(q) - E$ является оператором Гильберта—Шмидта в скалярном произведении (6.1).

$$\big\langle (T_s(q)^* T_s(q) - E) f_1, f_2 \big\rangle = \big\langle (T_s(q) f_1, T_s(q) f_2) \big\rangle - \langle f_1, f_2 \rangle =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1\big(q(\theta)\big)\overline{f_2\big(q(\varkappa)\big)} q'(\theta)^{(1+s)/2} q'(\varkappa)^{(1+s)/2}\, d\theta\, d\varkappa}{\left|\sin\left(\frac{\theta-\varkappa}{2}\right)\right|^{1-s}} - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}\, d\varphi\, d\psi.$$

Пусть p — диффеоморфизм, обратный к q. Сделаем в первом интеграле замену переменных $\theta' = q(\varphi)$, $\varkappa' = q(\psi)$. Тогда наше выражение превращается в

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{p'(\varphi)^{\frac{1-s}{2}}p'(\psi)^{\frac{1-s}{2}}}{\left|\sin\left(\frac{p(\varphi)-p(\psi)}{2}\right)\right|^{1-s}} - \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}\right] f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}\,d\varphi\,d\psi. \tag{6.6}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $K(\varphi,\psi)$. Тогда

$$K(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s-1}\left(\left(\frac{\left|\sin^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right| p'(\varphi)p'(\psi)}{\left|\sin^2\left(\frac{p(\varphi)-p(\psi)}{2}\right)\right|}\right)^{\frac{1-s}{2}} - 1\right).$$

Доопределим выражение

$$\alpha(\varphi,\psi) := \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)p'(\varphi)p'(\psi)}{\sin^2\left(\frac{p(\varphi)-p(\psi)}{2}\right)}$$

при $\varphi=\psi$, положив $\alpha(\varphi,\psi)=1$. Тогда $\alpha(\varphi,\psi)$ становится гладкой функцией. Поэтому гладкой является и функция

$$\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1,$$

эта функция обращается в 0 при $\varphi=\psi$. Следовательно в окрестности прямой $\varphi=\psi$ функция

$$\frac{\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1}{\varphi-\psi}$$

является гладкой. Но $\alpha(\varphi,\psi)=\alpha(\psi,\varphi)$, поэтому гладкой вблизи $\varphi=\psi$ является и

$$\frac{\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1}{(\varphi-\psi)^2},$$

а функция

$$z(\varphi,\psi) = \frac{\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1}{\sin^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}$$

является гладкой на торе. Итак,

$$K(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1+s} z(\varphi,\psi). \tag{6.7}$$

Доказательство завершается ссылкой на следующую лемму.

Лемма 6.4. Пусть оператор A в H_s определяется равенством

$$\langle Af_1, f_2\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\varphi,\psi)f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}\,d\varphi\,d\psi,$$

причем функция $K(\varphi,\psi)$ представима в виде

$$K(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s}\mu(\varphi,\psi), \tag{6.8}$$

где $\mu(\varphi,\psi)$ — бесконечно гладкая функция. Тогда A — оператор Гильберта—Шмидта.

Замечание 1. Эта лемма чуть-чуть сильней, чем нам сейчас необходимо (ср. (6.7) и (6.8)).

Замечание 2. Читатель, знакомый с псевдодифференциальными операторами, легко убедится, что утверждение леммы очевидно.

Доказательство леммы. Представим функцию $K(\varphi,\psi)$ в виде

$$K = K_0 + K_1 + K_2,$$

где

$$K_0(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s} l_0(\psi),$$
$$K_1(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s+1} l_1(\psi),$$
$$K_2(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s+2} l_2(\varphi,\psi),$$

где $l_0(\psi)$, $l_1(\psi)$, $l_2(\varphi,\psi)$ — бесконечно гладкие функции. Определим операторы A_j из равенства

$$\langle A_j f_1, f_2\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_j(\varphi,\psi)f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}\,d\varphi\,d\psi.$$

Нам достаточно доказать, что A_0, A_1, A_2 — операторы Гильберта—Шмидта.

Рассмотрим базисные векторы e_n, задаваемые формулой (6.2). Нам нужно доказать, что сходится ряд из квадратов матричных элементов

$$\langle A_j e_n, e_m\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{c_n c_m}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_j(\varphi,\psi)e^{in\varphi}e^{-im\psi}\,d\varphi\,d\psi.$$

Пусть

$$K_j(\varphi,\psi) = \sum_{m,n} h_{mn}^{(j)} e^{-in\varphi}e^{im\psi}.$$

Итак, нам нужно доказать, что

$$\sum_{m,n}\frac{\left|h_{mn}^{(j)}\right|^2}{c_n c_m} < \infty. \tag{6.9}$$

Начнем с оператора A_0. Сделаем корректную на торе замену переменных

$$\theta = \varphi - \psi, \quad \nu = \psi.$$

Тогда в новых координатах

$$K_0(\theta,\nu) = \left|\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right|^{s} l_0(\nu).$$

Пусть

$$\left|\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right|^{s} = \sum \sigma_k e^{ik\theta}, \qquad l_0(\varphi) = \sum \tau_\alpha e^{i\alpha\varphi}.$$

Напомним, что $\sigma_k \sim |k|^{-1-s}$ при $k\to\infty$ (см. (6.4)), а коэффициенты τ_α быстро убывают. Тогда условие (6.9) для слагаемого K_0 переписывается в виде

$$\sum_{k,\alpha}\frac{|\sigma_k\tau_\alpha|^2}{c_k c_{\alpha-k}} < \infty.$$

Далее, вспоминаем, что $c_k \sim |k|^{-s}$ при $k \to \infty$, и, следовательно, для достаточно большой константы B мы имеем $c_k^{-1} \leqslant B|k|^s$. Поэтому наша сумма оценивается сверху величиной

$$B^2 \sum_{k,\alpha} |k|^s|\alpha - k|^s|\sigma_k|^2|\tau_\alpha|^2 \leqslant B \cdot 2^s \sum |k|^s\big(|\alpha|^s + |k|^s\big)|\sigma_k|^2|\tau_\alpha|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \sum |k|^s\big(|\alpha|^s + |k|^s\big)k^{-2-2s}|\tau_\alpha|^\alpha,$$

а эта величина явно конечна.

Те же доводы показывают, что оператор A_1 является оператором Гильберта—Шмидта. Действительно, коэффициенты Фурье функции $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+s}$ убывают со скоростью $|k|^{-2-s}$. Замечая, что $|k|^{-2-s} < |k|^{-1-s}$, мы можем сослаться на только что проведенные оценки.

Наконец, функция $K_2(\varphi, \psi)$ является дважды непрерывно дифференцируемой. Обычные доводы (с интегрированием по частям) дают

$$\sum\big(n^2 + m^2\big)|h^{(2)}_{n,m}|^2 < \infty,$$

а это уже явно влечет (6.9). Лемма доказана. ∎

Задача. Покажите, что $T_s(q) \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$.

6.3. Вложения Diff **в** $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$**.** Пусть $s \in \mathbb{R}$. Пусть теперь группа Diff действует в комплексном L^2 на окружности по формуле

$$T_{is}(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}}. \tag{6.10}$$

Рассмотрим в L^2 антилинейный оператор I_s, определяемый формулой

$$I_s f(\varphi) = \frac{1}{c_0}\int \frac{\overline{f(\psi)}\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1+is}}, \tag{6.11}$$

где

$$c_0 = \frac{\pi^2 2^{1-s}}{sB\left(\frac{s+1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)}.$$

Теорема 6.5. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда I_s — ортогональный оператор в овеществленном пространстве L^2, причем $I_s^2 = 1$.

В силу этой теоремы пространство L^2 раскладывается в прямую сумму $L^2 = H_+ \oplus H_-$ вещественных (!) подпространств, где $H_\pm$ состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$I_s f(\varphi) = \pm f(\varphi).$$

Далее, в силу антилинейности оператора I_s умножение на i переводит $H_\pm$ в $H_\mp$, поэтому пространство L^2 является комплексификацией вещественного подпространства H_+ (и, в равной степени, H_-), см. Предварительные сведения, § 2.

Рассмотрим теперь группу $\mathrm{O}(\infty)$, состоящую из унитарных комплексно-линейных операторов в $L^2(S^1)$, сохраняющих подпространства $H_\pm$. Рассмотрим,

далее, группу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, состоящую из унитарных операторов, отличающихся от элементов $\mathrm{O}(\infty)$ на оператор Гильберта—Шмидта.

Теорема 6.6. $T_{is}(q) \in \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Ограничивая фундаментальные представления группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ на Diff, мы получаем представления Diff.

Задача. Пусть q — мебиусовское преобразование окружности. Покажите, что оператор $T_{is}(q)$ коммутирует с (антилинейным) оператором I_s. В частности, $T_{is}(q) \in \mathrm{O}(\infty)$.

6.4. Доказательство теоремы 6.5. Прежде всего, заметим, что оператор I_s определен нами не вполне корректно: при $s \in \mathbb{R}$ интеграл расходится. Однако если $\mathrm{Im}\, s > 0$, то интеграл (6.11) сходится.

Теорема 6.7.

а) Операторнозначная функция I_s голоморфна в открытой полуплоскости $\mathrm{Im}\, s > 0$ и продолжается до слабо непрерывной функции в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\, s \geqslant 0$.

б)

$$I_s e^{in\varphi} = a_k e^{-in\varphi}, \tag{6.12}$$

где

$$a_k = \prod_{k=1}^{|n|} \frac{k - \frac{1}{2} + \frac{is}{2}}{k - \frac{1}{2} - \frac{is}{2}}. \tag{6.13}$$

в) При $s \in \mathbb{R}$ оператор I_s ортогонален в овеществленном L^2 и $I_s^2 = 1$.

Доказательство. Докажем б).

$$I_s e^{in\varphi} = \frac{1}{c_0}\left(\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{-is-1} e^{-in\psi} d\psi\right)e^{-in\varphi},$$

а интеграл в скобках, с точностью до переобозначений, встречался нам в доказательстве леммы 6.1. Это дает нам утверждение б).

Утверждения а) и в) теперь вытекают из формул (6.12)–(6.13). ∎

6.5. Доказательство теоремы 6.6.

$$\big(T_{is}(q)I_s - I_sT_{is}(q)\big)c_0 f(\varphi) =$$

$$= \int \overline{f(\psi)}\left|\sin\left(\tfrac{\psi - q(\varphi)}{2}\right)\right|^{-1-is} d\psi \cdot q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}} - \int \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{-1-is} \overline{f(\psi) q'(\psi)^{\frac{1-is}{2}}}\, d\varphi =$$

Положив в первом интеграле $\psi = q(\theta)$, а во втором $\psi = \theta$, получаем

$$= \int q'(\theta)^{\frac{1-is}{2}} \left[\left|\sin\left(\tfrac{q(\theta)-q(\varphi)}{2}\right)\right|^{-is-1} q'(\theta)^{\frac{1+is}{2}} q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}} - \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\theta}{2}\right)\right|^{-is-1}\right] \overline{f(\theta)}\, d\theta =$$

$$= \int K(\varphi, \theta)\overline{f(\theta)}\, d\theta,$$

где

$$K(\varphi,\theta)=\frac{q'(\theta)^{\frac{1-is}{2}}}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right|^{1+is}}\left[\left(\frac{q'(\theta)\,q'(\varphi)\sin^2\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{q(\varphi)-q(\theta)}{2}\right)}\right)^{\frac{1+is}{2}}-1\right].$$

Функция в квадратных скобках является бесконечно гладкой на торе и имеет 0 на диагонали $\varphi=\theta$. Поэтому ядро $K(\varphi,\theta)$ ограничено на торе, а поэтому задаваемый этим ядром оператор является оператором Гильберта—Шмидта.

6.6. Представления Diff. Ограничивая фундаментальные представления групп $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ и $\big(\mathrm{U}(\infty),\mathrm{O}(\infty)\big)$ на Diff, мы получаем несколько двухпараметрических серий унитарных представлений. Об этих представлениях известно очень мало.

Теорема 6.8. Пусть ρ — одно из полученных таким образом представлений Diff. Тогда циклическая оболочка вакуумного вектора является неприводимым подпредставлением.

Доказательство. Покажем это, например, для конструкции п. 6.1. Образ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\subset\mathrm{Diff}$ в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ содержится в $\mathrm{O}(\infty)$. Поэтому ограничение наших представлений на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ является суммой симметричных степеней $\bigoplus_{k=0}^{\infty}S^k\tau_s$, где τ_s — представление $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ в H_s (см. предложение 6.2). Далее, как вытекает из доказанной ниже леммы, наше представление имеет ровно один $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-инвариантный вектор, а именно, вакуум. Тогда теорема вытекает из леммы 5.5 Предварительных сведений.

Лемма 6.9. Пусть T_1, T_2 — неприводимые бесконечномерные унитарные представления группы G. Тогда $T_1\otimes T_2$ не может содержать G-инвариантного вектора.

Доказательство. Пусть v — ненулевой G-инвариантный вектор в $T_1\otimes T_2$. Пространство $T_1\otimes T_2$ канонически отождествляется с пространством операторов Гильберта—Шмидта $T_1\to T_2'$ (см. Предварительные сведения, п. 4.5). Вектору v (в силу его G-инвариантности) соответствует G-сплетающий оператор $T_1\to T_2'$. Но в силу неприводимости T_1, T_2 такой оператор унитарен и не может быть оператором Гильберта—Шмидта. Противоречие. ∎

6.7. Замечания. Почти инвариантные структуры.

А) «Основная серия». Рассмотрим пространство H_α из п. VII.1.7. Пусть $\alpha,s\in\mathbb{R}$. Рассмотрим два действия группы Diff в H_α:

$$\mathrm{T}_{is}(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}},$$

$$\mathrm{T}_{-is}(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1-is}{2}}.$$

Рассмотрим функцию

$$F_{\nu,\alpha}(\psi)=\exp\Big(2\pi\alpha\big(1+\big[\tfrac{\psi}{2\pi}\big]\big)\Big)\left|\sin\tfrac{\psi}{2}\right|^{\nu-1} \tag{6.14}$$

на $\mathbb{R}$, знак [ ] обозначает здесь целую часть числа, а α, ν — фиксированные комплексные числа.

Рассмотрим в H_α интегральный оператор

$$I_sf(\varphi)=\sigma\int_{-\pi}^{\pi}F_{is,\alpha}(\varphi,\psi)f(\psi)\,d\psi,$$

где нормировочный множитель σ определяется из условия $I_s(e^{i\alpha\varphi})=e^{i\alpha\varphi}$.

Заметим, что группа $\mathrm{Diff}^\sim$ содержит универсальную накрывающую $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (прообраз $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ при накрытии $\mathrm{Diff}^\sim\to\mathrm{Diff}$).

Предложение 6.10. Оператор I_s является $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$-сплетающим, т. е. для любого $q\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$ выполнено

$$T_{is}(q)I_s=I_sT_{-is}(q).$$

Оказывается, что для группы $\mathrm{Diff}^\sim$ оператор I_s является «почти сплетающим» в следующем смысле слова:

Теорема 6.11. Для любого $q\in\mathrm{Diff}$ оператор

$$T_{is}(q)I_s-I_sT_{-is}(q)$$

является оператором Гильберта—Шмидта.

Рассмотрим теперь группу $\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$, состоящую из пар унитарных операторов (A,B) в H_α таких, что $(AB^{-1}-E)$ — оператор Гильберта—Шмидта. В силу теоремы 6.11 формула

$$q\mapsto\big(T_{is}(q),T_{-is}(q)\big)$$

задает вложение

$$\mathrm{Diff}^\sim\to\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big).$$

Ограничивая унитарные представления группы $\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ на $\mathrm{Diff}^\sim$, мы получаем унитарные представления $\mathrm{Diff}^\sim$.

Заметим, далее, что оператор комплексного сопряжения $f\mapsto\overline{f}$ переводит действие T_{is} в T_{-is}. Однако он переводит пространство H_α в $H_{1-\alpha}$. В двух случаях, $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{1}{2}$, пространства H_α и $H_{1-\alpha}$ совпадают (напомним, что $H_\alpha\simeq H_{\alpha+1}$). Пусть $\alpha=0$ или $\frac{1}{2}$. Рассмотрим оператор $\overline{I}_sf:=I_s\overline{f}$ в H_α. В силу теоремы 6.11

$$\overline{I}_sT_{is}(q)-T_{is}(q)\overline{I}_s$$

— оператор Гильберта—Шмидта. В случае $\alpha=0$ оператор $\overline{I}_s$, как легко видеть, совпадает с оператором I_s из п. 6.3, и мы получаем уже знакомое нам вложение

$$\mathrm{Diff}\to\big(\mathrm{U}(\infty),\mathrm{O}(\infty)\big).$$

Пусть теперь $\alpha=\frac{1}{2}$.

Задача. Покажите, что $(\overline{I}_s)^2=-1$.

Учитывая, что оператор $\overline{I}_s$ антилинеен, мы получаем в $H_{1/2}$ структуру кватернионного гильбертова пространства (а именно, кватернионные мнимые единицы i, j, k суть операторы $f\mapsto if$, $f\mapsto\overline{I}_sf$, $f\mapsto i\overline{I}_sf$; см. Предварительные сведения, п. 2.9). Так как $\overline{I}_sT_{is}(q)-T_{is}(q)\overline{I}_s$ — оператор Гильберта—Шмидта, то $T_{is}(q)$ лежит в группе $\big(\mathrm{U}(2\infty),\mathrm{Sp}(\infty)\big)$ пространства $H_{1/2}$. Итак, мы получили гомоморфизм

$$\mathrm{Diff}^\sim\to\big(\mathrm{U}(2\infty),\mathrm{Sp}(\infty)\big).$$

Пусть, по-прежнему, $\alpha=\frac{1}{2}$, пусть $s=0$. Тогда операторы $T_{is}(q)=T_0(q)$ сохраняют пространство вещественных функций, а оператор $I_s=I_0$ становится преобразованием Гильберта. Это приводит к вырожденной фермионной конструкции п. VII.3.5 для $L\big(0,\frac{1}{2}\big)\oplus L\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)$. Итак, мы получили вложение

$$\mathrm{Diff}^\sim\to\big(\mathrm{O}(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big).$$

B) «Дополнительная серия». Фиксируем $\alpha, s \in \mathbb{R}$, рассмотрим действие группы Diff в пространстве H_α, заданное формулой

$$T_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}}.$$

Пусть $0 < s < 1 - 2|\alpha|$. Рассмотрим функцию $F_{s,\alpha}$, заданную формулой (6.14). Введем в H_α скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{s,\alpha}(\varphi - \psi) f(\varphi)\overline{g(\psi)}\, d\varphi\, d\psi.$$

Это скалярное произведение положительно определено (и $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^{\sim}$-инвариантно).

Теорема 6.12. Операторы $T_s(q)$ лежат в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ пространства H_α.

Итак, мы получили вложение

$$\mathrm{Diff}^{\sim} \to \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

Вложение

$$\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$$

из п. 6.1, естественно, является частным случаем этой конструкции при $\alpha = 0$.

Пусть, далее, $\alpha = 0$, $s = 1$. Скалярное произведение (VII.2.2) из п. VII.2.1 является правильно понятым пределом скалярных произведений (6.1) при $s \to 1$. Таким образом, и при $s = 1$ мы имеем вложение $\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$. В действительности же, как мы видели в п. VII.2.2, образ Diff содержится в меньшей группе $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big) \subset \big(\mathrm{GL}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(2\infty)\big)$ за счет наличия инвариантной симплектической структуры. Таким образом, при $\alpha = 0$, $s = 1$ мы получаем вложение

$$\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

Случай $\alpha = 0$, $s = -1$ двойственен к случаю $\alpha = 0$, $s = 1$ (и по существу между этими двумя случаями нет разницы). Предел гильбертовых пространств H_s при $s \to -1$ — это пространство функций на окружности, определенных с точностью до прибавления константы, со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi^2}\int \mathrm{ctg}\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\varphi)\overline{g'(\psi)}\, d\varphi\, d\psi. \qquad (6.14')$$

Это скалярное произведение может быть задано формулой

$$\left\langle \sum c_k e^{ik\varphi}, \sum b_k e^{ik\varphi}\right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k \overline{b_k}.$$

Инвариантная кососимметричная билинейная форма в H_s задается формулой

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) g'(\varphi)\, d\varphi.$$

В итоге мы получаем вложение

$$\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

C. Индефинитная дополнительная серия. Мы ограничимся случаем $\alpha = 0$. Рассмотрим семейство полуторалинейных форм

$$\langle f, g\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)\overline{g(\psi)}\, d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}$$

в пространстве $C^\infty(S^1)$ гладких функций на окружности. Легко видеть, что этот интеграл сходится при $\mathrm{Re}\, s > 0$, и функция $s \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_s$ голоморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 0$. Далее, формула (6.3) показывает, что функция $s \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_s$ продолжается до функции, мероморфной на всей плоскости $\mathbb{C}$ с полюсами в точках $s = 0, -1, -2, \ldots$. Заметим также, что форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ невырождена при любом $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, и один из индексов инерции формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ конечен (подробнее о свойствах этой формы см. [Гельфанд, Граев, Виленкин (1962)]).

Определим теперь при любом $s \in \mathbb{R}$ некоторое скалярное произведение в $C^\infty(S^1)$.

а) $s \notin \mathbb{Z}$. Тогда существует тригонометрический многочлен

$$L(\varphi, \psi) = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k e^{ik(\varphi-\psi)}$$

такой, что (при подходящем выборе знака перед интегралом) формула

$$(f, g)_s = \pm \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s-1} + L(\varphi, \psi)\right) f(\varphi)\overline{g(\psi)}\, d\varphi\, d\psi$$

задает положительно определенное скалярное произведение в $C^\infty(S^1)$.

б) При $s \in \mathbb{Z}$ положим

$$\left(\sum c_k e^{ik\varphi}, \sum b_k e^{ik\varphi}\right)_s = c_0\overline{b}_0 + \sum_{k \neq 0} |k|^{-s} c_k \overline{b}_k. \qquad (6.15)$$

При желании можно записать эти скалярные произведения в интегральной форме, но мы не будем этого делать.

Обозначим через H_s пополнение вещественного пространства $C^\infty(S^1)$ по скалярному произведению $(\cdot,\cdot)_s$. По запасу функций пространство H_s (во всех случаях) является *соболевским пространством* $W^{-s/2}$, оно состоит из функций

$$f(\varphi) = \sum c_k e^{ik\varphi}$$

таких, что

$$\sum |c_k|^2 k^{-s} < \infty. \qquad (6.16)$$

Пусть $q \in \mathrm{Diff}$. Определим в H_s оператор

$$T_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}}. \qquad (6.17)$$

Теорема 6.13. Операторы $T_s(q)$ содержатся в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s.

(Доказательство не содержит ничего нового по сравнению с уже доказанными теоремами этого типа).

6.8. Замечания. Квазиинвариантные действия Diff. Сохраним обозначения п. 6.7.С. Группа Diff вкладывается в группу $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s и, следовательно, действует на каноническом расширении $\widehat{H}_s$ пространства H_s (см. п. VI.1.10). Естественно встает вопрос о природе расширения $\widehat{H}_s$.

Легко видеть, что тождественное вложение $f \mapsto f$ из H_s в H_t является оператором Гильберта—Шмидта при $t - s > 1$. Поэтому в качестве $\widehat{H}_s$ можно выбрать любое из пространств $H_{s+1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$. Обозначим каноническую меру на $\widehat{H}_s$ через μ_s.

Теорема 6.14 (см. [Kahane (1965)]). Пусть $-1 > s > -3$. Тогда для почти всех $f \in \widehat{H}_s$ существует C такое, что

$$\big|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\big| \leqslant C \cdot |\varphi_1 - \varphi_2|^{(-s-1)/2}\Big(\big|\ln|\varphi_1 - \varphi_2|\big|^{1/2} + 1\Big). \qquad (6.18)$$

Рассмотрим линейный оператор $A : H_s \to H_{s-2}$, заданный формулой

$$A\left(\sum c_k e^{ik\varphi}\right) = \sum k c_k e^{ik\varphi} + c_0.$$

Легко проверить, что A переводит меру μ_s на H_s в меру на H_{s-2}, эквивалентную μ_{s-2}. Это замечание позволяет применить теорему 6.14 к пространствам H_s, не обязательно удовлетворяющим условию $-1 > s > -3$. Например, при условии $-3 > s > -5$ для почти всех функций $f(\varphi)$ их производная $f'(\varphi)$ удовлетворяет гельдеровскому условию (6.18). В случае $-5 > s > -7$ вторая производная $f''(\varphi)$ удовлетворяет условию (6.18).

Замечание. Случай $s = -2$ соответствует обычному *броуновскому движению* (*мера Винера*).

Итак, группа Diff действует преобразованиями вида (6.17) на пространстве $H_{s+1+\varepsilon}$, непрерывными в топологии $H_{s+1+\varepsilon}$ и лежащими в группе $\left(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)$ пространства H_s. Оказывается, что свойства этого действия сильно зависят от значения s.

а) $0 < s < 1$.

Предложение 6.15. При $0 < s < 1$ действие $T_s(q)$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в $\widehat{H}_s$ эргодично.

Доказательство. Скалярное произведение (6.14) в этом случае $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантно (предложение 6.1), поэтому достаточно показать, что в $L^2(\widehat{H}_s)$ есть единственная $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантная функция. Но это уже показано нами в доказательстве теоремы 6.8. ■

б) $s = 0$.

В этом случае $H_s = H_0 = L^2(\mathrm{S}^1)$, операторы $T_s(\cdot)$ унитарны и поэтому сохраняют меру в $\widehat{L^2(\mathrm{S}^1)}$. Представление группы Diff в $L^2\left(\widehat{L^2(\mathrm{S}^1)}\right)$ есть сумма симметричных степеней представления T_0.

в) $-1 < s < 0$.

Здесь все аналогично случаю $0 < s < 1$.

г) $s = -1$.

Эта точка во многих отношениях является особой. Группа Diff действует в H_{-1} преобразованиями

$$T(q)f(\varphi) = f(q(\varphi)), \tag{6.18}$$

оставляющими на месте подпространство констант. Поэтому естественно рассматривать операторы $T(q)$ как операторы в факторпространстве $H_{-1} / \mathbb{R}$ пространства H_{-1} по подпространству констант.

Скалярное произведение в $H_{-1} / \mathbb{R}$ задается формулой (6.14'). Легко проверить, что оно $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантно. Поэтому те же доводы, что и выше, показывают, что действие $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в $L^2\left(\widehat{H_{-1} / \mathbb{R}}\right)$ эргодично.

Как мы уже отмечали выше в п. 6.7.B, в пространстве $H_{-1} / \mathbb{R}$ есть Diff-инвариантная кососимметричная билинейная форма

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) g'(\varphi)\, d\varphi. \tag{6.19}$$

Поэтому операторы $T(q)$ лежат не только в группе $\left(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)$, которую в нашем случае удобно обозначить через $\left(\mathrm{GL}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(2\infty)\right)$, но и в ее подгруппе $\left(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(2\infty)\right)$. Ограничение представления Вейля группы $\left(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(2\infty)\right)$ на Diff дает представление Diff со старшим весом, и эта конструкция равносильна конструкции из § VIII.2. Связь представления группы Diff в $L^2\left(\widehat{H_{-1} / \mathbb{R}}\right)$ с представлениями со старшим весом мы обсудим в следующем пункте.

Другое любопытное явление, связанное с $s = -1$, — это то, что линейное действие (6.18) может быть включено в двупараметрическое семейство действий Diff на $H_{-1} / \mathbb{R}$ аффинными преобразованиями

$$T^{(\alpha,\beta)}(q) f(\varphi) = f(q(\varphi)) + \alpha(q(\varphi) - \varphi) + \beta \cdot \ln q'(\varphi),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Соображения из п. VI.1.9.B обеспечивают квазиинвариантность меры в $\widehat{H_{-1} / \mathbb{R}}$ относительно преобразований $T^{(\alpha,\beta)}(q)$.

Последнее любопытное явление, связанное с точкой $s = -1$, — это то, что в ней происходит радикальная перестройка пространства H_s и действия группы Diff в нем.

д) $-1 > s > -3$.

В силу теоремы 6.14 пространство H_s в этом случае состоит из непрерывных функций. Таким образом, группа Diff действует на пространстве непрерывных функций, снабженном мерой μ_s, преобразованиями

$$T(q) f(\varphi) = f\left(q(\varphi)\right) q'(\varphi)^{(1+s)/2},$$

оставляющими меру μ_s квазиинвариантной.

Сразу бросаются в глаза 3 инвариантных множества:

Ω_+ — множество положительных функций;

Ω_- — множество отрицательных функций;

Ω_0 — множество функций, обращающихся в 0.

Далее, рассмотрим на Ω_+ функционал

$$I_s(f) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)^{2/(1+s)}\, d\varphi. \tag{6.20}$$

Легко видеть, что

$$I_s\left(T(q) f\right) = I_s(f).$$

Итак, поверхности уровня функционала $I_s(f)$, т. е. поверхности $I_s(f) = \mathrm{const}$, являются Diff-инвариантными.

При желании можно отождествить «поверхность» $I_s(f) = \alpha$ с однородным пространством $\mathrm{Diff}_1 / \mathbb{T}$, где Diff_1 — группа диффеоморфизмов гладкости C^1, а $\mathbb{T}$ — группа вращений окружности. А именно, каждому диффеоморфизму $q \in \mathrm{Diff}_1$ ставится в соответствие функция

$$f(\varphi) = \left(\alpha q'(\varphi)\right)^{(1+s)/2}.$$

Обратное отображение задается формулой

$$q(\varphi) = \alpha \int_0^{\varphi} f(\psi)^{2/(1+s)} d\psi.$$

Обсудим теперь множество Ω_0. Известно, что если функция $f \in \widehat{H}_s$ обращается в 0 хотя бы в одной точке, то с вероятностью 1 множество ее нулей есть замкнутое нигде не плотное множество меры 0 без изолированных точек (см. [Kahane (1965)]). Мы будем называть такие множества *канторовскими*.

Рассмотрим теперь пространство $\mathscr{S}$ всех канторовских подмножеств окружности. Введем на нем меру ν по следующему правилу. Пусть $A \in \mathscr{S}$. Пусть $X(A)$ — множество всех функций $f(\varphi)$ таких, что множество нулей функции f есть множество A. Положим, что A измеримо, если $X(A)$ измеримо; мера $\nu(A)$, по определению, равна $\mu_t(X(A))$.

Теперь заметим, что группа Diff действует на пространстве $\mathscr{S}$.

Предложение 6.16. Мера ν на пространстве $\mathscr{S}$ всех канторовских подмножеств отрезка Diff-квазиинвариантна.

Доказательство. Пусть $q \in \mathrm{Diff}$. Пусть $\nu(A) \neq 0$. Тогда $\mu_t(X(A)) \neq 0$. Но тогда мера $\mu_t\left(g(X(A))\right)$ в силу квазиинвариантности меры μ_t тоже отлична от 0. Но $\mu_t\left(g(X(A))\right) = \mu_t(X(gA)) = \nu(gA)$. Итак, $\nu(gA) \neq 0$ и, следовательно, g переводит множества меры 0 в множества меры 0. ■

Хотя идея построения мер на пространстве канторовских множеств на первый взгляд кажется пугающей, обсуждаемая конструкция, по-видимому, является ручной. Случай броуновского движения подробно рассматривался в замечательной книге [Levy (1965)], §§44–49; в этом случае известно много явных формул. Выражение для производной Радона—Никодима и продолжение обсуждаемого сюжета см. [Неретин (1996)].

е) $s = -3$.

Это значение параметра, без сомнения, является выделенным и, по-видимому, очень интересным, однако о свойствах действия Diff в этом случае автору почти ничего не известно.

ж) $s < -3$.

Как мы уже отмечали выше, в этом случае пространство $\widehat{H}_s$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому мы по-прежнему можем рассматривать множества Ω_+, Ω_-, Ω_0 (состоящие соответственно из положительных, отрицательных функций и функций, обращающихся в 0). На Ω_+ той же формулой (6.20) определен инвариантный функционал $I_s(f)$. Его линии уровня по-прежнему отождествляются с пространством $\mathrm{Diff}_1/\mathbb{T}$.

Несложно показать, что «общая» функция из H_s имеет конечное множество нулей, а производные в нулях отличны от 0. По этой причине конструкция с Ω_0, которую мы рассматривали при $-1 > s > -3$, становится неинтересной. Однако у функций из Ω_0 появляются дополнительные инварианты. А именно, пусть $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2k}$ — нули функции f. Тогда набор чисел

$$\beta_j(f) = \int\limits_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} |f(\varphi)|^{\frac{2}{s+1}}\, d\varphi$$

является инвариантом функции f, т. е. набор чисел $\{\beta_j(T_s(q)f)\}$ совпадает (с точностью до циклической перестановки) с набором $\beta_j(f)$.

6.9. Задача о слабом замыкании.

A. Представления со старшим весом. Рассмотрим унитарное представление $L(h,c)$ группы Diff со старшим весом (h,c). Продолжим это представление до голоморфного представления полугруппы $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \mathrm{Diff}$ (см. § VII.4). В п. VII.4.8 на полугруппе $\overline{\Gamma}$ была введена топология. *Допустим*, что представления $L(h,c)$ непрерывны относительно этой топологии. Но группа Diff плотна в $\overline{\Gamma}$, и отсюда вытекало бы следующее утверждение.

Гипотеза 6.17. Пусть Ξ — слабое замыкание группы Diff в пространстве операторов в пространстве $L(h,c)$, определенных с точностью до множителя. Тогда полугруппа Ξ содержит полугруппу Γ.

Следствие из гипотезы. Пусть $L(h_1,c_1)$ и $L(h_2,c_2)$ — унитарные представления Diff. Пусть $L(h_2,c_2)^*$ — представление, контраградиентное к $L(h_2,c_2)$. Тогда представление

$$L(h_1,c_1)\otimes L(h_2,c_2)^*$$

группы Diff неприводимо.

Вывод следствия. Так как полугруппа Γ содержится в слабом замыкании Diff, нам достаточно показать, что представление $L(h_1,c_1)\otimes L(h_2,c_2)^*$ является неприводимым представлением полугруппы Γ.

Задача. Пусть v — вектор старшего веса в $L(h_1,c_1)$, а w — вектор младшего веса в $L(h_2,c_2)$. Докажите, что вектор $v\otimes w$ является Vir-циклическим вектором в $L(h_1,c_1)\otimes L(h_2,c_2)^*$.

Указание. Примените к вектору $v\otimes w$ сначала всевозможные произведения генераторов $L_1, L_2, \dots \in \mathrm{Vir}$. Затем примените всевозможные произведения генераторов $L_{-1}, L_{-2}, \dots \in \mathrm{Vir}$.

Рассмотрим в Γ однопараметрическую подполугруппу D, состоящую из элементов $\mathscr{A}_t$, определенных в п. VII.4.5. Собственные числа оператора $\mathscr{A}_t = \exp(itL_0)$ в $L(h,c)$ суть $\exp(-(h+j)t)$, где $j = 0,1,2,\dots$, причем собственное число $\exp(-ht)$ встречается однократно и отвечает вектору старшего веса. Поэтому спектр оператора $\mathscr{A}_t$ в $L(h_1,c_1)\otimes L(h_2,c_2)^*$ состоит из чисел $\exp(-(h_1+h_2+j)t)$, причем собственное число $\exp(-(h_1+h_2)t)$ встречается однократно и соответствует (циклическому!) вектору $v\otimes w$. Ссылка на лемму 5.5 Предварительных сведений завершает вывод следствия. ■

Предложение 6.18. Пусть $L(0,c_1)$ и $L(0,c_2)$ — унитарные представления Diff. Тогда представление

$$L(0,c_1)\otimes L(0,c_2)^*$$

группы Diff неприводимо.

Доказательство Легко убедиться в том, что представление $L(0,c_1)$ содержит ровно один $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантный вектор, а именно, вектор старшего веса. В силу леммы 6.9 представление $L(0,c_1)\otimes L(0,c_2)$ содержит ровно один $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантный вектор, а именно, $v\otimes w$. Но, как мы видели, этот вектор — циклический, и мы можем сослаться на лемму 5.5 Предварительных сведений. ■

B. Представление Diff в $L^2\big(\widehat{H_{-1}/\mathbb{R}}\big)$. Рассмотрим группу $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$, которую нам будет удобнее обозначать как $\big(\mathrm{GL}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(2\infty)\big)$, и ее представление в $L^2(\mathbb{R}^\infty)\simeq L^2(\mathbb{R}^{2\infty})$, заданное формулой

$$Q(g)f(x) = f(gx)\left(\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}\right)^{1/2}.$$

Как мы уже отмечали (п. 1.8), это представление эквивалентно фундаментальному представлению T_0 (см. пп. 1.3–1.4).

Рассмотрим тождественное вложение

$$I : \big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)\to\big(\mathrm{GL}(2\infty),\mathrm{O}(2\infty)\big).$$

Предложение 6.19. Ограничение представления T_0 на $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ эквивалентно

$$T_0\circ I = \mathrm{we}\otimes\mathrm{we}^*.$$

Доказательство. Напомним, что $T_0 = \mathrm{we}\circ\tau_0$ (см. пп. 1.2–1.3), поэтому $T_0 = \mathrm{we}\circ(\tau_0\circ I)$. Но композиция $\tau\circ I$ на уровне матриц задается формулой

$$\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\Phi & & \Psi & \\ & \overline{\Phi} & & \overline{\Psi}\\ \overline{\Psi} & & \overline{\Phi} & \\ & \Psi & & \Phi\end{pmatrix},$$

и теперь утверждение очевидно (см. п. 1.8). ■

Отсюда следует (см. п. VII.2.3), что представление $Q(T(q))$ группы Diff в $L^2\big(\widehat{H_{-1}/\mathbb{R}}\big)$ эквивалентно

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty} L(j^2,1)\right)\otimes\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} L(k^2,1)\right).$$

Поэтому, если верна гипотеза 6.17, то слабое замыкание группы Diff в пространстве операторов в $L^2\big(\widehat{H_{-1}/\mathbb{R}}\big)$ содержит полугруппу Γ.

C. Представления в $L^2(\widehat{H}_s)$. Следующий вопрос, на мой (субъективный) взгляд, является одной из наиболее любопытных нерешенных задач в теории представлений бесконечномерных групп.

Проблема 6.20. Описать слабое замыкание группы Diff в пространстве операторов в $L^2(\widehat{H_s})$.

Предшествующие замечания заставляют думать, что это замыкание имеет что-то общее с полугруппой Г.

6.10. Литературные замечания. Конструкция п. 6.1 обнаружена в [Неретин (1982)], индефинитная дополнительная серия — в [Неретин (1983.1)], остальные почти инвариантные структуры — в [Неретин (1983.2)], [Неретин (1987б)].

Первая попытка построения Diff-квазиинвариантных мер на множестве замкнутых подмножеств окружности сделана в [Исмагилов (1971)], там построены примеры мер на пространстве сходящихся последовательностей. Шавгулидзе [Шавгулидзе (1978)], [Шавгулидзе (1988)] построил два примера Diff-квазиинвариантных мер на группе диффеоморфизмов гладкости C^2. В п. 6.8 мы следуем [Неретин (1993)].

§ 7. *Конструкции представлений групп петель*

7.1. Группы петель. Пусть G — группа Ли. Через $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ мы обозначим группу C^∞-гладких функций $S^1 \to \mathrm{G}$; эти группы обычно называются *группами петель.*

Заметим, что группа Diff действует на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ автоморфизмами

$$q : g(\varphi) \to g\big(q(\varphi)\big),$$

где $q \in \mathrm{Diff}$, $g \in \mathbb{L}(\mathrm{G})$. Поэтому можно рассмотреть полупрямое произведение $\mathbb{D}(\mathrm{G}) = \mathrm{Diff} \ltimes \mathbb{L}(\mathrm{G})$. Элементы $\mathbb{D}(\mathrm{G})$ суть пары (q, g), где $q \in \mathrm{Diff}$, а $g \in \mathbb{L}(\mathrm{G})$, а умножение задается формулой

$$(q_1, g_1)(q_2, g_2) = \big(q_1 \circ q_2,\ g_1(q_2(\varphi))\, g_2(\varphi)\big).$$

Группа Diff является частным случаем групп $\mathbb{D}(\mathrm{G})$, а именно, она соответствует случаю, когда G состоит из одного элемента.

В теории представлений интересны случаи, когда G — компактная группа, а также когда G — комплексная редуктивная группа (понятно, что эти два случая тесно связаны между собой).

Конструкции представлений группы Diff, связанные с почти инвариантными структурами (§ 6), в основном переносятся на группы $\mathbb{D}(\mathrm{G})$, хотя в некоторых деталях случай групп $\mathbb{D}(\mathrm{G})$ отличен от Diff. Мы лишь приведем некоторые примеры.

7.2. Вложения $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\big)$ в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Пусть $0 < s < 1$. Введем в пространстве гладких $\mathbb{R}^n$-значных функций на окружности скалярное произведение

$$\langle F, G\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\big(F(\varphi), G(\psi)\big)\, d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}, \tag{7.1}$$

где (F, G) обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$:

$$(F, G) = \big((f_1, \ldots, f_n),\ (g_1, \ldots, g_n)\big) = \sum f_j\, g_j.$$

Обозначим через H_s^n пополнение пространства гладких функций по этому скалярному произведению. Пусть теперь Diff действует в H_s^n преобразованиями

$$T_s(q)F(\varphi) = q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}} F(q(\varphi)), \tag{7.2}$$

а $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ — преобразованиями

$$A(g)F(\varphi) \mapsto g(\varphi)F(\varphi), \tag{7.3}$$

где $q \in \mathrm{Diff}$, $g(\cdot) \in \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n)\big)$.

Таким образом, мы получили действие группы $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n)\big)$ в H_s^n.

Теорема 7.1. Преобразования (7.2), (7.3) содержатся в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s^n.

Итак, мы получили вложение группы $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n)\big)$ в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

7.3. Доказательство теоремы 7.1. Утверждение, касающееся операторов (7.2), является достаточно простым следствием теоремы 6.3. Новым для нас является лишь утверждение об операторах (7.3).

Итак, вычислим

$$\begin{aligned}\big\langle \big(A(g)^*A(g) - E\big)F_1, F_2\big\rangle_s &= \big\langle (A(g)F_1, A(g)F_2\big\rangle_s - \langle F_1, F_2\rangle_s = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1} \big(g(\varphi_1)F(\varphi_1), g(\varphi_2)F(\varphi_2)\big)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 - \\ &\quad - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1} \big(F(\varphi_1), F(\varphi_2)\big)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(R(\varphi_1,\varphi_2)F(\varphi_1), F(\varphi_2)\big)\, d\varphi_1\, d\varphi_2,\end{aligned}$$

где

$$R(\varphi_1,\varphi_2) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1} \big(g(\varphi_2)^t g(\varphi_1) - E\big).$$

Учитывая, что $A(\varphi) \in \mathrm{SO}(n)$, получаем

$$R(\varphi_1,\varphi_2) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1} g(\varphi_2)^{-1}\big(g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\big).$$

Таким образом, ядро $R(\varphi_1,\varphi_2)$ представимо в виде

$$R(\varphi_1,\varphi_2) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s} L(\varphi_1,\varphi_2),$$

где $L(\varphi_1,\varphi_2)$ — гладкая операторнозначная функция. Мы видим, что падение порядка особенности здесь меньше, чем в доказательстве теоремы 6.3. Однако мы можем применить лемму 6.4, что и завершает доказательство.

7.4. Вложение $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})\big)$ в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Рассмотрим пространство V гладких $\mathbb{C}^n$-значных функций $F = \big(f_1(\varphi), \ldots, f_n(\varphi)\big)$ на окружности, удовлетворяющих условию

$$F(\varphi + \pi) = -F(\varphi),$$

со скалярным произведением

$$\langle F^{(1)}, F^{(2)} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_j^{(1)}(\varphi)\overline{f_j^{(2)}}(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.4}$$

Рассмотрим в V подпространство V_+, состоящее из функций вида

$$F(\varphi) = \Big(\sum_{k\geqslant 0} c_k^{(1)} e^{i(2k+1)\varphi}, \dots, \sum_{k\geqslant 0} c_k^{(n)}\, e^{i(2k+1)\varphi}\Big),$$

а также подпространство V_-, состоящее из функций вида

$$F(\varphi) = \Big(\sum_{k<0} c_k^{(1)}\, e^{i(2k+1)\varphi}, \dots, \sum_{k<0} c_k^{(n)}\, e^{i(2k+1)\varphi}\Big).$$

Ясно, что $V = V_+ \oplus V_-$. Далее, оператор комплексного сопряжения $F \mapsto \overline{F}$ переставляет V_+ и V_-. Таким образом, V становится объектом категории $\overline{\mathbf{CD}}$.

Каноническая билинейная форма в V задается формулой

$$\Lambda\big(F^{(1)}, F^{(2)}\big) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_j^{(1)}(\varphi) f_j^{(2)}(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.5}$$

Рассмотрим теперь группу H, состоящую из функций $g : S^1 \to \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$g(\varphi + \pi) = g(\varphi).$$

Ясно, что группа H изоморфна группе $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$.

Рассмотрим, далее, группу $\mathrm{Diff}^{(2)}$ диффеоморфизмов q окружности, удовлетворяющих условию

$$g(\varphi + \pi) = g(\varphi) + \pi.$$

Ясно, что группа $\mathrm{Diff}^{(2)}$ есть двулистное накрытие над Diff. Наконец, рассмотрим полупрямое произведение $\mathrm{G} = \mathrm{Diff}^{(2)} \ltimes \mathrm{H}$, его элементами являются пары (q, g) такие, что $q \in \mathrm{Diff}^{(2)}$, $g \in \mathrm{H}$, а умножение задается формулой

$$(q_1, g_1)(q_2, g_2) = \big(q_1 \circ q_2,\ g_1(q_2(\varphi))g_2(\varphi)\big).$$

Определим теперь действие группы G в пространстве V. Пусть $\mathrm{Diff}^{(2)}$ действует операторами

$$T(q)F(\varphi) = q'(\varphi)^{1/2} F(q(\varphi)). \tag{7.6}$$

Группа H действует преобразованиями

$$A(g(\varphi))F(\varphi) = g(\varphi)F(\varphi). \tag{7.7}$$

Теорема 7.2. Мы получили вложение G в группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{CD}}}(V)$.

Доказательство. Очевидно, что как операторы (7.6), так и операторы (7.7) сохраняют билинейную форму (7.5). Очевидно также, что эти операторы ограничены относительно скалярного произведения (7.4).

Заметим, далее, что преобразование Гильберта

$$I \cdot F(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big) F(\psi)\, d\psi$$

действует в V_+ как умножение на i, а в V_- — как умножение на $-i$ (см. п. VII.2.1). Поэтому нам достаточно доказать, что $\big[T(q), I\big]$ и $\big[A\big(g(\varphi)\big), I\big]$ — операторы Гильберта—Шмидта. По поводу операторов $\big[T(q), I\big]$ см. п. VII.3.2. Вычислим

$$\big[A\big(g(\varphi)\big), I\big] F(\varphi) = g(\varphi) \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big) F(\psi)\, d\psi - \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big) g(\psi) F(\psi)\, d\psi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big)\big(g(\varphi) - g(\psi)\big) F(\psi)\, d\psi,$$

и мы получаем оператор с гладким ядром. Теорема доказана. ■

Ограничивая спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{CD}}}(V)$ на G, мы получаем (проективное) представление группы G, которое мы обозначим через ρ.

Рассмотрим, далее, в G подгруппу $\mathrm{Diff}^{(2)} \ltimes \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$. В этом случае операторы (7.7) будут унитарны в скалярном произведении (7.4), а поэтому образ группы G содержится в $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{CD}}}(V)$. Поэтому ограничение представления ρ на $\mathrm{Diff}^{(2)} \ltimes \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$ унитарно.

7.5. Старший вес. Обсудим, как устроено ограничение нашего представления ρ на группу $\mathrm{H} \simeq \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$. Рассмотрим в $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$ подгруппу $\widetilde{\mathbb{L}}_+$, состоящую из функций $S^1 \to \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, голоморфно продолжимых в диск $|z| \geqslant 1$ (напомним, что окружность S^1 мы отождествляем с кривой $|z| = 1$ на $\mathbb{C}$).

Теорема 7.3. Вакуумный вектор (т. е. функция $f(\xi) = 1$) является собственным вектором для всех операторов $\rho(g(\varphi))$, где $g(\varphi) \in \widetilde{\mathbb{L}}_+$.

Доказательство. Пусть $g(\varphi) \in \widetilde{\mathbb{L}}_+$. Тогда оператор $A(\varphi)$ как оператор из $V = V_+ \oplus V_-$ в $V = V_+ \oplus V_-$ имеет блочное строение вида $\begin{pmatrix} Y & C \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix}$. Преобразование Потапова этой матрицы равно

$$\begin{pmatrix} 0 & Y^t \\ Y & -YC \end{pmatrix},$$

поэтому оператор $\rho(g(\varphi))$ имеет ядро

$$\lambda \exp\Big\{\tfrac{1}{2}(\xi\ \ \bar\eta) \begin{pmatrix} 0 & -Y^t \\ Y & -YC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar\eta^t \end{pmatrix}\Big\},$$

и тем самым

$$\rho(g(\varphi)) \cdot 1 = \lambda \cdot 1.$$

Теорема доказана. ■

На самом деле, в качестве повышающей (борелевской) подгруппы естественно рассматривать подгруппу чуть меньшую, чем $\mathbb{L}_+$.

Пусть G — комплексная простая группа Ли. Фиксируем в G какую-нибудь повышающую (борелевскую) подгруппу B_+. Обозначим через $\mathbb{L}_+$ группу функций $f : S^1 \to G$, голоморфно продолжимых в диск $|z| \geqslant 1$, таких, что $f(\infty) \in B_+$. Неприводимое представление группы G, имеющее $\mathbb{L}_+$-неподвижный вектор, называется представлением *со старшим весом*.

Теории представлений групп петель со старшим весом посвящена огромная литература, см. например книги [Kac (1983)], [Pressley, Segal (1986)] и статьи [Segal G. B. (1981)], [Lepowsky, Wilson (1978)], [Frenkel (1981)], [Frenkel, Kac (1981)].

7.6. Замечания. Индефинитная дополнительная серия. Так же, как и для группы Diff (см. пп. 6.7–6.8), конструкция п. 7.2 имеет смысл при всех $s \in \mathbb{R}$. А именно, рассмотрим в пространстве $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^n)$ гладких функций $S^1 \to \mathbb{R}^n$ скалярное произведение

$$Q_s\left(\left(\sum_k c_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \dots, \sum_k c_k^{(n)} e^{ik\varphi}\right), \left(\sum_k b_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \dots, \sum_k b_k^{(n)} e^{ik\varphi}\right)\right) = \\ = \sum_{j=1}^n c_0^{(j)} \overline{b_0^{(j)}} + \sum_{k \neq 0} |k|^s \left(\sum_{j=1}^n c_k^{(j)} \overline{b_k^{(j)}}\right)$$

для любого $s \in \mathbb{R}$. Обозначим через H_s^n пополнение $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^n)$ по норме, задаваемой этим скалярным произведением. Скалярное произведение $Q_s(\cdot\,,\cdot)$ при $0 < s < 1$ отлично от скалярного произведения $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_s$, задаваемого формулой (7.1). Однако легко проверить (нужно найти асимптотику чисел c_n, задаваемых формулой (6.3), см. (6.4)), что существует оператор Гильберта—Шмидта T и константа C (зависящие лишь от s) такие, что

$$Q_s(F_1, F_2) = C\big\langle (1+T)F_1, F_2 \big\rangle_s.$$

По этой причине группы $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s^n относительно скалярных произведений $Q_s(\cdot\,,\cdot)$ и $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_s$ одинаковы.

Теорема 7.4. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Рассмотрим представление группы $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$ в H_s^n, задаваемое формулами (7.2), (7.3). Тогда операторы представления лежат в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s^n.

7.7. Замечания. Конструкции с мерой Винера. Пусть M — многообразие с римановой метрикой. Тогда на пространстве $C(S^1, M)$ непрерывных функций $S^1 \to M$ определена мера Винера.

Пусть теперь K — компактная группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа. На пространстве K / H существует единственная с точностью до пропорциональности риманова метрика. Рассмотрим пространство $C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})$. Группа $\mathbb{L}(\mathrm{K})$ действует на $C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})$ очевидным образом:

$$g(\varphi) : l(\varphi) \mapsto g(\varphi) l(\varphi),$$

где $l(\varphi) \in C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})$. Известно (см., например, [Malliavin M. P., Malliavin P. (1990)]), что мера Винера квазиинвариантна относительно этого действия. Поэтому мы автоматически получаем унитарное представление $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ в пространстве $L^2\big(C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})\big)$.

На самом деле, здесь можно получить не одно представление, а много, так как наличие квазиинвариантной меры позволяет строить индуцированные представления (см., например, [Albeverio, Testard, Høegh-Krohn, Vershik (1983)]).

О конструкциях такого рода известно очень немного. Известно, в частности, что представление группы $\mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)\big) = \mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2)\big) \times \mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2)\big)$ в $L^2\big(C(S^1, \mathrm{SU}(2))\big)$ неприводимо. С другой стороны, ограничение этого представления на один из сомножителей (т. е. на группу $\mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2)\big)$) приводимо и является факторпредставлением типа III (см. только что цитированную статью).

Замечание. В конструкциях этого типа нужна не сама мера Винера, а просто квазиинвариантная мера на пространстве путей. Таких мер существует довольно много, см. [Неретин (1993)].

7.8. Замечания. Конструкция с коциклом Картана—Маурера. Пусть G — компактная группа Ли (мы будем считать, что G реализована как группа вещественных матриц). Пусть $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли (которая, тем самым, тоже реализована как алгебра матриц). Рассмотрим гильбертово пространство V вещественных функций $S^1 \to \mathfrak{g}$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = -\int_0^{2\pi} \mathrm{tr}\big(f_1(\varphi) f_2(\varphi)\big)\, d\varphi.$$

Пусть группа $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ действует в V преобразованиями

$$f(\varphi) \mapsto g(\varphi)^{-1} f(\varphi) g(\varphi).$$

Понятно, что эти преобразования унитарны, однако ничего интересного мы пока не получили. Определим теперь так называемый *коцикл Картана—Маурера* $\gamma(g(\varphi))$ на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$. А именно, пусть $g(\varphi) \in \mathbb{L}(\mathrm{G})$. Тогда

$$\gamma(g(\varphi)) = g(\varphi)^{-1} g'(\varphi).$$

Рассмотрим, далее, для любого $g(\varphi) \in \mathbb{L}(\mathrm{G})$ следующее аффинное преобразование пространства V:

$$Q(g(\varphi)) f(\varphi) = g^{-1}(\varphi) f(\varphi) g(\varphi) + g^{-1}(\varphi) g'(\varphi).$$

Простое вычисление показывает, что

$$Q(g_1 g_2) = Q(g_1) Q(g_2).$$

Таким образом, мы получили вложение группы $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ в группу $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V)$ (см. п. VI.1.8). Ограничивая представление Exp группы $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V)$ на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, мы получаем унитарное (линейное) представление R группы $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ в бозонном пространстве Фока.

Обозначим теперь вакуумный вектор через v. Обозначим $\mathbb{L}(\mathrm{G})$-циклическую оболочку вектора v через Y. Рассмотрим отображение I из Y в пространство функций на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, задаваемое формулой

$$Iw(g) = \big\langle w, R(g)v \big\rangle.$$

Таким образом, пространство Фока отображается в некоторое пространство Z функций на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$. Оказывается, что Z отождествляется с L^2 на $C(S^1, \mathrm{G})$ по мере Винера, а группа $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ действует в $L^2\big(C(S^1, \mathrm{G})\big)$ левыми сдвигами, см. [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard (1981)].

7.9. Литературные замечания. Конструкция п. 7.2 получена в [Неретин (1988)]. Конструкция п. 7.3 на уровне алгебры Ли получена в [Frenkel (1988)], на уровне группы $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$ — в [Исмагилов (1983)], на уровне $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$ — в [Неретин (1986)]. В п. 7.6 мы следуем [Неретин (1993)].

Конструкция с коциклом Картана—Маурера применима не только для групп петель $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, но и для групп G-значных функций на произвольном компактном многообразии; многомерный случай, однако, совсем не похож на одномерный. По поводу пп. 7.7–7.8 см. [Исмагилов (1976)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1978)], [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard (1978)], [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard (1981)], [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard, Vershik (1983)], [Frenkel (1984)].

Об аналоге категории **Shtan** для групп петель см. [Неретин (1989.2)].

Продолжение сюжета п. 7.6 см. [Неретин (1997)].

Глава X

Некоторые алгебраические конструкции теории меры

§ 1. Мультипликативный интеграл Араки

1.1. Группа $\mathrm{Isom}(H)$. Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Напомним (см. п. VI.1.8), что через $\mathrm{Isom}(H)$ мы обозначили группу *аффинных изометрий* H, т. е. преобразований H вида

$$(T,\gamma): h \mapsto Th + \gamma,$$

где T — унитарный оператор, а $\gamma \in H$. Напомним, что группа $\mathrm{Isom}(H)$ действует в бозонном пространстве Фока $F(H)$ унитарными операторами

$$\mathrm{Exp}(T,\gamma)f(z) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\gamma,\gamma)\right\}\exp\left\{-(z,T^{-1}\gamma)\right\}f(Tz+\gamma), \tag{1.1}$$

при этом

$$\mathrm{Exp}(T,\gamma)\,\mathrm{Exp}(T',\gamma') = \exp\left\{-i\,\mathrm{Im}\left\langle\gamma,(T')^{-1}\gamma'\right\rangle\right\}\mathrm{Exp}(T'',\gamma''), \tag{1.2}$$

где (T'',γ'') — произведение афинных преобразований (T,γ) и (T',γ'). Таким образом, мы получаем проективное представление группы $\mathrm{Isom}(H)$.

Пусть K — вещественное гильбертово пространство. Пусть $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(K)$ — группа аффинных изометрий K. Тогда $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(K)$ действует в пространстве Фока $F(K_{\mathbb{C}})$ по формуле (1.1). При этом в силу (1.2) полученное действие линейно.

Пусть G — группа. Если нам удастся построить действие группы G аффинными преобразованиями гильбертова пространства H, то мы автоматически получаем унитарное представление G в $F(H)$. Это одна из самых старых идей в теории представлений бесконечномерных групп (см. [Araki (1968)]).

1.2. Аффинные действия групп. Пусть группа G действует на гильбертовом пространстве H аффинными преобразованиями

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g), \tag{1.3}$$

где $T(g)$ — унитарный оператор, а $\gamma(g) \in H$.

Равенство

$$S(g_1g_2)h = S(g_1)S(g_2)h$$

влечет

$$T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2),$$

т. е. $T(g)$ должно быть линейным унитарным представлением группы G. Далее, легко видеть, что $\gamma(g)$ удовлетворяет тождеству

$$\gamma(g_1g_2) = T(g_1)\gamma(g_2) + \gamma(g_1). \tag{1.4}$$

Учитывая, что $\gamma(e) = 0$, мы получаем

$$\gamma(g^{-1}) = -T(g^{-1})\gamma(g). \tag{1.5}$$

Первый вопрос, который тут возникает, следующий: пусть T — унитарное представление G в пространстве H; существует ли функция $\gamma(g): \mathrm{G} \to H$ такая, что (1.3) — аффинное действие, т. е. функция, удовлетворяющая условиям (1.4), (1.5)?

Задача. Пусть $v \in H$. Покажите, что функция

$$\gamma(g) = T(g)v - v \tag{1.6}$$

удовлетворяет условиям (1.4), (1.5).

Однако аффинное действие, соответствующее функции γ, задаваемой формулой (1.6), неинтересно: оно становится линейным после сдвига начала координат в точку v. Поэтому правильная постановка вопроса следующая: существует ли для данного унитарного представления T группы G функция $\gamma(g)$, удовлетворяющая (1.4)–(1.5) и не представимая в виде (1.6)? Ответ на этот вопрос редко оказывается положительным (см. ниже п. 1.6).

Замечание. Переведем наш вопрос на язык когомологий групп (см. [Guichardet (1980)], мы этим языком пользоваться не будем). Уравнение (1.5) означает, что функция $\gamma(\cdot)$ есть элемент группы $Z^1(\mathrm{G},H)$ одномерных коциклов на G со значениями в пространстве H. Коциклы вида (1.6) суть одномерные кограницы. Поэтому наш вопрос принимает следующий вид: для каких представлений H группы G группа $\mathscr{H}^1(\mathrm{G},H)$ первых когомологий G со значениями в H нетривиальна?

1.3. Как строить аффинные действия групп? Все конструкции здесь устроены по следующей схеме. Пусть группа G действует (не унитарно!) в пространстве V. Допустим, что существует инвариантное подпространство в V_0 коразмерности 1, причем представление G в V/V_0 тривиально, а V_0 не имеет G-инвариантного дополнения в V. Рассмотрим вектор $v \in V$, не содержащийся в V_0. Тогда формула

$$S(g)h = T(g)h + \big(T(g)v - v\big).$$

задает аффинное действие группы G в подпространстве (!) V_0.

Задача. Проверьте, что $T(g)v - v \in V_0$.

Задача. Пусть (1.3) — аффинное (не обязательно изометричное) действие группы G в пространстве H. Тогда формула

$$\tilde{T}(g) = \begin{pmatrix} T(g) & \gamma(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6a}$$

задает линейное действие G в $H \oplus \mathbb{C}$.

Сейчас мы приведем пример аффинного действия, который в дальнейшем все время будем иметь в виду.

1.4. Пример: аффинное действие группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$**.** Пусть группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ действует на окружности $z=e^{i\varphi}$ мебиусовскими преобразованиями

$$z\mapsto(\alpha z+\beta)(\bar\beta z+\bar\alpha)^{-1},$$

где $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$. Рассмотрим следующее линейное действие $T(q)$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в пространстве функций на окружности

$$T(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi),$$

где q — мебиусовское преобразование.

Пусть H — пространство функций с нулевым средним на окружности, т. е. пространство функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi=0.$$

Легко видеть, что пространство H является $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантным. Поэтому мы можем применить конструкцию предыдущего пункта.

Выберем $t\in\mathbb{R}$. Группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ действует в H аффинными преобразованиями вида

$$S_t(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)+t\big(q'(\varphi)-1\big).$$

В дальнейшем нам будет удобнее работать с координатой $z=e^{i\varphi}$, а не с координатой φ. Действие $T(q)$ в этом случае записывается в виде:

$$T\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\bar\beta&\bar\alpha\end{pmatrix}f(z)=f\Big(\frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\Big)\big|\bar\beta z+\bar\alpha\big|^{-2},\tag{1.7}$$

а действие $S_t(q)$ — в виде

$$S_t(q)f(z)=T(q)f(z)+t\Big(\big|\bar\beta z+\bar\alpha\big|^{-2}-1\Big).$$

Отметим, что при $|z|=1$ выполнено

$$\begin{aligned}\big|\bar\beta z+\bar\alpha\big|^{-2}&=\big(\bar\beta z+\bar\alpha\big)^{-1}\big(\beta\bar z+\alpha\big)^{-1}=\\&=\big(\bar\beta z+\bar\alpha\big)^{-1}\big(\beta z^{-1}+\alpha\big)^{-1}=\\&=\frac{z}{\big(\bar\beta z+\bar\alpha\big)\big(\beta+\alpha z\big)}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Рассмотрим в H уже знакомое нам (по § VI1.2) скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\ln\Big|\sin\Big(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\Big)\Big|\,f(\varphi_1)\overline{g(\varphi_2)}\,d\varphi_1\,d\varphi_2,$$

или, что равносильно

$$\big\langle e^{in\varphi},e^{im\varphi}\big\rangle=\frac{1}{|n|}\,\delta_{n,m}.$$

Задача. Покажите, что операторы $T(q)$, где $q\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ унитарны в этом скалярном произведении.

Итак, мы получили действие группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ изометрическими аффинными преобразованиями на H. Заметим, что $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ при этом сохраняет (вещественное) подпространство $H_{\mathbb{R}}\subset H$, состоящее из вещественнозначных функций. Поэтому $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ вкладывается в группу $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(H_{\mathbb{R}})$.

Сейчас мы построим еще два аффинных действия $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, отличие которых от только что рассмотренного исчезающе мало.

Обозначим через H_+ (соответственно H_-) подпространство в H, состоящее из функций вида $\sum\limits_{k>0}c_kz^k$ (соответственно $\sum\limits_{k<0}c_kz^k$).

Лемма 1.1. Пространства $H_\pm$ являются инвариантными относительно унитарных операторов $T(q)$, где $q\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть, например, $k>0$. Оператор $T\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\bar\beta&\bar\alpha\end{pmatrix}$ переводит z^k в функцию

$$\psi_k(z)=\Big(\frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\Big)^k\frac{z}{\big(\alpha z+\beta\big)\big(\bar\beta z+\bar\alpha\big)}=\frac{(\alpha z+\beta)^{k-1}}{\big(\bar\beta z+\bar\alpha\big)^{k+1}}\cdot z.$$

Легко видеть, что $\psi_k(z)$ голоморфно продолжается в круг $|z|\leqslant1$ и $\psi_k(0)=0$, т. е. $\psi_k(z)\in H_+$. ■

Как мы видели, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ действует в H преобразованиями

$$S_t(g)f=T(g)f+t\gamma(g),$$

где $g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\bar\beta&\bar\alpha\end{pmatrix}$, унитарные операторы T задаются формулой (1.7), а

$$\gamma(g)=\frac{z}{\big(\bar\beta z+\bar\alpha\big)\big(\beta+\alpha z\big)}-1.$$

Представим $\gamma(g)$ в виде

$$\gamma(g)=\gamma^+(g)+\gamma^-(g),$$

где

$$\gamma^+(g)=\frac{-\bar\beta z}{\bar\beta z+\bar\alpha}\in H_+,$$

$$\gamma^-(g)=\frac{-\beta}{\alpha z+\beta}\in H_-.$$

Таким образом, мы получаем аффинные действия

$$S_t^\pm(g)f=T(g)f+t\gamma^\pm(g)$$

группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в H_+ и H_-.

Задача. Покажите, что действие $S_t^\pm$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в овеществленном пространстве $H_\pm$ эквивалентно действию S_t в $H_\mathbb{R}$.

1.5. Мультипликативный интеграл Араки. Пусть G — группа Ли. Пусть M — пространство с непрерывной вероятностной мерой μ. Назовем измеримую функцию $g : M \to \mathrm{G}$ ограниченной, если существует компакт $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ такой, что $\mu\big(g^{-1}(\mathrm{K})\big) = 1$. Обозначим через $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ группу всех измеримых ограниченных функций $M \to \mathrm{G}$.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть группа G действует на H аффинными изометриями

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g). \tag{1.9}$$

Обозначим через $L^2(M, H)$ пространство L^2 измеримых функций $M \to H$. Тогда группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ действует в $L^2(M, H)$ аффинными преобразованиями

$$S(g(m))f(m) = T(g(m))f(m) + \gamma(g(m)).$$

Тем самым, группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ вкладывается в группу $\mathrm{Isom}\big(L^2(M, H)\big)$. Ограничивая представление Exp группы $\mathrm{Isom}\big(L^2(M, H)\big)$ на подгруппу $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$, мы получаем унитарное проективное представление группы $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ в $F\big(L^2(M, H)\big)$. Это представление мы обозначим через Ar.

Если группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ действует преобразованиями (1.9) на *вещественном* гильбертовом пространстве H, то мы получаем *линейное* представление группы $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ в $F\big(L^2(M, H_\mathbb{C})\big)$.

Если же пространство H комплексно, формула (1.2) дает

$$\mathrm{Ar}\big(g_1(m)\big)\,\mathrm{Ar}\big(g_2(m)\big) = c(g_1, g_2)\,\mathrm{Ar}\big(g_1(m)g_2(m)\big),$$

где

$$c(g_1, g_2) = \exp\Big\{-i\,\mathrm{Im}\int_M \Big\langle \gamma\big(g_1(m)\big), T\big(g_2(m)\big)^{-1}\gamma\big(g_2(m)\big)\Big\rangle\, d\mu\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{i\,\mathrm{Im}\int_M \Big\langle \gamma\big(g_1(m)\big), \gamma\big(g_2(m)^{-1}\big)\Big\rangle\, d\mu\Big\}$$

(мы использовали формулу (1.5)).

Теорема 1.2. Пусть G — связная односвязная простая группа Ли. Тогда представление Ar линеаризуемо.

Доказательство. Рассмотрим представление

$$\rho(g) = \mathrm{Exp}\big(T(g), \gamma(g)\big)$$

группы G в пространстве Фока $F(H)$. В силу (1.2)

$$\rho(g)\rho(h) = \exp\Big(i\,\mathrm{Im}\big\langle\gamma(g), \gamma(h^{-1})\big\rangle\Big)\rho(gh).$$

Любое проективное представление односвязной полупростой группы Ли линеаризуемо (см. [Bargmann (1954)]), поэтому линеаризуемо и ρ. Таким образом, существует функция $\lambda(g)$ такая, что $|\lambda(g)| = 1$ и

$$\widetilde{\rho}(g) = \lambda(g)\rho(g)$$

является линейным представлением группы G. Поэтому

$$\lambda(g)\lambda(h) = \lambda(gh)\exp\Big(i\,\mathrm{Im}\big\langle\gamma(g), \gamma(h^{-1})\big\rangle\Big). \tag{1.10}$$

Далее, заметим, что функция $\lambda(g)$ непрерывна (так как операторнозначные функции $\rho(g)$ и $\widetilde{\rho}(g)$ непрерывны). Выберем какую-нибудь ветвь логарифма $\psi(g) = \ln\lambda(g)$ на G (группа G односвязна, поэтому функция $\psi(g)$ однозначна и определена с точностью до прибавления $2\pi i$). Тогда (1.10) переписывается в виде

$$\psi(g) + \psi(h) = \psi(gh) + i\,\mathrm{Im}\big\langle\gamma(g), \gamma(h^{-1})\big\rangle + 2\pi i n, \tag{1.11}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь g и h — функции на M. Проинтегрируем обе части равенства по M (напомним, что $\mu(M) = 1$) и потом возьмем экспоненту от обеих частей равенства. Получаем

$$\exp\Big(\int_M \psi(g(m))\,d\mu(m)\Big)\exp\Big(\int_M \psi(h(m))\,d\mu(m)\Big) =$$

$$= \exp\Big(\int_M \psi\big(g(m)h(m)\big)\,d\mu(m)\Big)\exp\Big(i\,\mathrm{Im}\int_M \Big\langle\gamma\big(g(m)\big), \gamma\big(h(m)^{-1}\big)\Big\rangle\,d\mu(m)\Big),$$

а это, в свою очередь, означает, что

$$\widetilde{\mathrm{Ar}}(g(m)) = \exp\Big(\int_M \psi(g(m))\,d\mu(m)\Big)\,\mathrm{Ar}(g(m))$$

— линейное представление группы $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$. ∎

Замечание. Обозначим представления группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\big)$, соответствующие действиям S, S_t^+, S_t^- из п. 1.4, через R, R^+, R^-. Итак, R является линейным представлением, а R^+ и R^- — проективными (они действительно не линеаризуемы при $t \notin \mathbb{Z}$). Однако действия $S_t^\pm$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ одновременно являются действиями универсальной накрывающей $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. В силу только что доказанной теоремы R^+ и R^- являются линейными представлениями группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim\big)$. Иными словами, представления $R^\pm$ группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\big)$ линеаризуются на «центральном расширении» $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim\big)$ группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\big)$.

Задача. Покажите, что $R = R_+ \otimes R_-$.

1.6. Замечания. К каким группам может быть применена конструкция Араки? Рассмотрим нетривиальное аффинное изометричное действие (1.3) группы G в пространстве H. Тогда в силу задачи из п. 1.3 мы видим, что существует (неунитарное) представление $\widetilde{T}(q)$ группы G в пространстве $H \oplus \mathbb{C}$, задаваемое формулой (1.6а), причем H не имеет $\widetilde{T}$-инвариантного дополнения в $H \oplus \mathbb{C}$. Иными словами, унитарное представление T может быть зацеплено с единичным представлением. В частности, в случае полупростой группы G представление T имеет тот же центральный характер, что и единичное представление.

С другой стороны, наличие у группы G нетривиальных аффинных изометрических действий влечет существование неограниченных условно положительных определенных функций на группе G (таковой является $\|\gamma(g)\|^2$). Вопрос о существовании неограниченных условно положительных определенных функций хорошо исследован, см., например, [Margulis (1991)], III.

Нетривиальные аффинные действия у простых групп Ли существуют лишь для серий групп $\mathrm{SO}(n,1)$ и $\mathrm{SU}(n,1)$ (см. [Каждан (1967)], [Guichardet (1980)], [Margulis (1991)], III.5.6).

Они использовались для построения мультипликативного интеграла в [Вершик, Гельфанд, Граев (1973)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1985)] и [Березин (1976)]; см. также [Guichardet (1973)], [Parthasarathy, Schmidt (1972)]. Для разрешимых групп Ли существование аффинных действий — дело обычное (в частности, Араки [Araki (1968)] рассматривал двумерную разрешимую группу аффинных преобразований прямой). Аффинные действия также имеют группа PSL(2) над p-адическим полем (оно связано с «особым» (special) представлением PSL(2), в терминологии книги [Гельфанд, Граев, Пятецкий-Шапиро (1966)]), группы автоморфизмов деревьев Брюа—Титса, «компактные» (G, K)-пары Ольшанского (см. п. IX.2.5 и IX.5.4). Аффинные изометричные действия есть также у некоторых дискретных групп. Такое действие может быть построено по любому действию группы G на дереве (конструкцию см. выше в п. VIII.6.8), а также по любому действию на $\mathbb{R}$-дереве (см. [Neretin (1997b)]).

Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}), \mathrm{SO}(1,n), \mathrm{SU}(1,n), \mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)$, а $\Gamma \subset \mathrm{G}$ — кокомпактная решетка (т. е. факторпространство G/Γ компактно). Следующее высказывание (см. [Neretin (1997b)]) является очень простым представителем так называемых «теорем жесткости»:

Предложение 1.3. Пусть S — аффинно неприводимое (т. е. не имеющее нетривиальных инвариантных аффинных подпространств) действие группы G. Тогда ограничение действия S группы G на подгруппу Γ аффинно неприводимо.

§ 2. *Фоковское представление полугруппы вероятностных мер на группе*

2.1. Полугруппа вероятностных мер на группе. Пусть G — группа Ли. Пусть μ, ν — конечные борелевские меры на G. *Сверткой* $\mu * \nu$ называется мера на G, определяемая из условия

$$\int_{\mathrm{G}} f(g)\, d(\mu*\nu)(g) = \int_{\mathrm{G}}\int_{\mathrm{G}} f(g_1 g_2)\, d\mu(g_1)\, d\nu(g_2)$$

для любой ограниченной измеримой функции f.

Определение свертки можно также переписать в виде

$$(\mu*\nu)(g) = \int_{\mathrm{G}} \mu(gh^{-1})\, d\nu(h),$$

где $\mu(gh^{-1})$ обозначает образ меры μ при преобразовании $R_h : g \mapsto gh^{-1}$.

Обозначим через $\mathscr{M}(\mathrm{G})$ пространство всех борелевских вероятностных мер на G. Ясно, что свертка $\mu*\nu$ вероятностных мер — снова вероятностная мера. Легко видеть, что свертка ассоциативна, поэтому $\mathscr{M}(\mathrm{G})$ с операцией свертки является полугруппой. Образ меры μ при отображении $g \mapsto g^{-1}$ мы обозначим через μ^*. Легко видеть, что

$$(\mu*\nu)^* = \nu^* * \mu^*.$$

Группа G канонически вкладывается в полугруппу $\mathscr{M}(\mathrm{G})$, а именно: каждому элементу G ставится в соответствие единичная мера, сосредоточенная в точке g.

Через $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ мы обозначим подполугруппу в $\mathscr{M}(\mathrm{G})$, состоящую из мер с компактным носителем.

Введем на $\mathscr{M}(\mathrm{G})$ *слабую сходимость*, положив, что $\mu_j \to \mu$, если для любой непрерывной функции на G с компактным носителем

$$\int_{\mathrm{G}} f(g)\, d\mu_j \to \int_{\mathrm{G}} f(g)\, d\mu. \qquad (2.1)$$

Сходимость на полугруппе $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ вводится из условия: μ_j сходится к μ, если (2.1) выполнено для любой непрерывной функции.

Задача. Покажите, что сходимость $\mu_j \to \mu$ в смысле $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ влечет существование компактного подмножества $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ такого, что $\mu_j(\mathrm{G}\setminus\mathrm{K}) = 0$ для всех j.

2.2. Простейшие представления. Пусть τ — унитарное представление группы G. Тогда оно канонически продолжается на полугруппу $\mathscr{M}(\mathrm{G})$ по формуле

$$\tau(\mu) = \int_{\mathrm{G}} T(g)\, d\mu(g).$$

Легко видеть, что $\tau(\mu)$ — $*$-представление, т. е. $\tau(\mu^*) = \tau(\mu)^*$.

Цель этого параграфа — показать, что полугруппа $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ имеет представления, которые не сводятся к только что построенным.

2.3. Фоковское представление полугруппы $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Пусть группа G действует в H аффинными изометриями:

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g).$$

Поставим в соответствие каждой мере $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ следующий оператор $L(\mu)$ в бозонном пространстве Фока $F(H)$:

$$L(\mu)f(u) = f(Au+b)\exp(u,c),$$

где

$$A = A(\mu) = \int_{\mathrm{G}} T(g)\, d\mu(g),$$

$$b = b(\mu) = \int_{\mathrm{G}} \gamma(g)\, d\mu(g),$$

$$c = c(\mu) = \int_{\mathrm{G}} \gamma(g^{-1})\, d\mu(g).$$

Теорема 2.1.

а) $$L(\mu)L(\nu) = \exp\bigl(b(\mu), c(\nu)\bigr) L(\mu*\nu). \qquad (2.2)$$

б) Пусть

$$\sigma(\mu) = \exp\Bigl\{-\tfrac{1}{2}\int \|\gamma(g)\|^2 d\mu\Bigr\}.$$

Тогда операторы

$$\widetilde{L}(\mu) = \sigma(\mu)L(\mu)$$

удовлетворяют равенству

$$\widetilde{L}(\mu)\widetilde{L}(\nu) = \exp\bigl(i\,\mathrm{Im}\langle b(\nu), c(\mu)\rangle\bigr)\widetilde{L}(\mu*\nu). \qquad (2.3)$$

в) $\|\widetilde{L}(\mu)\| \leqslant 1$.

Замечание. Функция $g \mapsto \|\gamma(g)\|$ не ограничена. Следовательно, для $\mu \in \mathscr{M}(\mathrm{G})$ векторы $b(\mu)$ и $c(\mu)$, вообще говоря, не определены. Поэтому условие $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ для нас существенно.

Доказательство.

а) Равенство (2.2) равносильно системе из трех равенств

$$A(\mu * \nu) = A(\mu)A(\nu), \quad b(\mu * \nu) = A(\mu)b(\nu) + b(\mu), \quad c(\mu * \nu) = c(\nu) + A^*(\nu)c(\mu),$$

которые проверяются без всякого труда.

б) тоже проверяется прямым вычислением. Нужно проверить равенство

$$\int_G \|\gamma(g)\|^2 \, d(\mu * \nu)(g) =$$

$$= \int_G \|\gamma(g)\|^2 \, d\mu(g) + \int_G \|\gamma(g)\|^2 \, d\nu(g) - 2\,\mathrm{Re}\Big\langle \int_G \gamma(g)\, d\mu(g), \int_G \gamma(g^{-1})\, d\nu(g) \Big\rangle. \tag{2.4}$$

Преобразуем левую часть равенства с помощью (1.4):

$$\int_G \|\gamma(g)\|^2 \, d(\mu * \nu)(g) = \int_G \int_G \|\gamma(gh)\|^2 \, d\mu(g)\, d\nu(h) =$$

$$= \int_G \int_G \big\langle T(g)\gamma(h) + \gamma(g), T(g)\gamma(h) + \gamma(g) \big\rangle \, d\mu(g)\, d\nu(h) =$$

$$= \int_G \int_G \|\gamma(h)\|^2 \, d\mu(g)\, d\nu(h) + \int_G \int_G \|\gamma(g)\|^2 \, d\mu(g)\, d\nu(h) +$$

$$+ 2 \int_G \int_G \mathrm{Re}\big\langle T(g)\gamma(h), \gamma(g) \big\rangle \, d\mu(g)\, d\nu(g) =$$

$$= \int_G \|\gamma(h)\|^2 \, d\nu(h) + \int_G \|\gamma(g)\|^2 \, d\mu(g) +$$

$$+ 2 \int_G \int_G \mathrm{Re}\big\langle \gamma(h), T(g^{-1})\gamma(g) \big\rangle \, d\mu(g)\, d\nu(h).$$

Учитывая (1.5), мы получаем искомое выражение.

Утверждение в) не столь очевидно и вытекает из леммы об уголке, обсуждаемой в следующем пункте. ■

2.4. Лемма об уголке. Пусть $(K, \varkappa)$ — пространство с непрерывной вероятностной мерой. Отождествим пространство H с подпространством постоянных функций в $L^2(K, H)$. Обозначим через r оператор вложения $H \to L^2(K, H)$, а через p — ортогональный проектор $L^2(K, H) \to H$, т. е. оператор

$$f \mapsto \int_K f(k)\, d\varkappa(k).$$

Обозначим через R естественное вложение $F(H) \to F\big(L^2(K, H)\big)$, а через $P : F\big(L^2(K, H)\big) \to F(H)$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство $F(H)$.

Тогда, в обозначениях § VI.4, мы имеем

$$R = B\begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = B\begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, пусть операторы $\mathrm{Ar}(\cdot)$ — те же, что в п. 1.5. Легко видеть, что

$$\mathrm{Ar}(g(m)) = \exp\Big\{-\tfrac{1}{2} \int_M \|\gamma(g(m))\|^2 d\mu(m)\Big\} B\begin{bmatrix} 0 & T(g(m)) & \gamma(g(m)) \\ T^{\mathrm{t}}(g(m)) & 0 & \gamma(g(m)^{-1}) \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2.

$$P\,\mathrm{Ar}(g(m))R = \widetilde{L}(\mu), \tag{2.6}$$

где μ — образ меры $\varkappa$ при отображении $f : K \to \mathrm{G}$.

Доказательство: перемножаем операторы с помощью теоремы (VI.4.3). ■

2.5. Линеаризация. Пусть группа G действует аффинными изометриями на вещественном гильбертовом пространстве K. Тогда в силу формулы (2.3) представление $\widetilde{L}(\cdot)$ полугруппы $\mathscr{M}(\mathrm{G}_0)$ в $F(K_{\mathbb{C}})$ линейно.

Обсудим теперь случай аффинного действия на комплексном пространстве.

Теорема 2.3. Пусть G — односвязная простая группа Ли. Тогда представление $\widetilde{L}(\mu)$ полугруппы $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ линеаризуемо.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1.2, только равенство (1.11) нужно интегрировать по $d\mu(g)d\nu(h)$. ■

Замечание. Применение нашей конструкции к действию S_t^+ группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ дает проективное представление $\mathscr{M}_0\big(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})\big)$. Но если мы рассмотрим действие S_t^+ как действие универсальной накрывающей $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^\sim$ группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, то наша конструкция уже даст линеаризуемое действие полугруппы $\mathscr{M}_0\big(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^\sim\big)$. Стоит заметить, что отображение накрытия $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^\sim \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ индуцирует отображение $\mathscr{M}_0\big(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^\sim\big) \to \mathscr{M}_0\big(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})\big)$. Я, однако, не решился бы назвать полугруппу $\mathscr{M}_0\big(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^\sim\big)$ центральным расширением полугруппы $\mathscr{M}_0\big(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})\big)$.

2.6. Неприводимость. Пусть группа G действует на гильбертовом пространстве H аффинными изометрическими преобразованиями

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g).$$

Действие $S(g)$ мы назовем *аффинно неприводимым*, если в H не существует G-инвариантных аффинных подпространств, отличных от всего H.

Теорема 2.4. Пусть G — полупростая группа, а действие S удовлетворяет условиям

а) S аффинно неприводимо;

б) T есть сумма конечного числа неприводимых представлений.

Тогда представление $\widetilde{L}(\cdot)$ полугруппы $\mathscr{M}(\mathrm{G})$ неприводимо.

Замечание. В качестве следствия мы получаем, что представления полугруппы $\mathscr{M}_0\big(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^\sim\big)$, соответствующие действиям S, S_+, S_- из п. 1.4, неприводимы.

Доказательство. Заметим сначала, что полупростая группа не имеет нетривиальных аффинных действий на одномерном пространстве. Поэтому среди подпредставлений представления T нет одномерных подпредставлений.

Пусть операторы $A(\mu)$ — те же, что и выше (см. п. 2.3). Заметим, что $\|A(\mu)\| \leqslant 1$.

Лемма 2.5. Существует $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ такая, что $\|A(\mu)\| < 1$.

Доказательство. Пусть $\nu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ — мера с гладкой плотностью относительно меры Хаара. Хорошо известно (см., например, [Кириллов (1972)], § 11), что оператор $A(\nu)$ — ядерный. Поэтому $A(\nu * \nu^*)$ — ядерный положительный оператор. Пусть H_ν — множество всех векторов h, удовлетворяющих условию $A(\nu * \nu^*)h = h$. Тогда $\bigcap_\nu H_\nu$ состоит в точности из всех T-неподвижных векторов, и в силу сделанного выше замечания $\bigcap_\nu H_\nu = 0$. В силу конечномерности пространств H_ν найдутся такие $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, что $H_{\nu_1} \cap \ldots \cap H_{\nu_k} = 0$. Тогда $\mu = (\nu_1 * \nu_1) * \ldots * (\nu_k * \nu_k^*)$ удовлетворяет желаемому свойству. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Без ограничения общности можно считать, что $\mu = \mu^*$ (иначе мы рассмотрим меру $\tilde{\mu} = \mu * \mu^*$). Тогда $L(\mu)^* = L(\mu)$.

Лемма 2.6. Пусть $\mu = \mu^*$ и $\|A(\mu)\| < 1$. Тогда существует единственный вектор v вида $v = \exp(z, h)$, собственный относительно $L(\mu)$, и этот вектор является единственным максимальным вектором для $L(\mu)$ (т. е. равенство $\|L(\mu)w\| = \|L(\mu)\| \cdot \|w\|$ выполнено тогда и только тогда, когда w пропорционально v).

Доказательство.

$$L(\mu)v = \exp\bigl(A(\mu)z + b(\mu), h\bigr)\exp\bigl(z, c(\mu)\bigr) = \exp\bigl(b(\mu), h\bigr)\exp\bigl(z, A(\mu)h + c(\mu)\bigr).$$

Отображение $h \mapsto A(\mu)h + c(\mu)$ является сжимающим отображением гильбертова пространства H в себя. Без ограничения общности можно считать, что его неподвижная точка есть 0 (иначе мы просто сдвинем начало координат). В этом случае v будет вакуумным вектором. Очевидно, тогда $c(\mu) = 0$, а поэтому в силу самосопряженности $L(\mu)$ выполнено $b(\mu) = 0$. Итак, $L(\mu)$ оказывается оператором замены переменных $L(\mu)f(z) = f\bigl(A(\mu)z\bigr)$. Теперь лемма становится очевидной. ■

Продолжим доказательство теоремы. Пусть μ и v — такие же, как в лемме 2.6. Без ограничения общности можно считать, что v — вакуумный вектор. В силу леммы 2.6 v является выделенным вектором (т. е. любой $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$-сплетающий оператор переводит v в себя). Остается проверить, что циклическая оболочка вектора v совпадает со всем пространством Фока.

Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — произвольные элементы группы G. Пусть $\nu(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — мера на G такая, что мера точки g_j^{-1} есть ε_j, а мера единицы есть $1 - \sum \varepsilon_j$. Тогда вектор

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} L\bigl(\nu(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\bigr)v\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=0}$$

с точностью до пропорциональности равен

$$\prod_{j=1}^{n}\bigl(z, \gamma(g_j)\bigr). \tag{2.7}$$

Учитывая, что линейные комбинации векторов $\gamma(g_j)$ плотны в H (так как H аффинно неприводимо), мы получаем, что линейные комбинации векторов вида (2.7) плотны в пространстве Фока. ■

Пусть T — унитарное представление локально компактной группы G в пространстве H. Говорят, что T *слабо содержит единичное представление*, если существует последовательность $h_j \in H$ такая, что последовательность функций

$$\varphi_j(g) = \langle T(g)h_j, h_j \rangle$$

сходится к единице равномерно на компактных подмножествах в G.

Если T не содержит слабо единичное представление, то существует вероятностная мера $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ такая, что $\|T(\mu)\| < 1$ (см. [Margulis (1991)], III.1.3). Это соображение позволяет доказать следующее утверждение, более сильное, чем теорема 2.4:

Теорема 2.7. Пусть G — локально компактная группа, пусть T — ее унитарное представление, не содержащее слабо единичное представление. Пусть $S(g)v = T(g)v + \gamma(g)$ — аффинно неприводимое изометрическое действие группы G. Тогда соответствующее представление $\tilde{L}(\cdot)$ полугруппы $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ неприводимо.

2.7. Литературные замечания. Полугруппа вероятностных мер на группе G (но не ее представления) — старый математический объект. В частности, полугруппа $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ — классический объект теории вероятности. Известно, в частности, описание генераторов однопараметрических полугрупп в $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ (теорема Леви—Колмогорова—Хинчина об условно положительно определенных функциях, см., например, [Ширяев (1980)], III.5), изучались и вопросы делимости в $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, см. [Линник (1960)], [Lukacs (1970)]. Существует литература, посвященная обобщениям результатов для $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ на другие группы, см. [Heyer (1977)].

Теорема о неприводимости $\tilde{L}(\mu)$ равносильна утверждению о неприводимости мультипликативного интеграла Араки. Исчерпывающий результат о неприводимости интеграла Араки содержится в [Delorme (1978)]. Приведенное в п. 2.6 рассуждение сообщил мне Р. С. Исмагилов.

§ 3. G-стохастические ядра

3.1. Группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть G — группа Ли, пусть M — пространство с непрерывной вероятностной мерой μ. Пусть $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ — та же группа, что и в п. 1.5, а $\mathrm{Ams}(M)$ — группа автоморфизмов пространства μ (см. § VIII.4). Группа Ams действует на $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ автоморфизмами

$$g(m) \mapsto g(q(m)),$$

где $g(m) \in \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$, а $q \in \mathrm{Ams}$. Поэтому определено полупрямое произведение

$$\mathfrak{B}(\mathrm{G}) := \mathrm{Ams}(M) \ltimes \mathscr{F}(M, \mathrm{G}),$$

его элементы — это пары (q, g), где $q \in \mathrm{Ams}$, $g \in \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$, а умножение определяется формулой

$$\bigl(q_1, g_1(m)\bigr) \cdot \bigl(q_2, g_2(m)\bigr) = \bigl(q_1 q_2, g_1(q_2(m))\, g_2(m)\bigr).$$

По-видимому, с точки зрения теории представлений группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ — объект более разумный, чем $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$.

Введем топологию на группе $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. На группе Ams мы введем обычную слабую топологию (см. п. VIII.4.3). С группой $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ дело обстоит чуть сложней. Представим группу G в виде объединения возрастающей последовательности компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$. Пусть $\mathscr{F}_j \subset \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ — множество функций, принимающих значения в K_j. Тогда $\mathscr{F} = \bigcup_j \mathscr{F}_j$. Введем сначала топологию в $\mathscr{F}_j$. А именно, положим, что последовательность $g_1(m), g_2(m), \ldots \in \mathscr{F}_j$ сходится к $g(m)$, если она сходится по мере, т. е. для любой окрестности U единицы в G мера множества A_j всех $m \in M$ таких, что $g_j(m)^{-1}g(m) \notin U$, стремится к 0 при $j \to \infty$. (Легко видеть, что сходимость в $\mathscr{F}_j$ метризуема.) Наконец, последовательность $g_1(m), g_2(m), \ldots \in \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ сходится, если все члены последовательности лежат в некотором $\mathscr{F}_j$ и при этом последовательность сходится в $\mathscr{F}_j$ (т. е. $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ снабжена топологией индуктивного предела $\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}_j$).

Наконец, сама группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ как множество есть произведение Ams $\times \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$, топология на $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, по определению, есть произведение топологий на Ams и $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$.

Замечание. На $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ мы выбрали, по-видимому, самую сильную из разумных топологий (так, чтобы представлений было бы побольше). Существует топология существенной равномерной сходимости, которая еще сильней, но она уже не очень естественна.

3.2. Простейшие представления группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть $\tau(g)$ — унитарное представление группы G в пространстве H. Тогда группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ действует в $L^2(M, H)$ унитарными преобразованиями

$$f(m) \mapsto \tau(g(m))f(m).$$

Группа Ams действует преобразованиями

$$f(m) \mapsto f(q(m)).$$

Таким образом, мы получили унитарное представление группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в пространстве $L^2(M, H)$.

Задача. Покажите, что если τ неприводимо и $\tau(g)$ не равно тождественно E, то и представление Q_τ неприводимо.

3.3. Фоковское представление группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть теперь группа G действует в гильбертовом пространстве H аффинными изометриями

$$S(g)h = \tau(g)h + \gamma(g).$$

Тогда группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ действует в $L^2(M, H)$ изометрическими аффинными преобразованиями

$$S(g(m))h(m) = \tau(g(m))h(m) + \gamma(g(m)),$$

а группа Ams(M) действует в $L^2(M, H)$ унитарными преобразованиями

$$h(m) \mapsto h(q(m)),$$

где $q \in$ Ams(M).

Таким образом, мы получаем вложение группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в $\mathrm{Isom}\big(L^2(M, H)\big)$, а следовательно, и унитарное проективное представление группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в пространстве $F\big(L^2(M, H)\big)$. Итак, представление Араки группы $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ продолжается до представления группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

Перейдем к описанию категорий, связанных с группами $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

3.4. G-стохастические ядра. Пусть G — группа Ли. Пусть (M, μ), (N, ν) — пространства с вероятностной мерой. G-*стохастическим ядром* (или G-*полиморфизмом*) $(M, \mu) \to (N, \nu)$ мы назовем борелевскую вероятностную меру $\varkappa$ на $M \times N \times \mathrm{G}$ такую, что

а) проекция меры $\varkappa$ на M есть μ;

б) проекция меры $\varkappa$ на N есть ν.

Если проекция меры $\varkappa$ на G имеет компактный носитель, мы будем говорить, что $\varkappa$ есть G-*стохастическое ядро с компактным носителем*.

Заметим, что проекция $\tilde{\varkappa}$ меры $\varkappa$ на $M \times N$ является обычным стохастическим ядром, или полиморфизмом (см. § VIII.4.). Так же, как в п. VIII.4, введем условные вероятностные меры $\tilde{\varkappa}_n$ на слоях $n \times M$ и $\tilde{\varkappa}_m$ на слоях $N \times m$.

Заметим, далее, что для данного $\varkappa$ для почти всех $(m, n) \in M \times N$ (в смысле меры $\varkappa$) определена условная вероятностная мера $\varkappa_{m,n}(g)$ на группе G так, что для любого измеримого подмножества $A \subset M \times N \times \mathrm{G}$ выполнено

$$\varkappa(A) = \int_{M \times N} \varkappa_{m,n}\big(A \cap (m \times n \times \mathrm{G})\big)\, d\tilde{\varkappa}.$$

Пусть, далее, $\varkappa$ и ρ — соответственно G-стохастические ядра $(M, \mu) \to (N, \nu)$ и $(N, \nu) \to (S, \sigma)$. Их произведение $\pi = \rho \cdot \varkappa$ есть G-стохастическое ядро $(M, \mu) \to (S, \sigma)$, определяемое условиями

$$\tilde{\pi} = \tilde{\rho}\tilde{\varkappa} \text{ в категории } \mathbf{Mar}; \qquad \pi_{m,s}(g) = \int_N \big(\rho_{n,s} * \varkappa_{m,n}(g)\big)\, d\tilde{\nu}_n.$$

Мы опускаем проверку корректности определения.

Эта формула особенно наглядна, когда все пространства M, N, S конечны. Пусть $m_1, m_2, \ldots$ — точки пространства M, а $n_1, n_2, \ldots$ — точки пространства N. Ограничивая меру $\varkappa$ на множество $m_i \times n_j \times \mathrm{G}$ (это множество отождествляется с группой G), мы получаем некоторую меру на G, которую мы обозначим через $\varkappa_{ij}$. Итак, полиморфизму $\varkappa$ соответствует матрица $\{\varkappa_{ij}\}$, составленная из мер на группе G, причем эта матрица удовлетворяет уравнениям

$$\sum_i \varkappa_{ij}(\mathrm{G}) = \nu(n_j), \quad \sum_j \varkappa_{ij}(\mathrm{G}) = \nu(m_i). \tag{3.1}$$

Матрицы $K = \{\varkappa_{ij}\}$, $R = \{\rho_{si}\}$, $P = \{\pi_{sj}\}$, соответствующие морфизмам $\varkappa$, ρ, π, связаны соотношением

$$\pi_{sj} = \sum_i \frac{1}{\nu(n_i)}\, \rho_{si} * \nu_{ij}.$$

Удобнее записывать это равенство в матричной форме:

$$P = R \begin{pmatrix} \nu(n_1)^{-1} & & \\ & \nu(n_2)^{-1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} K.$$

Пример. Пусть M состоит из одной точки. Тогда полугруппа G-стохастических ядер на M совпадает с полугруппой $\mathscr{M}(\mathrm{G})$ из предыдущего параграфа.

3.5. Категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}$ и $\mathbf{G\text{-}Mar_0}$. Через $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}$ (соответственно, $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}$) мы обозначим категорию, объектами которой являются вероятностные пространства с мерой, а морфизмами — G-стохастические ядра (соответственно, G-стохастические ядра с компактным носителем).

Через $\mathbf{G\text{-}Mar_0}$ мы обозначим подкатегорию в $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}$, объектами которой являются конечные пространства с мерой, а морфизмы — те же, что и в $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}$.

Введем в этих категориях инволюцию. Пусть $\varkappa \in \mathrm{Mor}(M, N)$. Тогда $\varkappa^* \in \mathrm{Mor}(N, M)$ есть образ меры $\varkappa$ при отображении $(m, n, g) \mapsto (n, m, g^{-1})$ из $M \times N \times \mathrm{G}$ в $N \times M \times \mathrm{G}$.

Введем, далее, топологию на этих категориях. Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa$ — элементы множества $\mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}}(M, N)$. Последовательность $\varkappa_i$ сходится к $\varkappa$, если для любых измеримых множеств $A \subset M$, $B \subset N$ и любой финитной непрерывной функции f на G выполнено

$$\iiint\limits_{A\times B\times \mathrm{G}} f(g)\, d\varkappa_i(m, n, g) \to \iiint\limits_{A\times B\times \mathrm{G}} f(g)\, d\varkappa(m, n, g).$$

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}}(M, N)$. Последовательность $\varkappa_i$ сходится к $\varkappa$, если она сходится в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}}$ и, кроме того, существует компактное множество $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ такое, что $\varkappa_i\big(M \times N \times (\mathrm{G} \setminus \mathrm{K})\big) = 0$ для всех i.

Покажем теперь, что все эти категории являются упорядоченными. Пусть N — пространство с мерой, а $\mathfrak{h}$ — его разбиение. В п. VIII.4.6 мы определили канонические морфизмы $\lambda^{\mathfrak{h}} : N / \mathfrak{h} \to N$ и $\mu^{\mathfrak{h}} : N \to N / \mathfrak{h}$ категории $\mathbf{\overline{Mar}}$. Но категория $\mathbf{\overline{Mar}}$ канонически вкладывается в $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}$. А именно, морфизмы $\mathbf{\overline{Mar}}$ из M в N являются мерами на $M \times N$, а $M \times N$ канонически вкладывается в $M \times N \times \mathrm{G}$ по формуле $(m, n) \mapsto (m, n, e)$, где e — единица группы G. Поэтому меры на $M \times N$ можно рассматривать как меры на $M \times N \times \mathrm{G}$. Итак, морфизмы $\lambda^{\mathfrak{h}}$ и $\mu^{\mathfrak{h}}$ категории $\mathbf{\overline{Mar}}$ можно рассматривать как морфизмы категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}$. Эти морфизмы и определяют на $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}$ структуру упорядоченной категории.

3.6. Группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}}$. Пусть M — пространство с непрерывной вероятностной мерой. Построим канонический гомоморфизм группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в $\mathrm{Aut}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}}(M)$. Пусть $r = (q, g) \in \mathfrak{B}(\mathrm{G})$ (см. обозначения п. 3.1). Рассмотрим вложение $M \to M \times M \times \mathrm{G}$, задаваемое формулой

$$m \mapsto \big(m, q(m), g(m)\big).$$

Пусть $\varkappa_r$ — образ меры μ при этом отображении. Легко видеть, что $\varkappa_r \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}}(M)$, а $\varkappa_{r_1 r_2} = \varkappa_{r_1}\varkappa_{r_2}$ в категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}$.

Задача. Покажите, что $\mathrm{Aut}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}}(M)$ совпадает с $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

Задача. Покажите, что группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ плотна в $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}_0}}(M)$.

3.7. Двойные классы смежности. Заметим, что группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ содержит тяжелую подгруппу Ams, и естественно посмотреть, не является ли наша группа (G, K)-парой.

Пусть $\mathfrak{h} : M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$ — конечное разбиение пространства M. Обозначим через $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ подгруппу в Ams, состоящую из отображений, переводящих каждое множество M_j в себя.

Пусть $\mathfrak{h} : M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$, $\mathfrak{h}' : M = M_1' \cup \ldots \cup M_{k'}'$ — два конечных разбиения. Пусть $M / \mathfrak{h}$ и $M / \mathfrak{h}'$ — соответствующие факторпространства. Рассмотрим двойные классы смежности $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$. Покажем, что существует каноническая биекция

$$I : \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}} \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar_0}}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big). \tag{3.2}$$

Пусть $r = (q, g) \in \mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть $A_{ij} = M_i \cap q^{-1}(M_j')$. Пусть $\varkappa_{ij}$ — образ меры μ при отображении $g : A_{ij} \to \mathrm{G}$. Составим матрицу, состоящую из мер $\varkappa_{ij}$ на G. Легко видеть, что $\varkappa$ удовлетворяет уравнениям (3.1), т. е. $\varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar_0}}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$.

Итак, мы построили отображение $g \mapsto \varkappa$ из $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar_0}}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$. Очевидно, что это отображение постоянно на двойных классах смежности. Легко видеть также, что оно сюръективно и разделяет двойные классы смежности. Биекция (3.2) построена.

С этого места мы будем отождествлять множества $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ и $\mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar_0}}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$.

Лемма 3.1. Биекция I является непрерывным отображением $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ на $\mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar_0}}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$.

Доказательство. Пусть $r_j = (q_j, g_j)$ — последовательность в $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, сходящаяся к $r = (q, g)$. Пусть $\varkappa^j, \varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar_0}}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$ — соответствующие G-стохастические ядра. Покажем, что $\varkappa^j$ сходится к $\varkappa$. Пусть $\varkappa^j_{\alpha\beta}, \varkappa_{\alpha\beta}$ — соответствующие матрицы, составленные из мер на G (см. п. 3.4). Нам нужно показать, что для каждой непрерывной функции f на G и любых α, β

$$\int\limits_{\mathrm{G}} f(h)\, d\varkappa^j_{\alpha\beta}(h) \to \int\limits_{\mathrm{G}} f(h)\, d\varkappa_{\alpha\beta}(h).$$

Заметим, что

$$\int f(h)\, d\varkappa^j_{\alpha\beta}(h) = \int\limits_{M_\beta \cap q_j^{-1} M_\alpha'} f(g_j(m))\, d\mu(m),$$

$$\int f(h)\, d\varkappa_{\alpha\beta}(h) = \int\limits_{M_\beta \cap q^{-1} M_\alpha'} f(g(m))\, d\mu(m).$$

Теперь заметим, что в силу сходимости $q_j \to q$ в Ams мы имеем

$$\mu\Big[\big(M_\beta \cap (q_j^{-1}) M_\alpha'\big) \triangle \big(M_\beta \cap (q^{-1}) M_\alpha'\big)\Big] \to 0. \tag{3.3}$$

при $j \to \infty$. Далее, заметим, что $f(g_j(m)) \to f(g(m))$ по мере. Учитывая, что функции $g_j(m)$ равномерно ограничены, мы получаем, что $f(g_j(m))$ тоже равномерно ограничены, поэтому мы имеем

$$\int\limits_{M_\beta \cap (q_j^{-1}) M_\alpha'} f(g_j(m))\, d\mu(m) \to \int\limits_{M_\beta \cap (q^{-1}) M_\alpha'} f(g(m))\, d\mu(m). \qquad \blacksquare$$

Замечание. На самом деле I является гомеоморфизмом, но это нам не понадобится.

3.8. Теорема мультипликативности. Пусть ρ — унитарное представление группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в пространстве H. Пусть $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$ — конечные разбиения M. Обозначим через $H(\mathfrak{h})$ множество всех $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$-неподвижных векторов в H, а через $P(\mathfrak{h})$ — проектор на $H(\mathfrak{h})$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$. Определим оператор $\rho(\gamma) : H(\mathfrak{h}) \to H(\mathfrak{h}')$ по формуле

$$\rho(\gamma)h = P(\mathfrak{h}')\rho(g)\big|_{H(\mathfrak{h})},$$

где $g \in \gamma$.

Теорема 3.2.

а) Для любых

$$\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big) \simeq \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}},$$

$$\varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}', M / \mathfrak{h}''\big) \simeq \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}''} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'}$$

выполнено

$$\rho(\varkappa\gamma) = \rho(\varkappa)\rho(\gamma),$$

где $\varkappa$ и γ перемножаются как морфизмы в категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$.

б) $\rho(\gamma)^* = \rho(\gamma^*)$.

Иными словами, $M / \mathfrak{h} \mapsto H(\mathfrak{h})$, $\gamma \mapsto \rho(\gamma)$ есть представление категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$.

Доказательство этого утверждения содержится в следующем пункте.

Теорема 3.3. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — некоторое $*$-представление категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$, причем для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar}_0}$ выполнено $\|\rho(\gamma)\| \leqslant 1$. Тогда R однозначно продолжается до представления категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$.

Это очевидное следствие теоремы аппроксимации VIII.1.10.

Итак, рассмотрим три множества:

$\mathscr{X}$ — множество унитарных представлений группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$;

$\mathscr{Y}$ — множество $*$-представлений категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$ сжимающими операторами;

$\mathscr{Z}$ — множество $*$-представлений категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$.

Мы построили в теоремах 3.2–3.3 канонические отображения $\mathscr{X} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{Y}$ и $\mathscr{Y} \xrightarrow{\beta} \mathscr{Z}$. Кроме того, существует очевидное отображение $\mathscr{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathscr{X}$, а именно, мы ограничиваем представление категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$ на группу $\mathfrak{B}(\mathrm{G}) = \mathrm{Aut}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$.

Теорема 3.4. Канонические отображение α, β, γ являются биекциями.

Доказательство. «Прослеживание» конструкции показывает, что $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ есть тождественное отображение. В частности, γ сюръективно.

Лемма 3.5. γ инъективно.

Доказательство. Группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G}) = \mathrm{Aut}^*_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}}(M)$ плотна в $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}}(M)$. Поэтому представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ полностью определяется своим ограничением на $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Покажем, что $*$-представление $\mathsf{R} = (R, \rho)$ категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$ полностью определяется своим ограничением на $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$. Для этого заметим, что группоид морфизмов категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$ порожден полугруппой $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ и каноническими морфизмами $\lambda^{\mathfrak{h}}$, $\mu^{\mathfrak{h}} = (\lambda^{\mathfrak{h}})^*$. Но оператор $\rho(\lambda^{\mathfrak{h}})$ отождествляет пространство $R(M / \mathfrak{h})$ с $\mathrm{Im}\,\theta^{\mathfrak{h}}$ (напомним, что $\theta^{\mathfrak{h}}$ — канонические идемпотенты в $\mathrm{End}(M)$, см. VIII.4.6). Таким образом, можно считать, что $R(M / \mathfrak{h})$ есть $\mathrm{Im}\,\theta^{\mathfrak{h}}$, и, тем самым, если мы знаем представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$, то операторы $\rho(\lambda^{\mathfrak{h}})$ однозначно определены (это операторы тождественного вложения подпространства в пространство). Лемма доказана. ■

Лемма 3.6. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — $*$-представление категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$. Тогда $\|\rho(\gamma)\| \leqslant 1$ для любого морфизма γ.

Доказательство. Действительно, группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G}) = \mathrm{Aut}^*_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ плотна в полугруппе $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$; если $q \in \mathfrak{B}(\mathrm{G})$, то оператор $\rho(q)$ унитарен, в частности, $\|\rho(q)\| = 1$. Поэтому для любого $\gamma \in \mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ выполнено $\|\rho(\gamma)\| \leqslant 1$. Далее, $\|\rho(\lambda^{\mathfrak{h}})\| = 1$ (см. доказательство предыдущей леммы), а группоид морфизмов категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$ порожден полугруппой $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ и морфизмами $\lambda^{\mathfrak{h}}$ и $\mu^{\mathfrak{h}} = (\lambda^{\mathfrak{h}})^*$. Лемма доказана. ■

В частности, лемма 3.6 (вместе с теоремой 3.3) показывает, что β — биекция. Теорема 3.4 доказана. ■

3.9. Доказательство теоремы 3.2. В силу теоремы VIII.5.1, мы должны доказать следующую лемму.

Лемма 3.7. Пусть $p_1 \in \gamma$, $p_2 \in \varkappa$ — элементы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть $h_j \in \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'}$ сходится к $\theta^{\mathfrak{h}'}$. Пусть σ_j — двойной класс смежности $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}''} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$, содержащий $p_2 h_j p_1$. Тогда σ_j сходится к γ.

Доказательство. Мы проведем доказательство в случае, когда все разбиения $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$ состоят из одного элемента; тем самым мы рассматриваем двойные классы смежности $\mathrm{Ams} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}$. По небольшом размышлении ясно, что общий случай не отличается существенно от этого.

Далее, ясно, что истинность высказывания не изменится, если мы домножим p_1 на какой-нибудь элемент Ams слева, а p_2 — справа. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $p_1, p_2 \in \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$. Пусть $p_1 = (e, g_1(m))$, $p_2 = (e, g_2(m))$, где e — единица Ams.

Теперь меры γ, $\varkappa$, σ_j на G суть образы меры μ на M при отображениях g_1, g_2, $g_2 h_j g_1$ соответственно. Нам нужно доказать, что последовательность мер σ_j сходится в полугруппе $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ к свертке $\varkappa * \gamma$.

Пусть $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ — произвольный компакт, содержащий носители мер γ и $\varkappa$. Разобьем K на n очень малых (в смысле равномерной структуры на G) подмножеств $K_1, \ldots, K_n$. Выберем в каждом K_j точку x_j. Пусть, далее, A_j (соответственно, B_j) — прообраз K_j при отображении $p_2 : M \to G$ (соответственно, $p_1 : M \to G$).

Обозначим через δ_y меру на G, сосредоточенную в точке $y \in G$. Мера

$$\pi := \sum_{i,j} \mu(A_i)\mu(B_j)\delta_{x_i x_j} \tag{3.4}$$

близка к свертке $\varkappa * \nu$. Слово «близка» означает, что для любого заранее фиксированного набора непрерывных функций $f_1, \ldots, f_s$ на G все разности

$$\int_G f_\alpha \, d(\varkappa * \nu) - \int_G f_\alpha \, d\pi$$

малы при достаточно малом разбиении $K = \bigcup_j K_j$. С другой стороны, последовательность $h_l \in \mathrm{Ams}$ сходится к $\theta = \mu \times \mu$. Поэтому при фиксированном разбиении $K = \bigcup K_j$ и больших l разности $\mu(A_i \cap h_l B_j) - \mu(A_i)\mu(B_j)$ малы, и по этой причине мера σ_l очень близка к (3.4). ∎

3.10. Тривиальные представления категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть T — неприводимое унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Построим по нему $*$-представление $A_T = (A_T, \alpha_T)$ категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть (N, ν) — объект G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Тогда пространство $A_T(N)$ есть пространство $L^2(N, V)$, состоящее из V-значных функций на N со скалярным произведением

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_N \big(v_1(n), v_2(n)\big) \, d\nu(n).$$

Пусть, далее, (N, ν), $(K, \varkappa)$ — объекты категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\text{G-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M, N)$. Тогда оператор $\alpha_T(\gamma) : L^2(M, V) \to L^2(N, V)$ задается формулой

$$\alpha_T(\gamma)v(n) = \iint_{M \times G} T(g)v(m) \, d\gamma_n(m, g),$$

где $\gamma_n(m, g)$ — условная мера на $n \times M \times G \subset N \times M \times G$, соответствующая мере γ.

Понятно, что ограничение представлений $A_T = (A_T, \alpha_T)$ на группу $\mathfrak{B}(G)$ суть представления п. 3.2.

3.11. Фоковское представление категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$. Пусть группа G действует в гильбертовом пространстве V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ аффинными изометриями

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g).$$

Построим по этому действию некоторое представление $Q = (Q, \varkappa)$ категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$. Пусть (M, μ) — объект G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$. Тогда $Q(M)$ есть бозонное пространство Фока $F(L^2(M, V))$. Пусть (M, μ), (N, ν) — объекты G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$, а π — морфизм $M \to N$. Тогда оператор $\varkappa(\pi) : F\big(L^2(M, V)\big) \to F\big(L^2(N, V)\big)$ задается формулой

$$\varkappa(\pi)f(z) = \exp\{d(\pi)\} \exp\{z, c(\pi)\} f\,(A(\pi)z + b(\pi)),$$

где

$$A(\pi)v(n) = \iint_{M \times G} T(g)f(m) \, d\pi_n(m, g),$$

$$b(\pi) = \iint_{M \times G} \gamma(g) \, d\pi_n(m, g),$$

$$c(\pi) = \iint_{M \times G} \gamma(g^{-1}) \, d\pi_m(n, g),$$

$$d(\pi) = -\frac{1}{2} \iiint_{M \times N \times G} \|\gamma(g)\|^2 \, d\pi(m, n, g).$$

Через $\pi_m(n, g)$ обозначены условные меры на слоях $m \times N \times G$, а через $\pi_n(m, g)$ — условные меры на слоях $M \times n \times G$.

Прямое вычисление (мы его опускаем) показывает, что

$$\varkappa(\pi)\varkappa(\psi) = \exp\big\{i \,\mathrm{Im}\langle c(\psi), b(\pi)\rangle\big\}\varkappa(\pi\psi).$$

Легко видеть, что

1. ограничение представления $Q = (Q, \varkappa)$ на группу $\mathfrak{B}(G)$ есть представление п. 3.3 (а ограничение на $\mathscr{F}(M, G)$ — соответственно мультипликативный интеграл Араки);

2. если P — одноточечное пространство с мерой, то $\mathrm{End}_{\text{G-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(P) = \mathscr{M}_0(G)$, и ограничение представления Q на $\mathscr{M}_0(G)$ есть представление п. 2.3.

Задача. Покажите, что $\|\varkappa(\pi)\| \leqslant 1$ для всех π.

Задача. Найдите замыкание группы $\mathscr{F}(M, G) \subset \mathfrak{B}(G)$ в полугруппе $\mathrm{End}_{\text{G-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M)$.

Задача. Покажите, что при выполнении условий теоремы 2.4 представление Араки группы $\mathscr{F}(M, G)$ неприводимо.

3.12. Замечания. Плотные вложения групп диффеоморфизмов в полугруппы G-стохастических ядер. Пусть $n > 1$. Рассмотрим n-мерное многообразие M^n, снабженное формой объема ω. Пусть μ — соответствующая мера Лебега. Обозначим через D группу диффеоморфизмов многообразия M^n, сохраняющих форму объема. Сейчас мы построим несколько вложений группы D в полугруппы $\mathrm{Mor}_{\text{G-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$ для различных групп G.

A. Конструкция с группой струй (см. [Неретин (1992)]).

Задача. Пусть группа D действует в $L^2(M^n)$ заменами переменной

$$T(q)f(m) = f(q(m)).$$

Покажите, что множество операторов вида $T(q)$ плотно в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$.

Выкинем из M^n конечное число подмногообразий $A_1, \ldots, A_N$ так, что $M^n \setminus \big(\bigcup A_j\big)$ можно отобразить диффеоморфно с сохранением формы объема на некоторую (быть может, несвязную) область $U \subset \mathbb{R}^n$. Отождествим $M^n \setminus \big(\bigcup A_j\big)$ с U. Пусть q — диффеоморфизм многообразия M^n, отождествляемый с определенным почти всюду отображением $U \to U$. Обозначим через $J_q(x)$ матрицу Якоби отображения $q : U \to U$ точке x. Поставим в соответствие диффеоморфизму q выражение $r(q) = \big(q(x), J_q(x)\big)$. Легко видеть, что $q \mapsto r(q)$ есть вложение группы D в группу

$$\mathfrak{B}\big(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})\big) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n).$$

Оказывается, что образ группы D плотен в группе $\mathfrak{B}\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\big)$, а следовательно, и в полугруппе $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$. Последнее высказывание, в сущности, очевидно, но его аккуратное доказательство занимает довольно много места.

Конструкция допускает следующее незамысловатое обобщение. Пусть Jet_n^k — группа k-струй сохраняющих объем отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Обозначим через $J_q^k(x)$ k-струю отображения q в точке x. Далее, поставим в соответствие элементу $q \in \mathrm{D}$ пару $r^k(q) = \big(q(x), J_q^k(x)\big) \in \mathfrak{B}(\mathrm{Jet}_n^k)$. Это дает плотное вложение $\pi : \mathrm{D} \to \mathrm{End}_{\mathrm{Jet}_n^k\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$.

Может показаться, что эти вложения зависят от выбора «карты» U и отображения $\sigma : U \to M^n$. Однако замена отображения σ на какое-либо другое приводит к замене вложения π на вложение вида $s^{-1}\pi s$, где s — некоторый элемент $\mathfrak{B}(\mathrm{Jet}_n^k)$.

При $n = 2$ можно ограничить фоковское представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M^2)$ на D и получить (неприводимое) представление D в бозонном пространстве Фока (здесь для доказательства неприводимости нужна еще аккуратная проверка сходимости, потому что группа D плотна в $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}$, но не в $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}$).

По-видимому, другие группы Jet_n^k не имеют нетривиальных аффинных действий, и здесь для построения представлений можно применять лишь тривиальные конструкции типа п. 3.10, что, конечно, малоинтересно.

B. Конструкция с фундаментальной группой [Исмагилов (1980)]; см. также [Исмагилов (1997), [Неретин (1997б)]. Пусть M^n не односвязно, пусть $\pi(M^n)$ — фундаментальная группа многообразия M^n, а Z — ее центр. Пусть D_0 — компонента связности единицы группы D.

Обозначим через $\widetilde{M}^n$ универсальное накрытие над M^n, а $\sigma : \widetilde{M}^n \to M^n$ — отображение накрытия. Группа $\pi_1(M^n)$ действует на $\widetilde{M}^n$ преобразованиями монодромии $\theta_g : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$, при этом для любого $g \in \pi_1(M^n)$ выполнено $\sigma \circ \theta_g = \sigma$. Далее, любой диффеоморфизм $q \in \mathrm{D}_0$ можно поднять до диффеоморфизма $\tilde{q}$ многообразия $\widetilde{M}^n$ так, что $\sigma \circ \tilde{q} = q\sigma$. При этом $\tilde{q}$ коммутирует со всеми преобразованиями θ_g. Заметим, далее, что $\tilde{q}$ определяется диффеоморфизмом q не однозначно, а лишь с точностью до умножения на преобразования θ_g, где $g \in Z$.

Рассмотрим теперь в $\widetilde{M}^n$ открытую ограниченную («фундаментальную») область U такую, что множества $\theta_g U$ попарно не пересекаются, а $\widetilde{M}^n \setminus \big(\bigcup_g \theta_g U\big)$ есть множество нулевой меры. Пусть $q \in \mathrm{D}_0$, а $\tilde{q}$ — накрывающий диффеоморфизм. Построим по $\tilde{q}$ элемент $r = r(q)$ группы $\mathfrak{B}\big(\pi_1(\widetilde{M}^n)\big) = \mathrm{Aut}_{\pi_1(M^n)\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$. А именно, пусть $m \in M^n$, а $\tilde{m} \in U$ таков, что $\sigma\tilde{m} = m$. Определим (измеримую) функцию $g : M^n \to \pi_1(\mathrm{G})$ из условия

$$\tilde{q}\tilde{m} \in g(m)U.$$

Функция $g(m)$ определена не однозначно, а лишь с точностью до умножения на постоянную функцию, принимающую значения в центре Z группы $\pi_1(M^n)$ (потому что неоднозначно определен диффеоморфизм $\tilde{q}$). Теперь полагаем

$$r(q) = (q(m), g(m)) \in \mathfrak{B}\big(\pi_1(M^n)\big).$$

Так как $r(q)$ определен неоднозначно, мы фактически получаем вложение

$$\mathrm{D}_0 \to \mathfrak{B}\big(\pi_1(M^n)\big) \,/\, \mathrm{Z},$$

где Z — группа постоянных функций на M^n со значениями в центре группы $\pi_1(M^n)$. Оказывается, что образ группы D_0 плотен в $\mathfrak{B}\big(\pi_1(M^n)\big) / \mathrm{Z}$, а значит, и в $\mathrm{End}_{\pi_1(M^n)\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n) / \mathrm{Z}$.

Теперь, имея неприводимое унитарное представление группы $\pi_1(M^n)$, мы можем применить тривиальную конструкцию п. 3.10 и получить неприводимое унитарное представление группы D_0. Аналогично, имея неприводимое аффинное изометрическое действие группы $\pi_1(M^n)$, мы получаем унитарное (вообще говоря, проективное) представление группы D_0 в пространстве Фока.

Замечание. На первый взгляд кажется, что разрезание многообразия на фундаментальные области содержит элемент насилия. В действительности неинвариантной является не сама конструкция, а использованный нами язык. Рассмотрим аффинное изометрическое действие S группы $\pi_1(M^n)$ на гильбертовом пространстве V. Рассмотрим косое произведение (см., например, [Кириллов (1972)], 13.4)

$$Q = \widetilde{M} \underset{\pi_1(M^n)}{\times} V.$$

Тогда Q проектируется на M^n со слоем V, т. е. мы получаем расслоение над M^n, слоем которого является аффинное гильбертово пространство V. Группа D_0 действует изометриями на пространстве $\mathscr{L}$ сечений этого расслоения, поэтому D_0 вкладывается в группу $\mathrm{Isom}(\mathscr{L})$, и в итоге мы получаем ту же самую конструкцию.

Встает вопрос о том, имеет ли группа $\pi_1(M^n)$ аффинные действия. Это заведомо так, если группа $\pi_1(M)$ имеет гомоморфизмы в $\mathbb{Z}$, отличные от единичного (действительно, $\mathbb{Z}$ действует на прямой $\mathbb{R}$ сдвигами), что в свою очередь равносильно нетривиальности группы $\mathrm{H}^1(M^n, \mathbb{R})$ первых когомологий $M^n(\mathbb{R})$ с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим, далее, двумерную компактную риманову поверхность M^2. Она получается факторизацией плоскости Лобачевского по некоторой дискретной счетной подгруппе $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Теперь предложение 1.3 дает неприводимое аффинное изометрическое действие Diff.

3.13. Литературные замечания. Параграф основан в основном на [Неретин (1992)]. Группы диффеоморфизмов многомерных многообразий изучались по разным поводам (гидродинамика, топология, дифференциальная геометрия). Мы приведем несколько ссылок, касающихся этих страшных групп: [Arnold, Khesin (1992)] (экзотические эргодические инварианты), [Kervaire, Milnor (1963)] (компоненты связности группы диффеоморфизмов n-мерной сферы), [Brenier (1994)] (гидродинамика), [Hofer, Zehnder (1994)], [McDuff, Salamon (1995)] (симплектоморфизмы и симплектическая топология), [Ismagilov (1997)] (представления).

§ 4. *Группа преобразований, оставляющих σ-конечную меру квазиинвариантной, и меры Пуассона*

Этот параграф посвящен одной интересной группе, незаслуженно обойденной вниманием.

4.1. Группа Gms_∞. Пусть M — лебеговское пространство с бесконечной непрерывной мерой μ. Без ограничения общности можно считать, что M — это прямая $\mathbb{R}$, снабженная обычной мерой Лебега. Обозначим через Gms_∞ группу биективных (с точностью до множества нулевой меры) преобразований $g : M \to M$, оставляющих меру μ квазиинвариантной, причем производная Радона—Никодима $g'(m)$ удовлетворяет условию

$$\int_M \big|g'(m) - 1\big| \; d\mu(m) < \infty.$$

Задача. Покажите, что Gms_∞ является группой.

Определим, далее, на группе Gms_∞ функционал $\chi(g) : \mathrm{Gms}_\infty \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\chi(g) = \int_M \big(g'(m) - 1\big) \; d\mu(m).$$

Задача.

а) Покажите, что

$$\chi(g_1g_2) = \chi(g_1) + \chi(g_2).$$

б) Пусть $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ — последовательность подмножеств в M, имеющих конечную меру, причем $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j = M$. Покажите, что

$$\chi(g) = \lim_{j\to\infty} \big(\mu(gM_j) - \mu(M_j)\big)$$

Мы видим, что группа Gms_∞ содержит нормальную подгруппу, выделяемую условием $\chi(g) = 0$.

4.2. Меры Пуассона. Пусть M — пространство с бесконечной непрерывной мерой μ. Обозначим через $\Omega(M)$ пространство неупорядоченных счетных подмножеств в M. Мы будем называть точки пространства $\Omega(M)$ *конфигурациями*. Сейчас мы введем на $\Omega(M)$ вероятностную меру $\nu_t = \nu_t^M$, называемую *мерой Пуассона*.

Фиксируем число $t > 0$. Пусть $A \subset M$ — измеримое подмножество конечной ненулевой меры. Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $S(A, j)$ подмножество в $\Omega(M)$, состоящее из всех конфигураций $\omega = (m_1, m_2, \ldots) \in \Omega(M)$ таких, что пересечение $\omega \cap A$ содержит ровно j точек. Мера ν_t будет определена на борелевской σ-алгебре, порожденной множествами вида $S(A, j)$. Положим

$$\nu_t\,(S(A,j)) = \frac{(t\mu(A))^j}{j!}\, e^{-t\mu(A)}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \nu_t\,(S(A,j)) = 1,$$

тем самым вероятность того, что в множество A конечной меры попадает бесконечное число точек из $\omega \in \Omega(M)$, равна 0.

Пусть, далее, измеримые множества $A_1, \ldots, A_p$ попарно не пересекаются. Тогда положим

$$\nu_t\Big(\bigcap_{k=1}^{p} (S(A_k, n_k))\Big) = \prod_{k=1}^{p} \nu_t\,(S(A_k, n_k))\,.$$

На теоретико-вероятностном языке это означает, что *события $S(A_k, n_k)$ независимы*.

Мера ν_t определена. Корректность определения вытекает из теоремы Колмогорова о проективных системах мер (см., например, [Ширяев (1980)]).

Задача. Пусть $B \subset M$ — бесконечное подмножество. Тогда с вероятностью 1 в B содержится бесконечно много точек $\omega \in \Omega(M)$.

Задача. Покажите, что среднее число точек из конфигурации $\omega \in \Omega(M)$, попадающих в подмножество $A \subset M$ конечной меры, равно $t\mu(A)$.

Чуть ниже мы увидим, что меры ν_t являются Gms_∞-квазиинвариантными. Сейчас же мы сделаем одно простое, но полезное замечание.

Пусть M — множество с конечной непрерывной мерой. Обозначим через $\Omega(M)$ множество *конечных* подмножеств M (включая пустое множество). Повторяя дословно определение меры $\nu_t = \nu_t^M$ для этого случая, мы получаем вероятностную меру на $\Omega(M)$.

Пусть теперь пространство с бесконечной мерой M представлено в виде объединения $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$ измеримых подмножеств ненулевой меры. Построим канонический изоморфизм

$$\Omega(M) \leftrightarrow \Omega(M_1) \times \Omega(M_2) \times \ldots \times \Omega(M_k).$$

А именно, пусть $\omega \in \Omega(M)$. Тогда $\omega^{(j)} = \omega \cap M_j$ есть элемент $\Omega(M_j)$. Таким образом, конфигурации $\omega \in \Omega(M)$ мы поставили в соответствие набор конфигураций $\omega^{(j)} \in \Omega(M_j)$. Легко видеть, что

$$\nu_t^M = \nu_t^{M_1} \times \nu_t^{M_2} \times \ldots \times \nu_t^{M_k}. \tag{4.1}$$

4.3. Каноническая изометрия пространства $L^2(\Omega(M))$ с бозонным пространством Фока $F(L^2(M))$. Назовем измеримую функцию ψ на M *ступенчатой*, если она принимает лишь конечное число значений и отлична от 0 лишь на множестве конечной меры.

Пусть ψ — ступенчатая функция на M. Определим функцию E_ψ на $\Omega(M)$ с помощью равенства

$$E_\psi(\omega) = \exp\Big(-t\int_M \psi(m)\, d\mu(m)\Big) \prod_{m_j\in\omega} \big(1 + \psi(m_j)\big). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1.

а) (*формула Кэмпбелла*) $\displaystyle\int_{\Omega(M)} E_\psi(\omega)\, d\nu_t(\omega) = 1;$

б) $$\int_{\Omega(M)} E_\psi(\omega)\overline{E_\theta(\omega)}\, d\nu_t(\omega) = \exp\Big(\int_M \psi(m)\bar\theta(m)\, d\mu(m)\Big). \tag{4.3}$$

Доказательство.

а) Пусть функция ψ принимает значение λ_k на множестве $A_k \subset M$ ($k = 1, \ldots, l$). Заметим, что функция E_ψ постоянна на множестве $\bigcap\limits_{k=1}^{l} S(A_k, n_k)$ и равна на нем

$$\exp\Big(-t\sum \lambda_k\mu(A_k)\Big) \prod_{k=1}^{l} (1 + \lambda_k)^{n_k}.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega(M)} E_\psi(\omega)\, d\omega = \sum_{n_1,\ldots,n_k} \exp\Big(-t\sum_k \lambda_k\mu(A_k)\Big) \prod_{k=1}^{l} (1 + \lambda_k)^{n_k} \prod_{k=1}^{l} \Big[\frac{(t\mu(A_k))^{n_k}}{n_k!}\, e^{-t\mu(A_k)}\Big],$$

а это, с очевидностью, равно 1.

б) Легко видеть, что

$$E_\psi(\omega)E_{\bar\theta}(\omega) = \exp\Big(t\int\limits_M \psi(m)\bar\theta(m)\,dm\Big)E_{(1+\psi)(1+\bar\theta)-1}.$$

Теперь применяем утверждение а). Теорема доказана. ■

Следствие 4.2. Пусть последовательность $\psi_j(m)$ ступенчатых функций сходится к $\psi(m)$ в $L^2(M)$. Тогда последовательность $E_{\psi_j}(\omega)$ фундаментальна в $L^2(\Omega(M))$.

Доказательство.

$$\big\|E_{\psi_j}(\omega) - E_{\psi_i}(\omega)\big\|^2_{L^2} = \int\limits_{\Omega(M)}\big(E_{\psi_j}\overline{E}_{\psi_j} - E_{\psi_j}\overline{E}_{\psi_i} - E_{\psi_i}\overline{E}_{\psi_j} + E_{\psi_i}\overline{E}_{\psi_i}\big)\,d\nu_t.$$

Формула (4.3) делает стремление этой величины к 0 очевидным. ■

В силу этого следствия отображение

$$\psi \mapsto E_\psi$$

продолжается до непрерывного отображения

$$L^2(M) \to L^2(\Omega(M)).$$

Мы сохраним за этим отображением то же обозначение $\psi \mapsto E_\psi$.

Предложение 4.3. Линейные комбинации функций E_ψ плотны в $L^2(\Omega(M))$.

Доказательство. Пусть $A_1, \dots, A_l$ — попарно непересекающиеся подмножества конечной меры в M. Пусть ψ принимает значения $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ на множествах $A_1, \dots, A_l$ и равна 0 вне $\bigcup A_j$. Рассмотрим функцию

$$\chi(\omega) = \Big(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\Big)^{n_1}\dots\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda_l}\Big)^{n_l}E_\psi(\omega)\Big|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_l=-1}.$$

Легко видеть, что функция $\chi(\omega)$ равна ненулевой постоянной на множестве $\bigcap_j S(A_j, n_j)$ и равна 0 вне этого множества. Теперь утверждение становится очевидным. ■

Напомним теперь (см. § VI.1), что в бозонном пространстве Фока $F(H)$ мы определяли систему функций φ_h такую, что

$$\langle\varphi_h, \varphi_{h'}\rangle = \exp(h', h).$$

Рассмотрим в качестве H пространство $L^2(M)$. Тогда

$$\langle\varphi_h, \varphi_{h'}\rangle = \exp\Big(\int\limits_M \overline{h(m)}h'(m)\,d\mu(m)\Big).$$

Мы видим, что

$$\langle\varphi_h, \varphi_{h'}\rangle_{F(L^2(M))} = \langle E_{\bar h}, E^{\prime}_{\bar h}\rangle_{L^2(\Omega(M))}.$$

Таким образом, мы можем отождествить $F(L^2(M))$ с $L^2(\Omega(M))$, отождествляя функции $\varphi_h \in F(L^2(M))$ и $E_{\bar h} \in L^2(\Omega(M))$. Учитывая, что в пространстве Фока

$$\langle f, \varphi_h\rangle = f(h),$$

мы получаем явную формулу для унитарного оператора $I : L^2(\Omega(M)) \to F(L^2(M))$:

$$Ig(h) = \int\limits_{\Omega(M)} g(\omega)E_h(\omega)\,d\nu_t(\omega).$$

4.4. Некоторые вспомогательные свойства функций E_ψ. Нам понадобятся функции E_ψ для некоторых $\psi \notin L^2(M)$. Пусть $\psi \in L_1(M)$ вещественна и неотрицательна. Пусть $\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \dots$ — последовательность неотрицательных ступенчатых функций, сходящихся к ψ поточечно. Тогда последовательность функций

$$\widetilde{E}_{\psi_j}(\omega) = \prod_{m_\alpha\in\omega}\big(1 + \psi_j(m_\alpha)\big)$$

монотонно возрастает, а интегралы от них

$$\int\limits_{\Omega(M)}\widetilde{E}_{\psi_j}(\omega)\,d\omega = \exp\Big(t\int\limits_M \psi_j(m)\,d\mu(m)\Big)$$

ограничены. По теореме о монотонной сходимости последовательность $\widetilde{E}_{\psi_j}$ сходится поточечно (а также в $L^1(\Omega(M))$) к некоторой функции $\widetilde{E}_\psi$. Теперь мы можем положить

$$E_\psi(\omega) = \exp\Big(-t\int\limits_M \psi(m)\,d\mu(m)\Big)\widetilde{E}_\psi(\omega).$$

Лемма 4.4. Пусть $\psi \in L^1(M)$ и $\psi \geqslant 0$ или $\psi \in L^2(M)$. Пусть множества $A_1, \dots, A_l$ конечной меры попарно не пересекаются. Тогда

$$\int\limits_{\bigcap_j S(A_j,n_j)} E_\psi(\omega)\,d\omega = \exp\Big(-t\int\limits_{A_1\cup\ldots\cup A_l}(\psi(m)+1)\,d\mu(m)\Big)\prod_{j=1}^{l}\frac{1}{n_j!}\Big(t\int\limits_{A_j}(\psi(m)+1)\,d\mu(m)\Big)^{n_j}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $A_{l+1} = M \setminus \big(\bigcup A_j\big)$. Определим функции $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{l+1}$ так, что $\varkappa_j = \psi$ на A_j и $\varkappa_j$ равна 0 вне A_j. Легко видеть, что

$$E_\psi = E_{\varkappa_1}E_{\varkappa_2}\dots E_{\varkappa_l}E_{\varkappa_{l+1}}. \tag{4.5}$$

При этом функция $E_{\varkappa_\alpha}(\omega)$ зависит лишь от $\omega \cap A_j$, а не от самого ω. Учитывая (4.1), получаем

$$\int\limits_{\bigcap_j S(A_j,n_j)} E_\psi(\omega)\,d\nu_t^M(\omega) = \prod_{j=1}^{l}\int\limits_{S(A_j,n_j)} E_{\varkappa_j}(\omega)\,d\nu_t^{A_j}(\omega).$$

Итак, нам достаточно проверить формулу

$$\int\limits_{S(A,k)} E_\varkappa(\omega)\,d\nu_t(\omega) = \exp\Big(-t\int\limits_A(\varkappa(m)+1)\,d\mu(m)\Big)\frac{1}{k!}\Big(t\int\limits_A(\varkappa(m)+1)\,d\mu(m)\Big)^k, \tag{4.6}$$

где $\varkappa$ равно 0 вне A. Обозначим через $\chi(A, k \mid \omega)$ функцию, равную 1 на $S(A, k)$ и равную 0 на $S(A, j)$ при $j \neq k$. Рассмотрим производящую функцию

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_{S(A,k)} E_\varkappa(\omega)\, d\nu_t(\omega) = \int_{\Omega(M)} E_\varkappa(\omega)\Big(\sum z^k \chi(A, k \mid \omega)\Big)\, d\nu_t(\omega). \tag{4.7}$$

Далее, заметим, что выражение

$$\sum z^k \chi(A, k \mid w)$$

само является функцией вида $\lambda \cdot E_{\theta_z}$, где

$$\theta_z(m) = \begin{cases} (z-1), & m \in A, \\ 0, & m \notin A, \end{cases}$$

а

$$\lambda = \exp\big((z-1)\mu(A)\big).$$

Поэтому (4.7) равно

$$\lambda \int_{\Omega(M)} E_\varkappa(\omega) E_{\theta_z}(\omega) d\nu_t(\omega) = \exp\big(t(z-1)\mu(A)\big) \exp\Big(t(z-1)\int_A \varkappa(m)\, d\mu(m)\Big) =$$

$$= \exp\Big(-t\int_A (\varkappa(m)+1)\, d\mu(m)\Big) \exp\Big(tz \int_A (\varkappa(m)+1)\, d\mu(m)\Big).$$

Коэффициент при z^k дает правую часть формулы (4.6). Корректность этого вычисления нуждается в некотором обосновании. Проведем его сначала в случае положительной функции $\psi \in L^1(M)$ (именно это мы будем использовать ниже). Понятно, что для ступенчатой функции ψ формула (4.4) верна. Далее, снова берем последовательность $\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \ldots$ ступенчатых функций, сходящуюся почти всюду к ψ, а затем по теореме о монотонной сходимости мы можем перейти к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\bigcap_j S(A_j, n_j)} \widetilde{E}_{\psi_p}\, d\nu.$$

Чтобы провести обоснование в случае $\psi(m) \in L^2$, заметим, что формула (4.4) верна для ступенчатых функций, а так как обе части непрерывно зависят от $\psi \in L^2$, формула верна всегда. ■

4.5. Действие группы Gms_∞ **в** $L^2(\Omega(M))$. Группа Gms_∞ действует на множестве $\Omega(M)$ очевидным образом, а именно, если $g \in \mathrm{Gms}_\infty$, а $\omega = (m_1, m_2, \ldots) \in \Omega(M)$, то $g\omega := (gm_1, gm_2, \ldots)$.

Теорема 4.5. Мера ν_t квазиинвариантна относительно действия группы Gms_∞, при этом производная Радона—Никодима преобразования $g : \omega \mapsto g\omega$ равна $E_{g'-1}$, где $g'(m)$ — производная Радона—Никодима преобразования $g : M \to M$.

Доказательство. Итак, нужно проверить, что для любого измеримого множества $B \subset \Omega(M)$ выполнено

$$\mu(gB) = \int_B E_{g'-1}(\omega)\, d\nu_t(\omega).$$

Это достаточно сделать в случае, когда $B = \bigcap_{j=1}^k S(A_j, n_j)$. В силу леммы 4.4

$$\int_{\bigcap_{j=1}^k S(A_j, n_j)} E_{g'-1}(\omega)\, d\nu_t(\omega) = \prod_{j=1}^k \left[\exp\Big(-t\int_{A_j} g'(m)\, d\mu(m)\Big) \frac{1}{n_j!}\Big(t\int_{A_j} g'(m)\, d\mu(m)\Big)^{n_j}\right].$$

Учитывая, что

$$\int_{A_j} g'(m)\, d\mu(m) = \mu(gA_j),$$

мы получаем искомое утверждение. ■

Наличие Gms_∞-квазиинвариантной меры автоматически дает серию унитарных представлений группы Gms_∞. А именно, Gms_∞ действует в $L^2\big(\Omega(M), \nu_t\big)$ по формуле

$$T_{s,t}(g) f(\omega) = f(g\omega)(E_{g'-1}(\omega))^{(1/2)+is},$$

где $s \in \mathbb{R}$, $g \in \mathrm{Gms}_\infty$, $\omega \in \Omega(M)$.

4.6. Действие группы Gms_∞ **в пространстве Фока** $L^2(M)$. В п. 4.3 мы отождествили пространства $L^2\big(\Omega(M, \nu_t)\big)$ и $F(L^2(M))$. Поэтому Gms_∞ действует в $F(L^2(M))$. Построить это действие очень просто.

Пусть Gms_∞ действует $L^2(M)$ аффинными преобразованиями $A_{s,t}(g)$ по формуле

$$A_s(g) f(m) = f(g(m)) g'(m)^{(1/2)+is} + \sqrt{t}\big(g'(m)^{(1/2)+is} - 1\big),$$

где $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Важно заметить, что $1 \notin L^2(M)$, но $\big(g'(m)^{(1/2)+is} - 1\big) \in L^2(M)$. Таким образом, мы получили вложение группы Gms_∞ в группу $\mathrm{Isom}(L^2(M))$. Ограничивая представление Exp группы Isom на подгруппу Gms_∞, мы получаем некоторое унитарное проективное представление $P_{s,t}$ группы Gms_∞ в $F(L^2(M))$. По построению, представление $P_{s,t}$ является проективным. На самом деле оно линеаризуемо. Для того, чтобы сделать $P_{s,t}$ линейным, нужно скалярный множитель

$$\exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\langle b, b\rangle\Big\} = \exp\Big\{-\tfrac{t}{2}\int_M \big|(p'(m))^{(1/2)+is} - 1\big|^2\, d\mu(m)\Big\}$$

в формуле (1.1) заменить на

$$\exp\Big(-\tfrac{t}{2}\int_M \big((p'(m))^{(1/2)+is} - 1\big)^2\, d\mu(m)\Big).$$

Задача. Покажите, что каноническая изометрия $L^2\big(\Omega(M), \nu_t\big) \leftrightarrow F(L^2(M))$ отождествляет представления $T_{s,t}$ и $P_{s,t}$ группы Gms_∞.

Задача. Докажите, что представления $T_{s,t}$ неприводимы и попарно неэквивалентны.

4.7. Конструкции представлений группы Gms_∞. Группа Gms_∞ имеет довольно много унитарных представлений. Сейчас мы построим серию действий Gms_∞ в бозонном пространстве Фока.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_k$, $t > 0$. Определим аффинное действие $A_{s_1,\ldots,s_k;t}$ группы Gms_∞ в пространстве L^2 на k-кратном произведении $M^{(k)} = M \times \ldots \times M$:

$$A_{s_1,\ldots,s_k;t}(g)f(m_1,\ldots,m_k) =$$
$$= f(gm_1,\ldots,gm_k)\prod_{j=1}^{k}(g'(m_j))^{(1/2)+is_j} + \sqrt{t}\Big(\prod_{j=1}^{k}(g'(m_j))^{(1/2)+is_j} - 1\Big).$$

Таким образом, мы получаем серию вложений

$$\mathrm{Gms}_\infty \to \mathrm{Isom}\big(L^2(M \times M \times \ldots \times M)\big)$$

и, следовательно, серию унитарных представлений Gms_∞. Можно показать, что все полученные таким образом представления попарно неэквивалентны, а при $s_1 > s_2 > \ldots > s_k$ — неприводимы.

Замечание. Эти же представления можно построить с помощью пуассоновских мер применением стандартной процедуры индуцирования, см. [Исмагилов (1975)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1975)].

4.8. Двойные классы смежности. Рассмотрим теперь в Gms_∞ подгруппу Ams_∞, состоящую из преобразований, сохраняющих меру. Напомним, что Ams_∞ является тяжелой группой.

Рассмотрим, далее, разбиение $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_\infty$ пространства M, причем множества $M_1, M_2, \ldots, M_k$ имеют конечную меру, а мера множества M_∞ — бесконечна. Обозначим через $\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}}$ подгруппу в Ams_∞, состоящую из преобразований, переводящих каждое множество M_j в себя.

Пусть

$$\mathfrak{h} : M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_\infty, \quad \mathfrak{h}' : M = M_1' \cup M_2' \cup \ldots \cup M_{k'} \cup M_\infty'$$

— два разбиения пространства M. Рассмотрим двойные классы смежности

$$\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}'}.$$

Каждому такому двойному классу смежности γ мы сейчас поставим в соответствие матрицу $r_{\alpha\beta}$ размера $(k+1)\times(k'+1)$, матричные элементы которой суть меры на группе $\mathbb{R}^*$ всех положительных чисел по умножению ($\alpha = 1,2,\ldots,k,\infty$; $\beta = 1,2,\ldots,k',\infty$). Пусть $g \in \gamma$. Рассмотрим множество $g^{-1}(M_\alpha) \cap M_\beta$. Производная Радона—Никодима $g'(m)$ является функцией $M \to \mathbb{R}^*$. Пусть, по определению, $r_{\alpha\beta}$ есть образ меры μ на $g^{-1}(M_\alpha) \cap M_\beta$ при отображении $g' : g^{-1}(M_\alpha) \cap M_\beta \to \mathbb{R}$. Заметим, что все меры $r_{\alpha\beta}$ конечны, кроме меры $r_{\infty\infty}$, которая бесконечна. Может оказаться, что точка $1 \in \mathbb{R}^*$ имеет бесконечную меру (в случае, когда $g'(m)$ равна 1 на множестве бесконечной меры). Однако на множестве $\mathbb{R}^* \setminus 1$ мера $r_{\infty\infty}$ является настоящей σ-конечной мерой.

Легко видеть, что матрица $r_{\alpha\beta}$ зависит не от самого элемента $g \in \mathrm{Gms}_\infty$, а лишь от двойного класса смежности $\gamma \in \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Gms}_\infty^{\mathfrak{h}'}$, его содержащего; при этом разным классам смежности соответствуют разные матрицы.

Далее, матрица $R = \{r_{\alpha\beta}\}$, как легко видеть, удовлетворяет условиям

1. $\displaystyle\sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^*} dr_{\alpha\beta}(x) = \mu(M_\beta)$,
2. $\displaystyle\sum_\beta \int_{\mathbb{R}^*} x\, dr_{\alpha\beta}(x) = \mu(M_\alpha)$,
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} (x-1)\, dr_{\infty\infty}(x) < \infty$.

Рассмотрим, далее, три разбиения $\mathfrak{h} : M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_\infty$, $\mathfrak{h}' : M = M_1' \cup \ldots \cup M_{k'} \cup M_\infty'$ и $\mathfrak{h}'' = M_1'' \cup \ldots \cup M_{k''} \cup M_\infty''$; рассмотрим два двойных класса смежности $\gamma_1 \in \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}'}$, $\gamma_2 \in \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}'} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}''}$.

Пусть R и Q — соответствующие матрицы. Запишем их в виде

$$R = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}k' \\ \}1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k} & \underbrace{}_{1} \end{array} & \end{array} \qquad Q = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} X & y \\ z & u \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}k'' \\ \}1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k'} & \underbrace{}_{1} \end{array} & \end{array}$$

Легко понять, что произведению двойных классов смежности отвечает матрица

$$R \circ Q = \begin{pmatrix} A\Lambda^{-1}X & A\Lambda^{-1}y + b \\ c\Lambda^{-1}X + z & d + u + c\Lambda^{-1}y \end{pmatrix},$$

где Λ — диагональная матрица с собственными числами $\mu(M_1'), \ldots, \mu(M_{k'}')$, а умножение матриц понимается в обычном смысле слова (меры на $\mathbb{R}^*$ образуют кольцо относительно сложения и свертки), см. также п. 3.4. Мы не будем формулировать по этому поводу точной теоремы.

4.9. Литературные замечания. О мерах Пуассона см. [Kingman (1993)]. В этом параграфе мы следуем работам [Исмагилов (1975)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1975)]; в этих статьях, правда, речь шла не о группе Gms_∞, а о группе диффеоморфизмов с компактным носителем. В [Исмагилов (1975)] получено описание всех Ams_∞-сферических представлений группы Gms_∞. Образы гауссовских векторов из $F(L^2(M))$ в $L^2(\Omega(M))$ и отчасти образы гауссовских операторов вычислены в [Неретин (1997а)].

Добавление А

Вещественные классические категории и двойственность Хау

А.0. В § V.I мы определили три категории $\mathbf{Sp}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{SO}^*$, связанные с сериями вещественных классических групп $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{SO}^*(2n)$. Сейчас мы добавим к ним 7 категорий — $\mathbf{GL}(\mathbb{R})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{C})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{H})$, $\mathbf{O}(\mathbb{R})$, $\mathbf{O}(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{H})$, связанные с сериями групп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(p,q)$.

А.1. Категории $\mathbf{O}(\mathbb{R})$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{H})$. Объектами этих категорий являются пространства $V^{p,q} = V_+ \oplus V_- = \mathbb{K}^p \oplus \mathbb{K}^q$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, состоящие из векторов

$$x = (x^+, x^-) = (x_1^+, \ldots, x_p^+; x_1^-, \ldots, x_q^-),$$

снабженные эрмитовой формой

$$M(x,y) = \sum x_\alpha^+ \overline{y}_\alpha^+ - \sum x_\beta^- \overline{y}_\beta^-. \tag{A.1}$$

Морфизмы $V^{p,q} \to V^{r,s}$ суть линейные отношения $L : V^{p,q} \rightrightarrows V^{r,s}$, удовлетворяющие условиям

1. если $(x,y) \in L$, то $M(x,x) \geqslant M(y,y)$;
2. если $x \in \operatorname{Ker} L$, $x \neq 0$, то $M(x,x) > 0$; если $y \in \operatorname{Indef} L$, $y \neq 0$, то $M(y,y) < 0$;
3. L имеет максимально возможную размерность, т. е. $\dim L = p + s$.

Мы будем называть линейные отношения $L \in \operatorname{Mor}\big(V^{p,q}, V^{r,s}\big)$ «линейными отношениями, *сжимающими* эрмитову форму M».

А.2. Другие категории. Объекты 7 оставшихся категорий $\mathbf{K} = \mathbf{GL}(\mathbb{R})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{C})$, $\mathbf{GL}(\mathbb{H})$, $\mathbf{SO}^*$, $\mathbf{Sp}$, $\mathbf{Sp}(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}(\mathbb{C})$ устроены следующим образом. Рассматривается пространство $V = V_+ \oplus V_- = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$, снабженное эрмитовой формой $M = M_V$:

$$M(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^+ \overline{y}_\alpha^+ - \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^- \overline{y}_\alpha^-.$$

Кроме того, в V вводится невырожденная кососимметричная, симметричная, эрмитова или антиэрмитова форма $\Lambda = \Lambda_V$ так, что пространства V_+ и V_- изотропны относительно Λ (тело $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и тип формы Λ определяются категорией $\mathbf{K}$).

Морфизмы $V \to W$ суть линейные отношения $L : V \rightrightarrows W$ удовлетворяющие двум условиям:

а) L сжимает форму M;

б) L *«сохраняет»* форму Λ», т. е. M является максимальным изотропным подпространством в $V \oplus W$ относительно формы

$$\Lambda_{V\oplus W}\big((v,w),(v',w')\big) = \Lambda_V(v,v') - \Lambda_W(w,w').$$

А.3. Список категорий. Список всех категорий, которые могут быть получены таким образом, приведен в таблице на странице 355.

В первом столбце таблицы указано название категории. Во втором — тело $\mathbb{K}$, в третьем столбце стоит объект категории (здесь $p,q,n \in \mathbb{Z}_+$); этот объект во всех случаях снабжен эрмитовой формой M, задаваемой формулой (А.1), а также формой Λ, указанной в 4-м столбце таблицы.

Группа $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V)$ автоморфизмов объекта V (из третьего столбца) указана в 5-м столбце. Множество $\mathrm{Mor}(0,V)$ является G-однородным пространством G/K, где подгруппа $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ указана в 6-м столбце. Заметим, что во всех случаях K является максимальной компактной подгруппой в G, и тем самым G/K есть *риманово некомпактное симметрическое пространство*.

Далее, для любого элемента $R \in \mathrm{Mor}(0,V)$ определен угловой оператор $Z = Z(R) : V_+ \to V_-$ (напомним, что R есть график оператора Z), он удовлетворяет условию $\|Z\| < 1$, а также условию из 8-го столбца.

Полугруппа эндоморфизмов объекта V содержит открытую плотную подполугруппу, состоящую из графиков обратимых операторов. Эту подполугруппу мы обозначим через $\mathrm{End}^\circ(V)$. Элементы подполугруппы $\mathrm{End}^\circ(V)$ можно рассматривать как операторы, сохраняющие форму Λ_V, поэтому $\mathrm{End}^\circ(V)$ является подполугруппой с непустой внутренностью в группе $\widetilde{\mathrm{G}}$, указанной в 7-м столбце.

Любой элемент $Q \in \mathrm{Mor}(V,W)$ является графиком оператора

$$H = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} : V_+ \oplus W_- \to V_- \oplus W_+,$$

где H удовлетворяет условиям:

1. $\|H\| \leqslant 1$;
2. $\|K\| < 1$, $\|N\| < 1$;
3. условию из 9-го столбца.

Во всех 10 категориях определена инволюция. Если $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$, то $P^* \in \mathrm{Mor}(W,V)$ есть ортогональное дополнение до P относительно формы

$$M_{V\oplus W}\big((v,w),(v',w')\big) = M_V(v,v') - M_W(w,w').$$

Замечание. Из таблицы видно, что все 10 классических серий *некомпактных римановых симметрических пространств*

$\mathrm{U}(p,q) / \big(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q)\big)$;	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) / \mathrm{U}(n)$;	$\mathrm{SO}^*(2n) / \mathrm{U}(n)$;
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) / \mathrm{U}(n)$;	$\mathrm{O}(p,q) / \big(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)\big)$;	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) / \mathrm{O}(n)$;
$\mathrm{O}(n,\mathbb{C}) / \mathrm{O}(n)$;	$\mathrm{Sp}(p,q) / \big(\mathrm{Sp}(p)\times\mathrm{Sp}(q)\big)$;	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H}) / \mathrm{Sp}(n)$;
	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) / \mathrm{Sp}(n)$	

могут быть реализованы как матричные шары над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$. Пространства

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n); \quad \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) / \mathrm{SU}(n); \quad \mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) / \mathrm{Sp}(n)$$

являются гиперповерхностями в соответствующих шарах.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Название	Тело	Объект	Форма Λ	$G = \mathrm{Aut}(V)$	K	$\tilde{G}$	Условие на угловой оператор	Условие на преобразование Потапова $H = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$	«Комплексная оболочка»
U	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$	—	$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathrm{U}(p)\times \mathrm{U}(q)$	$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$	—	—	$\mathrm{U}\times\mathrm{U}$
Sp	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- - x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$Z = Z^t$	$H = H^t$	$\mathrm{Sp}\times\mathrm{Sp}$
$\mathbf{SO}^*$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- + x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$	$Z = -Z^t$	$K = -K^t, N = -N^t, M = L^t$	$\mathrm{SO}^*\times\mathrm{SO}^*$
$\mathbf{GL}(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$	$\sum(x_i^+\overline{y}_i^- - x_i^-\overline{y}_i^+)$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{U}(n,n)$	$Z = Z^*$	$H = H^*$	U
$\mathbf{O}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$	—	$\mathrm{O}(p,q)$	$\mathrm{O}(p)\times \mathrm{O}(q)$	$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})$	—	—	U
$\mathbf{GL}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- - x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$	$Z = Z^t$	$H = H^t$	Sp
$\mathbf{O}(\mathbb{C})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$	$\sum(x_i^+y_i^- + x_i^-y_i^+)$	$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{O}(n,n)$	$Z = -Z^t$	$K = -K^t, N = -N^t, M = L^t$	SO^*
$\mathbf{Sp}(\mathbb{H})$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^p \oplus \mathbb{H}^q$	—	$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\mathrm{Sp}(p)\times \mathrm{Sp}(q)$	$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{H})$	—	—	U
$\mathbf{GL}(\mathbb{H})$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^n$	$\sum(x_i^+\overline{y}_i^- - x_i^-\overline{y}_i^+)$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{SO}^*(4n)$	$Z = Z^*$	$H = H^*$	SO^*
$\mathbf{Sp}(\mathbb{C})$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^n$	$\sum(x_i^+\overline{y}_i^- + x_i^-\overline{y}_i^+)$	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{Sp}(n,n)$	$Z = -Z^*$	$K = -K^*, N = -N^*, M = L^*$	Sp

А.4. Двойственность Хау для Sp. Рассмотрим категорию $\mathbf{K}$ и группу Н. Определим категорию $\mathbf{K}\times$ Н. Объекты этой категории — те же, что и у категории $\mathbf{K}$, а

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}\times\mathrm{H}}(V,W) := \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V,W)\times \mathrm{H}.$$

Умножение морфизмов определяется очевидной формулой

$$(p_1,h_1)(p_2,h_2) = (p_1p_2, h_1h_2).$$

Пусть R — представление категории $\mathbf{K}\times$ Н. Рассмотрим разложение R на неприводимые представления

$$\mathrm{R} = \bigoplus_\sigma (\mathrm{T}_\sigma \otimes \pi_\sigma),$$

где T_σ — неприводимое представление $\mathbf{K}$, π_σ — неприводимое представление Н, а индекс σ пробегает некоторое множество. Мы скажем, что $\mathbf{K}$ и Н двойственны в R, если $\sigma\neq\sigma'$ влечет $\mathrm{T}_\sigma\neq \mathrm{T}_{\sigma'}$, $\pi_\sigma\neq\pi_{\sigma'}$.

Теперь мы построим канонический функтор

$$\tau_n : \mathbf{Sp}\times \mathrm{O}(n)\to \mathbf{Sp}.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное классическим скалярным произведением. Пусть $V\in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp}\times\mathbf{O}(n)) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$. Тогда $\tau_n(V) := V\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{R}^n$. На V мы имеем кососимметричную форму, а на $\mathbb{R}^n$ — симметричную форму. Поэтому $V\otimes\mathbb{R}^n$ снабжено кососимметричной формой, т. е. $V\otimes\mathbb{R}^n\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$. Далее, паре $(L,h)\in \in\mathrm{Mor}(V,W)\times$ Н ставится в соответствие подпространство

$$\tau_n(L,h)\subset (V\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{R}^n)\oplus(W\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{R}^n)$$

состоящее из векторов вида

$$(v\otimes x)\oplus(w\otimes hx),$$

где $(v,w)\in L$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь представление $\mathrm{W}^{(n)} = \mathrm{We}\circ\tau_n$ категории $\mathbf{Sp}\times\mathbf{O}(n)$, где We — представление Вейля.

Теорема двойственности Хау.

а) $\mathbf{Sp}$ и $\mathbf{O}(n)$ двойственны в $\mathrm{W}^{(n)}$.

б) В разложении

$$\mathrm{W}^{(n)} = \oplus\left(\mathrm{T}_\lambda^{(n)}\otimes\pi_\lambda^{(n)}\right)$$

представления $\mathrm{W}^{(n)}$ на неприводимые подпредставления представление $\pi_\lambda^{(n)}$ пробегает все неприводимые представления группы $\mathrm{O}(n)$.

в) Если $n\neq m$, то $\mathrm{T}_\lambda^{(n)}$ не эквивалентно $\mathrm{T}_\mu^{(m)}$.

г) Любое *голоморфное* проективное $*$-представление категории $\mathbf{Sp}$ имеет вид $\mathrm{T}_\lambda^{(n)}$.

Итак, голоморфные проективные $*$-представления категории $\mathbf{Sp}$ нумеруются парами (n,π), где $n\in\mathbb{Z}^+$, а π — неприводимое представление группы $\mathrm{O}(n)$.

А.5. Теория $*$-представлений вещественных классических категорий. Более-менее очевидным образом строятся естественные функторы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}\times\mathrm{U}(n) \arrow[r] & \mathbf{U} \arrow[r] & \mathrm{Sp} \\ \mathrm{SO}^*\times\mathrm{Sp}(n) \arrow[r] & \mathbf{SO}^* \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Оказывается, что для категорий $\mathbf{U}$ и $\mathbf{SO}^*$ выполнена теорема двойственности Хау для представления Вейля (точно такая же, как для $\mathbf{Sp}$). Это дает описание голоморфных проективных $*$-представлений категорий $\mathbf{U}$ и $\mathbf{SO}^*$. Описание неголоморфных представлений дается следующей теоремой.

Теорема А.1. Любое проективное $*$-представление категории $\mathbf{Sp}$ (соответственно $\mathbf{U}$ и $\mathbf{SO}^*$) является произведением голоморфного проективного $*$-представления на антиголоморфное проективное $*$-представление.

Теория $*$-представлений остальных 7 классических категорий устроена примерно следующим образом. Например, в случае $\mathbf{GL}(\mathbb{R})$ очевидным образом строится вложение $\mathbf{GL}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Sp}$ (см. условие на преобразование Потапова). Оказывается, что любое неприводимое проективное $*$-представление категории $\mathbf{GL}(\mathbb{R})$ есть ограничение неприводимого голоморфного $*$-представления категории $\mathbf{Sp}$. Так же обстоит дело и в остальных 6 случаях, соответствующая эрмитова категория указана в последнем столбце таблицы.

А.6. Литературные замечания. Полугруппы типа $\mathrm{End}^\circ(V)$ изучались в работах [Потапов (1955)], [Винберг (1980)], [Ольшанский (1981)], [Paneitz (1981)], см. также [Hilgert, Hoffmann, Lawson (1989)]. Перечисленные выше категории определены в [Неретин (1991.1)]. Ольшанский ([Ольшанский (1981)]) получил описание всех $*$-представлений полугрупп $\mathrm{End}^\circ(V)$; из этого описания (с помощью вычисления спускающего функтора) легко выводятся все утверждения п. А.5.

Теорема двойственности Хау для групп была получена в [Howe (1989)], сформулированная нами теорема из теоремы Хау легко выводится.

Отметим, что теоремы двойственности Хау для групп $\mathrm{C}_n = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{D}_n = \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ могут быть перенесены на категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$.

Добавление В

Шарниры, комплексы Сэмпля и границы симметрических пространств

Рассмотрим полупростую группу G и автоморфизм σ группы G порядка 2, т. е. отображение $g \mapsto g^\sigma$ такое, что

$$g^{\sigma\sigma} = g \qquad (gh)^\sigma = g^\sigma h^\sigma .$$

Обозначим через H подгруппу в G, состоящую из неподвижных точек отображения σ. Однородные пространства вида G / H называются *симметрическими пространствами*.

Простейший пример симметрического пространства — *плоскость Лобачевского* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2)$, которая известным образом отождествляется с единичным кругом $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ действует на круге мебиусовскими преобразованиями). Как известно, к плоскости Лобачевского удобно добавить окружность $|z| = 1$ — так называемый *абсолют*.

Вопрос о том, что является аналогом абсолюта для более сложных симметрических пространств, оказывается неожиданно сложным, а напрашивающиеся в ряде случаев простые ответы не во всех отношениях являются удовлетворительными. Этот вопрос исследовался в связи с самыми различными целями: перечислительные задачи алгебраической геометрии (см. [Study, de Concini, Procesi (1983)]), автоморфные формы и гармонический анализ на симметрических пространствах (см. [Satake (1960)], [Карпелевич (1965)]), бесконечномерные группы (см. [Неретин (1992)]) и др. Загадочным образом все пути приводили к очень похожим ответам, понять которые, однако, довольно сложно.

Самая старая научная традиция здесь связана с пополнением пространства $\mathrm{G} / \mathrm{H} = \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, это пространство очевидным образом отождествляется с пространством всех невырожденных поверхностей второго порядка в $(n-1)$-мерном комплексном проективном пространстве, а «правильная компактификация» пространства $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ называется *полным пространством квадрик* ("complete quadrics"). В случае $n = 3, 4$ это многообразие изучалось в XIX веке Штуди (E. Study), Шубертом (H. Schubert) и др. Изучение n-мерного случая было начато

Сэмплем (I. G. Semple) в 40-е годы. В работах Тиррелла (J. A. Tyrrell), Де Кончини (C. de Concini), Прочези (C. Procesi) и др. была постепенно построена теория "complete symmetric varieties" — «хороших компактификаций» для симметрических пространств G / H таких, что обе группы G и H являются комплексными.

Другая научная традиция — теория границ некомпактных римановых симметрических пространств (1958–1965) (Фюрстенберг (H. A. Furstenberg), Сатаке (I. Satake), Карпелевич, Дынкин, Ольшанецкий, Кушнер и др.), которая была впоследствие расширена Ошимой (T. Oshima) и Секигучи (J. Sekiguchi) на псевдоримановы симметрические пространства.

Цель этого раздела — описание подобных конструкций на языке элементарной линейной алгебры (подробнее см. [Неретин (1997)]).

В.1. Шарниры. Пусть $P : V \rightrightarrows W$ — линейное отношение, а $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Определим линейное отношение $\lambda P : V \rightrightarrows W$ как множество всех векторов $(v, \lambda w) \in V \oplus W$ таких, что $(v, w) \in P$.

Шарниром $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m)$ в $\mathbb{C}^n$ назовем последовательность n-мерных линейных отношений $P_j : \mathbb{C}^n \rightrightarrows \mathbb{C}^n$, определенных с точностью до множителя и удовлетворяющих условиям

1. $\operatorname{Ker} P_j = \operatorname{Dom} P_{j+1}$; $\operatorname{Im} P_j = \operatorname{Indef} P_{j+1}$;
2. $\operatorname{Indef} P_1 = 0$; $\operatorname{Ker} P_m = 0$;
3. $P_j \neq \operatorname{Ker} P_j \oplus \operatorname{Indef} P_j$.

Замечание. Главным из этих условий является первое. Заметим, что с точки зрения умножения в категории **GA** (см. § II.7) линейные отношения P_j и P_{j+1} находятся в наихудшем взаимном расположении. Условие 2 является истолкованием условия 1 в случае $j = 0$ и $j = m$. Наконец, условие 3 является чисто техническим, и его можно было бы и не писать.

Пространство всех шарниров в $\mathbb{C}^n$ мы обозначим через Δ_n. Заметим, что группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ действует на Δ_n преобразованиями

$$(g_1, g_2) : (P_1, \dots, P_m) \mapsto \left(g_1^{-1} P_1 g_2, \dots, g_1^{-1} P_m g_2\right).$$

Заметим также, что график *обратимого* оператора является шарниром. Поэтому группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ канонически вкладывается в пространство Δ_n.

В.2. Операторы $\lambda^j(P)$. Пусть $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m)$ — шарнир в $\mathbb{C}^n$. Напомним, что каждому линейному отношению P_k ставится в соответствие линейный оператор $\lambda(P_k)$ в $\Lambda(\mathbb{C}^n) = \Lambda^n$, определенный с точностью до умножения на множитель см. § II.7. Ввиду того, что $\dim P_k = n$, все подпространства $\Lambda^k \mathbb{C}^n \subset \Lambda \mathbb{C}^n$ являются $\lambda(P_k)$-инвариантными. Обозначим через $\lambda^j(P_k)$ ограничение оператора $\lambda(P_k)$ на $\Lambda^j \mathbb{C}^n$.

Пусть $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m) \in \Delta_n$. Рассмотрим последовательность операторов

$$\lambda^j(P_1), \lambda^j(P_2), \dots, \lambda^j(P_m). \tag{B.1}$$

Теорема В.1.

а) Последовательность (В.1) содержит не менее одного и не более двух ненулевых операторов.

б) Если последовательность (В.1) содержит два ненулевых члена, то эти члены стоят рядом, имеют ранг 1 и равны с точностью до умножения на множитель.

Определим оператор $\lambda^j(\mathfrak{P}) : \Lambda^j(\mathbb{C}^n) \to \Lambda^j(\mathbb{C}^n)$ как ненулевой член последовательности (В.1) (этот оператор определен с точностью до умножения на множитель).

В.3. Пространство шарниров Δ_n как пополнение $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$. Обозначим через $\mathrm{Mat}^*(W)$ пространство ненулевых линейных операторов в линейном пространстве W, определенных с точностью до пропорциональности.

Рассмотрим вложение

$$\Delta_n \to \mathop{\times}_{j=1}^{n-1} \mathrm{Mat}^*(\Lambda^j \mathbb{C}^n),$$

задаваемое формулой

$$\mathfrak{P} \mapsto \left(\lambda^1(\mathfrak{P}), \lambda^2(\mathfrak{P}), \dots, \lambda^{n-1}(\mathfrak{P})\right).$$

Таким образом, Δ_n реализуется как подмножество в прямом произведении проективных пространств.

Теорема В.2.

а) Δ_n является компактным гладким алгебраическим многообразием размерности $n^2 - 1$.

б) Группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ является плотным открытым подмножеством в Δ_n. Более того $\Delta_n \setminus \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ есть объединение $n - 1$ неприводимых алгебраических подмногообразий коразмерности 1.

Замечание. Многообразие Δ_n было построено в [Semple (1951)] как замыкание группы $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ в $\mathop{\times}_{j=1}^{n-1} \mathrm{Mat}^*(\Lambda^j \mathbb{C}^n)$. Точки этого замыкания называются *комплексами Сэмпля*. Само многообразие называется "*complete collineations*".

В.4. Complete quadrics. Пусть V — комплексное n-мерное линейное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой Λ. Любому симметрическому оператору A в V ставится в соответствие поверхность второго порядка в V задаваемая уравнением $\Lambda(Av, v) = 0$. Понятно, что операторам A и λA, где $\lambda \in \mathbb{C}$, соответствует одна и та же поверхность.

Рассмотрим теперь в $V \oplus V$ кососимметричную билинейную форму

$$\Lambda^\times\left((v, v'), (w, w')\right) = \Lambda(v, w') - \Lambda(v', w). \tag{B.2}$$

Через Σ мы обозначим пространство всех шарниров $\mathfrak{P} = (P_1, \dots, P_m)$ в V таких, что P_j — максимальные $\Lambda^\times$-изотропные подпространства в V.

Заметим, что однозвенные шарниры $\mathfrak{P} = (P_1) \in \Sigma_n$ суть графики симметрических обратимых операторов. Поэтому пространство S_n невырожденных квадрик канонически вкладывается в Σ_n.

Теорема В.3.

а) Σ_n — гладкое компактное алгебраическое многообразие.

б) $\Sigma_n \setminus S_n$ есть объединение $n - 1$ поверхностей коразмерности 1.

B.5. Граница Сатаке: пример. Пусть V — вещественное n-мерное линейное пространство, снабженное положительно определенной симметричной билинейной формой Λ. Введем в $V \oplus V$ кососимметричную билинейную форму (B.2). Обозначим через Γ_n пространство шарниров $\mathfrak{P} = (P_1, \ldots, P_m)$ в V, состоящих из максимальных $\Lambda^{\times}$ — изотропных подпространств в $V \oplus V$.

Группа $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$ действует в Γ_n преобразованиями

$$g : (P_1, \ldots, P_m) \to \left(gP_1g^{\mathrm{t}}, \ldots, gP_mg^{\mathrm{t}}\right),$$

однозвенные шарниры $\mathfrak{P} = (P) \in \Gamma_n$ соответствуют невырожденным симметрическим операторам в V. Обозначим через M_n^q множество всех невырожденных симметрических операторов в V, имеющих в точности q отрицательных собственных чисел. Легко видеть, что M_n^q является $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$-однородным пространством $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n - q, q)$.

Теорема B.4.

а) Γ_n есть компактное вещественно аналитическое многообразие.

б) $\Gamma_n \setminus \left(\bigcup M_n^q\right)$ есть объединение конечного числа гиперповерхностей коразмерности 1.

Таким образом, замыкание M_n^q в Γ_n есть некоторая компактификация пространства $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n - q, q)$.

Не составляет труда явно описать шарниры, лежащие в этом замыкании.

B.6. Замечания. Шарниры можно перемножить, см. [Неретин (1992)]. Компактификации римановых симметрических пространств, построенные Карпелевичем, а также Дынкиным и Ольшанецким, несколько более замысловаты, чем шарнирные компактификации. Подробное описание такого рода конструкций см. [Неретин (1997)]. Отметим два сюжета, родственных только что рассмотренному: работы Путчи (M. Putcha) и Реннера (L. Renner) по алгебраическим моноидам (см. [Renner (1985)]) и работа [Arbarello и др. (1988)] по аффинным алгебрам.

Добавление C

Бозон-фермионное соответствие

C.0. Рассмотрим следующие два пространства Фока:

1. бозонное пространство Фока $F(W_+)$, где W_+ — пространство функций вида $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ со скалярным произведением

$$\left\langle \sum c_k z^k, \sum c_k' z^k \right\rangle = \sum k c_k \overline{c_k'};$$

2. фермионное пространство Фока $\Lambda(\ell_2 \oplus \ell_2)$. Мы будем рассматривать его как пространство функций от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$. Обозначим через $\Lambda^{(k)}$ линейную оболочку всех одночленов вида

$$\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_p} \eta_{j_1} \ldots \eta_{j_q}, \tag{C.1}$$

где $q - p = k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Пространство $\Lambda^{(0)}$ можно определить немного иначе. Рассмотрим набор попарно антикоммутирующих переменных $\ldots, \zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$. Рассмотрим пространство, базис которого образуют всевозможные формальные бесконечные произведения

$$\zeta_{s_1} \zeta_{s_2} \zeta_{s_3} \cdots, \tag{C.2}$$

где $s_1 > s_2 > \ldots$ и $s_k = -k$ для больших k. Этому одночлену мы поставим в соответствие элемент (C.1), где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ — это в точности положительные элементы последовательности $s_1, s_2, \ldots$, а $-j_1 + 1, -j_2 + 1, \ldots, -j_q + 1$ — это в точности все неположительные целые числа, отсутствующие в последовательности $s_1, s_2, \ldots$.

Оказывается, что существует канонический изоморфизм

$$I : F(W_+) \leftrightarrow \Lambda^{(0)}.$$

В пп. C.1–C.5 мы дадим четыре описания этого изоморфизма.

C.1. Соответствие операторов рождения-уничтожения. Рассмотрим в $F(W_+)$ операторы рождения-уничтожения

$$a_n \psi(c) = c_n \psi(c), \quad a_n^* \psi(c) = n \frac{\partial}{\partial c_n} \psi(c).$$

Легко видеть, что

$$[a_i, a_j] = [a_i^*, a_j^*] = 0, \quad [a_j^*, a_i] = j \delta_{i,j}.$$

Изоморфизм I определяется из следующих условий:

1. вакуумный вектор $\psi_0(c) = 1$ в $F(W_+)$ переходит в вакуумный вектор $\varkappa_0(\xi, \eta) = 1$ в $\Lambda^{(0)}$;
2. операторы a_n переходят в

$$A_n = \sum_{j>0} \xi_{n+j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{\alpha+\beta=n+1} \xi_\alpha \eta_\beta + \sum_{j>0} \eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_{n+j}},$$

а операторы a_n^* — в A_n^*.

C.2. Соответствие переполненных систем. Пусть

$$f(u) = \sum_{j>0} p_j u^i.$$

Тогда вектору

$$\exp\Bigl(\sum p_j c_i\Bigr) \in F(W_+)$$

соответствует вектор

$$\exp\Bigl(\sum a_{ij} \xi_i \eta_j\Bigr) \in \Lambda^{(0)},$$

где числа a_{ij} определяются из условия

$$\sum a_{ij} x^{i-1} y^{j-1} = \frac{e^{f(x)-f(y)} - 1}{x - y}.$$

C.3. Соответствие базисов (см. [Pressley, Segal (1986)], глава 10). Отождествим пространство $F(W_+)$ с пространством симметрических функций (см. [Macdonald (1979)], 1.4), поставив в соответствие функции $g(c_1, c_2, \dots)$ функцию

$$g\Bigl(\sum_{i>0} h_i, \sum_{i>0} h_i^2, \sum_{i>0} h_i^3, \dots\Bigr),$$

где $h_1, h_2, \dots$ — бесконечный набор формальных переменных.

Напомним определение функций Шура (см. [Macdonald (1979)], 1.3). Рассмотрим набор $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \dots \geqslant s_k$ натуральных чисел, обозначим этот набор буквой S. *Функция Шура* $\Phi_S(h_1, h_2, \dots, h_k)$ определяется из условия

$$\Phi_S(h_1, h_2, \dots, h_k) = \frac{\begin{vmatrix} h_1^{s_1+k-1} & h_1^{s_2+k-2} & \dots & h_1^{s_k} \\ h_2^{s_1+k-1} & h_2^{s_2+k-2} & \dots & h_2^{s_k} \\ \vdots & & & \\ h_k^{s_1+k-1} & h_k^{s_2+k-2} & \dots & h_k^{s_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1^{k-1} & h_1^{k-2} & \dots & 1 \\ h_2^{k-1} & h_2^{k-2} & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ h_k^{k-1} & h_k^{k-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}}.$$

Положим

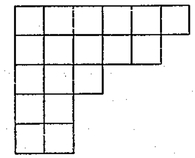
$$c_\alpha = h_1^\alpha + h_2^\alpha + \dots + h_k^\alpha.$$

Определим функции $\Psi_S(c_1, \dots, c_k)$ из условия

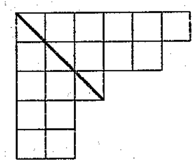
$$\Psi_S(c_1, \dots, c_k) := \Phi_S(h_1, \dots, h_k). \tag{C.3}$$

Оказывается, что функции Ψ_S образуют в пространстве $F(W_+)$ ортонормированный базис.

Обычным образом поставим в соответствие каждому набору S диаграмму Юнга, т. е. таблицу вида



у которой в строчке с номером j стоит s_j клеточек. Проведем, далее, в диаграмме Юнга диагональ



α_j: 6, 5, 1

β_j: 5 4 1

Пусть α_j — число клеток, лежащих в j-й строке справа от диагонали, а β_j — число клеток в j-м столбце снизу от диагонали; мы считаем, что клетка, лежащая на диагонали, лежит сверху от диагонали и снизу от диагонали (α_j, β_j — это так называемые *координаты Фробениуса*). Тогда функции $\Psi_S \in F(W_+)$ соответствует функция

$$\xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \dots \eta_{\beta_1} \eta_{\beta_2} \dots \in \Lambda^{(0)}.$$

C.4. Группа Гейзенберга. Рассмотрим пространство $H = H_0 \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathrm{GA}})$ из § VII.3. Рассмотрим мультипликативную группу G, состоящую из C^∞-гладких функций на окружности, не обращающихся в 0. Эта группа действует в H_0 умножениями на функции. Рассмотрим в G подгруппу G^*, состоящую из функций, по модулю равных 1. В G^* рассмотрим подгруппу $\mathbb{T}$, состоящую из констант; подгруппу Z, состоящую из функций вида $e^{ik\varphi}$; а также подгруппу G_0^*, состоящую из функций вида $\exp(i\alpha(\varphi))$, где $\int_0^{2\pi} \alpha(\varphi)\, d\varphi = 0$.

Предложение C.1.

а) $\mathrm{G} \subset \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$.

б) $\mathrm{G}^* \subset \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$.

Замечание. См. п. IX.7.4.

Итак, мы можем ограничить спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ на группу G. Группа G абелева, однако наше представление группы G оказывается проективным, и оно линеаризуется на некотором неабелевом центральном расширении $\widehat{\mathrm{G}}$ группы G. Соответствующее расширение $\widehat{\mathrm{G}}_0^*$ подгруппы G_0^* оказывается обычной группой Гейзенберга (см. § VI.1).

Опишем вкратце структуру представления группы $\widehat{\mathrm{G}}$ в $\Lambda = \oplus\Lambda^{(k)}$. Группа $\mathbb{T}$ действует в $\Lambda^{(k)}$ операторами вида

$$h(e^{i\tau})f(\xi,\eta) = e^{i\tau k}f(\xi,\eta).$$

Элементы $e^{im\varphi} \in Z$ переводят $\Lambda^{(j)}$ в $\Lambda^{(j+m)}$. Наконец, группа $\widehat{\mathrm{G}}_0^*$ оставляет пространства $\Lambda^{(i)}$ инвариантными, причем представление $\widehat{\mathrm{G}}_0^*$ в $\Lambda^{(j)}$ неприводимо и эквивалентно фоковскому представлению группы Гейзенберга.

По этой причине должен существовать канонический изоморфизм $\Lambda^{(0)}$ и бозонного пространства Фока. Этот изоморфизм и обсуждается в пп. C.1–C.3.

C.5. Другое объяснение. Обозначим через Symm *пространство симметрических функций*, т. е. пространство формальных рядов от переменных $h_1, h_2, \ldots$, которые не меняются при любых перестановках переменных $h_1, h_2, \ldots$.

Определим также *пространство кососимметрических функций* ASymm. Назовем псевдоодночленом формальное выражение вида

$$h_1^{\infty+a_1}h_2^{\infty+a_2}h_3^{\infty+a_3}\ldots,$$

где ∞ — это формальный символ, а $a_k \in \mathbb{Z}$, причем $a_k = -k$, начиная с некоторого места. Кососимметрическая функция есть формальный ряд, составленный из псевдоодночленов, кососимметричный относительно любых финитных перестановок переменных. Определим кососимметрическую функцию Δ, равную

$$\Delta = \sum_{\sigma\in S_\infty^{\mathrm{fin}}} (-1)^\sigma h_{\sigma(1)}^{\infty-1}h_{\sigma(2)}^{\infty-2}h_{\sigma(3)}^{\infty-3}\ldots.$$

Канонический изоморфизм $J: \mathrm{Symm} \to \mathrm{ASymm}$ мы определим формулой

$$Jf(h_1, h_2, \ldots) = \Delta \cdot f(h_1, h_2, \ldots).$$

Пространство Symm мы ранее (см. п. C.3) отождествили с $F(W_+)$. Далее, пространство кососимметрических функций естественным образом отождествляется с пространством $\Lambda^{(0)}$, а именно, вектору $\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\zeta_{i_3}\ldots$ (см. (C.2)), мы ставим в соответствие кососимметрическую функцию

$$\sum_{\sigma\in S_\infty^{\mathrm{fin}}} (-1)^\sigma h_{\sigma(1)}^{\infty+i_1}h_{\sigma(2)}^{\infty+i_2}h_{\sigma(3)}^{\infty+i_3}\ldots.$$

Таким образом, мы получили последовательность достаточно понятных операторов:

$$\left\{\begin{matrix}\text{бозонное}\\ \text{пространство}\\ \text{Фока } F(W_+)\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{пространство}\\ \text{симметрических}\\ \text{функций Symm}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{пространство}\\ \text{кососимметри-}\\ \text{ческих функций}\\ \text{Asymm}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{фермионное}\\ \text{пространство}\\ \text{Фока } \Lambda^{(0)}\end{matrix}\right\}.$$

Бозон-фермионное соответствие есть композиция этих операторов.

C.6. Замечания. Бозон-фермионное соответствие отождествляет бозонные и фермионные конструкции для алгебры Вирасоро, см. § VII.2–3.

О бозон-фермионном соответствии см. также [Frenkel (1981), [Pressley, Segal (1986)], [Kac (1983)].

Добавление D

Однолистные функции и оператор Грунского

D.1. Оператор Грунского. Обозначим через W пространство функций $f = \sum c_n e^{in\varphi}$ на окружности, определенных с точностью до прибавления константы и удовлетворяющих условию $\sum |n|\,|c_n|^2 < \infty$. Введем в W скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\varphi)\overline{g'(\psi)}\,d\varphi\,d\psi,$$

или, что то же самое,

$$\left\langle \sum a_n e^{in\varphi}, \sum b_n e^{in\varphi}\right\rangle = \sum |n| a_n \bar{b}_n.$$

Введем в W кососимметричную билинейную форму

$$\Lambda(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)g'(\varphi)\,d\varphi$$

и знаконеопределенную эрмитову форму

$$M(f, g) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{g'(\varphi)}\,d\varphi.$$

Рассмотрим в W подпространство W_+, состоящее из функций вида $\sum_{n>0} c_n e^{in\varphi}$, и подпространство W_-, состоящее из функций вида $\sum_{n<0} c_n e^{in\varphi}$.

Таким образом, мы снабдили W^+ структурой объекта категории $\overline{\mathbf{Sp}}$.

Замечание. Пространство W несущественным образом отличается от пространства V из § VII.2. Канонический изоморфизм $W \to V$ задается формулой $f \mapsto f'$.

Рассмотрим теперь в диске $D_- : |z| \geqslant 1$ ($D_- \subset \overline{\mathbb{C}}$) однолистную вплоть до границы функцию $r : D_- \to \overline{\mathbb{C}}$, удобно считать, что $r(\infty) = \infty$. Построим по каждой такой функции подпространство $Q(r) \subset W$ по следующему правилу: $f \in Q(z)$, если функция $f \circ (r^{-1})$, определенная на кривой $r(e^{i\varphi})$, голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$.

Замечание. Пара $[\overline{\mathbb{C}}, r]$ является элементом $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(0,1)$. См. конструкции линейных отношений, соответствующих морфизмам категории **Shtan** в § VII.5–6.

Легко написать угловой оператор $\mathrm{Grun}(r): W_+ \to W_-$ подпространства $Q(r)$. Пусть $f \in W_+$. Рассмотрим функцию $q = f \circ r^{-1}$, определенную на кривой $r(e^{i\varphi})$. Представим ее в виде

$$q = \varphi_+ + \varphi_-,$$

где φ_- — функция, голоморфно продолжимая в область $r(D_-)$, а φ_+ голоморфно продолжается в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$. Напомним, что

$$\varphi_\pm(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r(e^{i\varphi})} \frac{q(u)}{z-u}\,du,$$

см. [Hurwitz, Courant (1952)].

Тогда

$$\mathrm{Grun}(r)f = \varphi_- \circ r.$$

Легко написать для этого оператора явное выражение

$$\mathrm{Grun}(r)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \frac{r'(w)f(w)}{r(w)-r(z)}\,dw.$$

Учитывая, что f голоморфна в круге $|w| < 1$, а $|z| > 1$, мы можем переписать эту формулу в виде

$$\mathrm{Grun}(r)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \left(\frac{r'(w)}{r(w)-r(z)} - \frac{1}{w-z}\right) f(w)\,dw. \qquad \text{(D.1)}$$

Теорема D.1.

$$Q(r) \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(0, W).$$

Доказательство.

а) *Изотропность.* Пусть $f_1, f_2 \in Q(r)$. Пусть F_1, F_2 — голоморфные продолжения $f_1 \circ (r^{-1})$ и $f_2 \circ (r^{-1})$ в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$. Тогда

$$\Lambda(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|h|=1} f_1\,df_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{r(e^{i\varphi})} F_1\,dF_2 = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus r(D_-)} dF_1 \wedge dF_2 = 0.$$

б) *Положительность.* Пусть $f \in Q(r)$, а F — голоморфное продолжение $f \circ (r^{-1})$ в $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-)$. Тогда

$$M(f,f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|h|=1} f\,d\bar f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r(e^{i\varphi})} F\,d\overline{F} = \int\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus r(D_-)} \frac{1}{2\pi i}\,dF \wedge d\overline{F},$$

и под знаком последнего интеграла стоит явно положительное выражение.

в) *Гильберт-шмидтовость* оператора $\mathrm{Grun}(r)$ очевидна: оператор (D.1) имеет квадратично интегрируемое ядро. ■

D.2. Теорема площадей Грунского. Из теоремы D.1 следует, что

$$\|\,\mathrm{Grun}(r)\| < 1$$

для любой функции r, однолистной в D_- вплоть до границы.

Легко видеть, что выражение (D.1) сохраняет смысл и в случае, когда r однолистна в диске $|w| > 1$ (интегрировать в (D.1) надо по контуру $|w| = 1 + \varepsilon$). Соображения, связанные с предельным переходом, дают следующую «теорему площадей Грунского»:

Теорема D.2.

а) Для любой функции r, однолистной в диске $|w| > 1$, выполнено $\|\,\mathrm{Grun}(r)\| \leqslant 1$.

б) Оператор $\mathrm{Grun}(r)$ унитарен тогда и только тогда, когда мера множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus r(D_-^0)$ равна нулю (где через D_-^0 обозначен диск $|w| > 1$).

D.3. Замечания. «Теорема площадей Грунского» является весьма мощным инструментом в теории однолистных функций. Она получена в [Grunsky (1939)]. Приведенное выше простое доказательство изобретено в [Лебедев, Милин (1951)]. Подробное обсуждение теоремы Грунского см. в [Duren (1983)]. То, что оператор Грунского появляется в теории представлений (он участвует в явных формулах для представления из § VII.4), заметил Д. В. Юрьев. Несколько дополнительных замечаний о связи теории представлений с теорией однолистных функций содержится в [Неретин (1989.1)].

Добавление E

Характеристическая функция Лифшица

E.1. Операторные узлы. Термин «операторный узел» служит для обозначения ряда связанных между собой, но все-таки различных понятий. Мы будем понимать под операторным узлом следующий объект. Пусть V_1, V_2, W — гильбертовы пространства, причем W бесконечномерно. *Операторный узел* (operator node) $Q : V_1 \rightsquigarrow V_2$ — это унитарный оператор $Q : V_1 \oplus W \to V_2 \oplus W$, определенный с точностью до эквивалентности

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & U \end{pmatrix}^{-1},$$

где U — унитарный оператор в W. Для любого узла Q существует единственное разложение $W = Y \oplus X$ такое, что оператор Q имеет вид

$$Q = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & L \end{array}\right) : V_1 \oplus Y \oplus X \to V_2 \oplus Y \oplus X,$$

где $L : X \to X$ — унитарный оператор, а оператор D не имеет инвариантных ненулевых подпространств, на которых он был бы унитарен. Мы назовем узел *неразложимым*, если $X = 0$.

Для любых двух узлов $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_1 \rightsquigarrow V_2$ и $R = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} : V_2 \rightsquigarrow V_3$ определено их *произведение* $RQ : V_1 \rightsquigarrow V_3$, заданное формулой

$$RQ := \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} K & 0 & L \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ M & 0 & N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} AK & B & AL \\ \hline CK & D & CL \\ M & 0 & N \end{array}\right). \tag{E.1}$$

Отождествляя произвольным образом бесконечномерные гильбертовы пространства W и $W \oplus W$, мы получаем возможность рассматривать оператор RQ как оператор $V_1 \oplus W \to V_2 \oplus W$.

E.2. Характеристические функции. Характеристическая функция операторного узла $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — это голоморфная операторнозначная функция в круге $|z| < 1$, задаваемая формулой

$$\chi_Q(z) = A + zB(1 - zD)^{-1}C.$$

Легко видеть, что χ_Q зависит лишь от узла Q, а не от матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Определение можно переформулировать следующим образом:

$$\chi_Q(z)h = v,$$

если существует $p \in W$ такой, что

$$\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ zp \end{pmatrix} \tag{E.2}$$

Из второго определения легко усматривается (см. § IX.4), что

$$\|\chi_Q(z)\| \leqslant 1$$

при всех z таких, что $|z| < 1$. Легко видеть также (см. рассуждения § IX.4), что

$$\chi_{QP}(z) = \chi_Q(z)\chi_P(z),$$

если $|z| < 1$.

Если рассуждать по аналогии с § IX.4, на первый взгляд может показаться, что функция $\chi_Q(z)$ — *внутренняя* (т. е. некасательные граничные значения функции $\chi_Q(z)$ на окружности $|z| = 1$ являются унитарными операторами), но оказывается, что это выполнено не всегда, а лишь в случае, когда $D^n \to 0$ и $(D^*)^n \to 0$ сильно.

E.3. Восстановление узла по характеристической функции. Пусть $\varkappa(z)$ — внутренняя функция в круге $|z| \leqslant 1$ со значениями в пространстве операторов из V в V. Сейчас мы построим по ней некоторый неразложимый операторный узел $Q : V \rightsquigarrow V$.

Для гильбертова пространства V через $L^2(S^1, V)$ мы обозначим пространство L^2, состоящее из функций на окружности $|z| = 1$ со значениями в V. Через $H^2(V)$ мы обозначим подпространство в $L^2(S^1, V)$, состоящее из функций, голоморфно продолжимых внутрь круга $|z| \leqslant 1$.

Рассмотрим, далее, оператор умножения на z^{-1} в $L^2(\mathrm{S}^1, V)$. Он естественным образом индуцирует оператор

$$Q : H^2(V) \ominus z\varkappa(z)H^2(V) \to z^{-1}H^2(V) \ominus \varkappa(z)H^2(V)$$

(где знак $X \ominus Y$ означает ортогональное дополнение в X до Y). Представим Q в виде блочного оператора:

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \left[\varkappa(z)H^2(V) \ominus z\varkappa(z)H^2(V)\right] \oplus \left[H^2(V) \ominus \varkappa(z)H^2(V)\right] \to$$
$$\to \left[z^{-1}H^2(V) \ominus H^2(V)\right] \oplus \left[H^2(V) \ominus \varkappa(z)H^2(V)\right]$$

(для блоков A, B, C, D легко записать явные выражения). Несложно проверить, что характеристическая функция узла Q совпадает с χ. Более того, оказывается, что Q — единственный неразложимый узел с характеристической функцией $\varkappa(z)$.

E.4. Связь с конструкциями § IX.4. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Uo}}(k, n)$. Тогда

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & A & B & 0 \\ A^* & 0 & 0 & C^* \\ \hline B^* & 0 & 0 & D^* \\ 0 & C & D & 0 \end{array}\right)$$

— это операторный узел в смысле п. E.1.

В частности, в ситуации п. IX.4.1 применима процедура восстановления узла по характеристической функции.

E.5. О спектральной теории. Мы должны сказать несколько слов о том, откуда берутся операторные узлы в теории операторов.

Рассмотрим оператор D в гильбертовом пространстве такой, что $\|D\| \leqslant 1$. Этот оператор можно встроить в узел $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, причем с точностью до разумных эквивалентностей этот узел — единственный. Заметим, далее, что уравнение (E.2) обладает некоторым сходством с уравнением на собственные значения. Сделаем существенно более важное замечание: если узел $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ разлагается в произведение узлов $T = RQ$, то оператор D имеет инвариантное подпространство, см. формулу (E.1). Но $T = RQ$ влечет

$$\chi_T(z) = \chi_R(z)\chi_Q(z).$$

Таким образом, инвариантные подпространства оператора D связаны с делителями функции χ_T в классе аналитических операторнозначных функций.

Характеристическим функциям операторов посвящена огромная литература. Лучше всего обстоит дело в случае, когда

$$\mathrm{rk}(D^*D - E) = \mathrm{rk}(DD^* - E) = 1.$$

Здесь удается построить более-менее законченную теорию, тесно связанную с теорией аналитических функций в круге. Сложнее обстоит дело в случае, когда числа $\mathrm{rk}(D^*D - E)$ и $\mathrm{rk}(DD^* - E)$ конечны. Теория все еще остается содержательной, если операторы $(D^*D - E)$ и $(DD^* - E)$ — ядерные (здесь естественно встает вопрос об операторах $T_s(q)$ из § IX.6; об их спектральных свойствах, кажется, ничего не известно). Условие $\|D\| \leqslant 1$ не так существенно, как это кажется: пространства V_1, V_2 из определения операторного узла могут быть не гильбертовыми пространствами, а пространствами Крейна.

Мы ограничимся ссылками на основополагающие работы [Лифшиц (1946)], [Лифшиц (1954)] и [Потапов (1955)] и монографии [Sz.-Nagy, Foiaş (1967)], [Никольский (1980)], [Bart, Gohberg, Kaashoek (1979)], [Gohberg, Goldberg, Kaashoek (1993)].

Добавление F

Примеры, контрпримеры, замечания

F.1. Можно ли представление разложить на неприводимые представления? Известно, что любое унитарное представление локально-компактной группы может быть разложено в прямой интеграл неприводимых представлений (см., например, [Кириллов (1972)], 8.4). Локальная компактность в этой теореме существенна.

Пример 1. Пусть G — группа измеримых комплекснозначных функций на отрезке $[0, 1]$, по модулю равных 1, определенных с точностью до множества меры 0. Введем на группе G топологию сходимости по мере (та же топология индуцируется на G топологией любого пространства $L^p[0, 1]$ при $0 < p < \infty$). Несложно показать, что группа G вообще не имеет неприводимых унитарных представлений. В то же время приводимые унитарные представления у нее есть: например G действует в $L^2[0, 1]$ операторами

$$T(\varphi)f(x) = \varphi(x)f(x). \tag{F.1}$$

Рассмотрим теперь в G плотную подгруппу H, состоящую из непрерывных функций. Легко видеть, что ограничение представления T на подгруппу H уже является прямым интегралом одномерных унитарных представлений

$$\tau_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Но представления τ_a не определены на всей группе G. Неформально возникающую ситуацию, как мне кажется, лучше всего описать словами: представление T разлагается в прямой интеграл «не совсем настоящих представлений» τ_a.

Пример 2. Снабдим ту же группу топологией существенной равномерной сходимости (т. е. топологией, индуцированной с пространства $L^\infty[0, 1]$). Пространство $L^\infty[0, 1]$ является коммутативной банаховой алгеброй с инволюцией. Поэтому (см., например, [Кириллов (1972)], 4.2) любое $*$-представление алгебры $L^\infty[0, 1]$ раскладывается в прямой интеграл одномерных представлений. Это применимо, в частности, и к естественному представлению

$$\tilde{T}(\varphi)f(x) = \varphi(x)f(x)$$

алгебры $L^\infty[0, 1]$ в $L^2[0, 1]$. Ограничивая представление $\tilde{T}$ на группу G, мы получаем, что представление T группы G разлагается в прямой интеграл одномерных унитарных представлений.

Внешне во втором примере все обстоит благополучно. Однако на самом деле патологичен второй пример, а не первый. Существование одномерных представлений у несепарабельной банаховой алгебры $L^\infty[0, 1]$ обеспечивается аксиомой выбора.

Ни одного такого представления в действительности не удается построить. Поэтому изложенная конструкция приводит к разложению простенького представления (F.1) на неведомые мифические объекты.

Пример 3. Рассмотрим аддитивную группу вещественного гильбертова пространства H. Группа H абелева, поэтому все ее неприводимые представления одномерны. Легко видеть, что все они задаются формулой

$$\varphi_a(h) = \exp(i\langle a, h\rangle), \tag{F.2}$$

где $a \in$ H. Пусть теперь $\mathrm{H} = \ell_2$ действует в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ (см. п. VI.1.9) по формуле

$$T(h)f(x) = f(x)\exp\bigl(i\sum h_j x_j\bigr), \tag{F.3}$$

где $h = (h_1, h_2, \dots) \in \ell_2$, а $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$. Пусть $\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}$ — подгруппа, состоящая из финитных векторов. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^\infty$ формула

$$\varphi_a(h) = \exp(i\langle a, h\rangle)$$

задает одномерное унитарное представление группы H_0, а ограничение представления T на H_0 есть прямой интеграл по $\mathbb{R}^\infty$ всех представлений φ_a. Но, как и в примере 1, представления φ_a при $a \notin \ell_2$ не продолжаются до непрерывных представлений группы H, т.е. мы снова получили разложение представления T группы H в прямой интеграл «не совсем настоящих представлений». Можно показать, что на непрерывные одномерные представления вида φ_a представление T не раскладывается.

Первые два примера были чисто иллюстративными. Третий пример намного серьезнее и служит завязкой важного теоретико-вероятностного сюжета, обсуждаемого в следующем пункте.

Замечание. Группы из этого пункта абелевы и, следовательно, имеют тип I (см., например, [Кириллов (1972)], 8.4), что не мешает их странному поведению. Возникает вопрос, чего ожидать от прочих групп, обсуждаемых в этой книге. Известно, что унитарные представления тяжелых групп, а также групп $\mathrm{O}(p,\infty)$, $\mathrm{U}(p,\infty)$, $\mathrm{Sp}(p,\infty)$ единственным образом раскладываются на неприводимые представления (см. [Ольшанский (1978)]). По-видимому, так же обстоит дело со всеми (или почти всеми) (G, K)-парами, хотя, кажется, это пока ни в одном случае не доказано. Относительно Diff я боюсь высказывать какие-либо предположения.

F.2. Теорема Прохорова. Неприводимая комплекснозначная функция φ на вещественном гильбертовом пространстве называется положительно определенной, если для любых $x_1, \dots, x \in H$ матрица R, составленная из чисел $r_{ij} = \varphi(x_i - x_j)$, неотрицательно определена, т.е.

$$\sum_{j,k} \varphi(x_j - x_k) c_j \bar{c}_k \geqslant 0$$

для любых $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$.

Сразу бросаются в глаза два типа конструкций положительно определенных функций:

Конструкция 1. Пусть T — унитарное представление группы H в некотором гильбертовом пространстве K. Пусть $p \in K$. Тогда функция

$$\varphi(h) = \langle T(h)p, p\rangle$$

положительно определена. Любая положительно определенная функция может быть получена таким способом (см. [Dixmier (1969)], 13.4.5).

Пример. Пусть T — представление из примера 3 предыдущего пункта, в качестве вектора p возьмем тождественную единицу в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$. Тогда

$$\varphi(x) = \exp(-\langle x, x\rangle)\,.$$

Конструкция 2. Пусть ν — конечная мера на H. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int \exp(i\langle x, h\rangle)\, d\nu(h)$$

положительно определена (функция φ называется *преобразованием Фурье* или *характеристическим функционалом* меры ν).

Вторая конструкция является частным случаем первой. А именно, в качестве T следует взять прямой интеграл одномерных представлений $\tau_h(x) : x \mapsto \exp(i\langle x, h\rangle)$ по мере ν, а в качестве вектора p — функцию 1).

Теорема Бохнера (см., например, [Reed, Simon (1975)]). Любая положительно определенная функция на $\mathbb{R}^n$ является преобразованием Фурье конечной меры на $\mathbb{R}^n$.

Теорема Прохорова (см. [Kuo (1975)], § 1.2). Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Положительно определенная функция на H является преобразованием Фурье вероятностной меры на H тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует положительно определенный ядерный оператор S_ε такой, что

$$1 - \operatorname{Re}\varphi(x) \leqslant \langle S_\varepsilon x, x\rangle + \varepsilon.$$

F.3. Группа Гейзенберга. Вопрос об описании всех представлений канонических коммутационных соотношений и вопрос об описании всех унитарных представлений группы Гейзенберга (эти вопросы чуть-чуть различаются) много обсуждался в литературе. В частности, в работе [Gårding, Wightman (1954)] в некотором (пиквикском) смысле слова была получена полная классификация всех представлений канонических коммутационных соотношений. Эта классификация производит удручающее впечатление, и одним из ее последствий было неверие в возможность расклассифицировать представления более сложных групп, чем группа Гейзенберга. Мне кажется, что на самом деле беда состоит не в том, что группа Гейзенберга слишком сложна, а в том, что она слишком проста. По-видимому разумным объектом является не сама группа Гейзенберга, а группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Spa}}}(.)$ (см. § VI.4), отметим здесь аналогию с группами петель $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, вместо которых естественно рассматривать полупрямые произведения $\mathrm{Diff} \ltimes \mathbb{L}(\mathrm{G})$ (см. § IX.7), а также с группой $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, (см. § X.3).

Попытки разобраться в нефоковских представлениях группы Гейзенберга содержатся в [Березин (1969б)], [Emch (1972)]. О попытках реализовать янг-миллсовский член φ^4 с помощью нефоковских представлений см., например, [Березанский, Кондратьев (1988)]. О некоторых приложениях нефоковских представлений к группам петель см. [Carey, Hannabuss (1992)].

F.4. Индуктивные пределы групп. Индуктивные пределы конечных и конечномерных групп обычно имеют чудовищно много представлений (см., например, [Gelfand, Graev (1990)] или [Obata (1987)]). Мы приведем два примера, не лишенных занятности.

Пример 1. Рассмотрим группу S_∞^{fin} финитных подстановок натурального ряда, см. п. VIII.6.1. Пусть S_∞^{fin} действует в ℓ_2 перестановками векторов. Рассмотрим числовую последовательность $y = (y_1, y_2, \dots)$ и рассмотрим выражение

$$\gamma_y(g) = gy - y \in \ell_2,$$

где $g \in S_\infty^{\mathrm{fin}}$, а $gy = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \dots)$. Тогда (см. п. X.1.1) формула

$$A(g)x = gx + \gamma_y(g),$$

где $x \in \ell_2$, задает аффинное действие группы S_∞^{fin} в ℓ_2. Ограничивая представление Exp группы $\mathrm{Isom}(\ell_2)$ (см. п. VI.1.7) на S_∞^{fin}, мы получаем унитарное представление S_∞^{fin}.

Пример 2. Есть много способов доведения до абсурда идеи построения как можно большего запаса представлений групп типа индуктивных пределов (см. например, [Вершик, Гельфанд, Граев (1975)]). В качестве примера приведем следующую конструкцию в духе «У попа была собака». Обозначим через $S^{\mathrm{fin}}(A)$ группу финитных перестановок счетного множества A. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно непересекающиеся счетные множества, а $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ — унитарные неприводимые представления групп $S^{\mathrm{fin}}(A_1), S^{\mathrm{fin}}(A_2), \dots, S^{\mathrm{fin}}(A_n)$ соответственно. Пусть $R(\rho_1, \dots, \rho_n)$ — представление $S^{\mathrm{fin}}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, индуцированное с представления $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$ подгруппы $S^{\mathrm{fin}}(A_1) \times \dots \times S^{\mathrm{fin}}(A_n)$. Тогда представление $R(\rho_1, \dots, \rho_n)$ неприводимо, и, более того, $R(\rho_1, \dots, \rho_n) \simeq R(\rho'_1, \dots, \rho'_n)$ лишь в случае $\rho_1 = \rho'_1, \dots, \rho_n = \rho'_n$ (отсутствие сплетающих операторов и неприводимость доказываются стандартными средствами типа [Кириллов (1972)], 13.5, 16.3).

F.5. Обилие топологий. Индуктивные пределы конечных и конечномерных групп имеют очень много разных пополнений. Мы приведем пару примеров пополнений группы S_∞^{fin}, чтобы показать, сколь огромен тут простор для фантазии.

Пример 1. Пусть группа G состоит из подстановок g натурального ряда $\mathbb{N}$ таких, что расстояние между j и gj, где $j \in \mathbb{N}$, ограничено константой C, зависящей лишь от g. К этой группе применима конструкция примера 1 предыдущего пункта, нужно только выбрать y подходящим образом (например, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots\right)$).

Пример 2. Пусть группа H состоит из всех $g \in S_\infty$, для которых существуют $N = N(g)$ и $C = C(g)$ такие, что расстояние от j до gj не превосходит $C \cdot j^N$.

Я не знаю, есть ли какой-либо смысл в примерах двух последних пунктов.

Замечание. Понятно, что чем сильнее мы возьмем топологию на группе G, тем больше (можно выразиться, богаче) будет запас ее представлений. Наша техника работы с (G, K)-парами очень сильно опирается на выбранные нами топологии, и поэтому есть опасность (вероятность), что мы опираемся на не вполне правильные предпосылки. Ряд доводов в пользу наших топологий был приведен выше. Мы приведем еще один (он не действует для симметрической группы). Оказывается, что если выбирать на группах G более сильные топологии, чем мы рассматриваем, а затем брать какую-нибудь группу G′ и какой-нибудь явно разумный гомоморфизм G′ → G, то он, скорее всего, окажется разрывным (если только на G′ не взять дискретную топологию). С другой стороны, интересных теорий представлений, связанных с «сильными» топологиями, вроде нет.

F.6. Категории линейных отношений над полями, отличными от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Здесь все обстоит неплохо. На случай конечных полей и полей конечной характеристики сказанное в главе III обобщается без особого труда. Для конечных полей существует и аналог представления Вейля категории **Sp** (см. [Неретин (1991)]). Для p-адических полей пока известен лишь аналог представления Вейля, см. [Назаров (1993)]; в работе Назарова роль линейных отношений играют решетки в прямой сумме p-адических линейных пространств.

F.7. Аналоги алгебры Вирасоро и группы Diff. Насколько мне известно, каждый специалист по бесконечномерным группам придумал хотя бы один аналог алгебры Вирасоро. После всего этого алгебра Вирасоро и группа Diff остаются единственными в своем роде объектами. Я приведу два примера подобных аналогов

1. Пусть Λ — конечно порожденная (плотная) подгруппа в $\mathbb{R}$. Рассмотрим алгебру Vir_Λ с базисом L_λ, ζ, где $\lambda \in \Lambda$, и соотношениями коммутации

$$[L_\lambda, L_\mu] = (\mu - \lambda)L_{\mu+\lambda} + \frac{1}{12}(\lambda^3 - \lambda)\delta_{\lambda,-\mu}\zeta,$$
$$[L_\lambda, \zeta] = 0.$$

Для этой алгебры и соответствующей группы может быть проведена часть программы §§ VII.2–3, см. [Исмагилов (1993)].

2. Конструкции с почти инвариантными структурами (см. §§ VII.2–3, IX.6) в основном переносятся на группу An_p аналитических диффеоморфизмов p-адической проективной прямой. Например, для An_p существуют аналоги представлений со старшим весом, хотя что значат в этом случае слова «со старшим весом», непонятно. Группа An_p, в свою очередь, вкладывается в несколько более широкую группу «диффеоморфизмов канторовского совершенного множества», для которой тоже существуют почти инвариантные структуры, см. [Неретин (1992)].

F.8. Квазиинвариантные меры. Мы упомянем 3 типа квазиинвариантных мер, по тем или иным причинам не рассмотренных в книге.

1. Меры, построенные в [Pickrell (1987)], квазиинвариантные относительно компактных (G, K)-пар Ольшанского. Конструкция, близкая к конструкции Пикреля, обсуждается ниже в п. F.15.

2. Меры, построенные в [Kerov, Olshanskii, Vershik (1993)], квазиинвариантные относительно (G, K)-пары $(S_\infty \times S_\infty, S_\infty)$, подробнее см. ниже, п. F.14.

Эти два типа мер интересны, в частности, тем, что с ними связан красивый гармонический анализ.

3. Е. Т. Шавгулидзе ([Шавгулидзе (1983), (1997)], см. также [Хафизов (1990)]) построил серию примеров нелинейных квазиинвариантных действий групп диффеоморфизмов многомерных многообразий на пространствах с гауссовой мерой. О нелинейных преобразованиях пространств с гауссовой мерой см. [Ramer (1974)].

F.9. Инфинитезимальные теории. Существует ряд теорий, тесно связанных с теорией бесконечномерных алгебр Ли, но не имеющих видимой связи с категорной идеологией:

а) супералгебры Ли; очень интересны, в частности, супераналоги алгебры Вирасоро, см., например, [Goddard, Kent, Olive (1986)];

б) алгебры Ли над полем конечной характеристики, см. [Кострикин, Шафаревич (1969)], [Кац (1970)], [Strade, Farnsteiner (1988)];

в) квантовые группы, см. [Дринфельд (1989)]; в [Ольшанский (1991)] обсуждается связь между квантовыми группами и обертывающей алгеброй группы $U(\infty)$.

F.10. Fusion and braid categories (см. [Verlinde (1988)], [Tsuchia, Kanie (1988)]). По всей видимости, категория **Shtan**, если следовать букве определения, имеет очень мало представлений. Попытки построить представления категории **Shtan** приводят к многозначным функциям на $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}$, и естественно рассмотреть монодромию этих многозначных функций.

Рассмотрим, например, множество $Z_{m,n}$ морфизмов категории **Shtan** из m в n, топологически эквивалентных сфере с $(m+n)$ дырками. Через Γ^n мы обозначим n-кратное произведение $\Gamma \times \ldots \times \Gamma$, где Γ — полугруппа трубок из § VII.4. Пусть $\rho_1^+, \ldots, \rho_n^+, \rho_1^-, \ldots, \rho_m^-$ — представления Γ, действующие в пространствах $V_1^+, \ldots, V_n^+, V_1^-, \ldots, V_m^-$. Пусть ψ — многозначная функция на $Z_{m,n}$ со значениями в пространстве операторов $V_1^- \otimes \ldots \otimes V_m^- \to V_1^+ \otimes \ldots \otimes V_n^+$, удовлетворяющая условию

$$\psi\big[(\mathfrak{R}_1^+, \ldots, \mathfrak{R}_n^+) \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{R}_1^-, \ldots, \mathfrak{R}_m^-)\big] = \left[\bigotimes_{i=1}^n \rho_i^-(\mathfrak{R}_i^-)\right] \psi(\mathfrak{A}) \left[\bigotimes_{j=1}^m \rho_j^+(\mathfrak{R}_j^+)\right], \qquad (F.4)$$

где $\mathfrak{A} \in Z_{m,n}$, $(\mathfrak{R}_1^+, \ldots, \mathfrak{R}_n^+) \in \Gamma^n$, $(\mathfrak{R}_1^-, \ldots, \mathfrak{R}_m^-) \in \Gamma^m$.

На инфинитезимальном уровне уравнение (F.4) переписывается как некоторое линейное уравнение с частными производными («уравнение Книжника—Замолодчикова»). Пространство $Z_{m,n}$ гомотопически эквивалентно пространству Δ_{m+n} наборов из $m+n$ попарно различных точек на сфере Римана. Фундаментальная группа $\pi_1(\Delta_{m+n})$, как хорошо известно (см., например, [Шафаревич (1986)]), изоморфна группе кос. Поэтому операторы монодромии уравнения Книжника—Замолодчикова задают представление группы кос.

Более аккуратные рассуждения, связанные с рассмотрением естественного пополнения Δ_{m+n} (пространство модулей), показывают, что в действительности получается представление не группы кос, а «категории кос» (объекты типа «категории кос» обсуждаются, например, в [Reshetihin, Turaev (1991)]).

Основной инструмент для построения функций, удовлетворяющих (F.4) — это fusion-конструкция [Verlinde (1988)].

F.11. Теории поля. Рассмотрим категорию $\mathbf{K}_n$, объекты которой — гладкие $(n-1)$-мерные многообразия (или ориентированные многообразия), а морфизмы $N_1 \to N_2$ — это n-мерные (ориентированные) многообразия L с границей такие, что граница M есть $N_1 \cup N_2$ (причем в ориентированном случае нормаль к N_1 направлена внутрь M, а нормаль к N_2 — вовне).

Топологическая теория поля — это представление категории $\mathbf{K}_n$.

Пример 1. Неориентированный вариант категории $\mathbf{K}_1$ есть категория Брауэра (см. п. VIII.6.7).

Пример 2. Обозначим через $\mathrm{H}_m(L, \mathbb{K})$ группу m-мерных гомологий многообразия L с коэффициентами в поле $\mathbb{K}$. Поставим в соответствие каждому $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}_n)$ группу $\mathrm{H}_m(N, \mathbb{K})$. Построим по каждому $M \in \mathrm{Mor}(N_1, N_2)$ линейное отношение

$$T(M) : \mathrm{H}_m(N_1, \mathbb{K}) \rightrightarrows \mathrm{H}_m(N_2, \mathbb{K}).$$

А именно, $(\psi_1, \psi_2) \in \mathrm{H}_m(N, \mathbb{K}) \oplus \mathrm{H}_m(N, \mathbb{K})$ содержится в $T(M)$, если существует $(m+1)$-мерная $\mathbb{K}$-цепь на M, граница которой есть $\psi_1 - \psi_2$. Итак, мы получили функтор из категории $\mathbf{K}_n$ в категорию линейных отношений (и далее мы можем применять представления категорий линейных отношений).

В размерностях $\leqslant 4$ существуют теории поля, существенно более интересные, чем конструкция примера 2 (см., например, [Reshetihin, Turaev (1991)]).

При желании можно рассматривать категории многообразий, снабженных дополнительными структурами (например, римановы метрики, слоения и т. п.). Представления таких категорий называются *геометрическими теориями поля*.

Пример 3. Представления категории диаграмм из § VIII.6 суть геометрические теории поля.

Пример 4. Представление категории **Shtan** есть двумерная геометрическая теория поля (многообразия снабжены дополнительно конформной структурой).

В размерностях > 2 геометрические теории поля, по-видимому, не известны. В двумерном случае известны лишь конформные теории (в физике они отвечают движению и взаимодействию безмассовых частиц). Кроме конструкций § VIII.6, известно еще несколько более-менее естественных их обобщений, связанных с подключением расслоений на римановых поверхностях (см., например, [Неретин (1989.б)]), а также теория Весса—Зумино—Виттена (для последней, если я не ошибаюсь, не проверена однозначность представлений). Кажется вероятным, что конструкции §§ IX.6—IX.7 связаны с какой-то геометрической теорией поля.

F.12. Свободная теория вероятностей (см. [Voiculescu, Dykema, Nica (1992)]). Рассмотрим фактор Мюррея—фон Неймана $\mathfrak{L}$ типа II_1 (мы нормируем след так, что след единичного оператора равен 1). Обозначим через $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ унитарную группу фактора $\mathfrak{L}$, через $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{L})$ — множество ограниченных самосопряженных операторов фактора $\mathfrak{L}$, а через $\mathfrak{U} \ltimes \mathfrak{S}$ — полупрямое произведение $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$.

Напомним, что единственный инвариант оператора $A \in \mathfrak{S}$ относительно сопряжений $A \mapsto UAU^{-1}$ элементами $U \in \mathfrak{U}$ — это спектральная мера $\sigma = \sigma[A]$ на $\mathbb{R}$; она определяется из условия

$$\mathrm{tr}(f(A)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\sigma(x)$$

для любой L^∞-функции f на $\mathbb{R}$. Отметим, что $\sigma[A]$ является вероятностной мерой с компактным носителем.

Операция сложения $\mu \boxplus \nu$ спектральных мер (*свободная аддитивная свертка*) определяется одним из следующих равносильных способов.

1°. Рассмотрим (некоммутативную) свободную группу F_2 с двумя образующими u, v. Рассмотрим пространство $\ell_2(\mathrm{F}_2)$ и соответствующий фактор, т. е. алгебру операторов, порожденную левыми сдвигами (напомним, что $\mathrm{tr}(A) := \langle A\delta_e, \delta_e\rangle$, где функция $\delta_e(g)$ определяется из условия: δ_e равна 1 в единице группы и равна нулю в остальных точках). Рассмотрим операторы вида $T = \varphi(u)$, $S = \psi(v)$ в $\ell_2(\mathrm{F}_2)$, удовлетворяющие условию $\mu = \sigma[T]$, $\nu = \sigma[S]$. Тогда, по определению, $\mu \boxplus \nu = \sigma[T+S]$.

2°. Рассмотрим свободную группу F_∞ со счетным числом образующих $u_1, u_2, \ldots$ и соответствующий фактор. Рассмотрим произвольные самосопряженные элементы фактора A, B такие, что $\mu = \sigma[A]$, $\nu = \sigma[B]$. Тогда $\mu \boxplus \nu$ есть слабый предел мер $\sigma[A + u_n^{-1} B u_n]$.

3°. *Конструктивное описание*. Рассмотрим функцию

$$G[\mu](\zeta) := \int_{\mathbb{R}} \frac{G(t)\, d\mu(t)}{t - \zeta} = \zeta^{-1} + \sum \zeta^{-k-1} \int_{\mathbb{R}} t^k\, d\mu(t).$$

Рассмотрим обратную функцию $K[\mu(z)] = 1/z + R_\mu(z)$ (т.е $K(G(\zeta)) = \zeta$). Тогда

$$R_{\mu \boxplus \nu} = R_\mu + R_\nu.$$

Неформально идея операции $\boxplus$ состоит в том, что два сопряженных элемента из $\mathfrak{L}$ ставятся в «максимально общее положение» с помощью сопряжения элементами из $\mathfrak{U}$, а потом берется спектральный тип суммы. Описание 2° операции $\boxplus$ вроде бы в точности соответствует умножению (в духе Исмагилова—Ольшанского) двойных классов смежности

$$\mathfrak{U} \setminus (\mathfrak{U} \ltimes \mathfrak{S}) / \mathfrak{U},$$

или, что то же самое, сложению орбит группы $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{S}$.

Как мы видели выше, за мультипликативностью Исмагилова—Ольшанского обычно стоит большая алгебраическая структура, содержащая саму группу. Было бы любопытно понять, нет ли такой структуры и в этом случае.

Наряду со свободной аддитивной сверткой вводится *свободная мультипликативная свертка* $\boxtimes$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ группу обратимых элементов фактора, порожденного F_∞. Двойные классы смежности $\mathfrak{U} \setminus \mathfrak{G} / \mathfrak{U}$ нумеруются спектральным типом $\sigma[|A|]$ (где $A \in \mathfrak{G}$). Возьмем две меры λ и μ на полупрямой $x > 0$ и элементы $A, B \in \mathfrak{G}$ такие, что $\lambda = \sigma[|A|]$, $\mu = \sigma[|B|]$. Тогда, по определению,

$$\lambda \boxtimes \mu = \lim_{j \to \infty} \sigma[|Au_jB|],$$

где u_j — образующие группы F_∞.

Я благодарю К. Дайкему (K. Dykema) и Ленера (F. Lehner) за обсуждение этого сюжета.

F.13. Exchangeability. Пусть группа L действует автоморфизмами на локально компактной абелевой группе N. Рассмотрим полупрямое произведение $G = L \ltimes N$. Обозначим через $\widehat{N}$ группу, двойственную к N (см. [Кириллов (1972)], 12.1), т. е. группу характеров группы N.

Существует каноническое *соответствие Вигнера—Макки* (см. [Wigner (1939)], [Кириллов (1972)], 13.3) между следующими множествами:

1*. L-инвариантные меры на $\widehat{N}$;

2*. L-инвариантные положительно определенные функции на N;

3*. пары (ρ, ξ), где ρ — унитарное представление группы G, а ξ — выделенный N-инвариантный вектор.

При этом эргодическим мерам соответствуют неприводимые представления.

Объясним, как это соответствие устроено.

В силу теоремы Бохнера (для локально компактных абелевых групп) положительно определенные функции суть преобразования Фурье от положительных мер, т. е. $1^* \Leftrightarrow 2^*$. Пусть, далее, μ — мера на $\widehat{N}$, инвариантная относительно L. Построим по μ унитарное представление ρ группы G в $L^2(\widehat{N}, \mu)$. Группа G действует очевидным образом (она действует на $\widehat{N}$ преобразованиями, переводящими характер $\chi(n)$ в характер $\chi(g^{-1}ng)$; поэтому G действует и в функциях на $\widehat{N}$). Группа N действует по формуле

$$\rho(n)f(\chi) = \chi(n)f(\chi),$$

где $n \in N$, $\chi \in \widehat{N}$.

Представление ρ построено, вектор ξ есть единичная функция.

Пусть мы теперь имеем данные (ρ, ξ). Тогда $f(n) = \langle \rho(n)\xi, \xi \rangle$ есть L-инвариантная положительно определенная функция на N.

Соответствие построено. Изложенные рассуждения могут работать и для некоторых не локально компактных групп N.

Пусть теперь $N = \mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$ — пространство финитных последовательностей, $\widehat{N} = \mathbb{R}^\infty$, а $L = S_\infty$, $G = S_\infty \ltimes \mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$.

Теорема де Финетти.

а) Любая S_∞-инвариантная мера на $\mathbb{R}^\infty$ есть смесь эргодических мер.

б) Любая S_∞-инвариантная эргодическая мера на $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ есть произведение одинаковых мер μ на множителях $\mathbb{R}$.

Замечание. У де Финетти [де Финетти(1937)] речь шла о $\mathbb{Z}_2^\infty$.

Доказательство теоремы де Финетти — несложное упражнение на теоремы мультипликативности. Двойные классы смежности

$$\Delta = S_\infty \setminus G / S_\infty$$

— это в точности орбиты группы S_∞ на $\mathbb{R}^\infty_{\mathrm{fin}}$. Эти орбиты нумеруются конечными подмножествами в $\mathbb{R}$ (с учетом кратностей). Умножение в Δ есть просто объединение подмножеств (с учетом кратностей). Образующие полугруппы — одноточечные множества $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Пусть дано унитарное неприводимое представление группы G. Полугруппа Δ действует в пространстве S_∞-неподвижных векторов. Ввиду того, что полугруппа Δ абелева, подпространство S_∞-неподвижных векторов не более чем одномерно.

Теперь каждой образующей x соответствует оператор в одномерном пространстве, т. е. число $a = a(x)$. Функция $a(x)$, очевидно, положительно определена. Ее преобразование Фурье и есть мера μ на $\mathbb{R}$. ∎

Существует обширная литература по обобщениям теоремы де Финетти, см. [Schoenberg (1938)], [Aldous (1985)], [Kallenberg (1992)], [Kallenberg (1995)], [Kingmann (1978)], [Pickrel (1991)]. Любопытно, что во всех случаях в качестве группы L выступает (иногда в слегка замаскированном виде) одна из групп, названных нами тяжелыми, или группа автоморфизмов универсального дерева (см. § VIII.6.8, здесь однако существует несколько однотипных групп).

Приведем три примера решенных задач.

1. Рассмотрим произведение $\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ множества $\mathbb{N}$ в количестве k экземпляров. Группа S_∞ действует на этом произведении по формуле

$$g : (n_1, \ldots, n_k) \mapsto (gn_1, \ldots, gn_k).$$

Все S_∞-инвариантные меры на $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}$ известны.

2. Известны также все $O_{\mathrm{fin}}(\infty)$-инвариантные меры на $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}$.

3. Описаны также все S_∞-инвариантные меры на пространстве виртуальных перестановок (см. следующий пункт).

F.14. Виртуальные перестановки [Kerov, Olshanskii, Vershik (1993)]. Рассмотрим группу S_n, состоящую из перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Определим каноническую проекцию $\pi_{n+1} : S_{n+1} \to S_n$ по следующему правилу: разложим элемент $g \in S_{n+1}$ в произведение независимых циклов, а затем вычеркнем из разложения элемент $\{n+1\}$.

Пример. Пусть $g = (15367)(24) \in S_7$. Тогда $\pi_7(g) = (1536)(24) \in S_6$.

Замечание. Разумеется, отображение π_{n+1} не является гомоморфизмом групп $S_{n+1} \to S_n$. Однако для любых $g_1, g_2 \in S_n$, $q \in S_{n+1}$ выполнено $\pi_{n+1}(g_1 q g_2) = g_1 \pi_{n+1}(q) g_2$.

Определим *пространство* VIRT *виртуальных перестановок* (или *китайский ресторан*) как проективный предел цепочки

$$\ldots \leftarrow \mathrm{S}_{n-1} \leftarrow \mathrm{S}_n \leftarrow \mathrm{S}_{n+1} \leftarrow \ldots$$

Легко сообразить, что точка q пространства VIRT определяется следующим набором данных:

1°. разбиение множества $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся подмножества $T_1, T_2, \ldots$;

2°. циклическое упорядочение каждого из множеств T_j (мы будем называть эти множества *независимыми циклами*).

Замечание. Мы говорим, что множество T *циклически упорядочено*, если любой (упорядоченной) тройке $a, b, c \in T$ поставлено в соответствие число $\tau(a,b,c) = \pm 1$ и существует инъективное отображение i множества T в окружность такое, что условие $\tau(a,b,c) = +1$ равносильно тому, что точки $i(a), i(b), i(c)$ расположены по «часовой стрелке». Подчеркнем, что, вообще говоря, наши независимые циклы T_j как циклически упорядоченные множества эквивалентны множеству рациональных точек окружности.

Сейчас мы покажем, как из виртуальной перестановки изготовить перестановку любого множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Проекция $\mathrm{VIRT} \to \mathrm{S}_n$ определяется по следующему правилу. Пусть дана виртуальная перестановка VIRT, т. е. набор данных $1° - 2°$. Мы вычеркиваем из множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ все элементы, большие n. В итоге мы получаем разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на циклы, а это интерпретируется как элемент группы S_n.

Произведение двух виртуальных перестановок, вообще говоря, не определено. Однако сейчас мы определим произведение $g \cdot q$ элементов $g \in \mathrm{S}_n \subset \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ и $q \in \mathrm{VIRT}$. Оставим в покое все независимые циклы T_j виртуальной перестановки q, не содержащие ни одного элемента $1, 2, \ldots, n$. В остальных циклах найдем все элементы $i \leqslant n$ и разрежем эти циклы на отрезки $[i, j]$, где $i, j \leqslant n$. Для любого $\alpha \leqslant n$ мы получим ровно один отрезок, начинающийся с α, и ровно один отрезок, кончающийся на α. Теперь любое α, стоящее в начале отрезка, мы заменим на $g \cdot \alpha$, после чего снова склеим отрезки в циклы так, чтобы при склейке следующий отрезок начинался бы с того числа, которым кончается предыдущий. Мы получили разбиение $\mathbb{N}$ на циклически упорядоченные множества, т. е. виртуальную перестановку.

Аналогично определяется произведение $q \cdot g$.

Наконец, полная симметрическая группа S_∞ действует на VIRT перестановками множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Это действие естественно понимать как преобразования вида $q \mapsto g^{-1} \cdot q \cdot g$. Все это вместе взятое дает действие бисимметрической группы (см. § VII.6) на VIRT.

Меры μ_t на VIRT. Фиксируем $t > 0$. На каждой группе S_n мы определим меру μ_t^n из условия: мера точки $g \in \mathrm{S}_n$ равна

$$\frac{t^{[g]}}{t(t+1)\ldots(t+n-1)},$$

где через $[g]$ обозначено число циклов элемента g (знаменатель не зависит от g и выбран так, что мера всей группы S_n равна 1; при $t = 1$ меры всех точек равны между собой). Семейство мер μ_t^n согласовано с проекциями π_n, т. е. проекция меры μ_t^n на группу S_{n-1} совпадает с μ_t^{n-1}. Меру μ_t на пространстве VIRT мы определим как проективный предел мер μ_t^n.

Очевидно, что мера μ_t инвариантна относительно действия диагональной симметрической группы. Менее очевидно, что она квазиинвариантна относительно всей бисимметрической группы. Напишем явное выражение для производной Радона—Никодима преобразования, задаваемого элементом $(g_1, g_2) \in \mathrm{S}_n \times \mathrm{S}_n \subset \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}} \times \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$. Пусть $q \in \mathrm{VIRT}$. Обозначим через $[q]_n$ число циклов в q, содержащих хотя бы один элемент вида $1, 2, \ldots, n$. Тогда производная Радона—Никодима преобразования $q \mapsto g_1 \cdot q \cdot g_2^{-1}$ задается формулой

$$t^{[g_1 \cdot q \cdot g_2^{-1}]_m - [q]_m},$$

где m достаточно велико.

В связи с этим возникает очень любопытный вопрос (о котором сейчас кое-что известно) о явном разложении $L^2(\mathrm{VIRT}, \mu_t)$ под действием бисимметрической группы.

F.15. Виртуальные унитарные матрицы. Обозначим через dX меру Хаара на унитарной группе $\mathrm{U}(n)$. Далее, введем на $\mathrm{U}(n)$ меру

$$\mu_n^s = \sigma_{n,s} \det{}^s(1 - X)\, dX,$$

где $s > -1$, а множитель $\sigma_{n,s}$ выбран так, чтобы мера всей группы была равна 1. Запишем $X \in \mathrm{U}(n+1)$ в виде блочной матрицы $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix}$ размера $(1+n)\times(1+n)$. Рассмотрим отображение $\mathrm{U}(n+1) \to \mathrm{U}(n)$, заданное формулой

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix} \mapsto D + c(1-a)^{-1} b.$$

Можно показать, что образ меры μ_{n+1}^s при этом отображении совпадает с μ_n^s. Рассмотрим проективный предел пространств

$$\ldots \leftarrow \mathrm{U}(n) \leftarrow \mathrm{U}(n+1) \leftarrow \mathrm{U}(n+2) \leftarrow \ldots,$$

снабженных мерами вида μ_n^s. Мы получим некоторое пространство X_s, снабженное некоторой вероятностной мерой μ^s. На X_s действует квазиинвариантно (при $s = 0$ инвариантно) умножениями слева и справа группа $\mathrm{U}_{\mathrm{fin}}(\infty)$.

Снова возникает вопрос о разложении $L^2(X, \mu^s)$. Об этом ничего не известно.

Добавление G

Предварительные сведения

Этот раздел отчасти является словарем, отчасти сборником ответов на элементарные аналитические вопросы, которые мне задавали алгебраисты, и на элементарные алгебраические вопросы, которые мне задавали аналитики.

§ 1. Классические группы

1.1. Формы. Пусть V — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Билинейная форма* на V — это отображение $f(x, y) = \{x, y\}$ из $V \times V$ в $\mathbb{K}$ такое, что

$$\{x_1 + x_2, y\} = \{x_1, y\} + \{x_2, y\},$$
$$\{x, y_1 + y_2\} = \{x, y_1\} + \{x, y_2\},$$
$$\{\alpha x, y\} = \alpha\{x, y\} = \{x, \alpha y\}$$

для любых $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Замечание. Разумного аналога билинейных форм над телом кватернионов $\mathbb{H}$ нет. (Кажущееся естественным кандидатом отображение $(x, y) \mapsto \sum x_j y_j$ из $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$ в $\mathbb{H}$ является спариванием (см. 2.3) левого $\mathbb{H}$-модуля $\mathbb{H}^n$ с правым $\mathbb{H}$-модулем $\mathbb{H}^n$.)

Если $V = \mathbb{K}^n$ — координатное n-мерное пространство, то билинейная форма записывается в виде

$$\{x, y\} = \sum a_{km} x_k x_m = xAy^{\mathrm{t}}, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1 \dots x_n)$, $y = (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{K}^n$ — матрицы-строки (соответственно, транспонированная матрица y^{t} является матрицей-столбцом), а A — матрица размера $n \times n$ над $\mathbb{K}$, она называется *матрицей билинейной формы*.

Билинейная форма называется *симметричной* (или *ортогональной*), если она удовлетворяет условию

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

для всех $x, y \in V$. В этом случае матрица A симметрична (т. е. $A = A^{\mathrm{t}}$).

Билинейная форма называется *кососимметричной* (или *симплектической*), если

$$\{x, y\} = -\{y, x\} \tag{1.2}$$

для всех $x, y \in V$. В этом случае матрица A кососимметрична (т. е. $A = -A^{\mathrm{t}}$).

Пусть V — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ мы должны уточнить, что V — левое линейное пространство (т. е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$, $x \in V$, выполнено $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$). *Полуторалинейная форма* на V — это отображение $f(x, y) = \langle x, y\rangle$ из $V \times V$ в $\mathbb{K}$, удовлетворяющее условиям

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \qquad \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,$$
$$\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \langle x, y\rangle\bar{\alpha}$$

для всех $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Если $V = \mathbb{K}^n$ — координатное пространство, то полуторалинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ записывается в виде

$$\langle x, y\rangle = \sum x_i a_{ij} \bar{y}_j = xA\bar{y}^{\mathrm{t}}, \tag{1.3}$$

где A — некоторая матрица, которая называется *матрицей полуторалинейной формы*.

Если для всех $x, y \in V$ выполнено

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \tag{1.4}$$

то полуторалинейная форма называется *эрмитовой* (в этом случае $A = A^*$, где $A^* = \overline{A}^{\mathrm{t}}$). Если же для всех $x, y \in V$ выполнено

$$\langle x, y\rangle = -\overline{\langle y, x\rangle}, \tag{1.5}$$

то форма называется *антиэрмитовой*.

Замечание. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ разницы между билинейными и полуторалинейными формами, конечно, нет. Нам, однако, удобно сохранить двойную терминологию (симметричные формы совпадают с эрмитовыми, а кососимметричные — соответственно с антиэрмитовыми). В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ нет существенной разницы между эрмитовыми и антиэрмитовыми формами, а именно, если форма $\langle x, y\rangle$ эрмитова, то $i\langle x, y\rangle$ — антиэрмитова.

Слово «форма» в этом параграфе означает один из 7 типов форм:
над $\mathbb{R}$ — симметричные и кососимметричные;
над $\mathbb{C}$ — симметричные, кососимметричные и эрмитовы;
над $\mathbb{H}$ — эрмитовы и антиэрмитовы.

Форма $B(x, y)$ называется *невырожденной*, если для любого ненулевого вектора $x \in V$ существует вектор $y \in V$ такой, что $B(x, y) = 0$. Это равносильно условию $\det A \neq 0$ (где A — матрица формы; определитель над $\mathbb{H}$ обсуждается в 2.8). *Ядро* (вырожденной) формы $B(x, y)$ — это множество всех $x \in V$ таких, что $B(x, y) = 0$ для всех y.

Пусть W — ядро вырожденной формы B. Пусть $w, w' \in W$. Тогда на факторпространстве V / W канонически определена форма B' из условия

$$B'(x + W, y + W) = B(x, y),$$

(где элементы V / W обозначены через $x + W$, $y + W$).

С каждым из этих типов форм связана некоторая геометрия. Все эти геометрии похожи между собой, и человек, разобравшийся в одной из них, свободно ориентируется и в остальных (к сожалению, евклидов случай, разбираемый в вводных курсах линейной алгебры, не типичен). В книге [Дьедонне (1954)] мастерски излагается абстрактная теория всех этих (и подобных им над другими полями) геометрий сразу (единственный недостаток этой книги — то, что ее невозможно читать, см. также [Бурбаки (1959)]). Текстов, в которых бы излагались все эти геометрии по отдельности, я не знаю. Больше других повезло вещественной симплектической геометрии — она излагается в учебниках по механике (см. [Арнольд (1974)]) и интегральным операторам Фурье (см. [Hörmander (1985)], 21). Ряд геометрий несколько старомодно излагается в книге [Гантмахер (1954)].

1.2. Значение форм на диагонали. Заметим, что условие (1.4) для эрмитовых форм в случае $x = y$ влечет вещественность выражения $\langle x, x\rangle$. Эрмитова форма называется

положительно определенной, если $\langle x, x\rangle > 0$ для всех $x \neq 0$;
неотрицательно определенной, если $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для всех x;
отрицательно определенной, если $\langle x, x\rangle < 0$ для всех $x \neq 0$;
неположительно определенной, если $\langle x, x\rangle \leqslant 0$ для всех x;
знаконеопределенной (*индефинитной*), если $\langle x, x\rangle$ принимает значения разных знаков.

Для кососимметричной формы $\{\cdot, \cdot\}$ условие (1.2) влечет $\{x, x\} = 0$ для всех x. Для антиэрмитовой формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в силу условия (1.5) выражение $\langle x, x\rangle$ чисто мнимо.

1.3. Ортогональное дополнение. Пусть $B(\cdot,\cdot)$ — форма в V одного из 7 типов. Векторы $x, y \in$ называются *ортогональными*, если $B(x,y)=0$. Пусть W — подпространство в V. *Ортогональное дополнение* $W^{\perp}$ — это множество всех $y \in V$, ортогональных всем векторам из W.

Теорема 1.1. Пусть форма B невырождена. Тогда

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V.$$

Следствие 1.2. Если форма B невырождена, то $W^{\perp\perp} = W$.

Заметим, что если форма B невырождена на подпространстве W, то

$$W \cap W^{\perp} = 0. \tag{1.6}$$

Обратно, (1.6) влечет невырожденность B на W. Поэтому, если $B(\cdot,\cdot)$ невырождена на V и W, то в силу теоремы 1.1.

$$W \oplus W^{\perp} = V.$$

1.4. Классификация форм. Две формы B и $\widetilde{B}$ на пространствах V и $\widetilde{V}$ мы назовем *эквивалентными*, если существует линейный обратимый оператор $Q : V \to \widetilde{V}$ такой, что $\widetilde{B}(Qx, Qy) = B(x,y)$ для всех $x, y \in V$. Сейчас мы дадим классификацию форм с точностью до эквивалентности.

Теорема 1.3. Любая невырожденная эрмитова форма $B(\cdot,\cdot)$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_q \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

при этом p равно наибольшей возможной размерности подпространства $W \subset V$, на котором B положительно определена, а q равно наибольшей возможной размерности подпространства $Y \subset V$, на котором B отрицательно определена.

Число p называется *положительным индексом инерции* формы $B(\cdot,\cdot)$, а число q — *отрицательным индексом инерции* ($p + q = \dim V$). Форма положительно определена, если $q = 0$, и отрицательно определена, если $p = 0$.

Теорема 1.4. Любая невырожденная кососимметричная форма $B(\cdot,\cdot)$ в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Заметим, что размерность пространства при этом обязательно оказывается четной.

Теорема 1.5. Любая невырожденная симметричная форма $B(\cdot,\cdot)$ над $\mathbb{C}$ в некотором базисе имеет матрицу вида

$$A = E.$$

Теорема 1.6. Любая невырожденная антиэрмитова форма над $\mathbb{H}$ в некотором базисе имеет матрицу вида

$$A = iE.$$

Доказательства этих теорем просты и однообразны. Докажем, например, теорему 1.5. Во-первых, заметим, что существует вектор $x \in V$ такой, что $B(x,x) \neq 0$. Иначе

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(B(x+y, x+y) - B(x,x) - B(y,y)\big)$$

было бы тождественным нулем. Выберем в качестве первого базисного вектора вектор $e_1 = \lambda x$ такой, что $B(\lambda x, \lambda x) = 1$. Пусть теперь V' — ортогональное дополнение до e_1. Теперь вопрос сведен к пространству V', имеющему меньшую размерность.

Докажем теперь теорему 1.4. Возьмем 2 вектора x, y такие, что $B(x,y) \neq 0$. Пусть W — подпространство, натянутое на x, y. Теперь вопрос сводится к подпространству $W^{\perp}$, имеющему меньшую размерность. ■

Осталось обсудить вырожденные формы. Пусть $B(\cdot,\cdot)$ — форма в V, а W — ее ядро. Пусть $Y \subset V$ — подпространство такое, что $V = W \oplus Y$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_\alpha$ в W и базис $e_{\alpha+1}, \ldots, e_n$ в Y. Тогда в этом базисе форма B имеет матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$

и теперь вопрос о приведении A к каноническому виду сводится к вопросу о приведении A' к каноническому виду.

Замечания.

а) Пусть B — невырожденная эрмитова форма с индексами инерции (p,q); пусть, например, $p \geqslant q$. Тогда в некотором базисе B имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_{p-q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_q \\ 0 & -E_q & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

б) Пусть B — невырожденная симметричная билинейная форма над $\mathbb{C}$. Тогда в некотором базисе B имеет вид

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Если $\dim V = 2n$, то удобно переставить базисные векторы и записать форму в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

1.5. Классические группы. По определению, оператор $Q : x \mapsto xQ$ в V *сохраняет форму* $B(x,y)$ в V, если

$$B(xQ, yQ) = B(x,y) \tag{1.11}$$

для всех $x, y \in V$. Говорят также, что Q — *изометрия*. Пусть B — билинейная форма в координатном пространстве $\mathbb{K}^n$, а A — ее матрица. Тогда (1.11) равносильно (см. (1.1)) условию

$$QAQ^{t} = A. \tag{1.12}$$

Если же форма B полуторалинейна, то (1.11) равносильно

$$QAQ^{*} = A. \tag{1.13}$$

Классическими группами называются следующие 10 серий групп:

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ — группы всех обратимых матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ соответственно (эти группы называются *полными линейными* группами);

$\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$ — группы матриц соответственно над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, сохраняющих невырожденную эрмитову форму с индексами инерции p, q. Они называются соответственно *псевдоортогональной*, *псевдоунитарной* и *псевдосимплектической* группами. Если $q = 0$, то они обозначаются через $\mathrm{O}(p)$, $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{Sp}(p)$, а из названий убирается приставка «псевдо»;

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ — группы преобразований линейного $2n$-мерного пространства над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, сохраняющих невырожденную кососимметричную форму. Эти группы называются *вещественной* и *комплексной симплектическими группами*;

$O(n, \mathbb{C})$ — группа преобразований $\mathbb{C}^n$, сохраняющих невырожденную симметричную форму. Эта группа называется *комплексной ортогональной группой*;

$SO^*(2n, \mathbb{C})$ — группа преобразований $\mathbb{H}^n$, сохраняющих невырожденную антиэрмитову форму. Эта группа названия не имеет.

Кроме того, вводятся еще несколько серий групп, очень слабо отличающихся от только что перечисленных. Они тоже называются классическими. А именно, *специальная линейная группа* $SL(n, \mathbb{K})$ — это группа матриц над $\mathbb{K}$ с определителем 1. Заметим далее, что условие (1.12) влечет $\det Q = \pm 1$, а условие (1.13) влечет $|\det(Q)| = \pm 1$. Оказывается, что для групп $G = Sp(p,q)$, $Sp(2n, \mathbb{K})$, $SO^*(2n)$ выполнено $\det Q = 1$ для всех $Q \in G$. Во всех остальных случаях можно рассмотреть группу преобразований, сохраняющих форму и имеющих определитель 1. Это дает серии групп

$$SO(p,q), SU(p,q), SO(n, \mathbb{C}).$$

Далее, часть классических групп имеет центр, отличный от единицы. Фактор классической группы G по центру обозначается через PG (т. е. PGL, PU, PSL и т. п.).

Все классические группы являются группами Ли.

1.6. Изотропные подпространства. Пусть B — невырожденная форма в V. Ненулевой *вектор* $x \in V$ называется *изотропным*, если $B(x,x) = 0$. Подпространство $W \subset V$ называется *изотропным*, если $B(x,y) = 0$ для любых $x, y \in W$ (или, иначе, $W^\perp \supset W$; если $W^\perp \subset W$, то подпространство называется W *коизотропным*).

Понятно, что если форма положительно определена, то изотропных подпространств быть не может. Во всех остальных случаях они существуют.

Пример 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ (или $\mathbb{C}^{2n}$) кососимметричную билинейную форму с матрицей (1.8). Тогда уравнения $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2n} = 0$ задают изотропное подпространство.

Пример 2. Рассмотрим пространство $\mathbb{K}^{p+q}$ с эрмитовой формой (1.7). Пусть, например, $q \geqslant p$. Тогда уравнения $x_1 = x_{q+1}$, $x_2 = x_{q+2}, \ldots, x_p = x_{q+p}$ задают изотропное подпространство (см. также (1.9)).

Пример 3. Рассмотрим $\mathbb{C}^n$ с симметричной билинейной формой $B(x,y) = \sum x_j y_j$. Тогда уравнения $x_2 = ix_1$, $x_4 = ix_3, \ldots$ задают изотропное подпространство (см. также (1.10)).

Оказывается, во всех трех примерах предъявленное изотропное подпространство имеет наибольшую возможную размерность.

Теорема 1.7. Пусть B — невырожденная форма в V, а $W \subset V$ — изотропное подпространство. Тогда

а) $\dim W \leqslant \frac{1}{2} \dim V$;

б) если B — эрмитова форма с индексами инерции p, q, то $\dim W \leqslant \min(p,q)$.

Доказательство.

а) $W \subset W^\perp$, а $\dim W + \dim W^\perp = n$.

б) Пусть, например, $q \geqslant p$. Рассмотрим q-мерное подпространство Y, на котором B положительно определена. Тогда $Y \cap W = 0$, а значит, $\dim W \leqslant p$. ■

Теорема 1.8.

а) Любое изотропное подпространство содержится в изотропном подпространстве максимальной возможной размерности.

б) Пусть $W_1, W_2 \subset V$ — два изотропных подпространства одной размерности. Тогда существует оператор Q, сохраняющий форму, такой, что $QW_2 = W_1$.

Доказательство. Мы докажем а). Пусть W — изотропное подпространство, имеющее не самую большую размерность. Тогда в $W^\perp / W$ есть изотропное подпространство (в каждом отдельном случае это легко проверяется), что и доказывает теорему. ■

В случае кососимметричных форм максимальные изотропные подпространства называются *лагранжевыми подпространствами*.

1.7. Грассманианы. *Грассманианом* $Gr_n^k(\mathbb{K})$ называется множество всех k-мерных подпространств в $\mathbb{K}^n$. Легко видеть, что $Gr_n^k(\mathbb{K})$ обладает естественной структурой гладкого многообразия. Сейчас мы построим естественный атлас на $Gr_n^k(\mathbb{K})$. Карты этого атласа нумеруются парами подпространств $W, Y \subset \mathbb{K}^n$ таких, что

$$\dim W = k, \quad \dim Y = n - k, \quad \mathbb{K}^n = W \oplus Y.$$

Карта $\mathscr{M}_{W,Y}$ состоит из всех $H \in Gr_n^k$ таких, что $H \cap Y = 0$. Заметим, что тогда проекция H на W вдоль Y есть все W. Поэтому H является графиком некоторого линейного оператора $A_H : W \to Y$ (напомним, что $\mathbb{K}^n$ отождествляется с $W \oplus Y$). Итак, множество $\mathscr{M}_{W,Y}$ параметризуется элементами пространства матриц размера $k \times (n-k)$. Очевидно, что карты $\mathscr{M}_{W,Y}$ покрывают весь грассманиан, а функции перехода легко вычисляются и являются вещественно-аналитическими. Очевидно,

$$\dim Gr_n^k(\mathbb{K}) = k(n-k)\dim(\mathbb{K}).$$

Ясно, что группа $GL(n,k)$ действует на Gr_n^k транзитивно.

Пусть теперь в пространстве $V = \mathbb{K}^n$ введена невырожденная форма B (под словом «форма» мы понимаем одну из 7 форм списка п. 1.1). Пусть G — группа операторов в $\mathbb{K}^n$, сохраняющих B. Орбиты группы G на Gr_n^k описываются *теоремой Витта*, см. [Bourbaki (1958)]:

Теорема 1.9. Пусть W_1, W_2 — подпространства в V равной размерности. Допустим, существует обратимый оператор $A : W_1 \to W_2$ такой, что $B(Ax, Ay) = B(x,y)$ для всех $x, y \in W_1$. Тогда существует оператор $Q \in G$ такой, что $Qx = Ax$ для всех $x \in W_1$.

Пусть, по-прежнему, B — невырожденная форма в $V = \mathbb{K}^n$. Пусть $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ — множество всех k-мерных изотропных подпространств в V. Легко понять, что $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ замкнуто в Gr_n^k. При этом $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ является орбитой группы Ли G (состоящей из всех изометрий формы B). Поэтому $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ — гладкое компактное многообразие. Многообразия $Gr_n^k(\mathbb{K}, B)$ мы также будем называть *грассманианами*.

1.8. Примеры из аналитической геометрии.

Пример 1. Пусть $Q(x)$ — однородная квадратичная форма трех переменных. Пусть $B(x,y)$ — билинейная форма такая, что $Q(x) = B(x,x)$. Напомним, что

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big). \tag{1.14}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ поверхность $Q(x) = \alpha$. Пусть l — прямая, проходящая через 0. Рассмотрим всевозможные прямые $\tilde{l}$, параллельные l. Пусть A, B — точки пересечения $\tilde{l}$ с поверхностью $Q(x) = \alpha$. Пусть C — середина отрезка AB. Все полученные таким образом точки C, как известно, лежат на одной плоскости L. Легко видеть, что L — ортогональное дополнение до l относительно формы B.

Пример 2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ квадратичную форму $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Соответствующая билинейная форма B (см. (1.14)) имеет индексы инерции $(2,2)$, поэтому максимальные B-изотропные подпространства имеют размерность 2. Ясно, что эти подпространства лежат на конической поверхности $Q(x) = 0$. Вспомним, что однородное уравнение в $\mathbb{R}^4$ задает поверхность в трехмерном проективном пространстве. В нашем случае эта поверхность, очевидно, является однополостным гиперболоидом. Двумерным подпространствам, лежащим на гиперповерхности $Q(x) = 0$, соответствует прямые, лежащие на гиперболоиде. Хорошо известно, что на однополостном гиперболоиде лежат два однопараметрических семейства прямых. Две прямые, содержащиеся в одном семействе, скрещиваются, а две прямые, лежащие в разных семействах, пересекаются. Таким образом, мы видим, что грассманиан $\mathrm{Gr}_4^2(\mathbb{R}, B)$ гомеоморфен несвязному объединению двух окружностей. При этом если $W_1, W_2 \in \mathrm{Gr}_4^2(\mathbb{R}, B)$ лежат в одной компоненте связности, то $W_1 \cap W_2 = 0$, а если в разных, то $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. (См. обсуждение аналогичного грассманиана в п. III.3.2.)

1.9. Алгебры Ли. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ матричной группы G состоит, как известно, из всех матриц X таких, что $\exp(sX) \in \mathrm{G}$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Пусть G — группа преобразований, сохраняющих билинейную форму $B(x, y)$ с матрицей A. Тогда в силу равенства (1.12) для любого $X \in \mathrm{G}$ выполнено

$$\exp(sX)A\exp(sX^{\mathrm{t}}) = A. \tag{1.15}$$

Дифференцируя это равенство по s и подставляя $s = 0$, получаем

$$XA + AX^{\mathrm{t}} = 0. \tag{1.16}$$

Легко убедиться, что, обратно, (1.16) влечет (1.15), поэтому алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц X, удовлетворяющих (1.16).

В случае полуторалинейной формы $B(x, y)$ мы получаем уравнение

$$XA + AX^* = 0.$$

Далее, известно, что

$$\frac{\partial}{\partial s}\det(sX)\Big|_{s=0} = \operatorname{tr} X.$$

Поэтому алгебра Ли группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ при $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ состоит из матриц X, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{tr} X = 0.$$

В случае $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$ это условие заменяется на $\operatorname{Re}\operatorname{tr} X = 0$.

1.10. Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$**.** Некоторые из перечисленных в п. 1.5 классических групп в действительности являются изоморфными. Сейчас нас интересует, какие группы изоморфны $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Прежде всего, очевидно, $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ совпадает с $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Построим чуть менее очевидные изоморфизмы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}(1, 1)$ и $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(2, 1)$.

Группа $\mathrm{SU}(1, 1)$ состоит из комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar b & \bar a \end{pmatrix}$, где $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Эти матрицы сохраняют вещественное подпространство V в $\mathbb{C}^2$, состоящее из векторов вида $(x, \bar x)$, и, таким образом, мы получаем действие $\mathrm{SU}(1, 1)$ в V. Легко видеть, что $\mathrm{SL}(V) = \mathrm{SU}(1, 1)$.

Построим гомоморфизм $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SO}(2, 1)$ с ядром $\pm E$.

Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ сохраняет кососимметричную билинейную форму B с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим действие $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ в симметричной степени $\mathrm{S}^2\mathbb{R}^2$ (см. ниже п. 4.10). Форме B в $\mathbb{R}^2$ соответствует симметричная форма в $\mathrm{S}^2\mathbb{R}^2$ с индексами инерции $(1, 2)$, и эта форма, естественно, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-инвариантна.

§ 2. *Структуры линейной алгебры*

Параграф содержит несколько более-менее тривиальных схоластических замечаний по линейной алгебре. Слова «линейное пространство» означают (если не сказано обратного) конечномерные линейные пространства над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

2.1. Операторы. Пусть V — линейные пространства над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *Линейный оператор* (или просто *оператор*) $V \to W$ — это отображение, удовлетворяющее условиям

$$A(v + v') = Av + Av', \quad A(\alpha v) = \alpha Av \tag{2.1}$$

для всех $v, v' \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Через $\operatorname{Ker} A$ мы будем обозначать ядро оператора A (т. е. множество всех $h \in V$ таких, что $Ah = 0$), а через $\operatorname{Im} A$ — образ A.

Отображение $A : V \to W$ называется *антилинейным оператором*, если

$$A(v + v') = Av + Av', \quad A(\alpha v) = \bar\alpha Av. \tag{2.2}$$

Естественно, в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ эти понятия совпадают.

Линейным (соответственно, *антилинейным*) *функционалом* на V называется линейный (соответственно, антилинейный) оператор $V \to \mathbb{K}$.

2.2. Двойственное и антидвойственное пространство. *Двойственным пространством* V' к (конечномерному) линейному пространству V называется пространство линейных функционалов на V.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Тогда существует базис $f_1, \ldots, f_n$ в пространстве V' такой, что

$$f_\alpha(e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ называются *двойственными*.

Хотя V и V' имеют одну размерность, канонического изоморфизма между ними нет. Кажущееся естественным отождествление $e_\alpha \leftrightarrow f_\alpha$ зависит от выбора базиса. Однако существует каноническое отождествление V с V'' (т. е. с пространством линейных функционалов на V'). Каждому вектору $v \in V$ при этом ставится в соответствие линейный функционал $F_v(f) = f(v)$ на V'.

Антидвойственное пространство V° к V — это пространство антилинейных функционалов на V. Существует канонический антилинейный оператор $I : V' \to V^\circ$, устанавливающий биекцию между ними, а именно, $(If)v = \overline{f(v)}$. Однако этот оператор антилинеен, и поэтому V' и V° приходится считать разными линейными пространствами.

Пример. Пусть V — линейное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной формой B. Пусть V_+ и V_- — максимальные изотропные подпространства, причем $V = V_+ \oplus V_-$. Тогда V_+ отождествляется с $(V_-)'$. Действительно, каждому $v_+ \in V_+$ ставится в соответствие линейный функционал $f_{v_+}(v_-) = B(v_+, v_-)$ на V_-.

2.3. Спаривание. Пусть V и W — линейные пространства над $\mathbb{K}$. *Билинейное спаривание* $Q(\cdot\,,\cdot) : V \times W \to \mathbb{K}$ — это отображение, удовлетворяющее условиям

$$Q(v + v', w) = Q(v, w) + Q(v', w), \quad Q(v, w + w') = Q(v, w) + Q(v, w'), \tag{2.3}$$

$$Q(\alpha v, w) = Q(v, \alpha w) = \alpha Q(v, w). \tag{2.4}$$

Полуторалинейное спаривание $Q(\cdot\,,\cdot) : V \times W \to \mathbb{K}$ — это отображение, удовлетворяющее условию (2.3) и условию

$$Q(\alpha v, w) = \alpha Q(v, w),$$
$$Q(v, \alpha w) = \bar\alpha Q(v, w).$$

Пример 1. Билинейная (полуторалинейная) форма на V является билинейным (полуторалинейным) спариванием $V \times V \to \mathbb{K}$.

Пример 2. Формула

$$Q(f, v) = f(v) \tag{2.5}$$

задает билинейное спаривание $V \times V' \to \mathbb{K}$. Она же задает полуторалинейное спаривание $V \times V^\circ \to \mathbb{K}$.

Пусть $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ — спаривание. Пусть Y — подпространство в V. Тогда *аннулятор* $\operatorname{Ann} Y$ — это подпространство в W, состоящее из всех векторов $w\in W$, удовлетворяющих условию $Q(y,w)=0$ для всех $y\in Y$. Аналогично определяется аннулятор подпространства $X\subset W$. Ясно, что $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} Y)\supset Y$.

Пример 3. В условиях примера 1 аннулятор есть ортогональное дополнение.

Спаривание $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ann} V=0$, $\operatorname{Ann} W=0$.

Пример 4. Спаривание (2.5) из $V\times V'$ в $\mathbb{K}$ невырождено. Сейчас мы увидим, что это по существу единственный пример невырожденного спаривания.

Теорема 2.1. Пусть $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ — невырожденное спаривание. Тогда
а) $\dim V=\dim W$;
б) $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} X=X$ для всех подпространств $X\subset V$;
с) $\dim X+\dim\operatorname{Ann} X=\dim V$.

Далее, пусть $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ — билинейное (соответственно, полуторалинейное) спаривание. Тогда определен канонический оператор $L_Q: V\to W'$ (соответственно, $V\to W^\circ$), задаваемый формулой

$$(L_Q v)(w)=Q(v,w).$$

Обратно, любой оператор $A: V\to W'$ определяет спаривание $V\times W\to\mathbb{K}$ по формуле $Q(v,w)=(Av)(w)$.

Легко видеть, что в случае, когда спаривание невырождено, оператор L_Q является биекцией $V\to W'$ (или $V\to W^\circ$).

В частности, невырожденная билинейная (соответственно, полуторалинейная) форма на V устанавливает канонический изоморфизм $V\to V'$ (соответственно, $V\to V^\circ$).

Далее, если спаривание $Q(\cdot,\cdot): V\times W\to\mathbb{K}$ невырождено, то для любого базиса v_j в V найдется двойственный базис w_j в W такой, что

$$Q(v_j,w_i)=\delta_{ji}.$$

Пример 4. Пусть $B(\cdot,\cdot)$ — невырожденная симметричная, кососимметричная или эрмитова форма на V. Пусть H_1,H_2 — изотропные подпространства в V, причем $V=H_1\oplus H_2$ (это возможно во всех случаях, когда в V есть изотропное подпространство половинной размерности). Определим спаривание

$$(h_1,h_2)\mapsto B(h_1,h_2)$$

из $H_1\times H_2$ в $\mathbb{K}$. Легко видеть, что это спаривание невырождено. Поэтому существует канонический изоморфизм $H_1\to H_2'$ (или $H_1\to H_2^\circ$, если спаривание эрмитово). Кроме того, существует базис $p_1,\dots,p_m,q_1\dots,q_m$ в V такой, что $p_j\in H_1$, $q_j\in H_2$, а

$$B(p_i,q_j)=\delta_{ij},\quad B(p_i,p_j)=B(q_i,q_j)=0.$$

2.4. Транспонированный и сопряженный операторы.

Пусть $A: V\to W$ — линейный оператор. *Транспонированный оператор* $A^t: W'\to V'$ определяется формулой

$$(A^t g)(v)=g(Av)$$

для всех $g\in W'$, $v\in V$.

Если V и W снабжены невырожденными билинейными формами $B_V(\cdot,\cdot)$ и $B_W(\cdot,\cdot)$, то V отождествляется с V', а W с W', поэтому A^t можно рассматривать как оператор $W\to V$. Тогда A^t определяется из формулы

$$B_V(v,A^t w)=B_W(Av,w). \tag{2.6}$$

Далее, если A — оператор $V\to V'$, то A^t тоже является оператором $V\to V'$. В частности, в этом случае имеет смысл понятие *симметрического* ($A=A^t$) и *кососимметрического* ($A=-A^t$) *оператора* A. В частности, это замечание может быть применено в ситуации только что разобранного примера (т. е. к дополнительным изотропным подпространствам).

Пусть, далее, $A: V\to W$ — линейный оператор. Выберем в V и V' двойственные базисы $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_n$, а в W и W' выберем двойственные базисы $p_1,\dots,p_m$ и $q_1,\dots,q_m$. Пусть $\{a_{ij}\}$ — матричные элементы A в базисах $e_1,\dots,e_n;p_1,\dots,p_m$. Тогда матричные элементы A^t в базисах $q_1,\dots,q_m; f_1,\dots,f_n$ суть a_{ji}. Таким образом, матрица A^t действительно получается из матрицы A транспонированием. Конечно, здесь важно то, что мы выбрали двойственные базисы.

Пусть, далее, $A: V\to W$ — линейный оператор. *Сопряженный* к A *оператор* $A^*: W^\circ\to V^\circ$ определяется формулой

$$(A^*g)(v)=g(Av),$$

где $g\in W^\circ$, $v\in V$. Если канонически (антилинейно!) отождествить V° с V', а W° с W', то A^* отождествится с A^t, т. е.

$$A^*f=\overline{A^t\overline{f}}.$$

Если V и W снабжены невырожденными полуторалинейными формами B_V и B_W, то V° отождествляется с V, а W° — с W. Поэтому A^* оказывается оператором $W\to V$, он определяется равенством

$$B_V(v,A^*w)=B_W(Av,w). \tag{2.7}$$

Наконец, если A — оператор $V\to V^\circ$, то A^* тоже действует из V в V°.

2.5. Комплексификация и оператор вещественной структуры.

Пусть V — вещественное линейное пространство. Определим *комплексификацию* $V_{\mathbb{C}}$ вещественного пространства V. Положим $V_{\mathbb{C}}=V\oplus V$, причем умножение на i в $V_{\mathbb{C}}$ вводится формулой

$$i(v,v')=(-v',v).$$

Элементы $w=(v,v')\in V\oplus V=V_{\mathbb{C}}$ удобно записывать в виде $w=v+iv'$.

В пространстве $V_{\mathbb{C}}$ канонически определен антилинейный *оператор комплексного сопряжения* $w\mapsto\overline{w}$, действующий по формуле

$$\overline{v+iv'}=v-iv'.$$

Очевидно, $\overline{\overline{w}}=w$.

Пусть теперь W — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Пусть в W фиксирован антилинейный оператор J такой, что $J^2=E$. Такие операторы мы будем называть *операторами вещественной структуры*. Покажем, что W отождествляется с комплексификацией $V_{\mathbb{C}}$ некоторого канонически определенного пространства V. Оператор J является вещественно-линейным оператором. В силу равенства $J^2=E$ собственные числа J равны ±1, а жордановы клетки у J отсутствуют. Пусть V — множество всех $v\in W$ таких, что $Jv=v$, а Y — множество всех y таких, что $Jv=-v$. Далее, пусть $v\in V$. Тогда

$$iv=iJv=-J(iv),$$

т. е. $iv\in Y$. Мы видим, что W является комплексификацией своего подпространства V, при этом $Y=iV$, а оператор J оказывается оператором комплексного сопряжения.

Пусть, далее, V, W — линейные пространства над $\mathbb{R}$, а $A: V\to W$ — линейный оператор. Тогда канонически определен следующий $\mathbb{C}$-линейный оператор $V_{\mathbb{C}}\to W_{\mathbb{C}}$, также обозначаемый через A:

$$v+iv'\mapsto Av+iAv'$$

для всех $v,v'\in V$. Полученные таким образом операторы мы назовем *вещественными*. Ясно, что любой оператор S в $V_{\mathbb{C}}$ представим в виде

$$S=A+iB,$$

где A и B — вещественные операторы.

Если $B(\cdot,\cdot)$ — симметричная или кососимметричная билинейная форма в V, то в $V_{\mathbb{C}}$ канонически определены две формы, совпадающие с $B(\cdot,\cdot)$, на V: билинейная форма

$$Q(v+iv', w+iw') = B(v,w) - B(v',w') + i\big(B(v,w') + B(v',w)\big) \tag{2.8}$$

и полуторалинейная форма

$$R(v+iv', w+iw') = B(v,w) + B(v',w') + i\big(B(v',w) - B(v,w')\big).$$

Эти две формы связаны соотношением

$$R(v,w) = Q(v,\bar{w}). \tag{2.9}$$

Замечание. Это равенство влечет забавные связи между геометриями форм R и B. Допустим, что $V_{\mathbb{C}}$ содержит изотропное относительно Q подпространство H половинной размерности. Пусть $\overline{H}$ — множество всех векторов вида $\bar{h}$, где $h \in H$ (отметим, что $\overline{H}$ тоже Q-изотропно). В силу (2.9) H и $\overline{H}$ являются R-ортогональными, а так как $\dim H = \frac{1}{2}\dim V_{\mathbb{C}}$, мы получаем, что $\overline{H}$ есть R-ортогональное дополнение до H.

2.6. Овеществление и оператор комплексной структуры. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Тогда его же можно рассматривать как пространство над $\mathbb{R}$. Полученное таким образом вещественное пространство W называется *овеществлением пространства* V (обозначение $W = V_{\mathbb{R}}$). Заметим, что в W канонически определен оператор I умножения на i. Естественно, $I^2 = -1$.

Обратно, пусть W — вещественное линейное пространство, и в W определен линейный оператор I такой, что $I^2 = -1$. Тогда W можно рассматривать как комплексное пространство; умножение на скаляр $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ задается формулой

$$(\alpha + i\beta)w = (\alpha E + \beta I)w. \tag{2.10}$$

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, а W — его овеществление. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — базис в V. Тогда $e_1,\dots,e_n$, $ie_1,\dots,ie_n$ — базис в W. Рассмотрим в V оператор Q с матрицей $S = A + iB$ в базисе $e_1,\dots,e_n$, где A и B — вещественные матрицы. Тогда матрица оператора Q в базисе $e_1,\dots,e_n, ie_1,\dots,ie_n$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$, при этом

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = |\det(A+iB)|^2. \tag{2.11}$$

Пусть, далее, $Q(\cdot,\cdot)$ — эрмитова форма в V. Тогда в W определены две формы — симметричная билинейная форма

$$T(w,w') = \operatorname{Re} Q(w,w') \tag{2.12}$$

и кососимметричная билинейная форма

$$S(w,w') = \operatorname{Im} Q(w,w'). \tag{2.13}$$

Эти две формы связаны тождеством

$$S(w,w') = T(w, Iw'),$$

где I — оператор комплексной структуры (та же операция применима к билинейным формам в V).

2.7. Дважды комплексное пространство. Пусть W — вещественное пространство, снабженное оператором J комплексной структуры, $J^2 = -1$. Рассмотрим пространство $W_{\mathbb{C}}$. Из равенства $J^2 = -1$ вытекает, что собственные числа оператора J суть $\pm i$, причем J не имеет жордановых клеток. Пусть $W_{\pm}$ — это подпространства в $W_{\mathbb{C}}$, состоящие из векторов w таких, что $Jw = \pm iw$. Тогда $W_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$.

Заметим, что операция комплексного сопряжения $w \mapsto \bar{w}$ переставляет подпространства W_+ и W_-, при этом само пространство W состоит из векторов вида $(w,\bar{w}) \in W_+ \oplus W_-$.

Пусть теперь A — вещественно-линейный оператор в W. Обозначим через $\tilde{A}$ соответствующий оператор в $W_{\mathbb{C}}$. Тогда матрица $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} : W_+ \oplus W_- \to W_+ \oplus W_-. \tag{2.14}$$

Дважды комплексные пространства дают очень удобные матричные реализации для некоторых классических групп. Нас интересуют группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ и $\mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$.

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство V, снабженное положительно определенной эрмитовой формой Q. Пусть W — его овеществление. Рассмотрим группу G (вещественно) линейных операторов в W, сохраняющих $\operatorname{Im} Q$ (см. п. 2.6). Ясно, что $\mathrm{G} = \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Теперь, переходя в $W_{\mathbb{C}}$, мы реализуем $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ как некоторую группу матриц вида (2.14), при этом элементы $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ сохраняют в $W_{\mathbb{C}}$ уже две формы (см. п. 2.5). Одна из этих форм — кососимметричная форма с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, а другая — антиэрмитова форма с матрицей $\begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix}$ (конечно, удобнее говорить об эрмитовой форме с матрицей $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$).

Рассмотрим теперь в W группу $\mathrm{G}' \simeq \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$ операторов, сохраняющих форму $\operatorname{Re} Q$. Тогда $\mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$ реализуется как группа операторов в $W_{\mathbb{C}}$ вида (2.14), сохраняющих симметричную билинейную форму с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ и эрмитову форму с матрицей $\begin{pmatrix} E & \\ & -E \end{pmatrix}$.

2.8. Кватернионная алгебра. Тело кватернионов $\mathbb{H}$ состоит из выражений вида

$$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k,$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$, а i, j, k удовлетворяют таблице умножения

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \tag{2.15}$$

Напомним, что сопряженный кватернион есть $\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$; напомним также, что $q\bar{q} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, а $q^{-1} = (q\bar{q})^{-1}\bar{q}$.

(Левое) кватернионное линейное пространство — это левый $\mathbb{H}$-модуль (слово «левое» мы будем опускать).

Пример. Пусть $\mathbb{H}^n$ — пространство последовательностей $(z_1\dots,z_n)$, где $z_j \in \mathbb{H}$. В нем вводится покомпонентное сложение

$$(z_1,\dots,z_n) + (u_1,\dots,u_n) = (z_1+u_1,\dots,z_n+u_n)$$

и умножение на скаляры $\alpha \in \mathbb{H}$ слева (!)

$$\alpha(z_1,\dots,z_n) = (\alpha z_1,\dots,\alpha z_n).$$

Любое конечномерное кватернионное линейное пространство изоморфно $\mathbb{H}^n$.

Линейные операторы определяются условиями (2.1). Любой линейный оператор $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$ есть оператор умножения $z \mapsto zA$ строки $z = (z_1\dots z_n)$ на кватернионную матрицу A размера $n \times m$.

Пусть A — линейный оператор $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$. Заметим, что $\mathbb{H}^n$ очевидным образом отождествляется с $\mathbb{R}^{4n}$, поэтому A можно рассматривать как оператор $\mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}$. *Определитель* $\det(A)$ оператора A есть корень четвертой степени из определителя A как оператора $\mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}$; отметим, что $\det(A)$ — неотрицательное вещественное число.

2.9. Забывание и восстановление кватернионной структуры. Пусть V — кватернионное линейное пространство. Так как $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, мы можем рассматривать V как комплексное линейное пространство вдвое большей размерности. Обозначим это комплексное пространство через W. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — кватернионный базис в V. Тогда $e_1,\dots,e_n$,

$je_1, \ldots, je_n$ — комплексный базис в W. В этом базисе кватернионно-линейные операторы имеют (комплексные) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix},$$

где Φ и Ψ — комплексные матрицы размера $n \times n$.

Пусть, далее, $\Omega(\cdot\,,\cdot)$ — эрмитова (соответственно, антиэрмитова) форма в V. Любой кватернион z представим в виде $z = a + jb$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Поэтому форма $\Omega(\cdot\,,\cdot)$ однозначно представима в виде

$$\Omega(v, v') = M(v, v') + jL(v, v'),$$

где L и M — комплекснозначные выражения. Таким образом, из кватернионной формы Ω в пространстве V получаются две формы в пространстве W — эрмитова форма M и кососимметричная (соответственно, симметричная) форма L. Итак, мы получили реализации групп $\mathrm{Sp}(p, q)$ и $\mathrm{SO}^*(2n)$ как групп комплексных матриц, сохраняющих пару форм (ср. с п. 2.7).

Заметим, что в комплексном пространстве W присутствует еще антилинейный оператор умножения на j.

Рассмотрим теперь комплексное пространство Y, в котором фиксирован антилинейный оператор J такой, что $J^2 = -E$. Тогда операторы вида

$$(\alpha + i\beta)E + (\gamma + i\delta)J, \tag{2.16}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, перемножаются и складываются как кватернионы. Таким образом, мы можем объявить Y кватернионным линейным пространством, положив, что умножение на скаляр $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ есть оператор (2.16).

§ 3. Пространства с мерой

Мы предполагаем известной обычную теорию интегрирования по Лебегу, см. [Колмогоров, Фомин (1981)]. Основная цель этого раздела — дать сводку результатов по основаниям теории меры ([Halmos, Neumann (1942)], [Рохлин (1947)]), обычно не включаемым в курсы функционального анализа (эти утверждения часто включаются в курсы теории вероятностей, см., например, [Ширяев (1980)], глава II, [Parthasarathy (1980)]).

3.1. σ-алгебры. Пусть M — множество. Семейство Σ подмножеств множества M называется *σ-алгеброй*, если

1. для любого $A \in \Sigma$ дополнение до A тоже лежит в Σ;
2. для любого конечного или счетного набора $A_1, A_2 \ldots \in \Sigma$ множества $\bigcap A_j, \bigcup A_j$ тоже лежат в Σ;
3. $\varnothing \in \Sigma$, $M \in \Sigma$.

Если $A \in \Sigma$, говорят, что A *измеримо* относительно Σ.

Мы будем говорить, что σ-алгебра Σ разделяет точки, если для любых $x_1, x_2 \in M$ найдется $A \in \Sigma$ такое, что $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$.

Пусть M — множество, а S — некоторое семейство подмножеств в M. Рассмотрим все Σ-алгебры, содержащие S, и рассмотрим их пересечение $\Sigma(S)$. Ясно, что $\Sigma(S)$ будет σ-алгеброй. Таким образом, для любого семейства S подмножеств множества M найдется наименьшая σ-алгебра $\Sigma(S)$, содержащая S. Мы будем говорить, что $\Sigma(S)$ *порождена семейством S*.

Мы будем говорить, что σ-алгебра Σ имеет *счетную базу*, если она может быть порождена счетным семейством множеств. Рассмотрим σ-алгебру Σ_1 на M_1 и σ-алгебру Σ_2 на M_2. Мы скажем, что Σ_1 и Σ_2 изоморфны, если существует биекция $M_1 \to M_2$, переводящая Σ_1 в Σ_2.

Пусть I — промежуток прямой. *Борелевской σ-алгеброй* $\mathscr{B}$ называется σ-алгебра на I, порожденная всеми интервалами $J \subset I$. Ясно, что $\mathscr{B}$ имеет счетную базу.

Если M — полное сепарабельное метрическое пространство, то *борелевской σ-алгеброй* $\mathscr{B}$ на M называется σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (в качестве

счетного семейства множеств, порождающего $\mathscr{B}$, можно выбрать шары с рациональными радиусами и центрами в точках счетного всюду плотного множества, поэтому $\mathscr{B}$ имеет счетную базу). Можно показать, что все борелевские σ-алгебры (для всех полных несчетных сепарабельных метрических пространств) изоморфны между собой. Более того, во всех разумных случаях σ-алгебра со счетной базой, разделяющая точки, на континуальном множестве оказывается изоморфна борелевской. Обсуждение борелевских структур см. в [Arveson (1976)].

3.2. Меры. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра на M. *Мерой* μ на Σ называется функция на Σ со значениями в $\mathbb{R} \cup (+\infty)$, удовлетворяющая условиям

1. $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \Sigma$;
2. если $A_j \in \Sigma$ — конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся множеств, то

$$\mu\Bigl(\bigcup_j A_j\Bigr) = \sum \mu(A_j). \tag{3.1}$$

Основными инструментами построения мер являются теорема Каратеодори о продолжении меры (см. [Колмогоров, Фомин (1981)], § V.3, [Ширяев (1980)], § II.3) и теорема Колмогорова о проективных пределах мер (см. [Parthasarathy (1980)], § 27, [Ширяев (1980)], § II.9).

Пусть μ — мера на пространстве M с σ-алгеброй Σ.

Мера называется

— *конечной*, если $\mu(M) < \infty$;

— *вероятностной*, если $\mu(M) = 1$;

— *σ-конечной*, если M представимо в виде объединения счетного семейства множеств конечной меры;

— *непрерывной*, если любая точка из M измерима и мера любой точки равна 0;

— *борелевской*, если она определена на борелевской σ-алгебре.

3.3. Полные меры. На промежутке I прямой, кроме борелевской σ-подалгебры $\mathscr{B}$, есть еще одна естественная σ-алгебра $\mathscr{L}$, состоящая из измеримых по Лебегу множеств. Напомним, что множество $A \subset I$ *измеримо по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество B_ε такое, что $A \triangle B_\varepsilon$ покрывается счетным набором интервалов общей длины $< \varepsilon$. Алгебра $\mathscr{L}$ больше чем $\mathscr{B}$, и с формально-логической точки зрения существенно больше: $\mathscr{B}$ содержит лишь континуум подмножеств, а мощность $\mathscr{L}$ равна мощности множества подмножеств континуума. На практике, однако, различие между $\mathscr{B}$ и $\mathscr{L}$ почти неуловимо, оно происходит скорее из недостатков формально-схоластических оснований математики, чем из содержания понятий.

Мера μ, определенная на σ-алгебре Σ, называется *полной*, если любое подмножество множества меры 0 измеримо и (следовательно) имеет меру 0.

Пусть μ — неполная мера, определенная на некоторой σ-алгебре Σ на множестве M. Рассмотрим σ-алгебру $\widetilde{\Sigma}$, состоящую из множеств $A \subset M$, для которых существует $B \in \Sigma$ такое, что $A \triangle B$ является подмножеством множества меры 0. При этом полагаем, что $\mu(A) := \mu(B)$. Построенная мера μ на $\widetilde{\Sigma}$ уже полна. Эта процедура называется *пополнением меры*.

Например, σ-алгебра $\mathscr{L}$ на промежутке прямой является пополнением борелевской алгебры $\mathscr{B}$.

3.4. Лебеговские пространства. Пусть даны два пространства X_1, X_2 с мерами μ_1, μ_2, определенными на σ-алгебрах Σ_1, Σ_2. *Изоморфизмом* $X_1 \to X_2$ называется взаимнооднозначное отображение $f : X_1 \setminus E_1 \to X_2 \setminus E_2$, где E_1, E_2 — множества нулевой меры, переводящее измеримые множества в измеримые и сохраняющее меру множеств.

Оказывается, что различных «разумных» пространств с мерой очень немного, и они допускают классификацию с точностью до изоморфизма. Пространство M с мерой называется *лебеговским*, если оно изоморфно промежутку прямой, пустому, конечному или бесконечному (снабженному мерой Лебега, определенной на измеримых по Лебегу множествах), к которому добавлено пустое, конечное или счетное множество точек, имеющих ненулевую меру.

Оказывается, что почти все пространства с мерой, встречающиеся в анализе, являются лебеговскими, и, более того, изоморфизм со стандартным лебеговским пространством обычно может быть построен явно (обсуждение этого см. в п. VIII.4.1). Полезна следующая аксиоматическая характеризация лебеговских пространств, полученная в [Halmos, Neumann (1942)] (см. также [Рохлин (1947)]):

Теорема 3.1. Пусть M — пространство с полной мерой, определенной на σ-алгебре Σ. Пусть Σ содержит некоторую σ-алгебру Θ, изоморфную борелевской σ-алгебре, причем для любого $A \in \Sigma$ существует $B \in \Theta$ такое, что $A \supset B$ и $\mu(A \setminus B) = 0$. Тогда пространство M — лебеговское.

3.5. Образ меры.

Пусть M — пространство с σ-алгеброй Σ, а N — пространство с σ-алгеброй Θ. Отображение $\psi : M \to N$ называется (Σ, Θ)-*измеримым*, если прообраз любого Θ-измеримого множества Σ-измерим. Функция $M \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если она $(\Sigma, \mathscr{B})$-измерима (здесь $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра; класс $(\Sigma, \mathscr{L})$-измеримых функций оказывается совершенно бессмысленным).

Пусть $\psi, \psi' : M \to N$ — измеримые отображения, а μ — мера на M. Обычно отображения, совпадающие почти всюду (т. е. кроме множества меры 0), считаются одинаковыми.

Пусть теперь M — пространство с σ-алгеброй Σ, а N — пространство с σ-алгеброй Θ. Возьмем (Σ, Θ)-измеримое отображение $\psi : M \to N$ и конечную меру μ на Σ. Определим на Θ меру ν из условия

$$\nu(A) = \mu\left(\psi^{-1}(A)\right), \tag{3.2}$$

где $A \in \Theta$. Мера ν называется *образом меры* μ при отображении ψ. При этом

$$\int_N f(n)\, d\nu(n) = \int_M f\left(\psi(m)\right) d\mu(m)$$

для любой функции f, интегрируемой на N.

Пусть теперь M — пространство с σ-алгеброй Σ и мерой ν, а N — множество. Пусть $\psi : M \to N$ — сюръективное отображение. Оказывается, что в этом случае тоже можно определить образ меры μ. Для этого определим на N σ-алгебру Θ, состоящую из множеств $A \subset N$ таких, что $\psi^{-1}(A) \in \Sigma$. Мера ν на Θ определяется из условия (3.2).

Однако при применении последней конструкции есть реальная опасность получить патологическую σ-алгебру Θ (см. пример неизмеримого разбиения в следующем пункте).

3.6. Разбиения

(см. [Рохлин (1947)]). *Разбиением* $\mathfrak{h}$ лебеговского пространства M с мерой μ называется представление M в виде объединения $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ семейства попарно непересекающихся множеств.

Пусть сначала семейство M_α счетно. Тогда разбиение называется *измеримым*, если все M_α измеримы.

Пусть теперь семейство M_α несчетно. Тогда разбиение M_α называется *измеримым*, если существует счетное семейство измеримых множеств $B_j \subset M$, удовлетворяющих условию:

1. B_j составлены из множеств M_α;
2. для любых $M_\alpha \neq M_\beta$ существует B_j такое, что $B_j \supset M_\alpha$, $B_j \not\supset M_\beta$.

Измеримость разбиения $M = \bigcup M_\alpha$ влечет измеримость всех множеств M_α. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $M = [0, 1]$, а разбиение проводится по отношению эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y$ рационально.

Пример 2. Пусть $f : M \to [0, 1]$ — измеримая функция. Тогда линии уровня f (т. е. множества M_α, состоящие из решений уравнения $f(m) = \alpha$) образуют измеримое разбиение множества M. Легко понять, что все измеримые разбиения могут быть получены таким способом.

Пусть $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ — измеримое разбиение лебеговского пространства. Рассмотрим факторпространство $M/\mathfrak{h}$ пространства M по этому разбиению. Иными словами, рассмотрим множество индексов A. Тогда в $A = M/\mathfrak{h}$ канонически определена σ-алгебра Θ, состоящая из множеств $B \subset A$ таких, что $\bigcup_{\alpha \in B} M_\alpha$ измеримо. На σ-алгебре Θ канонически определена мера ξ из условия $\xi(B) = \mu\left(\bigcup_{\alpha \in B} M_\alpha\right)$. Оказывается, что пространство A с мерой ξ также является лебеговским пространством.

Теорема Рохлина [Рохлин (1947)]. Пусть $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ — измеримое разбиение лебеговского пространства M с мерой μ. Пусть ξ — каноническая мера на факторпространстве $A = M/\mathfrak{h}$. Тогда на почти всех (по мере ξ) множествах M_α существуют меры ν_α, удовлетворяющие условиям

а) M_α — пространства Лебега;

б) для любого измеримого $C \subset M$ подмножества $C \cap M_\alpha \subset M_\alpha$ являются ν_α-измеримыми для почти всех $\alpha \in A$. При этом

$$\mu(C) = \int_A \nu_\alpha\left(C \cap M_\alpha\right) d\xi(\alpha).$$

Система мер ν_α удовлетворяет также свойству: для любой измеримой функции f на M

$$\int_M f(m)\, d\mu = \int_A \left(\int_{M_\alpha} f(m)\, d\nu_\alpha \right) d\xi(\alpha).$$

Меры ν_α называются *условными мерами*.

Важно заметить, что эта теорема верна не только в «лебеговском», но и в «борелевском» варианте (см. [Parthasarathy (1980)], § 46). А именно, пусть разбиение $\mathfrak{h} : M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ измеримо относительно борелевской σ-алгебры. Тогда на каждом множестве M_α определена σ-алгебра Λ_α, состоящая из пересечений вида $M_\alpha \cap S$, где S — борелевские множества в M. Оказывается, что для почти всех α пространство M_α может быть взаимно однозначно отображено на стандартное лебеговское пространство с сохранением меры так, что Λ_α переходит в борелевскую σ-алгебру.

3.7. Производная Радона—Никодима.

Теорема 3.2. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра на M. Пусть на Σ определены две вероятностные меры μ и ν. Пусть условие $\mu(A) = 0$ влечет $\nu(A) = 0$. Тогда существует неотрицательная интегрируемая относительно меры μ функция ψ такая, что для любого $B \in \Sigma$ выполнено

$$\nu(B) = \int_B \psi(m)\, d\mu(m).$$

Эта функция ψ называется *плотностью* меры ν относительно μ.

Пусть теперь $g : M \to M$ — измеримое биективное почти всюду отображение лебеговского пространства (M, μ). Говорят, что g *сохраняет меру*, если для любого измеримого множества $A \subset M$ выполнено $\mu(gA) = \mu(A)$. Говорят, что g *оставляет меру квазиинвариантной*, если g (а также g^{-1}) переводит множества нулевой меры в множества нулевой меры.

Для отображения g, оставляющих меру μ квазиинвариантной, определена так называемая *производная Радона—Никодима* $g'(m)$. Это измеримая функция на M, определяемая условием

$$\int_A g'(m)\, d\mu(m) = \mu(gA)$$

для любого измеримого множества A.

Пример. Пусть M — область в $\mathbb{R}^n$, а μ — мера Лебега. Пусть $g : M \to M$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда $g'(m)$ — это якобиан отображения g.

3.8. Действия групп. Пусть G — группа. *Инвариантным действием* группы G на пространстве M с мерой μ называется набор сохраняющих меру отображений $\gamma(g) : M \to M$, определенных для любого $g \in$ G, таких, что

$$\gamma(g_1 g_2)m = \gamma(g_1)\gamma(g_2)m \tag{3.3}$$

почти всюду на M. Подчеркнем, что это не означает, что группа G действует на множестве M, потому что равенство (3.3) выполнено, вообще говоря, не всюду, а почти всюду (существуют очень важные действия, для которых никаким «исправлением» пространства M и преобразований $\gamma(g)$ нельзя добиться того, чтобы равенство (3.3) было выполнено всюду).

Аналогично определяется действие группы G преобразованиями, оставляющими меру квазиинвариантной.

В случае, если G — топологическая группа, нужно еще определить *непрерывное действие*. В § VIII.4 на группе Ams всех преобразований пространства с мерой, оставляющих меру инвариантной, вводится слабая топология. Инвариантное действие G естественно назвать непрерывным, если гомоморфизм γ : G $\to$ Ams непрерывен. На группе преобразований, оставляющих меру квазиинвариантной, есть несколько более-менее разумных топологий (в особенности в случае бесконечной меры), поэтому непрерывности действия в этом случае мы не определяем (и следствий из непрерывности тоже не извлекаем).

Рассмотрим квазиинвариантное действие группы G на множестве M. Измеримое подмножество $N \subset M$ называется *инвариантным*, если для любого $g \in N$ мера множества $gN \triangle N$ равна 0.

Действие называется *эргодическим*, если любое инвариантное множество имеет меру 0 или является дополнением до множества меры 0.

§ 4. Линейные операторы

В этом параграфе ссылка [КФ] обозначает [Колмогоров, Фомин (1981)], [RS] — [Reed, Simon (1972)], [RSN] — [Riesz, Sz.-Nagy (1965)].

4.1. Пространства Фреше. Топологическое векторное пространство V над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — это линейное пространство, в котором введена топология так, что отображения $(x, y) \mapsto x+y$ из $V \times V$ в V и отображение $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ из $\mathbb{K} \times V \to V$ непрерывны (см. [КФ], III.5.1). В действительности нам такая общность не нужна, и мы имеем дело с существенно более узкими классами пространств.

Пусть V — линейное пространство. *Полунорма* p (см. [RS], V.1, [КФ], III.5.2) — это неотрицательная функция $V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$$

Счетно-нормированное пространство V (см. [КФ], III.5.3) — это линейное пространство, в котором введено счетное семейство полунорм $p_1, p_2, \dots$ такое, что для любого $x \in V$ существует полунорма p_j такая, что $p_j(x) \neq 0$. В счетно-нормированном пространстве определяется топология — слабейшая топология, в которой все функции p_j непрерывны. Подмножества в V, выделяемые набором условий вида $p_1(x) < \alpha_1, \dots, p_k(x) < \alpha_k$ образуют в V фундаментальную систему окрестностей нуля. Последовательность x_n сходится к x в этой топологии, если $P_j(x_n - x) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ для всех j.

Счетно-нормированные пространства метризуемы, метрику можно задать формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \min\bigl(p_j(x-y), 1\bigr).$$

Эта метрика, впрочем, никогда не используется.

Последовательность x_α в V называется *фундаментальной*, если для любого j выполнено $p_j(x_\alpha - x_\beta) \to 0$ при $\alpha, \beta \to \infty$. Пространство V называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится. *Пространствами Фреше* называются полные счетно-нормированные пространства ([RS], V.2).

Напомним, что *норма* — это полунорма, положительная на всех ненулевых векторах. Норма обычно обозначается через $\|\cdot\|$; пространство, снабженное нормой, называется *нормированным*, метрика в нем вводится по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Полные нормированные пространства называются *банаховыми*.

Термин *«ограниченный оператор»* $V \to W$ (где V, W — топологические векторные пространства) обозначает всюду определенный непрерывный линейный оператор.

Пусть V — счетно-нормированное пространство. Допустим, что полунормы p_j удовлетворяют условиям

$$p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant p_3(x) \leqslant \dots$$

(это ограничение не обременительно, в противном случае можно ввести семейство полунорм $p'_j(x) = \max\bigl(p_1(x), \dots, p_j(x)\bigr)$, определяющее ту же топологию). Всюду определенный линейный оператор A в V ограничен тогда и только тогда, когда для любой полунормы p_j существует полунорма p_N и постоянная C такие, что

$$p_j(Ax) \leqslant C p_N(x). \tag{4.1}$$

Если на плотном подпространстве $Y \subset V$ определено линейное отображение $A : Y \to W$, удовлетворяющее (4.1), то оно продолжается до ограниченного линейного оператора $V \to W$.

4.2. Ограниченные операторы в гильбертовом пространстве (см. [RS], VI; [КФ], IV.5; [RSN], VII). Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, а $A : H_1 \to H_2$ — ограниченный оператор. *Норма* $\|A\|$ оператора A определяется формулой

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle Ax, y \rangle,$$

где $x \in H_1$, $y \in H_2$. Она действительно является нормой в пространстве ограниченных операторов $H_1 \to H_2$. Если $\|A\| \leqslant 1$, то говорят, что A — *сжимающий оператор* (или *сжатие*).

Для любого ограниченного оператора $A : H_1 \to H_2$ однозначно определен *сопряженный* оператор $A^* : H_2 \to H_1$, задаваемый равенством

$$\langle Ah_1, h_2 \rangle_{H_2} = \langle h_1, A^* h_2 \rangle_{H_1}.$$

При этом $\|A\| = \|A^*\|$.

Ограниченный оператор $A : H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$. Мы считаем известной спектральную теорему для самосопряженных операторов (см. [RS], VII; [RSN], VII.1).

Оператор $U : H_1 \to H_2$ называется *унитарным*, если U биективен и

$$\langle Ux, Uy \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}. \tag{4.2}$$

Унитарность равносильна паре равенств

$$U^*U = E, \quad UU^* = E.$$

Оператор, удовлетворяющий лишь первому из этих равенств, называется *изометричным*. Он удовлетворяет (4.2), но, вообще говоря, не биективен (в этом случае U — оператор изометричного вложения $H_1 \to H_2$).

Самосопряженный оператор B называется *положительным*, если

$$\langle Bx, x \rangle \geqslant 0$$

для всех x (обозначение: $B \geqslant 0$). Положительность оператора B равносильна неотрицательной определенности эрмитовой формы $Q(x, y) = \langle Bx, y \rangle$.

Пример. Оператор A^*A положителен для любого A.

Из любого положительного оператора B однозначно извлекается положительный квадратный корень $C = \sqrt{B}$, т. е. существует единственный положительный оператор C такой, что $C^2 = B$ (см. [RS], VI.4).

Пусть $A : H \to H$ — ограниченный оператор. Тогда A однозначно представим в виде

$$A = US, \tag{4.3}$$

где S — самосопряженный оператор, а U — унитарное отображение $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \to \operatorname{Im} A$. Если A обратим, то U — унитарный оператор $H \to H$. Представление A в виде (4.3) называется *полярным разложением* (см. [RS], VI.4). Если K_1, K_2 — подпространства в H, то унитарные операторы $L : K_1 \to K_2$ называются *частичными изометриями* в H. Легко видеть (из (4.3)), что $S = \sqrt{A^*A}$. Оператор S обычно обозначается через $|A|$.

Имеет место тождество (см. [RS], VI.2)

$$\|A\|^2 = \|A^*A\|. \tag{4.4}$$

Таким образом, $\|A\|^2$ равна спектральному радиусу оператора A^*A, это сводит задачу о вычислении нормы A к задаче о вычислении спектра A^*A (см. [RS], теорема VI.6; более простых формул для нормы нет даже в конечномерном случае).

4.3. Топологии в пространстве ограниченных операторов (см. [RS], VI.1). Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Мы имеем дело с тремя топологиями в пространстве $\mathscr{L}(H_1, H_2)$ всех ограниченных операторов $H_1 \to H_2$.

а) *Равномерная топология* — это топология банахова пространства $\mathscr{L}(H_1, H_2)$, норма в $\mathscr{L}(H_1, H_2)$ есть норма оператора.

б) *Сильная топология*. Пусть A — оператор $H_1 \to H_2$. Пусть $k > 0$, пусть $x_1, \dots, x_k \in H_1$, а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ — положительные числа. Окрестность $U(x_1, \dots, x_k; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ оператора A в сильной топологии состоит из всех $S \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ таких, что

$$\|(S - A)x_j\| < \varepsilon_j$$

для всех j. По определению, окрестности вида $U(\dots)$ образуют фундаментальную систему окрестностей. Последовательность A_k сходится в сильной топологии к A (обычно говорят, что A_k *сильно сходится к* A), если для любого $x \in H_1$ выполнено $\|(A_k - A)x\| \to 0$.

в) *Слабая топология*. Пусть $x_1, \dots x_k \in H_1$, а $y_1, \dots y_k \in H_2$, пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$. Окрестность $W(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots y_k; \varepsilon_1 \dots, \varepsilon_k)$ оператора A состоит из всех операторов S таких, что

$$\langle (S - A)x_k, y_k \rangle < \varepsilon_k.$$

Эти окрестности образуют фундаментальную систему окрестностей оператора A. Подробное обсуждение слабой топологии см. § I.4.1.

На группе U всех унитарных операторов гильбертова пространства сильная и слабая топологии совпадают. При этом U оказывается топологической группой.

Замечание. Конечно, U является топологической группой и относительно равномерной топологии. Но равномерная топология на U не очень естественна. Например, большинство разумных гомоморфизмов из топологических групп в группу U, снабженную равномерной топологией, разрывно.

4.4. Фредгольмовы операторы (см., например, [Hörmander (1985)], 19.1). Пусть V, W — гильбертовы пространства. Ограниченный оператор $A : V \to W$ называется *фредгольмовым*, если $\operatorname{Im} A$ замкнут, а пространства $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A^{\perp}$ конечномерны.

Число

$$\operatorname{Index} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Im} A^{\perp}$$

называется *индексом* оператора A.

Множество всех фредгольмовых операторов фиксированного индекса открыто относительно равномерной топологии в пространстве всех операторов. Если оператор A — фредгольмов, а K — компактен, то $A + K$ — фредгольмов оператор того же индекса.

Если A — фредгольмов оператор, то существует фредгольмов оператор B такой, что $AB - E$ и $BA - E$ — компактные операторы. Это свойство характеризует фредгольмовы операторы.

4.5. Операторы Гильберта—Шмидта и ядерные операторы (см. [RS], VI.6, [Dunford, Schwartz (1963)], [Kuo (1975)], § 1). Пусть $0 < p < \infty$. Говорят, что компактный оператор A лежит в *классе Шаттена* $\mathscr{L}_p$, если его сингулярные числа $\mu_1, \mu_2 \dots$ удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^p < \infty.$$

Напомним, что *сингулярные числа* оператора A суть собственные числа оператора $|A|$.

Если $A, B \in \mathscr{L}_p$, то $A + B \in \mathscr{L}_p$. Если $A \in \mathscr{L}_p$, то $XA \in \mathscr{L}_p$, $AY \in \mathscr{L}_p$ для любых ограниченных операторов X, Y.

Если $p \geqslant 1$, то множество всех операторов $H_1 \to H_2$ класса $\mathscr{L}_p$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum \mu_j^p}, \tag{4.5}$$

где μ_j — сингулярные числа A.

Из классов $\mathscr{L}_p$ в действительности важны два: $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_1$.

Пусть A — оператор $H_1 \to H_2$, пусть $e_1, e_2, \dots$ и $f_1, f_2, \dots$ — ортонормированные базисы в H_1 и H_2 соответственно. Оператор A называется *оператором Гильберта—Шмидта*, если ряд

$$\sigma = \sum_i \sum_j \left|\langle Ae_i, f_j \rangle\right|^2$$

сходится. Легко видеть, что это определение не зависит от выбора базисов, более того, от выбора базисов не зависит и сумма ряда σ. Число

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j \left|\langle Ae_i, f_j \rangle\right|^2}$$

называется *гильберт-шмидтовской нормой* оператора. Выбирая базисы так, что матрица оператора в этих базисах диагональна, мы получаем, что гильберт-шмидтовская норма оператора совпадает с (4.5) при $p = 2$. Итак, операторы Гильберта—Шмидта суть в точности операторы класса $\mathscr{L}_2$. Рассмотрим, далее, интегральный оператор

$$Af(m) = \int_N K(m, n) f(n)\, d\nu(n)$$

из $L^2(N, \nu)$ в $L^2(M, \mu)$. Пусть $e_i(n)$ — ортонормированный базис в $L^2(N, \nu)$, а $f_j(m)$ — ортонормированный базис в $L^2(M, \mu)$. Тогда функции $e_i(n) f_j(m)$ образуют ортонормированный базис в $L^2(M \times N, \mu \times \nu)$. Числа $\langle Ae_i, f_j \rangle$ — это не что иное, как коэффициенты разложения функции $K(m, n)$ по базису $e_i(m) f_j(n) \in L^2(M \times N, \mu \times \nu)$. Поэтому

$$\|A\|_2 = \sqrt{\int_M \int_N |K(m, n)|^2\, d\mu(m)\, d\nu(n)}.$$

В частности, A является оператором Гильберта—Шмидта тогда и только тогда, когда подкоренной интеграл сходится, т. е. $K(m, n) \in L^2(M \times N, \mu \times \nu)$.

Операторы класса $\mathscr{L}_1$ называются *ядерными операторами*. Пусть $A : H \to H$ — ядерный оператор. Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортонормированный базис в H. Можно показать, что в этом случае ряд $\sum \langle Ae_i, e_i \rangle$ абсолютно сходится и его сумма не зависит от выбора базиса e_i. *След* ядерного оператора A, по определению, есть

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ae_j, e_j \rangle. \tag{4.6}$$

Замечание. Только для ядерных операторов такое определение следа корректно. Стоит подчеркнуть, что если для оператора A ряд (4.6) сходится, это еще не означает, что оператор A — ядерный (например, при смене базиса ряд может стать расходящимся или сумма его может стать другой).

Мы видели, что гильберт-шмидтовость — легко проверяемое условие. Проверять ядерность несравненно сложнее, хороших критериев ядерности нет. Иногда полезен следующий признак: если в некотором ортонормированном базисе e_i выполнено

$$\sum_i \sum_j \left|\left\langle Ae_i, e_j\right\rangle\right| < \infty,$$

то оператор A — ядерный (утверждение вытекает из полноты $\mathscr{L}_1$ по ядерной норме $\|\cdot\|_1$, см. (4.5)).

След ядерного оператора обладает обычными свойствами следа. Например, для любого ограниченного оператора B и ядерного A выполнено

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA. \tag{4.7}$$

Легко проверить, что произведение операторов Гильберта—Шмидта есть ядерный оператор. Равенство (4.7) остается в силе для операторов Гильберта—Шмидта A и B.

Обозначим через $\mathscr{L}_2(H_1, H_2)$ пространство операторов Гильберта—Шмидта $H_1 \to H_2$. Пусть $X, Y \in \mathscr{L}_2(H_1, H_2)$. Положим

$$S(X,Y) = \operatorname{tr} XY^*$$

Легко видеть, что $S(X,Y)$ — положительно определенная эрмитова форма, при этом

$$\|X\|_2^2 = S(X,X).$$

Таким образом, мы получили в $\mathscr{L}_2(H_1, H_2)$ естественную структуру гильбертова пространства.

4.6. Определители. Обозначим через G_p множество обратимых операторов $A : H \to H$ таких, что $A - E \in \mathscr{L}_p$. Легко видеть, что G_p образует группу. Фиксируем в H ортонормированный базис. Пусть X — финитная матрица (т. е. матрица, у которой лишь конечное число элементов отлично от 0). Тогда очевидным образом определен *определитель* $\det(1+X)$.

Оказывается, что функция $\det(1+X)$ продолжается по непрерывности на группу G_1. Из соображений непрерывности выполнены тождества

$$\det\big((1+X)(1+Y)\big) = \det(1+X)\det(1+Y),$$
$$\det(1 + AXA^{-1}) = \det(1+X)$$

для любых ядерных X, Y и любого ограниченного обратимого A. Чуть менее очевидно тождество

$$\det(1+AB) = \det(1+BA),$$

где A — ограниченный оператор, а B — ядерный. Последнее тождество остается в силе, если A и B — операторы Гильберта—Шмидта.

Отметим также равенство

$$\frac{d}{ds}\big(\det(1+sX)\big)\Big|_{s=0} = \operatorname{tr} X,$$

где X — ядерный оператор, а $s \in \mathbb{C}$.

Замечание. Некоторые аналоги определителя существуют и на группах, существенно бо́льших, чем G_1, см. §§ IX.1—2.

4.7. Неограниченные операторы (см. [RS], VIII.1; [RSH], VIII.1). Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. *Оператором* $A : H_1 \to H_2$ называется линейное отображение из некоторого подпространства $V \subset H_1$ в H_2. Подпространство V называется *областью определения оператора* A и обозначается через $D(A)$. Никакой непрерывности A не предполагается.

Здесь удобно перейти с языка линейных отображений к языку графиков. Напомним, что *графиком* Γ_ψ отображения $\psi : M_1 \to M_2$ называется подмножество в $M_1 \times M_2$ состоящее из точек вида $(m, \psi(m)) \in M_1 \times M_2$.

График Γ_A оператора является линейным подпространством в $H_1 \oplus H_2$, и на это подпространство накладывается одно-единственное условие: $\Gamma_A \cap H_2 = 0$. Проекция Γ_A на H_1 есть $D(A)$. На самом деле обычно рассматриваются операторы с плотной областью определения.

Замечание. Понятно, что сложение двух операторов и умножение двух операторов — не очень хорошо определенные операции. Например, сумма двух операторов с плотной областью определения может иметь нулевую область определения.

Оператор $B : H_1 \to H_2$ называется *расширением оператора* $A : H_1 \to H_2$, если $D(B) \supset D(A)$, а на $D(A)$ эти операторы совпадают. Иными словами, $\Gamma_B \supset \Gamma_A$.

Оператор $A : H_1 \to H_2$ называется *замкнутым*, если условия

1. $h_j \in D(A)$;
2. $h_j \to h$ в H_1;
3. $Ah_j \to z$ в H_2

влекут $h \in D(A)$ и $Ah = z$. Проще сказать, что график Γ_A оператора A замкнут.

Согласно *теореме о замкнутом графике* (см. [RS], теорема III.12) всюду определенный замкнутый оператор ограничен.

Оператор $B : H_1 \to H_2$ называется *замыканием* оператора $A : H_1 \to H_2$, если Γ_B есть замыкание Γ_A. Отметим, что не любой оператор A имеет замыкание (может оказаться, что замыкание графика Γ_A пересекается с H_2); существование у оператора замыкания можно рассматривать как ослабленную форму непрерывности.

4.8. Самосопряженность (см. [Reed, Simon (1975)], VIII.1; [RSN], VIII—IX). Оператор A в H называется *симметрическим*, если область определения $D(A)$ плотна в H и

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

для любых $x, y \in D(A)$. Переведем это определение на язык графиков. Введем в $H \oplus H$ эрмитову форму M по правилу

$$M\big((h_1, h_2), (h_1', h_2')\big) = \langle h_1', h_2\rangle - \langle h_1, h_2'\rangle.$$

Плотно определенный оператор A является симметрическим тогда и только тогда, когда его график изотропен относительно формы M.

Обозначим через W° ортогональное дополнение в $H \oplus H$ до W относительно M.

Оператор B называется *сопряженным* к оператору A, если $\Gamma_B = \Gamma_A^\circ$ (обозначение: $B = A^*$). Заметим, что может случиться, что $\Gamma_A^\circ \cap (0 \oplus H) \neq 0$. Тогда оператор A^* не определен. Может также случиться, что $D(A)$ не плотна в H.

Стоит отметить, что оператор A^* всегда замкнут.

Оператор A называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. $\Gamma_A^\circ = \Gamma_A$.

Оператор A называется *существенно самосопряженным*, если A^* есть замыкание A (или, что то же самое, замыкание оператора A есть самосопряженный оператор).

График самосопряженного оператора является максимальным изотропным подпространством в $H \oplus H$. Однако может оказаться, что график симметрического несамосопряженного оператора тоже является максимальным изотропным подпространством, это ничему не противоречит.

Главная причина, по которой самосопряженными неограниченными операторами приходится заниматься — это следующая *теорема Стоуна*, (см. [Reed, Simon (1975)], VIII.4; [RSN], X.1).

Теорема 4.1.

а) Пусть A — существенно самосопряженный оператор. Тогда существует единственная слабо непрерывная функция $t \mapsto U(t)$ на $\mathbb{R}$ со значениями в ограниченных операторах такая, что

$$\frac{d}{dt}U(t)h = U(t)Ah, \quad U(0) = E \tag{4.8}$$

для любого $h \in D(A)$. При этом операторы $U(t)$ унитарны и

$$U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) \tag{4.9}$$

для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Кроме того, если A самосопряжен, то

$$U(t)A = AU(t)$$

(равенство предполагает и совпадение областей определения).

б) Пусть $U(t)$ — семейство унитарных операторов, слабо непрерывно зависящее от t и удовлетворяющее (4.9). Тогда $U(t)$ является решением задачи Коши (4.8) для некоторого самосопряженного оператора A.

Семейства унитарных операторов $U(t)$, удовлетворяющие (4.9), называются *однопараметрическими группами*, а самосопряженный оператор A — *генератором* однопараметрической группы $U(t)$.

Выяснение того, является ли данный оператор самосопряженным, обычно является непростой задачей, и для ее решения развита разнообразная техника (см. [RS], X). По счастью, в этой книге нам почти во всех случаях будет достаточно следующего *признака Карлемана* (см. [Березин (1965)]).

Теорема 4.2. Пусть $H_1, H_2, H_3, \dots$ — гильбертовы пространства, пусть C_j — существенно самосопряженные операторы в H_j. Рассмотрим блочный оператор

$$Q = \begin{pmatrix} C_1 & A_1 & B_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1^* & C_2 & A_2 & B_2 & 0 & 0 & \dots \\ B_1^* & A_2^* & C_3 & A_3 & B_3 & 0 & \dots \\ 0 & B_2^* & A_3^* & C_3 & A_4 & B_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

в $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$, где A_j, B_j — ограниченные операторы, причем

$$\sum_n \frac{1}{\max(\|B_n\|, \|B_{n+1}\|, \|A_{n+1}\|)} = \infty.$$

Тогда оператор Q существенно самосопряжен на множестве D, состоящем из векторов вида $(h_1, h_2, \dots)$, где $h_j \in D(C_j)$ и все h_j, кроме конечного числа, равны 0.

4.9. Тензорные произведения (см. [RS], II.4). Пусть V, W — гильбертовы пространства. Выберем ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ в V и ортонормированный базис $f_1, f_2, \dots$ в W. *Тензорное произведение* $V \otimes W$ — это гильбертово пространство, ортонормированный базис которого составляют формальные выражения $e_i \otimes f_j$. Если $v = \sum \alpha_j e_j \in V$, $w = \sum \beta_j f_j \in W$, то через $v \otimes w$ мы обозначим вектор

$$v \otimes w := \sum \alpha_i \beta_j e_i \otimes f_j \in V \otimes W.$$

Легко видеть, что

$$\langle v \otimes w, x \otimes y \rangle_{V \otimes W} = \langle v, x \rangle_V \cdot \langle w, y \rangle_W.$$

Легко видеть, что конструкция пространства $V \otimes W$ не зависит от выбора базисов в V, W.

Пусть, далее, $A : V_1 \to V_2$, $B : W_1 \to W_2$ — ограниченные операторы. Через $A \otimes B$ мы обозначим ограниченный оператор $V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$, определяемый условием

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw$$

для всех $v \in V$, $w \in W$. Легко видеть, что

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Если $V = L^2(M)$, а $W = L^2(N)$, то $L^2(M) \otimes L^2(N)$ канонически отождествляется с $L^2(M \times N)$. А именно, вектору $f(m) \otimes g(n) \in L^2(M) \otimes L^2(N)$ ставится в соответствие функция $f(m)g(n) \in L^2(M \times N)$.

Далее, пространство $V' \otimes W$ канонически отождествляется с гильбертовым пространством $\mathscr{L}_2(V, W)$ операторов Гильберта—Шмидта $V \to W$. При этом вектору $f \otimes w \in V \otimes W$ ставится в соответствие оператор $A : V \to W$, заданный формулой

$$Av = f(v)w.$$

Определим, наконец, многократные тензорные произведения:

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 := (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3;$$
$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4 := (V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \otimes V_4$$

и т.д. Тензорное произведение пустого семейства сомножителей, по определению, есть одномерное пространство.

4.10. Симметрические и внешние степени. Рассмотрим n-*ю тензорную степень* $V^{\otimes n}$ пространства V:

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ раз}}.$$

Группа S_n всех перестановок из n элементов действует в $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей.

Определим n-*ю симметричную степень* $S^n V$ *пространства* V как подпространство в $V^{\otimes n}$, состоящее из всех S_n-неподвижных векторов.

Пусть $p_1, \dots, p_n \in V$. Определим вектор

$$s(p_1, \dots, p_n) = \sum_{\sigma \in S_n} p_{\sigma(1)} \otimes p_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам σ множества $1, 2, \dots, n$. Легко видеть, что $s(p_1, \dots, p_n) \in S^n V$. Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортонормированный базис в V. Тогда векторы вида $s(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n$, образуют в $S^n V$ ортогональный (но не нормированный) базис.

Пусть A — ограниченный оператор $V \to W$. Тогда оператор

$$A^{\otimes n} := \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{n \text{ раз}} : V^{\otimes n} \to W^{\otimes n} \tag{4.10}$$

переводит $S^n V$ в $S^n W$. Ограничение этого оператора на $S^n V$ обозначается через $S^n A$ и называется *n-й симметричной степенью оператора* A. Оператор $S^n A$ можно также определить равенством

$$(S^n A)s(p_1, \dots, p_n) = s(Ap_1, \dots, Ap_n).$$

Легко видеть, что

$$S^n(AB) = S^n A \cdot S^n B, \quad \|S^n A\| = \|A\|^n.$$

Пусть V, для простоты, конечномерно. Тогда $S^n V'$ канонически отождествляется с пространством однородных многочленов степени k на V. Действительно, пусть $f_1, \dots, f_n \in V'$. Тогда каждому элементу $s(f_1, \dots, f_n)$ ставится в соответствие функция

$$f_1(v) \cdot f_2(v) \cdot \dots \cdot f_n(v)$$

на V, далее отображение продолжается по линейности.

Определим теперь *внешнюю степень* $\Lambda^n V$ пространства V. Она состоит из векторов $h \in V^{\otimes n}$ таких, что оператор перестановки сомножителей в $V^{\otimes n}$, соответствующий элементу $\sigma \in S_n$, переводит h в $(-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} h$, где $\operatorname{sgn} \sigma$ — четность перестановки σ.

Пусть $p_1, \ldots, p_n \in V$. Определим вектор

$$p_1 \wedge \ldots \wedge p_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} p_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma(n)}.$$

Легко видеть, что

$$\langle p_1 \wedge \ldots \wedge p_n, q_1 \wedge \ldots \wedge q_n \rangle = \det M,$$

где M — матрица с матричными элементами $m_{ij} = \langle p_i, q_j \rangle$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — базис в V. Тогда векторы вида $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, образуют ортонормированный базис в $\Lambda^n V$.

Пусть A — ограниченный оператор $V \to W$. Оператор $\Lambda^n A : \Lambda^n V \to \Lambda^n W$ (*n-я внешняя степень оператора A*) определяется из равенства

$$(\Lambda^n A)(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) = Ap_1 \wedge \ldots \wedge Ap_n;$$

легко видеть, что

$$\Lambda^n(AB) = \Lambda^n A \cdot \Lambda^n B, \quad \|\Lambda^n A\| \leqslant \|A\|^n.$$

4.11. Бесконечные тензорные произведения (см. [Neumann (1938)]). Пусть $V_1, V_2, \ldots$ — гильбертовы пространства, причем в каждом V_α отмечен вектор e_0^α единичной длины. Определим тензорное произведение

$$W = \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (V_\alpha, e_0^\alpha)$$

пространств V_α с отмеченными векторами e_0^α. Выберем в каждом V_α по ортонормированному базису $e_0^\alpha, e_1^\alpha, \ldots$ (первый элемент базиса — всегда e_0^α). Тогда W — это гильбертово пространство, ортонормированный базис которого составляют выражения вида

$$r_{i_1 i_2 \ldots} = e_{i_1}^1 \otimes e_{i_2}^2 \otimes \ldots, \tag{4.11}$$

при этом лишь конечное число сомножителей в этом произведении отлично от e_0^α.

Пусть $v_\alpha = \sum c_k^\alpha e_k^\alpha \in V_\alpha$ — последовательность векторов такая, что

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \big| \langle v_\alpha, v_\alpha \rangle - 1 \big| < \infty, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \big| \langle v_\alpha, e_0^\alpha \rangle - 1 \big| < \infty.$$

Тогда мы определим вектор

$$\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha = \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} \Big(\sum c_k^\alpha e_k^\alpha \Big) := \sum_{i_1, i_2, \ldots} \Big[\Big(\prod_{\alpha=1}^{\infty} c_{i_\alpha}^\alpha \Big) r_{i_1 i_2 \ldots} \Big],$$

где $r_{i_1 i_2 \ldots}$ — векторы (4.11). Легко видеть, что $\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha \in W$, при этом

$$\Big\langle \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha, \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v'_\alpha \Big\rangle_W = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \langle v_\alpha, v'_\alpha \rangle_{V_\alpha}.$$

Возьмем теперь в каждом V_α по ограниченному оператору A_α так, что

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \big| \langle A e_0^\alpha, A e_0^\alpha \rangle - 1 \big| < \infty, \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \big| \langle A e_0^\alpha, e_0^\alpha \rangle - 1 \big| < \infty, \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \big| \|A_\alpha\| - 1 \big| < \infty.$$

Тогда корректно определен ограниченный оператор $\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$ в пространстве W такой, что

$$\Big(\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \Big) \Big(\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} v_\alpha \Big) = \bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (A_\alpha v_\alpha).$$

Пример. Пусть M_α — пространства с вероятностной мерой, пусть $V_\alpha = L^2(M_\alpha)$, а e_α^0 — единичная функция. Тогда

$$\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (V_\alpha, e_0^\alpha) = L^2 \Big(\prod_{\alpha=1}^{\infty} M_\alpha \Big).$$

Замечание. Пусть V_α^0 — ортогональное дополнение до e_0^α в V_α. Тогда существует очевидный изоморфизм

$$\bigotimes_{\alpha=1}^{\infty} (V_\alpha, e_0^\alpha) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Big[\bigoplus_{\alpha_1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k} \big(V_{\alpha_1}^0 \otimes V_{\alpha_2}^0 \otimes \ldots \otimes V_{\alpha_k}^0 \big) \Big].$$

§ 5. Терминология теории представлений

В этом параграфе ссылка [K] обозначает [Кириллов (1972)].

5.1. Конечномерные представления ([K], § 7). *Линейное представление* ρ группы G в конечномерном линейном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ — это гомоморфизм группы G в группу $GL(V)$ обратимых линейных преобразований пространства V. Иными словами, каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие оператор $\rho(g)$ в V такой, что

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \quad \rho(e) = E \tag{5.1}$$

для всех $g_1, g_2 \in G$ (e — единица группы G). *Размерностью представления* называется размерность пространства V.

Если вместо (5.1) выполнено

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1),$$

то ρ называется *антипредставлением*. Существенной разницы между представлениями и антипредставлениями нет: если $\rho(g)$ — представление, то $\rho'(g) := \rho(g^{-1})$ — антипредставление, и наоборот. Мы, допуская некоторую неточность терминологии, будем иногда называть антипредставления словом «представление».

Если G — топологическая группа, мы, естественно, требуем чтобы гомоморфизм ρ был непрерывен.

Если в V введено скалярное произведение, а операторы $\rho(g)$ унитарны, то представление ρ называется *унитарным*.

Пример (α). Группа $G = S_n$ перестановок из n элементов действует в $V = \mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов.

Пример (β). Пусть Q — группа собственных движений куба. Пусть V — пространство функций на множестве вершин куба (пусть вершины — точки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, где $\varepsilon_j = \pm 1$). Можно считать, что на каждой вершине куба написано число. Когда куб вращается, числа переставляются. Таким образом, мы получили представление группы Q в 8-мерном пространстве функций на множестве вершин куба.

Представление называется *точным*, если $\rho(g) \neq e$ для любого $g \neq e$.

Представление ρ такое, что $\rho(g) = E$ для всех g, мы называем *тривиальным*.

Если группа G определяется как группа линейных операторов (например, если G — классическая группа), то мы можем поставить в соответствие каждому оператору сам этот оператор. Полученное представление мы будем называть *тождественным* представлением.

5.2. Подпредставления. Пусть ρ — линейное представление группы G в пространстве V. Пусть $W \subset V$ — подпространство, инвариантное относительно всех операторов $\rho(g)$. Тогда определено представление G в пространстве W (а именно, операторы представления — ограничения операторов $\rho(g)$ на W). В таком случае мы будем говорить, что W — *подпредставление* в V.

Пример (α) (продолжение). Прямая $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ инвариантна относительно S_n. Плоскость $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ тоже инвариантна.

Пример (β) (продолжение). Пространство четных функций инвариантно относительно Q (функцию $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,)$ мы называем четной, если $f(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3,) = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$). Пространство нечетных функций — тоже.

Представление называется *неприводимым*, если оно не содержит нетривиальных (отличных от самого себя и нуля) подпредставлений. Для многих групп описание всех неприводимых представлений является разумной и красивой задачей.

Если у нас есть представления ρ_1 и ρ_2 группы G в пространствах V_1 и V_2, то определена их прямая сумма, а именно: G действует в $V_1 \oplus V_2$ операторами вида $\rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$.

Представление называется *вполне приводимым*, если любое G-инвариантное подпространство имеет G-инвариантное дополнение. Для конечномерных представлений это означает, что представление разлагается в прямую сумму неприводимых подпредставлений.

Теорема 5.1 (см. [K], § 8.1).
а) Унитарные представления вполне приводимы.
б) Представления конечных групп вполне приводимы.
в) Представления компактных групп вполне приводимы.

Доказательство.

а) Если V — подпредставление, то легко проверяется, что $V^\perp$ — ортогональное дополнение до V — тоже подпредставление.

б) Пусть $\langle v, w\rangle$ — некоторое скалярное произведение в пространстве представления ρ. Тогда скалярное произведение $\{v, w\} = \sum_{g\in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle$ инвариантно (и тем самым утверждение б) сводится к а)). В самом деле,

$$\{\rho(h)v, \rho(h)w\} = \sum_{g\in G} \langle \rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w\rangle = \sum_{g\in G} \langle \rho(gh)v, \rho(gh)w\rangle = \sum_{g\in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle = \{v, w\}.$$

в) доказывается аналогично, только суммирование заменяется на интегрирование по мере Хаара. ■

Пусть ρ — представление G в пространстве V. Пусть $v \in V$. Линейная оболочка W множества векторов $\rho(g)v$, где $g \in G$, называется *циклической оболочкой* вектора v. Циклическая оболочка является, очевидно, подпредставлением в V. Вектор v называется *циклическим*, если его циклическая оболочка совпадает с V.

Замечание. Циклическая оболочка вектора v — наименьшее подпредставление, содержащее v.

Пример (α) (продолжение). Циклическая оболочка любого базисного вектора в $V = \mathbb{C}^n$ совпадает с $\mathbb{C}^n$.

Пример (β) (продолжение). Впишем в куб тетраэдр. Пусть f — функция, равная 1 в вершинах тетраэдра и равная 0 в остальных вершинах куба. Легко видеть, что ее циклическая оболочка двумерна.

5.3. Сплетающие операторы.

Представления ρ_1, ρ_2 группы G в пространствах V_1, V_2 называются *эквивалентными*, если существует обратимый оператор $U : V_1 \to V_2$ такой, что для всех $g \in G$ выполнено

$$\rho_2(g)U = U\rho_1(g).$$

Определим морфизм представлений — *сплетающий оператор* (см. [K], § 7). Пусть ρ_1, ρ_2 — представления группы G в пространствах V_1 и V_2. Линейный оператор $A : V_1 \to V_2$ называется сплетающим, если

$$\rho_2(g)A = A\rho_1(g)$$

для всех g.

Пример (α) (продолжение). Все S_n-сплетающие операторы в $\mathbb{C}^n$ имеют матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta \\ \beta & \ldots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Пример (β) (продолжение). Матрицу оператора в V естественно рассматривать как функцию $\mu(A, B)$ на множестве пар вершин. Оператор в V является сплетающим, если функция $\mu(A, B)$ инвариантна под действием Q. Группа Q имеет на множестве пар вершин 4 орбиты, поэтому пространство сплетающих операторов 4-мерно.

Сумма сплетающих операторов $A, B : V_1 \to V_2$ является сплетающим оператором. Произведение сплетающих операторов $A : V_1 \to V_2$, $B : V_2 \to V_3$ является сплетающим оператором.

Теорема 5.2 (*лемма Шура*, см. [K], 8.2).

а) Пусть ρ_1, ρ_2 — неэквивалентные неприводимые представления группы G в пространствах V_1, V_2, а $A : V_1 \to V_2$ — сплетающий оператор. Тогда $A = 0$.

б) Пусть ρ — неприводимое представление группы G в пространстве V, а $A : V \to V$ — сплетающий оператор. Тогда $A = \lambda E$ (где $\lambda \in \mathbb{C}$).

Доказательство.

а) Пусть $A \neq 0$. Легко видеть, что $\operatorname{Ker} A$ — подпредставление в V_1, а $\operatorname{Im} A$ — подпредставление в V_2 ($Av = 0 \Rightarrow \rho_2(g)Av = A\rho(g_1)v = 0$). Так как ρ_1, ρ_2 неприводимы, то $\operatorname{Ker} A = 0$, $\operatorname{Im} A = 0$, т. е. A обратим, а значит, ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

б) Пусть μ — собственное число A. Если оператор A — сплетающий, то оператор $A - \mu E$ — тоже сплетающий. Значит, $\operatorname{Ker}(A - \mu E)$ — подпредставление, при этом $\operatorname{Ker}(A - \mu E) \neq 0$, значит, $\operatorname{Ker}(A - \mu E) = V$, т. е. $A = \mu E$. ■

Следствие 5.3. Любое неприводимое представление абелевой группы одномерно.

Доказательство. Пусть ρ неприводимо. Операторы $\rho(g)$ — сплетающие, поэтому в силу леммы Шура $\rho(g) = \lambda E$. Следовательно, любое подпространство является подпредставлением. ■

Пример. Пусть ρ_1, ρ_2 — неприводимые и неэквивалентные представления группы G в V_1 и V_2, пусть ρ_1 и ρ_2 неприводимы и не эквивалентны. Тогда любой сплетающий оператор в $V_1 \oplus V_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & \mu E \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. В самом деле, естественные вложения $V_i \to V_1 \oplus V_2$ и естественные проекции $V_1 \oplus V_2 \to V_i$ являются сплетающими операторами. Поэтому сплетающими операторами являются и композиции $V_i \to V_1 \oplus V_2 \to V_j$. Теперь применяем лемму Шура.

Пример. Пусть ρ — неприводимое представление группы G в V. Тогда любой сплетающий оператор в $V \oplus V$ имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_{11} E & \lambda_{12} E \\ \lambda_{21} E & \lambda_{22} E \end{pmatrix}$.

Задача. Пусть $V_1, \ldots, V_k$, $W_1, \ldots, W_n$ — неприводимые представления. Описать сплетающие операторы $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \to W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ (см. [K], 8.3).

Пример (α). Представление S_n содержит ровно 2 неприводимых представления — иначе сплетающих операторов было бы больше.

Пример (β). На сколько и на какие подпредставления разлагается V?

5.4. Операции над представлениями. Пусть ρ — представление группы G в пространстве V. Пусть V' — двойственное пространство, а $\rho(g)^t$ — оператор, транспонированный к $\rho(g)$. Тогда $g \mapsto \rho(g^{-1})^t$ является представлением G в V'. Это представление называется *двойственным* (или *контраградиентным*) к ρ.

Если ρ_1, ρ_2 — представления G в V_1 и V_2, то определено их *тензорное произведение* $\rho_1 \otimes \rho_2$, а именно, группа G действует $V_1 \otimes V_2$ операторами $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.

Если ρ — представление G в V, то определены его *внешние степени* $\Lambda^k \rho$, а именно, группа G действует в k-й внешней степени $\Lambda^k V$ пространства V операторами $\Lambda^k \rho(g)$.

Аналогично определяются *симметричные степени* представления.

Пусть ρ — представление группы G в пространстве V, пусть W — подпредставление. Тогда очевидным образом определено представление G в факторпространстве V / W, оно называется *факторпредставлением*.

Пусть, далее, ρ_1 — представление группы G_1 в пространстве V_1, а ρ_2 — представление группы G_2 в пространстве V_2. *Тензорное произведение* представлений ρ_1, ρ_2 группы $G_1 \times G_2$ действует в $V_1 \otimes V_2$ линейными операторами $\rho_1(g)_1 \otimes \rho_2(g_2)$, где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$.

Пусть H — подгруппа в G. Пусть ρ — представление группы G. Тогда для любого $h \in$ H определен оператор $\rho(h)$, и тем самым мы получаем представление подгруппы H. Это представление называется *ограничением* представления группы G на подгруппу H.

5.5. Бесконечномерные представления (см. [K], § 7). Пусть V — пространство Фреше, а G — топологическая группа. Представление G в пространстве V — это функция $\rho(g)$ на G, значения которой являются ограниченными обратимыми операторами в V, удовлетворяющая условиям

а) $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in$ G;

б) $\rho(e) = E$;

в) функция $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ из $G \times V$ в V непрерывна по совокупности переменных.

Определения *подпредставления* и *факторпредставления* остаются теми же (только подпространство W должно быть замкнутым).

Ко всем остальным понятиям нужно относиться с осторожностью (см. [K], [Литвинов (1972)]). В частности, совсем не просто определить эквивалентность представлений.

5.6. Унитарные представления. Представление ρ топологической группы G в гильбертовом пространстве H называется *унитарным*, если операторы $\rho(g)$ унитарны. Непрерывность ρ в этом случае можно понимать следующим образом: гомоморфизм ρ из G в группу унитарных операторов, снабженную слабой (= сильной) топологией, должен быть непрерывен.

На унитарные представления все сказанное в пп. 1.1–1.4 переносится с небольшими оговорками:

а) доказательство *леммы Шура* несколько усложняется;

б) вполне приводимость нужно понимать в следующем смысле: если V — подпредставление, то $V^\perp$ — тоже подпредставление. Но неверно, что представление разлагается в прямую сумму неприводимых подпредставлений: неприводимых подпредставлений может не быть вообще.

Пример. Пусть аддитивная группа $\mathbb{R}$ действует в $L^2(\mathbb{R})$ по формуле

$$T(a)f(x) = f(x)e^{iax}.$$

Рассмотрим измеримое подмножество Δ ненулевой меры в $\mathbb{R}$ и подпространство $L(\Delta) \subset L^2(\mathbb{R})$, состоящее из всех функций, равных 0 вне Δ. Легко видеть, что $L(\Delta)$ — подпредставление. Менее очевидно, что других подпредставлений здесь нет. В частности, нет и неприводимых подпредставлений.

Здесь, впрочем, нет ничего страшного: просто дискретные прямые суммы представлений заменяются на так называемый прямой интеграл; мы не хотим касаться этого более подробно (см. [K], 8.4).

5.7. Сферические представления. Пусть ρ — унитарное представление группы G в пространстве W, а K — подгруппа G. Представление ρ называется K-*сферическим*, если в W содержится единственный K-неподвижный вектор w (т. е. $\rho(h)w = w$ для всех $h \in$ K). Вектор w называется *сферическим вектором*, а функция

$$\varphi(g) = \langle \rho(g)w, w \rangle$$

— *сферической функцией*. Легко видеть, что для любых $h_1, h_2 \in$ K выполнено $\varphi(h_1 g h_2) = \varphi(g)$, т. е. f постоянна на двойных классах смежности. Рассмотрим, далее, семейство векторов $w_g = \rho(g)w \in W$. На самом деле, конечно, эти векторы нумеруются не элементами группы G, а элементами однородного пространства G / K, потому что $w_{gh} = w_g$ для любого $h \in$ K. Легко видеть, что

$$\langle w_{g_1}, w_{g_2} \rangle = \langle \rho(g_1)w, \rho(g_2)w \rangle = \langle \rho(g_2)^{-1}\rho(g_1)w, w \rangle = \varphi(g_2^{-1} g_1). \tag{5.4}$$

Система векторов w_g образует своего рода «переполненный базис» в W. Конечно, базисом в буквальном смысле слова она не является (векторы w_g линейно зависимы), но при работе в конкретных пространствах система w_g часто играет роль базиса.

Теорема 5.4. Два K-сферических представления группы G эквивалентны тогда и только тогда, когда их сферические функции совпадают.

Доказательство. Пусть W и W' — пространства этих представлений. Пусть w_g и w'_g — «переполненные базисы» в W и W'. Тогда в силу (5.4) мы имеем

$$\langle w_{g_1}, w_{g_2} \rangle = \langle w'_{g_1}, w'_{g_2} \rangle.$$

Поэтому существует унитарный оператор $U : W \to W'$ такой, что $U : w_g \mapsto w'_g$ для всех g. Легко видеть, что этот оператор является G-сплетающим. Теорема доказана. ■

Обсудим теперь разложение вектора по «переполненному базису» w_g. Пусть $v \in W$. Определим функцию

$$f_v(g) = \langle v, w_g \rangle$$

на G / K. Тогда

$$f_{\rho(p)v}(g) = \langle v, \rho(p)\rho(g)w \rangle = f(pg).$$

Таким образом, мы получили вложение $I : v \mapsto f_v$ пространства W в пространство функций на G / K, при этом операторам $\rho(g)$ в W соответствуют сдвиги $f(g) \mapsto f(pg)$ в пространстве функций.

Опять-таки, в конкретных случаях здесь возникает много вопросов: как описать образ оператора I (обычно он состоит из решений некоторой системы дифференциальных уравнений с частными производными или решений некоторых интегральных уравнений)? как описать скалярное произведение в $I(W)$? как записать обратный оператор?

Отметим, что анализ в пространствах Фока основан именно на работе с подобными «переполненными базисами».

5.8. Одна лемма. Для доказательства неприводимости представлений мы очень часто используем следующую тривиальную лемму.

Лемма 5.5. Рассмотрим вполне приводимое представление ρ группы G в пространстве V. Пусть K — подгруппа в G. Предположим, что V содержит ровно один (с точностью до пропорциональности) K-неподвижный вектор w. Тогда G-циклическая оболочка вектора w является неприводимым представлением группы G.

Доказательство. Пусть W — циклическая оболочка вектора w. Разложим W в прямую сумму двух подпредставлений: $W = W_1 \oplus W_2$. Пусть w_1 и w_2 — проекции w на W_1 и W_2. В силу леммы Шура w_1 и w_2 являются K-неподвижными векторами. Поэтому один из них, скажем, w_2, равен 0. Но тогда $w \in W_1$, а поэтому $W_1 = W$, а значит, $W_2 = 0$. ■

5.9. Проективные представления (см. [K], § 14). *Проективным представлением* группы G в пространстве V называется набор операторов $\rho(g)$ такой, что для любых $g_1, g_2 \in G$ выполнено

$$\rho(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\rho(g_1)\rho(g_2),$$

где $c(g_1, g_2) \in \mathbb{C}$, а $\rho(e) = E$ (через e обозначена единица группы G). Функция $c(g_1, g_2)$ не предполагается непрерывной.

Если все операторы $\rho(g)$ унитарны, то проективное представление называется унитарным. Обозначим через PU группу всех унитарных операторов (снабженную слабой топологией), профакторизованную по (одномерной) группе, состоящей из операторов вида $e^{i\psi}E$. Тогда унитарное проективное представление группы G можно рассматривать как гомоморфизм $G \to PU$. Если G — топологическая группа, то мы должны еще потребовать, чтобы представление было непрерывным, т. е. чтобы был непрерывным гомоморфизм $G \to PU$.

Проективное представление ρ называется *линеаризуемым*, если некоторая замена вида

$$\rho'(g) = \lambda(g)\rho(g),$$

где $\lambda(g) \in \mathbb{C}^*$, делает это представление линейным, т. е.

$$\rho'(g_1 g_2) = \rho'(g_1)\rho'(g_2)$$

для всех g_1, g_2. В этом случае

$$c(g_1, g_2) = \frac{\lambda(g_1 g_2)}{\lambda(g_1)\lambda(g_2)}.$$

Пример. Рассмотрим абелеву группу G из четырех элементов 1, a, b, ab, причем $a^2 = b^2 = 1$. Рассмотрим следующее проективное представление ρ группы G в $\mathbb{C}^2$:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если бы оно было линеаризуемо, то в силу абелевости G оно раскладывалось бы в сумму одномерных представлений. Но легко видеть, что это представление неприводимо.

Пусть ρ и ρ' — проективные представления группы G в пространствах V и V'. Оператор $A : V \to V'$ называется *сплетающим*, если для любого $g \in G$ существует постоянная $\sigma(g) \in \mathbb{C}^*$ такая, что

$$\rho'(g)A = \sigma(g)A\rho(g)$$

для всех g.

Унитарные проективные представления ρ и ρ' группы G в пространствах V и V' называются *эквивалентными*, если существует унитарный сплетающий оператор $V \to V'$.

5.10. Центральные расширения групп. Пусть G — группа, а A — абелева группа. Группу $\widetilde{G}$ называют *центральным расширением группы* G с помощью A, если центр группы $\widetilde{G}$ содержит подгруппу A', изоморфную A, а факторгруппа $\widetilde{G}/A'$ изоморфна G. Центральное расширение $\widetilde{G}$ называется *нетривиальным*, если $\widetilde{G}$ не разлагается в прямое произведение $G \times A'$.

Пусть $\widetilde{G}$ — центральное расширение группы G. Пусть ρ — представление группы $\widetilde{G}$. Для любого $g \in G$ фиксируем некоторый элемент $\tilde{g} \in \widetilde{G}$ такой, что образ $\tilde{g}$ в G есть g (конечно, функция $g \mapsto \tilde{g}$ из G в $\widetilde{G}$ определена не однозначно). Далее, для любого $g \in G$ определим оператор $\rho'(g) = \rho(\tilde{g})$. Тогда $g \mapsto \rho'(g)$ является проективным представлением G.

Итак, линейные представления группы $\widetilde{G}$ можно рассматривать как проективные представления G. Пусть теперь ρ — проективное представление группы G. Естественно встает вопрос, существует ли такое центральное расширение $\widetilde{G}$ группы G, что ρ линеаризуется на G (т. е. ρ эквивалентно представлению, полученному описанной только что процедурой из некоторого представления группы $\widetilde{G}$)? Ответ на этот вопрос обычно положителен.

Пример. Рассмотрим пример из предыдущего пункта. Тогда ρ линеаризуется на неабелевой группе $\widetilde{G}$ из 8 элементов с образующими a, b, c и соотношениями

$$a^2 = b^2 = c^2 = \varepsilon; \quad \begin{matrix} a\varepsilon = \varepsilon a, & ab = c = ba\varepsilon, \\ b\varepsilon = \varepsilon b, & bc = a = cb\varepsilon, \\ c\varepsilon = \varepsilon c; & ca = b = ac\varepsilon; \end{matrix}$$

(замечание: см. формулы (2.15)).

Пусть теперь G — связная односвязная простая группа Ли. Тогда оказывается, что любое унитарное проективное представление G линеаризуется (на ней самой). Далее, если G — связная простая группа, то любое ее унитарное представление линеаризуется на универсальной накрывающей группы G (два последних высказывания, конечно, равносильны). Аналогичные высказывания верны и для конечномерных представлений простых групп Ли (см. [K], 14.3).

Литература

[Abikoff (1980)] *Abikoff, W.* The real analytic theory of Teichmüller space. Lecture Notes in Mathematics **820**, Springer-Verlag Berlin. [Имеется русский перевод: *Абикофф У.* Вещественно аналитическая теория пространства Тейхмюллера. М.: Мир, 1985.]

[Adams (1969)] *Adams, J. F.* Lectures on Lie groups. Benjamin, New York. [Имеется русский перевод: *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.]

[Albeverio, Høegh-Krohn (1978)] *Albeverio, S.*, and *Høegh-Krohn, R.* The energy representations of Sobolev—Lie groups. Compositio Math. **36**, 37–52.

[Albeverio, Høegh-Krohn, Testard (1981)] *Albeverio, S., Høegh-Krohn, R.*, and *Testard, D.* Irreducibility and reducibility representations of the group of maps a Riemannian manifold into a compact semisimple Lei group. J. Funct. Anal. **41**, no. 3, 378–96.

[Albeverio, Høegh-Krohn, Testard, Vershik (1983)] *Albeverio, S., Høegh-Krohn, R., Testard, D.*, and *Vershik, A.* Factorial representations of path groups. J. funct. Anal. **51**, no 1, 115–31.

[Aldous (1985)] *Aldous, D. J.* Exchangeability and related topics. Lecture Notes in Mathematics **1117**, Springer-Verlag, Berlin, 2–199.

[Alvarez-Gaume, Gomes, Moore, Vafa (1988)] *Alvarez-Gaume, L., Gomes, G., Moore, G.*, and *Vafa, C.* Springs in operator formalism. Nuclear Phys. **B303**, no. 3, 455–521.

[Araki (1970)] *Araki, H.* Factorizable representations of current algebra. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. Ser. A **5**, 361–422.

[Arbarello, de Concini, Kac, Procesi (1988)] *Arbarello, E., de Concini, C., Kac. V. G.*, and *Procesi, C.* Moduli spaces of curves and represetation theory. Comm. Math. Phys. **117**, no 1, 1–36.

[Arnol'd, Khesin (1992)] *Arnol'd, V. I.* and *Khesin, B. A.* Topological methods in hydrodynamics. Ann. Rev. Fluid Mech. **24**, 145–66.

[Arveson (1976)] *Arveson W.* An invitation to C^*-algebras. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, 1976

[Bargmann (1947)] *Bargmann, V.* Irreducible unitary representations of the Lorentz group. Ann. of Math. **48**, 568–642.

[Bargmann (1954)] *Bargmann V.* On unitary ray representations of continuous groups. Ann. of Math., **59**, № 1.

[Bargmann (1961)] *Bargmann, V.* On Hilbert space of analytic functions and associated integral transform. I. Comm. Pure Appl. Math, **14**, 187–214.

[Bargmann (1962)] *Bargmann, V.* Remarks on a Hilbert space of analytic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **48**, no. 3, 199–204.

[Bart, Gohberg, Kaashoek (1979)] *Bart, H., Gohberg, I.*, and *Kaashoek, M. A.* Minimal factorization of matrix and operator functions. Birkhauser, Basel.

[Berezin (1976)] *Berezin, F. A.* Represetions of the infinite direct product of universal coverings of isometry groups of the complex ball. Rep. Math. Phys. **9**, no. 1, 15–30.

[Bott (1977)] *Bott, R.* On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms. Enseign. Math. **23**, no. 3–4, 209–20.

[Bourbaki (1942)] *Bourbaki, N.* Topologie générale, Chapitre 3. Hermann, Paris. [Имеется русский перевод: *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. Физматгиз, 1958.]

[Bourbaki (1958)] *Bourbaki, N.* Algèbre, Chapitre 8. Hermann, Paris. [Имеется русский перевод в книге: *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966.]

[Bourbaki (1959)] *Bourbaki, N.* Algèbre, Chapitre 9. Hermann, Paris. [Имеется русский перевод в книге: *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966.]

[Boyer (1983)] *Boyer, R.* Infinite traces of AF-algebras and characters of $U(\infty)$. J. Operator Theory **9**, 205–6.

[Boyer (1993)] *Boyer, R.* Representation theory of infinite-dimensional unitary groups. Contemp. Math. **145**, 381–91.

[Brauer (1937)] *Brauer, R.* On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. Ann. of Math. (2) **38**, 857–72.

[Brenier (1994)] *Brenier Y.* On the motion of an ideal imcompressible fluid. In Partial differential equations of elliptic type (Cortona, 1992), Cambridge Univ. Press.

[Carey, Hannabuss (1992)] *Carey, A. L.* and *Hannabuss, K. C.* Temperature states on gauge groups. Ann. Inst. Poincaré Phys. Théor. **157**, 219–57.

[Cartan (1913)] *Cartan, E.* Les groupes progectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. Math. France **14**, 53–96.

[Cartan (1935)] *Cartan, E.* Sur les domaines bornés homogènes de l'espase de n variables complexes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 116–61.

[Cartan (1938)] *Cartan, E.* Leçons sur la théorie des spineurs. Herrmann, Paris. [Имеется русский перевод: *Картан Э.* Теория спиноров. М.: ИЛ, 1947.]

[de Concini, Procesi (1983)] *de Concini, C.* and *Procesi, C.* Complete symmetric varieties. Lecture Notes in Mathematics **996**, 1–44, Springer-Verlag, Berlin.

[Delorme (1978)] *Delorme, P.* Irréducibilité de centraines represétations de G^X. J. Funct. Anal. **30**: 1, 36–47.

[Dieudonné (1971)] *Dieudonné, J.* La géométrie des groupes classiques. Springer-Verlag, Berlin. [Имеется русский перевод: *Дьедонне Ж.* Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.]

[Dixmier (1969)] *Dixmier, J.* Les C^*-algèbres et leurs represétations Gauthier-Villars, Paris. [Имеется русский перевод: *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.]

[Dixmier (1974)] *Dixmier, J.* Algèbres enveloppantes. Gauthier-Villars, Paris. [Имеется русский перевод: *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.]

[Dunford, Schwartz (1963)] *Dunford, N.* and *Schwartz, J. T.* Linear operators, Part II. Interscience, New York. [Имеется русский перевод: *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.]

[Duren (1983)] *Duren, P. L.* Univalent functions. Springer-Verlag, Berlin.

[Emch (1972)] *Emch, G. G.* Algebraic methods in statistical mechanics and quantum filed theory. Interscience, New York. [Имеется русский перевод: *Эмх Ж.* Алгебраические методы статической механики и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.]

[Feigin, Fuchs (1990)] *Feigin B. L, Fuchs D. B.* Representations of Virasoro algebra. In Representations of Lie groups and Related topics (eds. *A. M. Vershik, D. P. Zhelobenko*).

[Feldman (1958)] *Feldman, J.* Equivalence and perpendicularity of Gaussian measures. Pacif. J. Math. **8**, no. 4, 699–708.

[de Finetti (1937)] *de Finetti B.* La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives. Ann. Inst. H. Poincaré, **7**, 1–68.

[Fock (1932)] *Fock, V. A.* Konfigurationsraum und zweite Quantelung. Z. Phys. 75, 622–47. [Имеется русский перевод: в *Фок В. А.* Работы по квантовой теории поля. Л., 1957.]

[Fock (1934)] *Fock, V. A.* Zur Quantenelectrodynamik. Soviet Phys. 6, 425. [Имеется русский перевод: в *Фок В. А.* Работы по квантовой теории поля. Л., 1957.]

[Frenkel (1981)] *Frenkel, I. B.* Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory. J. Funct. Anal. **44**, 259–327.

[Frenkel (1984)] *Frenkel, I. B.* Orbital theory for affine Lie algebras. Invent. Math. **77**, 301–52.

[Frenkel, Kac (1981)] *Frenkel, I. B.* and *Kac, V. G.* Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models. Invent. Math. **62**, no. 1, 23–66.

[Friedan, Qiu, Shenker (1985)] *Friedan, D., Qiu, Z.*, and *Shenker, S.* Conformal invariance unitarity and two-dimensional critical exponents. In: Vertex operators in mathematics and physics. (ed. *J. Lepowsky* et al.), 419–49.

[Friedrichs (1953)] *Friedrichs, K. O.* Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Interscience, New York.

[Fuchs (1993)] *Fuchs D. B.* Singular vectors over the Virasoro algebras, Adv. Sov. Math., 17, 65–74.

[Gårding, Wightman (1954)] *Gårding, L.* and *Wightman, A. S.* Representations of the commutation relations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**, 622–626.

[Gel'fand, Graev (1990)] *Gel'fand I. M.* and *Graev M. I.* Principal representations of the group $U(\infty)$. In: Representation of Lie groups and related topics (ed. *A. M. Vershik* and *D. P. Zhelobenko*), 119–154. Gordon and Breach, New York.

[Gel'fand, Graev, Vershik (1981)] *Gel'fand, I. M., Graev, M. I.,* and *Vershik, A. M.* Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group. Compositio Math. **42**, 217–43.

[Gel'fand, Graev, Vershik (1985)] *Gel'fand, I. M., Graev M. I.,* and *Vershik, A. M.* Models of representations of current groups. In: Representations of Lie groups and algebras (ed. *A. A. Kirillov*), 121–80. Akademiai Kiado, Budapest.

[Goddard, Kent, Oliver (1986)] *Goddard, P., Kent, A.,* and *Oliver, D.* Unitarisable representations of Virasoro algebra and super Virasoro algebra. Comm. Math. Phys. **103**, 115–19.

[Gohberg, Goldberg, Kaashoek (1993)] *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. V. II. Birkhauser.

[Goodman (1979)] *Goodman, R.* Holomorphic representations of nilpotent Lie groups. J. Funct. Anal. **31**, 115–37.

[Goodman, Wallach (1984)] *Goodman, R.* and *Wallach, N. R.* Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle. J. Reine Angew. Math. **347**, 69–133.

[Goodman, Wallach (1985)] *Goodman, R.* and *Wallach, N. R.* Projective unitary positive energy cocylce representations of $\mathrm{Diff}(S^1)$. J. Funct. Anal. **63**, 299–321.

[Gross (1965)] *Gross, L.* Abstract Wiener spaces. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. **2**, 31–42.

[Grunsky (1939)] *Grunsky, H.* Koeffizientenbedingunden für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. Math. Z. **45**, 29–61.

[Guichardet (1972)] *Guichardet, A.* Symmetric Hilbert spaces and related topics. Lecture Notes in Mathematics **261**, Springer-Verlag, Berlin.

[Guichardet (1980)] *Guichardet, A.* Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie. Codic/Fernand Nathan, Paris. [Имеется русский перевод: *Гишарде А.* Когомологии групп Ли и топологических алгебр. М.: Мир, 1984.]

[Gunning, Rossi (1965)] *Gunning, R.* and *Rossi, H.* Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ. [Имеется русский первод: *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных перменных. М.: Мир, 1969.]

[Hajek (1958)] *Hajek, J.* On a property of normal distributions an arbitrary stochastic process. Czechslovak Math. J. **8**, 610–18.

[Heyer (1977)] *Heyer, H.* Probability measures on locally compact groups, Springer-Verlag, Berlin. [Имеется русский перевод: *Хейер Дж.* Вероятностные меры на локально-компактных группах. М.: Мир, 1977.]

[Helgason (1962)] *Helgason, S.* Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York. [Имеется русский перевод: *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.]

[Hilgert, Hoffmann, Lawson (1989)] *Hilgert, J., Hoffmann, K. N.,* and *Lawson, J.* Lie groups, convex cones and semigroups, Clarendon Press, Oxford.

[Hofer, Zehnder (1994)] *Hofer H., Zehnder E.* Symplectic invariant and hamilyonian dynamics, Birkhauser.

[Hopf (1954)] *Hopf, E.* The general temporally discrete Markov process. J. Rat. Mech. Anal. **3**, 13–45.

[Hörmander (1985)] *Hörmander, L.* The analysis of linear partial differential operators. III. Spinger-Verlag, Berlin. [Имеется русский перевод: *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. М.: Мир, 1987.]

[Hörmander (1995)] *Hörmander, L.* Symplectic classification of quadratic forms, and general Mehler formulas // Math. Z., T. 219, 413–449.

[Howe (1988)] *Howe, R.* The oscillator semigroup. Proc. Symp. Pure Math. **48**, 61–131.

[Howe (1989)] *Howe, R.* Remarks on classical invariant theory. Trans. Math. Soc. **313**, 539–70.

[Howe, Moore (1979)] *Howe, R. E.* and *Moore, C. C.* Asymptotic properties of unitary representations. J. Funct. Anal. **32**, 72–96.

[Hua (1958)] *Hua, Lo Keng* Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains (Chinese); [Имеется русский перевод: *Хуа Ло Кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.] [English translation (1963): Amer. Math. Soc, Providence, RI.]

[Hurwitz, Courant (1952)] *Hurwitz, A.* and *Courant, R.* Vorlesungen über allgemeine Functionentheorie und elliptische Functionen, Springer-Verlag, Berlin. [Имеется русский перевод: *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.]

[Ismagilov (1983)] *Ismagilov, R. S.* Infinite-dimensional groups and their representations. Trans. Interant. Math. Congress, Warsaw, 861–5.

[Ismagilov (1996)] *Ismagilov, R. S.* Representations of infinite dimensional groups. Amer. Math. Soc., Providence, 1996.

[Ito, McKean (1965)] *Ito, K.* and *McKean, H. P.* Diffusion process and their sample paths. Springer-Verlag, Berlin. [Имеется русский перевод: *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.]

[Kac (1979)] *Kac, V. G.* A contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras. Lecture Notes in Physics **94**, 441–5, Springer-Verlag, Berlin.

[Kac, V. G. (1983)] Kac, V. G. (1983). Infinite-dimensional Lie algebras. Birkhauser, Boston, MA. [Имеется русский перевод: *Кац В. Г.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.]

[Kac, Kazhdan, Lepowsky, Wilson (1981)] *Kac, V. G., Kazhdan, D. A., Lepowsky, J.,* and *Wilson, R. L.* Realization of the basic representations of Euclidean Lie algebras. Adv. in Math. **42**, 83–112.

[Kahane (1965)] *Kahane, J. P.* Some random series of functions. 2nd edn. Camridger Studies in Adv. Math. no. 5. Camridge University Press, Camridge.

[Kallenberg (1992)] *Kallenberg O.* Symmetries of random arrays and set-indexed processes. J. theory Probab., V. 5, 727–765.

[Kallenberg (1995)] *Kallenberg O.* Multiple Wiener integrals and multivariant version of Schoenberg's theorem. Probab. Theory Rel. Fields., V. 102, 91–143.

[Kashiwara, Vergne (1978)] *Kashiwara, M.* and *Vergne, M.* On Segal—Shale—Weil representation and harmonic polynomials. Invent. Math. **44**, 1–47.

[Kerov, Ol'shanskii (1994)] *Kerov, S. V.* and *Ol'shanskii, G. I.* Polynomial functions on the set of Young diagrams and characters of a symmetric group. C. R. Acad. Sci. Paris (1), **319**, 121–6.

[Kerov, Ol'shanskii, Vershik (1993)] *Kerov, S. V., Ol'shanskii G. I.* and *Vershik, A. M.* Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A defomation of the regular representation. C. R. Acad. Sci. Paris (1), **316**, 773–8.

[Kervaire, Milnor (1963)] *Kervaire M. A., Milnor J. W.* Groups of homotopy spheres. Ann. Math., **77**, 504–537.

[Killing (1889)] *Killing, W.* Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I, II, III, IV. Math. Ann. **31**, 252–90; (1889) **33**, 1–48; (1889) **34**, 57–122; (1890) **36**, 161–89.

[Kingman (1978)] *Kingman J. F. C.* Random partitions in population genetics. Proc. R. Soc. Lond. (A) **361**(1978), 1–20.

[Kingman (1993)] *Kingman J. F. C.* Poisson processes. Clarendon Press, Oxford.

[Klingen (1956)] *Klingen, H.* Über die analytichen Abbildungen varallgemeinerter Einheitskreise auf sich. Math. Ann. **132**, 134–44.

[Klyachko (1996)] *Klyachko, A.* Stable bundles. Mittag-Leffler inst. preprint, 1996–1997.

[Koebe (1907)] *Koebe, P.* Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nacht. Akad Wiss. Göttingen: Math.–Phys. KL. **1907**, 191–210.

[Krengel (1985)] *Krengel, O.* Ergodic theorems. de Gruyter, Berlin.

14 Зак. 320

[Kuo (1975)] *Kuo, H.H.* Gaussian measures in Banach spaces. Lecture notes in Mathematics **463**, Springer-Vergal, Berlin. [Имеется русский перевод: *Х.-С. Го.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.]

[Lepowsky, Wilson (1978)] *Lepowsky, J.* and *Wilson, R.L.* Construction of an affine Lie algebra. Comm. Math. Phys. **62**, 45–53.

[Lévy (1965)] *Lévy, P.* Processus stochastiques et mouvement brownien. 2nd edn. Gauthier-Villars, Paris. [Имеется русский перевод: *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972.]

[Lieberman (1972)] *Lieberman, A.* The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups. Trans. Amer. Soc. **164**, 189–98.

[Lion, Vergne (1980)] *Lion, G.* and *Vergne, M.* The Weil representation; Maslov index and theta series. Birkhauser, Boston, MA. [Имеется русский перевод: *Лион Ж., Верньe М.* Представление Вейля, индекс Маслова и θ-ряды. М.: Мир, 1983.]

[Lukacs (1970)] *Lukacs, E.* Characteristic functions. Griggin, London. [Имеется русский перевод: *Лукач Е.* Характеристические функции. М., 1979.]

[Macdonald (1979)] *Macdonald, I.G.* Symmetric functions and Hall polynomials. Clarendon Press, Oxford. [Имеется русский перевод: *Макдональд И.Г.* Симметрические функции и многочлены Холла. М., 1985.]

[Malliavin M.P., Malliavin P. (1990)] *Malliavin, M.P.* and *Malliavin, P.* Integration on loop groups. I. J. Funct. Anal. **93**, 207–37.

[Margulis (1991)] *Margulis, G.A.* Discrete subgroups of Lie groups. Springer-Verlag, Berlin.

[McDuff, Salamon (1995)] *McDuff D., Salamon D.* Introduction to symplectic topology. Oxford, Clarendon Press.

[Nazarov (1995)] *Nazarov M.L.* The oscillator semigroup over a non-Archimedean field. J. Funct. Anal. **128**, 384–438.

[Nazarov, Neretin, Ol'shanskii (1989)] *Nazarov, M.L., Neretin, Yu.A.,* and *Ol'shanskii, G.I.* Semigroups engendrés par la représentation de Weil du groupe simpletique de dimension infinie. C. R. Acad. Sci Paris Sér. A **309**, no. 7, 443–6.

[Nelson (1959)] *Nelson, E.* Analytic vectors. Ann. of Math. (2) **70**, 572–615. [Имеется русский перевод (1962): *Нелсон Э.* Аналитические векторы // Математика (сборник переводов) 6, 3(1962), 89–131.]

[Nelson (1973)] *Nelson, E.* The free Markov field. J. Funct. Anal. **12**, 211–227.

[Neretin (1991)] *Neretin, Yu.A.* Infinite-dimensional groups. Their mantles, trains and representaion. In Topics in representation theory (ed. *A.A. Kirillov*), Adv. Soviet Math. **2**, 103–71.

[Neretin (1994)] *Neretin, Yu.A.* Some remarks on quasi-invariant actions of the group of diffeomorphisms of the circle and loop groups. Comm. Math. Phys. **164**, 599–626.

[Neretin (1997a)] *Neretin, Yu.A.* Hinges and Study–Semple–Satake–de Concini–Procesi–Oshima boundary. In: Kirillov' seminar on representation theory. Ed. G.I. Olshanskii (Adv. in Math. Sciences, v. 35; AMS translations, v. 181), Amer. Math. Soc., Providence, 1996.

[Neretin (1997b)] *Neretin, Yu.A.* Notes on affine isometric actions of discrete groups. Архив dg-ga, декабрь 1997.

[von Neumann (1938)] *von Neumann, J.* On infinite tensor products. Compositio Math. **6**, 1–77. [Имеется русский перевод в кн. *Дж. фон Нейман*, Избранные труды. М.: Наука, 1987.]

[Obata (1987)] *Obata, N.* Certain unitary representations of the infinite symmetric group, I, II. Nagoyoa Math. J. **105**, 109–20; **106**, 143–62.

[Ol'shanskii (1985)] *Ol'shanskii, G.I.* Unitary representations of infinite symmetric group: semigroup approach. In Representations of Lie groups and algebras (ed. *A.A. Kirillov*), 181–97. Akadimiai Kiado, Budapest.

[Ol'shanskii (1990)] *Ol'shanskii, G.I.* Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalisms of R. Howe. In Representations of Lie groups and related topics (eds. *A.M. Vershik, D.P. Zhelobenko*), 269–464. Gordon and Breach, New York.

[Ol'shanskii (1991a)] *Ol'shanskii, G.I.* Caractères généralisés de $U(\infty)$ et fonctions intérieures. C. R. Acad. Sci. Paris (1), **313**, 9–12.

[Ol'shanskii (1991b)] *Ol'shanskii, G.I.* On semigroups related to infinite-dimensional groups. In Topics in representation theory (ed. *A.A. Kirillov*). Adv. Soviet Math. **2**, 67–101.

[Ol'shanskii (1991c)] *Ol'shanskii, G.I.* Representations of the infinite-dimensional classical groups, limit of enveloping algebras and Yangians. In Topics in representation theory (ed. *A.A. Kirillov*). Adv. Soviet Math. **2**, 1–66.

[Onsager (1944)] *Onsager, L.* Crystal statistics. I. One-dimensional model with an order-disorder transition. Phys. Rev. **65**, 117–49.

[Paneitz (1981)] *Paneitz, S.M.* Invariant convex cones and causality in semisimple Lie algebras and groups. J. Funct. Anal. **43**, 313–59.

[Parthasarathy (1978)] *Parthasarathy, K.R.* Introduction to probability and measure. Springer-Verlag, Berlin.

[Parthasarathy, Schmidt (1972)] *Parthasarathy, K.R.* and *Schmidt, K.* Positive definite kernels, continuous tensor products and cenral limit theorems of probability theory. Lecture Notes in Mathematics **272**, Springer-Verlag, Berlin.

[Pickrell (1987)] *Pickrell, D.* Measures on infinite-dimensional Grassmann manifolds. J. Funct. Anal. **70**, 323–56.

[Pickrell (1990)] *Pickrell, D.* Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces. J. Funct. Anal. **90**, 1–26.

[Pickrell (1991)] *Pickrell, D.* Mackey analysis of infinite classical motion group. Pacif. J. Math. **150**(1991), 139–166.

[Pressley, Segal (1986)] *Pressley, A.* and *Segal, G.* Loop groups. Clarendon Press, Oxford. [Имеется русский перевод: *Прессли А., Сигал Дж.* Группы петель. М.: Мир, 1990.]

[Ramer (1974)] *Ramer, R.* On non-linear transformations of measures. J. Funct. Anal. **15**, 166–87.

[Reed, Simon (1972)] *Reed, M.* and *Simon, B.* Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press, New York. [Имеется русский перевод: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.]

[Reed, Simon (1975)] *Reed, M.* and *Simon, B.* Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press, New York. [Имеется русский перевод: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Преобразование Фурье. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.]

[Renner (1985)] *Renner, L.E.* Classification of semisimple algebraic monoids. Trans. Amer. Math. Soc. **292**, 193–223.

[Reshetihin, Turaev (1991)] *Reshetihin, N.Yu.* and *Turaev, V.G.* Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. Invent. Math. **103**, 547–597.

[Riesz, Sz.-Nagy (1965)] *Riesz, F.* and *Sz.-Nagy, B.* Leçons d'analyse fonctionnelle. Academiai Kiado, Budapest. [Имеется русский перевод: *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Наука, 1979.]

[Rudolph (1979)] *Rudolph, D.* An example of a measure-preserving map with minimal self-joinings and its applications. J. Analyse Math. **35**, 97–122.

[Ruppert (1984)] *Ruppert, W.* Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory. Lecture Notes in Mathematics **1079**, Springer-Verlag, Berlin.

[Satake (1960)] *Satake, I.* On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. Ann. of Math. (2), **71**, 77–110. [Имеется русский перевод: *Сатаке И.* О представлениях и компактных расширениях симметрических римановых пространств // Математика (сб. переводов) 1961, 5, № 3, 45–80.]

[Sato, Miwa, Jimbo (1978)] *Sato, M., Miwa, T.,* and *Jimbo, M.* Holonomic quantum fields, I. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **14**, 223–67. [Имеется русский перевод в кн. *Сато М., Дзимбо Д., Мива Т.* Голономные квантовые поля. М.: Мир, 1983.]

[Schoenberg (1938)] *Schoenberg I.J.* Metric spaces and positive definite functions. Trans. Amer. Math. Soc., **44**, 522–536.

[Segal G.B. (1981)] *Segal, G.B.* Unitary representations of some infinite dimensional groups. Comm. Math. Phys., **80**, 301–42.

[Segal G.B. (1989)] *Segal, G.B.* Two-dimensional conformal field theories and modular functors. Proc. 9th Internat. Congr. Math. Phys. (Swansea, 1988) Hilger, Bristol.

[Segal I. E. (1956)] *Segal, I. E.* Tensor algebras over Hilbert spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **81**, 106–34.

[Segal, I. E. (1957)] *Segal, I. E.* The structure of a class of representations of the unitary group of a Hilbert space. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 197–203.

[Segal, I. E. (1958)] *Segal, I. E.* Distributions in Hilbert spaces and canonical systems of operators. Trans. Amer. Math. Soc. **88**, 12–41.

[Segal, I. E. (1959)] *Segal, I. E.* Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom, I. Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. **31**(12), 1–39.

[Semple (1951)] *Semple I. G.* The variety whose points represent complete collineations of S_r on S_r'. Univ. Roma Rend. Math., **10**, 201–280.

[Serre (1966)] *Serre, J.-P.* Algèbres de Lie Semisimples complexes. Benjamin, New York. [Имеется русский перевод в кн. *Серр Ж.-П.* Группы Ли и алгебры Ли. М.: Мир, 1969.]

[Shale (1962)] *Shale, D.* Linear symmetries of boson fields. Trans. Amer. Math. Soc. **103**, 149–67.

[Shale, Stinespring (1964)] *Shale, D.* and *Stinespring, W.* States of the Clifford algebra. Ann. of Math. **80**, 365–81.

[Strade, Farnsteiner (1988)] *Strade, H.* and *Farnsteiner, R.* Modular Lie algebras and their representations. Dekker, New York.

[Stratila, Voiculescu (1975)] *Stratila, S.* and *Voiculescu, P.* Representations of AF-algebras and the group $U(\infty)$. Lecture Notes in Mathematics **486**, Springer-Verlag, Berlin.

[Streater (1971)] *Streater, R.* Infinitely divisible representations of Lie algebras. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **19**, 67–80.

[Sz.-Nagy, Foiaş (1967)] *Sz.-Nagy, B.* and *Foiaş, C.* Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert. Academiai Kiado, Budapest. [Имеется русский перевод: *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.]

[Study (1886)] *Study E.* Über die Geometrie der Kegelshnitte insbesondere deren characteristische Probleme. Math. Ann., **27**(1886), 51–58.

[Thoma (1964)] *Thoma, E.* Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzahlbar unendlichen symmetrischen Gruppe. Math. Z. **85**, 40–61.

[Tsuchiya, Kanie (1988)] *Tsuchiya, A.* and *Kanie, Y.* Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid groups. In Conformal field theory and solvable matrix models, Adv. Study Pure Math. **16**, 297–327.

[Verlinde (1988)] *Verlinde, E.* Fusion rules and modular transformations in 2D-conformal field theory. Nuclead Phys. **B300**, 360–380.

[Virasoro (1970)] *Virasoro, M. A.* Subsidiary conditions and ghosts in the dual resonance model. Phys. Rev. Appl. **55**, 1–22.

[Voiculescu (1976)] *Voiculescu, P.* Représentations factorielles de type II de $U(\infty)$. J. Math Pures Appl. **55**, 1–20

[Voiculescu, Dykema, Nica (1993)] *Voiculescu, P. V., Dykema, K. J., and Nica, A.* Free random variables. Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

[Weil (1964)] *Weil, A.* Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math. **111**, 143–211. [Имеется русский перевод: *Вейль А.* О некоторых группах унитарных операторов // Математика (сборник переводов) 13, 5, 33–44. 1969.]

[Weyl (1939)] *Weyl, H.* The classical groups. Their invariants and representations. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. [Имеется русский перевод: *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.]

[Witten, E. (1988)] Witten, E. (1988). Quantum field theory, Grassmannians and algebraic curves. Comm. Math. Phys. 113, 529–600.

[Азизов, Иохвидов (1986)]* *Азизов А. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.

* Звездочка обозначает существование английского перевода статьи или книги. Точная ссылка на английский перевод статьи указывается лишь в том случае, когда он находится в каком-либо нерегулярном (или не вполне регулярном) издании.

[Арнольд (1974)]* *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

[Арнольд (1978)]* *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[Березанский, Кондратьев (1988)]* *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Киев: Наукова Думка.

[Березин (1961)]* *Березин Ф. А.* Канонические преобразования операторов в пространстве вторичного квантования // ДАН СССР, 1961, 137, №2, 311–314.

[Березин (1965)]* *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.

[Березин (1967)]* *Березин Ф. А.* Автоморфизмы грассмановой алгебры // Мат. заметки, 1967, 1, вып. 3, с. 269–276.

[Березин (1969а)]* *Березин Ф. А.* Плоская модель Изинга. УМН, 24, №3, 3–22.

[Березин (1969б)]* *Березин Ф. А.* Несколько замечаний о представлениях соотношений коммуникации // УМН, 24, №4, 65–88.

[Вершик (1977)]* *Вершик А. М.* Многозначные отображения с инвариантной метрикой // Записки научн. семин. ЛОМИ, 72, 26–61. [English translation in J. Sov. Math., **23**(1983).]

[Вершик, Гельфанд, Граев (1973)]* *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления группы $SL_2(R)$, где R — кольцо функций // УМН, 28, №5, 83–128.

[Вершик, Гельфанд, Граев (1975)]* *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления групп диффеоморфизмов // УМН, 30, №6, 1–50.

[Вершик, Керов (1981а)]* *Вершик А. М., Керов С. В.* Асимптотическая теория характеров симметрической группы // Функц. анал. и прилож., 15, 4, 15–27.

[Вершик, Керов (1981б)]* *Вершик А. М., Керов С. В.* Характеры и факторпредставления бесконечной симметрической группы // Докл. АН СССР, 257, 1037–1040.

[Вершик, Керов (1982)]* *Вершик А. М., Керов С. В.* Характеры и факторпредставления бесконечной унитарной группы // Докл. АН СССР, 267, 272–276.

[Вершик, Шмидт (1977)]* *Вершик А. М., Шмидт А. А.* Предельные меры в асимптотической теории симметрических групп // Теория вероятности и примен., 22, 72–88.

[Винберг (1980)]* *Винберг Э. Б.* Инвариантные конуса и упорядочения в группах Ли // Функц. анал. и прилож., 14, 1–13.

[Гантмахер (1953)]* *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: ГТТИ, 1953.

[Гельфанд, Граев, Виленкин (1962)]* *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции, вып. 5, Интегральная геометрия и теория представлений. М.: Физматгиз, 1962.

[Гельфанд, Граев, Пятецкий-Шапиро (1966)]* *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Обобщенные функции, вып. 6, Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.

[Гельфанд, Фукс (1968)]* *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функц. анал. и прилож. 2, №4, 92–93.

[Голузин (1966)]* *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

[Граев (1958)]* Граев М. И. Унитарные представления вещественных простых групп Ли. Труды Московского Математического Общества, **7**, 335–389. [English translation (1958): Graev M.I. Unitary representations of real simple Lie groups. Amer. Math. Soc. Transl. (2) **16**.]

[Дринфельд (1989)]* *Дринфельд В. Г.* Квазихопфовы алгебры // Алгебра и анализ 1, №6, 114–148.

[Желобенко (1970)]* *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.

[Исмагилов (1967)]* *Исмагилов Р. С.* Элементарные сферические функции на группе $SL(2, P)$ над полем P, не являющимся локально-компактным, относительно подгруппы матриц с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР, сер. Мат., 1967, 31, 2, 361–390.

[Исмагилов (1969)]* *Исмагилов Р. С.* О линейных представлениях групп матриц с элементами из нормированного поля // Изв. АН СССР, 33, №6, 1296–1323.

[Исмагилов (1970)]* *Исмагилов Р. С.* Сферические функции над полем, поле вычетов которого бесконечно // Функц. анал. и прилож., 1970, 4, № 1, 42–51.

[Исмагилов (1971)]* *Исмагилов Р. С.* Унитарные представления группы диффеоморфизмов окружности // Функц. анал. и прилож., 5, № 3, 45–53.

[Исмагилов (1972)]* *Исмагилов Р. С.* Универсальные представления группы диффеоморфизмов компактного многообразия // Изв. АН СССР, сер. Мат., 36, 180–202.

[Исмагилов (1975)]* *Исмагилов Р. С.* Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ // Мат. сборник, 98, № 1, 55–71.

[Исмагилов (1976)]* *Исмагилов Р.С.* Об унитарных представлениях группы $C^\infty(K,G)$, $G = SU(2)$ // Мат. сб., 100, 117–131.

[Исмагилов (1980)]* *Исмагилов Р. С.* Вложения группы диффеоморфизмов, сохраняющих объем, в полупрямое произведение, и ее унитарные представления // Мат. сб., 113, 81–97.

[Исмагилов (1993)]* *Исмагилов Р. С.* Группы и однородные области, связанные с факторами типа II, и представления группы диффеоморфизмов тора, сохраняющих обмотку // Алгебра и анализ 5, 215–231.

[Карпелевич (1965)]* *Карпелевич Ф. И.* Геометрия геодезических и собственные функции оператора Бельтрами—Лапласа на симметрических пространствах // Труды Моск. Мат. общества, 14, 48–185. [English translation in Trans. Mosc. Math. Soc., **14**, 51–199.]

[Кац (1968)]* *Кац В. Г.* Простые градуированные алгебры Ли конечного роста // Изв. АН СССР, сер. Мат., т. 32, 1968, 1323–1367.

[Кац (1970)]* *Кац В. Г.* О классификации простых алгебр Ли над полем ненулевой характеристики // Изв. АН СССР, сер. Мат., 34, 385–408.

[Керов (1987)]* *Керов С. В.* Реализация представлений полугруппы Брауэра // Записки научн. семин. ЛОМИ, 164, 188–193. [English translation in J. Sov. Math., 1989, т. 47.]

[Керов (1995)]* *Керов С. В.* Субординаторы и подстановочные действия с квазиинвариантной мерой // Записки научн. семин. ПОМИ, т. 223, 181–205. [English translation in J. Sov. Math., 1997.]

[Кириллов (1972)]* *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972.

[Кириллов (1973)]* *Кириллов А. А.* Представления бесконечномерной унитарной группы // Докл. АН СССР, 212, 288–290.

[Кириллов (1974)]* *Кириллов А. А.* Унитарные представления группы диффеоморфизмов и некоторых ее подгрупп // Препринт Инст. Прикл. Мат. № 62 за 1974. [English translation (1981): *Kirillov, A. A.* Unitary representations of the group of diffeomorphisms and some of its subgroups. Selecta Math. Soviet. **1**.]

[Кириллов (1987)]* *Кириллов А. А.* Кэлерова структура K-орбит группы диффеоморфизмов окружности // Функц. анал. и прилож., 21, № 2, 42–45.

[Кириллов, Юрьев (1987)]* *Кириллов А. А., Юрьев Д. В.* Кэлерова геометрия бесконечномерного однородного пространства $M = \mathrm{Diff}(S^1) / \mathrm{Rot}(S^1)$ // Функц. анал. и прилож., 21, 4, 35–46.

[Колмогоров, Фомин (1981)] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

[Корнфельд, Синай, Фомин (1980)]* *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

[Кострикин, Шафаревич (1969)]* *Кострикин А. И., Шафаревич И. Р.* Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР, сер. Мат., 33, 251–323.

[Крейн (1965)]* *Крейн М. Г.* Введение в теорию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах / В кн. Вторая летняя математическая школа, I, Киев, 1965, 15–92. [English translation in Amer. Math. Soc. Transl. **93**(1970), 103–176.]

[Крейн (1950)]* *Крейн М. Г.* Об одном применении принципа преобразований с индефинитной метрикой // УМН 1950, 5, № 2, 180–190. [English translation (1950) in Amer. Math. Soc. Transl. (2), **1**.]

[Крейн, Шмульян (1967)]* *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами // Мат. исследования, 2/3, Кишинев, 64–96. [English translation in Amer. Math. Soc. Transl. **103** (1974), 125–152.]

[Кричевер, Новиков (1987)]* *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и стуктуры теории солитонов // Функц. анал. и прилож., 21, № 2, 46–63.

[Кричевер, Новиков (1989)]* *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебра типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях // Функц. анал. и прилож., 23, 1, 24–40.

[Кушнер (1972)] *Кушнер Г. Ф.* О компактификациях некомпактных римановых симметрических пространств // Труды семин. по вект. и тенз. анализу, 16, 99–152.

[Лебедев, Милин (1951)] *Лебедев Н. А., Милин И. М.* О коэффициентах одного класса аналитических функций // Мат. сборник, 28, 359–400.

[Линник (1960)]* *Линник Ю. В.* Разложения вероятностных законов. Л: Изд-во ЛГУ, 1960.

[Литвинов (1968)]* *Литвинов Г. Л.* О вполне неприводимых представлениях комплексных и вещественных нильпотентных групп Ли. Функц. анал. и прилож., т. 3, № 4, 87–88.

[Литвинов (1972)]* *Литвинов Г. Л.* Представления групп в локально выпуклых пространствах и топологические групповые алгебры. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 16, 267–349. [English translation in Selecta Math. Sov., v. 7, № 2(1988).]

[Лифшиц (1946)]* *Лифшиц М. С.* Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Мат. сборник, 19, 239–260. [English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2), **5**.]

[Лифшиц (1954)]* *Лифшиц М. С.* О спектральном разложении линейных несамопряженных операторов // Мат. сборник 34, 145–199. [English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2), **5**.]

[Лобачевский (1835)] *Лобачевский Н. И.* Способ уверяться в исчезновении бесконечных строк и приближаться к значениям функций от весьма больших чисел // Ученые записки Казанского Университета, 1835, 211–342. См. также *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений, т. 5., Москва, 1948.

[Наймарк (1976)] *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.

[Неретин (1982)]* *Неретин Ю. А.* Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмов окружности // УМН, 37:2, 213–214.

[Неретин (1983а)] *Неретин Ю. А.* Унитарные представления алгебры Вирасоро со старшим весом. Диссертация. М.: МГУ, 1983.

[Неретин (1983б)]* *Неретин Ю. А.* Унитарные представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом // Функц. анал. и прлож. 17, № 3, 85–86.

[Неретин (1983в)]* *Неретин Ю. А.* Бозонные представления группы диффеоморфизмов окружности // Докл. АН СССР, 272, 528–531.

[Неретин (1986)]* *Неретин Ю. А.* О спинорном представлении $O(\infty, \mathbb{C})$ // Докл. АН СССР, 289, 282–285.

[Неретин (1987а)]* *Неретин Ю. А.* Комплексная полугруппа, содержащая группу диффеоморфизмов окружности // Функц. анализ и прилож., 21, № 2, 82–83.

[Неретин (1987б)]* *Неретин Ю. А.* Почти инвариантные структуры и конструкции унитарных представлений группы диффеоморфизмов окружности // Докл. АН СССР, 294, 37–41.

[Неретин (1988)]* *Неретин Ю. А.* Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр // В кн. Теория представлений и некоммутативный гармонический анализ — I. Соврем. пробл. мат., Фундаментальные направления, т. 22. М.: ВИНИТИ, 1988.

[Неретин (1989а)]* *Неретин Ю. А.* Спинорное представление бесконечномерной ортогональной полугруппы и алгебра Вирасоро. Функц. анализ и прилож., 23: 3, 32–44.

[Неретин (1989б)]* *Неретин Ю. А.* Голоморфные продолжения представлений группы диффеоморфизмов окружности // Мат. сборник 180, 635–657.

[Неретин (1990)]* *Неретин Ю. А.* Об одной полугруппе операторов в бозонном пространстве Фока // Функц. анал. и прилож. 24: 2, 63–73.

[Неретин (1991)]* *Неретин Ю. А.* Продолжение представлений классических групп до представления категорий // Алгебра и анализ 3:1, 176–202.

[**Неретин (1992а)**]* *Неретин Ю.А.* О комбинаторном аналоге группы диффеоморфизмов окружности // Изв. РАН, сер. Мат., 56, 1072–1085.

[**Неретин (1992б)**]* *Неретин Ю.А.* Категории бистохатических мер и представления некоторых бесконечномерных групп // Мат. сборник, 183, 2, 52–76.

[**Неретин (1992в)**]* *Неретин Ю.А.* Универсальные пополнения комплексных классических групп // Функц. анал. и прилож., 26, 4, 30–44.

[**Неретин (1996)**]* *Неретин Ю.А.* Случайные канторовские множества и группа диффеоморфизмов полупрямой // Мат. сборник, 187, №6, 73–84.

[**Неретин (1997)**] *Неретин Ю.А.* О соответствии между бозонным пространством Фока и пространством L^2 по мере Пуассона. Мат. сборник, 188, 11.

[**Неретин, Ольшанский (1995)**]* *Неретин Ю.А., Ольшанский Г.И.* Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $O(p,q)$ и их пределы при $q \to \infty$. Зап. научн. семин. ПОМИ, 223, 9–91. [English translation in J. Math. Sci., 1997.]

[**Нессонов (1986)**]* *Нессонов Н.И.* Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы // Мат. сборник, 130, 131–150.

[**Никольский (1980)**]* *Никольский Н.К.* Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

[**Окуньков (1994)**]* *Окуньков А.* Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы // Функц. анал. и прилож., 28, №2, 31–40.

[**Ольшанский (1978)**]* *Ольшанский Г.И.* Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений // Функц. анал. и прилож., 12, №3, 32–44.

[**Ольшанский (1980)**]* *Ольшанский Г.И.* Новые большие группы типа I. Совр. пробл. математики, 16, 31–52. [English translation in J. Sov. Math., **18** (1982).]

[**Ольшанский (1981)**]* *Ольшанский Г.И.* Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфные дискретные серии // Функц. анал. и прилож., 15, №3, 53–66.

[**Ольшанский (1983)**]* *Ольшанский Г.И.* Унитарные представления бесконечночномерных пар (G,K) и формализм Хау // Докл. АН СССР, 269, 33–36.

[**Ольшанский (1984)**]* *Ольшанский Г.И.* Бесконечномерные классические группы конечного R-ранга: описание представлений и асимптотическая теория // Функц. анал. и прилож., 18, 1, 28–42.

[**Ольшанский (1986)**]* *Ольшанский Г.И.* Унитарные представления групп $SO(\infty,\infty)$ как пределы унитарных представлений групп $SO(p,\infty)$ при $p \to \infty$ // Функц. анал. и прилож., 20, №4, 23–37.

[**Ольшанский (1988)**]* *Ольшанский Г.И.* Метод голоморфных продолжений в теории унитарных представлений бесконечномерных групп // Функц. анал. и прилож., 22:4, 23–37.

[**Ольшанский (1989)**]* *Ольшанский Г.И.* Унитарные представления (G,K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой // Алгебра и анализ 1, №4, 178–209.

[**Ольшанский (1994)**]* *Ольшанский Г.И.* Представления Вейля и нормы гауссовых операторов // Функц. анал. и прилож., 28, 1, 51–67.

[**Потапов (1955)**]* *Потапов В.П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающей матричной функции // Труды моск. мат. общ., 4, 125–163. [English translation (1960) in Amer. Math. Soc. Transl. (2) **15**.]

[**Пятецкий-Шапиро (1961)**]* *Пятецкий-Шапиро И.И.* Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматгиз, 1961.

[**Рохлин (1949)**]* *Рохлин В.А.* Об основных понятиях теории меры // Мат. сборник 25, 107–150. [English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (1), **10**.]

[**Рыжиков (1993)**]* *Рыжиков В.В.* Джойнинги, сплетающие операторы, факторы и косые произведения динамических систем // Изв. РАН, сер. Мат., 57, №1, 102–128.

[**Фейгин, Фукс (1982)**]* *Фейгин Р.Л., Фукс Д.Б.* Кососимметричные инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро // Функц. анал. и прилож. 16, №2, 47–63.

[**Хафизов (1990)**]* *Хафизов М.У.* Квазиинвариантная гладкая мера на группе диффеоморфизмов области // Мат. Заметки, 48, №3, 134–142.

[**Хацкевич (1983)**]* *Хацкевич В.А.* Обобщенная метрика Пуанкаре на операторном шаре // Функц. анал. и прилож., 17:4, 92–93.

[**Шабат (1976)**]* *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ, т. 2. М.: Наука, 1976.

[**Шавгулидзе (1978)**]* *Шавгулидзе Е.Т.* Пример меры, квазиинвариатной относительно группы диффеоморфизмов окружности // Функц. анал. и прилож., 12, 3, 55–60.

[**Шавгулидзе (1988)**]* *Шавгулидзе Е.Т.* Мера, квазиинвариантная относительно группы диффеоморфизмов конечномерного многообразия // Докл. АН СССР, 303, 811–814.

[**Шавгулидзе (1997)**]* *Шавгулидзе Е.Т.* Меры, квазиинвариантные относительно групп диффеоморфизмов // Труды МИРАН, т. 217, с. 189–208.

[**Шафаревич (1986)**]* *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры // Соврем. пробл. мат. Фунд. направления, т. 11, ВИНИТИ.

[**Шилов, Фан Дык Тинь (1967)**] *Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь.* Интеграл, мера, производная в конечномерном пространстве. М.: Наука 1967.

[**Ширяев (1980)**]* *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

[**Шмульян (1976)**]* *Шмульян Ю.Л.* Теория линейных отношений и пространства с индефинитной метрикой // Функц. анал. и прилож., 10, 1, 67–72.

[**Шмульян (1978)**]* *Шмульян Ю.Л.* Обобщенно дробно-линейные отображения операторных шаров // Сибирск. мат. журн., 19, 418–425.

Предметный указатель