$|A| = \sqrt{A^*A}$ *с. 400*

$b[\cdot]$ *с. 144, 162*

$B[\ ]$ *с. 141, 162, 175*

$\mathrm{spin}(\cdot)$ *с. 35, 55, 120*

$\mathscr{L}_p$ классы Шаттена; *с. 401*

$\hat{a}(\cdot)$ операторы рождения-уничтожения; *с. 30, 101, 140, 154*

tr след оператора

$1, E, E_n$ единичный оператор

Линейные отношения

$P : A \rightrightarrows B$, $\mathrm{Ker}\,P$, $\mathrm{Im}\,P$, $\mathrm{Dom}\,P$, $\mathrm{Indef}\,P$, $P^{\square}$ *см. § II.4, с. 51–52*

null *с. 54*

Группы и полугруппы

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$, $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{O}(p)$, $\mathrm{Sp}(p)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}^*(2n)$ и др. классические группы; *с. 385–386*

Diff группа диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию; *с. 192, 214*

$\mathrm{Isom}(H)$ группа аффинных изометрий гильбертова пространства; *с. 155*

End, $\mathrm{Aut}(\cdot)$, $\mathrm{Aut}^*(\cdot)$ *с. 51, 68*

Γ полугруппа трубок; *с. 214*

$M(\mathrm{G})$ *с. 328*

$\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$ *с. 245, 274*

S_n, S_∞, $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ симметрические группы; *с. 234, 263*

$\big(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\big)$ (G, K)-пары Ольшанского; *с. 274*

Ams, Ams_∞ *с. 251, 258*

Категории

$\mathrm{Mor}(\cdot,\cdot)$, $\mathrm{End}(\cdot)$, $\mathrm{Aut}(\cdot)$, $\mathrm{Ob}(\cdot)$ *с. 50–51*

Aut^* *с. 68*

Категории обозначаются жирными буквами, в т. ч.

A, B, C, D *с. 85–86*

$\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}$ *с. 122, 247*

GA, $\overline{\mathbf{GA}}$ *с. 62, 111*

GD, $\overline{\mathbf{GD}}$ *с. 53, 119*

Sp, $\overline{\mathbf{Sp}}$, $\overline{\mathbf{Spa}}$ *с. 127–128, 161, 174*

U *с. 124*

$\mathbf{SO}^*$ *с. 129*

Shtan *с. 224*

Mar, $\overline{\mathbf{Mar}}$ *с. 250*

G-Mar, **G-**$\overline{\mathbf{Mar}}$ *с. 335–336*

Uo *с. 285*

PB, $\overline{\mathbf{PB}}$ *с. 235*

Представления

spin спинорное представление; *с. 55, 120*

we представление Вейля; *с. 42, 163*

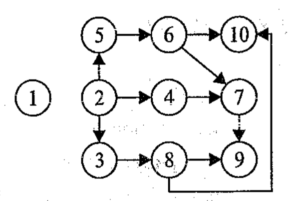
$\widetilde{\mathrm{we}}$ *с. 175*

Exp *с. 155*

$M(h,c)$, $L(h,c)$ модули со старшим весом над алгеброй Вирасоро; *с. 197–198*

Представления категорий (а также функторы) обозначаются рублеными буквами (A, S, T, и т. п.), пространства представления — большими латинскими буквами, операторы представления — греческими строчными буквами; *см. с. 52*

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ГЛАВ



Глава I

Видимые и невидимые структуры на бесконечномерных группах

Эта глава представляет из себя что-то вроде введения, и ниже на нее нет формальных ссылок. Читателю, совсем не знакомому с предметом, эту главу лучше пропустить: глава является комментарием к теории, который без некоторого знакомства с самой теорией не слишком интересен.

Точка зрения на бесконечномерные группы, излагаемая в книге, а также техника работы с ними, по-видимому, покажется странной даже части специалистов. Она, возможно, покажется странной и людям, знакомым с теорией представлений групп Ли. Цель этой главы — на простых примерах объяснить, почему с бесконечномерными группами происходят явления, не знакомые нам по обычной теории групп Ли, излагаемой в учебниках.

Мы хотим дать априорное оправдание следующим двум высказываниям, хотя a posteriori они вполне оправдываются основным текстом книги (и поэтому априорное оправдание в итоге оказывается ненужным).

0.1. Принцип полугруппового продолжения (Г.И. Ольшанский). Пусть G — «бесконечномерная» группа, имеющая некоторый запас унитарных представлений. Тогда G — не группа, а лишь видимая часть некоторой невидимой невооруженным глазом полугруппы $\Gamma \supset \mathrm{G}$. При этом любое представление G продолжается однозначно до представления полугруппы Γ. Есть веские основания думать, что G плотна в Γ. Есть также некоторые основания думать, что Γ компактна, однако последнее высказывание может быть оспорено.

Сделанное нами утверждение ни в каком смысле не является теоремой, и оно ни в каком смысле не описывает полугруппу Γ. Тем не менее, в каждом частном случае оно оказывается истинным, в том числе оказывается истинным и утверждение о «невидимости»: за исключением учебных примеров, ответ всегда оказывается неожиданным. Эту полугруппу мы будем называть *мантией* (*mantle*) группы G.

0.2. Принцип категорного продолжения. Пусть, по-прежнему, G — бесконечномерная группа. Тогда G является лишь видимой частью некоторой невидимой невооруженным глазом категории **K**. Более точно, существует некоторая категория **K** (*шлейф* (*train*) группы G) такая, что сама группа является группой автоморфизмов некоторого объекта V этой категории, а полугруппа Γ — полугруппой эндоморфизмов того же объекта. При этом каждое представление ρ группы G в пространстве H продолжается до представления категории **K**. Иными словами, по каждому объекту W категории **K** строится линейное пространство $T(W)$, а по каждому морфизму $P: W \to W'$ строится линейный оператор $\tau(P): T(W) \to T(W')$ так, что для любых морфизмов $P: W \to W'$, $Q: W' \to W''$ выполнено

$$\tau(QP) = \tau(Q)\tau(P);$$

при этом $T(V) = H$, а для всех $g \in G$ операторы $\tau(g)$ и $\rho(g)$ совпадают.

Еще раз отметим, что все пространства $T(W)$ и все операторы $\tau(P)$ «вырастают» из одного-единственного представления ρ группы G в одном-единственном пространстве H.

§ 1. Топология

1.1. Что такое группа $\mathrm{GL}(\infty)$**?** Более точно, что является бесконечномерным аналогом групп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ с точки зрения теории представлений? Два возможных ответа приходят в голову мгновенно:

а) $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ — это индуктивный предел групп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (т. е. группа обратимых бесконечных матриц A таких, что $A - E$ имеет конечное число ненулевых матричных элементов);

б) $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ — это группа всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве;

По небольшом размышлении приходят в голову еще несколько ответов:

в) индуктивный предел групп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ можно строить по-разному. Например, можно рассмотреть группу $G = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{GL}(2^n,\mathbb{C})$, где вложение $\mathrm{GL}(2^n,\mathbb{C})$ в $\mathrm{GL}(2^{n+1},\mathbb{C})$ устроено как

$$g \to \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix};$$

г) Пусть $\mathscr{L}_p$ — *шаттеновский идеал*, т. е. множество всех операторов A в гильбертовом пространстве таких, что след $\mathrm{tr}(A^*A)^{p/2}$ конечен $(0 < p < \infty)$ (подробнее см. Предварительные сведения, § 4). Через $\mathscr{L}_\infty$ мы обозначим идеал всех компактных операторов. Обозначим временно через $\mathrm{GL}^p(\infty,\mathbb{C})$ группу операторов вида $1 + A$, где $A \in \mathscr{L}_p$, снабженную естественной топологией.

Ясно, что этот список можно продолжать дальше и дальше (и в п. 1.3 мы его продолжим).

Можно подумать, что каждая такая группа имеет свою теорию представлений. Похоже, однако, что это не так.

1.2. Теорема о сферических представлениях [Нессонов (1986)], [Ольшанский (1990)], [Pickrell (1990)]. Обозначим через $\mathrm{U}^p(\infty)$ подгруппу в $\mathrm{GL}^p(\infty,\mathbb{C})$, состоящую из унитарных матриц. Назовем неприводимое унитарное представление ρ группы $\mathrm{GL}^p(\infty,\mathbb{C})$ *сферическим*, если оно содержит ненулевой вектор v такой, что $\rho(g)v = v$ для всех $g \in \mathrm{U}^p(\infty) \subset \mathrm{GL}^p(\infty,\mathbb{C})$.

Теорема 1.1.

а) Пусть $1 < p \leqslant 2$. Тогда все группы $\mathrm{GL}^p(\infty,\mathbb{C})$ имеют один и тот же запас сферических представлений (т. е. любое сферическое представление $\mathrm{GL}^p(\infty,\mathbb{C})$ при $1 < p < 2$ продолжается до представления группы $\mathrm{GL}^2(\infty)$).

б) При $0 < q \leqslant 1$ все группы $\mathrm{GL}^q(\infty,\mathbb{C})$ имеют один и тот же запас сферических представлений. При этом любое сферическое представление группы $\mathrm{GL}^q(\infty,\mathbb{C})$ имеет вид

$$\tilde\rho(g) = |\det(g)|^\alpha\, e^{in\arg\det(g)}\rho(g); \quad \alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z},$$

где ρ — представление группы $\mathrm{GL}^2(\infty,\mathbb{C})$.

в) Пусть $p > 2$. Тогда группа $\mathrm{GL}^p(\infty,\mathbb{C})$ вообще не имеет непрерывных унитарных представлений.

Замечание. Последнее утверждение не должно вызывать особого удивления: унитарная группа не столь велика, чтобы в нее можно было вложить все что угодно.

1.3. Группа $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Эта группа состоит из ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, представимых в виде $A = U(1+T)$, где U — унитарный оператор, а T — *оператор Гильберта—Шмидта* (т. е. $T \in \mathscr{L}_2$, подробнее см. Предварительные сведения, 4.5; о группе $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ см. главу IX).

Теорема 1.2. Любое сферическое представление группы $\mathrm{GL}^2(\infty,\mathbb{C})$ продолжается до представления группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Замечание. Группа $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ является одним из примеров (G, K)-пар Ольшанского (см. главу IX).

Мне кажется (хотя я понимаю, что это мнение можно оспаривать), что (G, K)-пары являются правильным бесконечномерным аналогом классических групп. Теоремы пп. 1.1—1.2 дают один из аргументов в пользу (G, K)-пар.

Опишем естественную (*шейловскую*) топологию на $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$; эта топология типична для операторных групп (см. [Shale (1962)]). Любой ограниченный обратимый оператор A в гильбертовом пространстве представим в виде $A = U_A T_A$, где U_A — унитарный оператор, а T_A самосопряжен (см. Предварительные сведения, 4.2). Если $A \in \big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, то $T_A - 1$ — оператор Гильберта—Шмидта. Последовательность операторов $A_n \in \big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ сходится к оператору A, если $U_{A_n} \to U_A$ в слабой операторной топологии (см. ниже п. 4.1), а $T_{A_n} - 1$ сходится к $T_A - 1$ в смысле естественной сходимости на пространстве операторов Гильберта—Шмидта.

Мы продолжим это обсуждение в § 1 главы IX. В главах VIII—X без каких-либо пояснений я ввожу топологии на различных группах, и далее эти топологии очень существенно используются. Я ни в коей степени не настаиваю на том, что эти топологии являются единственно разумными, но отмечу, что они являются итогом длительной работы (проводившейся многими людьми), которую я лишь в слабой степени смог отразить в этой книге. Безусловно, в будущем точка зрения на эти топологии может измениться.

1.4. Равномерная структура. Я не знаю работ по бесконечномерным группам, в которых равномерная структура играла бы сколь-нибудь существенную роль. Мы, однако, скажем о ней несколько слов.

Пусть G — топологическая группа. Тогда с ней связаны 3 равномерных структуры — левая, правая и двусторонняя (см. [Bourbaki (1942)]):

а) левая: последовательность g_i фундаментальна, если $g_j^{-1}g_i$ стремится к 1 при $i, j \to \infty$;

б) правая: последовательность g_i фундаментальна, если $g_i g_j^{-1} \to 1$ при $i, j \to \infty$;

в) двусторонняя: g_i фундаментальна, если $g_i g_j^{-1} \to 1$, $g_j^{-1} g_i \to 1$ при $i, j \to \infty$.

В качестве типичного примера мы приведем полную унитарную группу $\mathrm{U}(\infty)$, снабженную слабой топологией. Эта группа полна в двусторонней равномерной структуре. Ее пополнение в правой равномерной структуре состоит из операторов U, удовлетворяющих условию $U^*U = 1$ (эти операторы изометрично отображают гильбертово пространство H на некоторое подпространство K, вообще говоря, отличное от H). Пополнение по левой равномерной структуре состоит из операторов, удовлетворяющих условию $UU^* = 1$.

Задача. Проверьте эти высказывания.

§ 2. *Алгебры Ли*

Здесь встречаются три ситуации.

2.1. Бывает, что алгебра Ли играет действительно важную роль, как в случае алгебры Вирасоро и афинных алгебр. Этот случай в особых комментариях не нуждается. Правда, я должен заметить, что теоремы, доказанные для алгебр Ли, очень часто с формальной точки зрения не влекут соответствующих теорем для групп. С содержательной точки зрения, конечно, алгебры Ли и группы Ли — разные ипостаси при одной сущности, но на сегодняшний день теоремы для групп Ли и алгебр Ли часто приходится доказывать параллельно.

2.2. Бывают случаи, когда алгебры Ли просто отсутствуют. Например, бесконечная симметрическая группа по своему поведению является типичной бесконечномерной («*большой*» в терминологии А. М. Вершика) группой (см. главу VIII), но никакой алгебры Ли у нее нет.

2.3. Наконец, бывают случаи, когда алгебра Ли существует, но в пиквикском смысле слова. Типичный пример — группа $\mathrm{U}(\infty)$ всех унитарных операторов гильбертова пространства. Сначала возникает желание назвать алгеброй Ли этой группы алгебру всех ограниченных кососамосопряженных операторов. Но хорошо известно, что это плохо, потому что однопараметрические подгруппы в $\mathrm{U}(\infty)$ редко имеют ограниченные генераторы.

По теореме Стоуна любая однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{U}(\infty)$ имеет вид $\exp(itX)$, где X — самосопряженный, вообще говоря, неограниченный, оператор. Мы предпочитаем думать, что «алгеброй Ли» этой группы является множество $\mathfrak{g}$ всех, вообще говоря, неограниченных, операторов вида iX, где X самосопряжен. Для некоторых элементов $X, Y \in \mathfrak{g}$ определена их сумма $X + Y$ (вообще говоря, сумма операторов из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ не лежит и может даже иметь нулевую область определения). Точно так же, для некоторых пар $X, Y \in \mathfrak{g}$ определен их коммутатор $[X, Y] = XY - YX$.

Мы предпочитаем думать, что «алгеброй Ли» является именно это множество с частично определенными операциями, а не какая-нибудь алгебра, подходящая под формальное определение алгебры Ли. Дело в том, что здесь мы сталкиваемся с некоторой действительной трудностью, и она не исчезнет оттого, что мы захотим ее замаскировать.

§ 3. *Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского*

3.1. Мультипликативность Тома. Одной из самых ранних работ по бесконечномерным группам была работа Э. Тома́ [Thoma (1964)], посвященная описанию характеров бесконечной симметрической группы S_∞^{fin}. Группа S_∞^{fin} состоит из всех финитных подстановок множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ (биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ содержится в S_∞^{fin}, если $\sigma n = n$ для достаточно больших n). Что такое характер S_∞^{fin}, в данный момент нас не очень интересует (см. п. VIII.6.6). Мы ограничимся обсуждением одного наблюдения, связанного с этой работой.

Пусть Γ — множество классов сопряженных элементов в S_∞^{fin}. Эти классы, как и в обычной симметрической группе S_n (см. любой учебник алгебры), нумеруются набором длин независимых циклов, т. е. набором натуральных чисел $(n_1, n_2, \dots, n_s, 1, 1, \dots)$ (пусть для определенности все $n_i \neq 1$). Мы обозначим через $R[n_1, \dots, n_s]$ множество всех элементов S_∞^{fin} с длинами независимых циклов $(n_1, \dots, n_s, 1, 1, \dots)$. Пусть

$$g_1 \in R[n_1, \dots, n_s], \quad g_2 \in R[m_1, \dots, m_t].$$

Какому классу сопряженности принадлежит $g_1 g_2$? Понятно, что при разных $g_1 \in R[n_1, \dots, n_s]$, $g_2 \in R[m_1, \dots, m_t]$ ответы будут разными. Однако по небольшом размышлении ясно, что почти наверняка

$$g_1 g_2 \in R[n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_t].$$

Действительно, почти наверняка множество A всех i таких, что $g_1 i \neq i$, и множество B всех j таких, что $g_2 j \neq j$, не пересекаются. Конечно, смысл слов «почти наверняка» не слишком ясен.

Задача. Обозначим через Q_{ij} множество элементов $g \in S_\infty^{\mathrm{fin}}$ таких, что $gi = j$ (где $i, j \in \mathbb{N}$). Мы скажем, что подмножество $\Delta \in S_\infty^{\mathrm{fin}}$ имеет *нулевую емкость*, если Δ покрывается *конечным* числом множеств Q_{ij}. Пусть $g_1 \in R[n_1, \dots, n_t]$, $g_2 \in R[m_1, \dots, m_s]$. Покажите, что множество всех $h \in S_\infty^{\mathrm{fin}}$, для которых

$$h^{-1} g_1 h g_2 \notin R[n_1, \dots, n_t, m_1, \dots, m_s],$$

имеет нулевую емкость.

Задача* [Ольшанский (1980)]. Через $R[n_1, \dots, n_s]$ мы по-прежнему будем обозначать множество элементов в S_N с длинами циклов $R[n_1, \dots, n_s, 1, \dots, 1]$. Пусть A_N — число элементов S_N, лежащих в $R[n_1, \dots, n_s]$, а B_N — число элементов множества всех элементов S_N, лежащих в $R[m_1, \dots, m_t]$. Пусть C_N — число пар $(g_1, g_2) \in S_N$ таких, что $g_1 \in R[n_1, \dots, n_s]$, $g_2 \in R[m_1, \dots, m_t]$, $g_1 g_2 \in R[n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_t]$. Покажите, что

$$\lim_{N \to \infty} \frac{C_N}{A_N B_N} = 1.$$

Итак мы получили естественное умножение на множестве классов сопряженных элементов:

$$R[n_1,\ldots,n_s]\cdot R[m_1,\ldots,m_t]=R[n_1,\ldots,n_s,m_1,\ldots,m_t].$$

3.2. Алгебра Гекке. Пусть G — группа, а K_1 и K_2 — ее подгруппы. Напомним, что *двойными классами смежности* называется подмножество в G, состоящее из всех элементов вида k_1gk_2, где $g\in G$ фиксировано, элемент k_1 пробегает K_1, а k_2 пробегает K_2. Множество всех двойных классов смежности обозначается через $K_1\setminus G/K_2$.

Пусть теперь группа G конечна, а $K_1=K_2=K\subset G$ — некоторая подгруппа. Рассмотрим в пространстве F функций на G операцию *свертки*

$$(f_1*f_2)(g)=\sum_{h\in G}f_1(h)f_2(h^{-1}g)$$

Алгебра F с определенным таким образом умножением называется *групповой алгеброй*. Для любого представления ρ группы G и для любой функции $f\in F$ определен оператор

$$\rho(f)=\sum_{g\in G}f(g)\rho(g);$$

при этом, как легко видеть,

$$\rho(\alpha f)=\alpha\rho(f),\quad \rho(f_1+f_2)=\rho(f_1)+\rho(f_2),\quad \rho(f_1*f_2)=\rho(f_1)\rho(f_2),$$

где $\alpha\in\mathbb{C}$, т.е. $\rho(f)$ — представление алгебры F.

Обозначим через F_K множество функций f на G таких, что $f(k_1gk_2)=f(g)$ для любых $k_1,k_2\in K$, т.е. F_K — множество функций, постоянных на двойных классах смежности $K\setminus G/K$.

Задача. Покажите, что если $f_1,f_2\in F_K$, то $f_1*f_2\in F_K$.

Множество F_K с введенной таким образом операцией умножения мы будем называть *алгеброй Гекке.*

Пусть теперь ρ — унитарное представление группы G в пространстве H. Пусть H^K — множество K-инвариантных векторов в H, а P_K — проектор на H^K.

Задача. Покажите, что для любой $f\in F_K$ и любого вектора $v\in H^K$ выполнено $\rho(f)v\in H^K$.

Таким образом, мы получаем естественное представление алгебры F_K в пространстве H^K.

Опишем это же представление чуть-чуть по-иному. Пусть $\gamma\in K\setminus G/K$. Пусть $|\gamma|$ — число элементов в γ. Рассмотрим функцию $f_\gamma\in F_K$, равную $|\gamma|^{-1}$ на γ и равную нулю вне γ. Ясно, что функции f_γ образуют базис в F_K, в этом базисе

$$f_{\gamma_1}*f_{\gamma_2}=\sum_{\gamma_3}c^{\gamma_3}_{\gamma_1\gamma_2}f_{\gamma_3},\tag{3.1}$$

где $c^{\gamma_3}_{\gamma_1\gamma_2}$ — некоторые числа.

Пусть ρ — представление группы G. По каждому $\gamma\in K\setminus G/K$ мы определим оператор $\rho(\gamma)$ в H^K по формуле

$$\rho(\gamma)v:=P_K\rho(g)v,\tag{3.2}$$

где $g\in\gamma$.

Задача. Проверьте, что правая часть (3.2) не зависит от выбора $g\in\gamma$.

Задача. Покажите, что $\rho(\gamma)$ совпадает с ограничением оператора $\rho(f_\gamma)$ на H^K.

Если умножение (3.1) удается явно описать, алгебра Гекке становится мощным средством для изучения представлений группы G. Предпринятая Исмагиловым попытка применения подобной техники к бесконечномерным группам привела к неожиданным последствиям.

3.3. Работа Исмагилова [Исмагилов (1970)] посвящена группе $GL(n,F)$, где F — неархимедово нормированное поле, имеющее бесконечное поле вычетов (например, F может быть полем формальных лорановских рядов, т.е. рядов вида $\sum_{k=-N}^{\infty}a_kt^k$). Пусть K — подгруппа матриц с целыми коэффициентами в $GL(n,F)$. При попытке описания алгебры Гекке F_K оказалось, что на множестве $K\setminus GL(n,F)/K$ существует естественное умножение, чем-то похожее на умножение из п. 3.1.

Сама по себе группа $GL(n,F)$ выглядит довольно странно, и после работ Исмагилова (1967–1970) ее представления в литературе (насколько я знаю) не обсуждались.

Тем не менее, у статьи нашелся один читатель, а именно — Ольшанский использовал ее в работе [Ольшанский (1980)], посвященной группе $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ автоморфизмов дерева, у которого из каждой вершины выходит счетное число ребер. Сама по себе эта группа выглядит чудовищным порождением человеческого разума и тоже более в теории представлений не обсуждалась, однако шлейф этой группы является вполне безобидной категорией, ничем не напоминающей своей ужасной прародительницы (см. VIII.6.8; об этой группе см. также [Aldous (1985)]), а упомянутые работы Исмагилова и Ольшанского по сути посвящены «раскопкам» этого шлейфа.

Около 1979 г. Ольшанский применил развитую при исследовании $GL_n(F)$ и $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ технику к более естественным группам. Сейчас мы приведем пример использования этой техники (мы следуем [Olshanskii (1985)] с небольшими эстетическими усовершенствованиями из [Neretin (1991)]), подробное изложение см. в главе VIII.

3.4. Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского для бесконечной симметрической группы (подробнее см. VIII.1). Обозначим через S_∞ группу всех перестановок множества $\mathbb{N}$. Через S^n_∞ мы обозначим подгруппу в S_∞, состоящую из всех $g\in S_\infty$ таких, что $gi=i$ для всех $i\leqslant n$. Введем в S_∞ топологию, положив, что подгруппы S^n_∞ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы.

Рассмотрим двойные классы смежности $S^n_\infty\setminus S_\infty/S^m_\infty$.

Задача. Докажите, что $g_1,g_2\in S_\infty$ лежат в одном классе смежности $S^n_\infty\setminus S_\infty/S^m_\infty$ тогда и только тогда, когда условие

$$g_1i=j\quad \text{при } j\leqslant n,\ i\leqslant m$$

равносильно условию

$$g_2i=j\quad \text{при } j\leqslant n,\ i\leqslant m.$$

В силу этой задачи двойные классы смежности $\gamma\in S^n_\infty\setminus S_\infty/S^m_\infty$ нумеруются частично определенными инъективными отображениями φ_γ множества $1,2,\ldots,m$ в $1,2,\ldots,n$.

Пусть $\gamma_1 \in S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$, $\gamma_2 \in S_\infty^k \setminus S_\infty / S_\infty^n$. Мы утверждаем, что если $g_1 \in \gamma_1$, а $g_2 \in \gamma_2$, то произведение $g_2 g_1$ «почти наверняка» попадает в один и тот же двойной класс смежности $S_\infty^k \setminus S_\infty / S_\infty^m$. Этот двойной класс смежности мы будем называть произведением γ_2 и γ_1.

Задача. Сформулируйте и докажите аналоги утверждений, сформулированных в задачах п. 3.i.

Итак, мы получили для любых m, n, k естественное умножение

$$S_\infty^k \setminus S_\infty / S_\infty^n \times S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m \to S_\infty^k \setminus S_\infty / S_\infty^m.$$

На языке частично определенных отображений это — естественное умножение частично определенных отображений (т. е. $\varphi_{\gamma_2\gamma_1} i = j$ тогда и только тогда, когда существует $l \in 1, \dots, n$ такое, что $\varphi_{\gamma_1} i = l$, $\varphi_{\gamma_2} l = j$).

Пусть теперь ρ — непрерывное унитарное представление группы S_∞ в гильбертовом пространстве H. Обозначим через H_n пространство векторов, инвариантных относительно S_∞^n, а через P_n — проектор на H_n.

Теорема 3.1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ плотно в H.

Далее, для любого $\gamma \in S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$ определим оператор $\rho(\gamma) : H_m \to H_n$ по формуле

$$\rho(\gamma)v = P_n \rho(g) v,$$

где $v \in H_m$, а $g \in \gamma$.

Замечание. См. формулу (3.2).

Теорема 3.2. Пусть $\gamma_1 \in S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$, $\gamma_2 \in S_\infty^k \setminus S_\infty / S_\infty^n$. Тогда

$$\rho(\gamma_2 \gamma_1) = \rho(\gamma_2)\rho(\gamma_1).$$

Теперь определим категорию **PB**, объектами которой являются конечные множества $1, 2, \dots, n$, а морфизмами — частично определенные инъективные отображения. Только что мы изложили конструкцию, которая каждому унитарному представлению группы S_∞ ставит в соответствие представление категории **PB**.

Оказывается, что подобные конструкции применимы к очень многим бесконечномерным группам (но есть и много исключений: группа диффеоморфизмов окружности, группы, связанные с аффинными алгебрами и др.), см. главы VIII–X книги.

3.5. Еще об умножении двойных классов смежности. Группу S_∞ можно рассматривать как группу матриц размера $\infty \times \infty$, состоящих из нулей и единиц, причем в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна единица. Ее подгруппа S_∞^n состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} E_n & \\ & g \end{pmatrix}$, где g — матрица размера $n \times n$, состоящая из нулей и единиц, а E_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Пусть $\gamma_1 \in S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$, $\gamma_2 \in S_\infty^k \setminus S_\infty / S_\infty^n$. Пусть $g_1 \in \gamma_1$, а $g_2 \in \gamma_2$. Выберем элемент $h \in S_\infty^n$ «общего положения» и посмотрим, в каком двойном классе смежности лежит произведение $g_2 h g_1$. Для этого сначала необходимо понять, что такое элемент «общего положения».

Пусть

$$h = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & q_{11} & q_{12} & \dots \\ & & & q_{21} & q_{22} & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}q\\ q\\ \dots\end{matrix}}\right\} \infty \end{matrix}$$

Среди элементов $q_{11}, q_{12}, q_{13}, \dots$ есть ровно одна единица, а все остальные элементы равны 0. Совершенно невероятно, чтобы единственная единица стояла на первом месте. Поэтому можно «с уверенностью» сказать, что $q_{11} = 0$ для «общей» матрицы $h \in S_\infty^n$. Конечно, по тем же причинам и все $q_{ij} = 0$. Поэтому «общий» элемент $h \in S_\infty^n$ равен $h = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$. Конечно же, такого элемента h в группе S_∞^n нет. Рассмотрим, однако, произвольную последовательность $h_j \in S_\infty^n$ вида

$$h_j = \begin{pmatrix} E_n & & \\ & 0 & * \\ & * & * \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}j \\ \}\infty \end{matrix} \tag{3.3}$$

Эта последовательность в каком-то смысле слова сходится к $h = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

Задача. Рассмотрим двойной класс смежности $\delta_j \in S_\infty^k \setminus S_\infty / S_\infty^m$, содержащий $g_2 h_j g_1$. Покажите, что последовательность δ_j с некоторого места стабилизируется, т. е., начиная с некоторого места, δ_j равно одному и тому же элементу γ_3.

Построенный в задаче элемент γ_3 разумно объявить произведением $\gamma_3 = \gamma_2\gamma_1$. Конечно же, оно совпадает с произведением, построенным ранее.

Замечание. Безусловно, это рассуждение является повторением рассуждения с «емкостью», только на другом языке. Однако, в отличие от малосодержательного понятия «емкости», последнее рассуждение, как мы увидим в главах VIII–X, является весьма общим.

§ 4. *Предельные элементы групп*

С предельными элементами групп мы успели встретиться в главе I уже трижды (где?), но прежде, чем перейти к их непосредственному обсуждению, мы обсудим слабую операторную топологию.

4.1. Слабая сходимость. Последовательность ограниченных операторов A_n в гильбертовом пространстве H называется *слабо сходящейся* к оператору A, если для любых векторов $v, w \in H$ выполнено

$$\langle A_n v, w \rangle \to \langle Av, w \rangle.$$

Следующие утверждения очень просты.

Лемма 4.1.

а) Если $A_n \to A$ слабо, то $\|A\| \leqslant \liminf \|A_n\|$.

б) Если $A_n \to A$ слабо, то $A_n^* \to A_n$ слабо.

в) Если $A_n \to A$ слабо, B — ограниченный оператор, то $A_n B \to AB$, $BA_n \to BA$ слабо.

(Утверждение а) следует из принципа равномерной ограниченности, остальное очевидно.)

Критерий слабой сходимости (см. [Reed, Simon (1972)] § VI.1). Пусть L — тотальное множество в H (т. е. конечные линейные комбинации элементов из L плотны в H). Тогда следующие условия равносильны:

а) $A_n \to A$ слабо;

б) числа $\|A_n\|$ равномерно ограничены, и для любых $v, w \in L$ выполнено $\langle A_n v, w\rangle \to \langle Av, w\rangle$.

Применяя этот критерий к пространству ℓ_2 и к множеству L, состоящему из базисных векторов, мы получаем

Следствие 4.2. Пусть A_n — последовательность ограниченных операторов в ℓ_2 (т. е. последовательность матриц). Тогда следующие условия равносильны:

а) $A_n \to A$ слабо;

б) $\|A_n\|$ равномерно ограничены, и для любых i, j выполнено $a_{ij}^{(n)} \to a_{ij}$ (где через $a_{ij}^{(n)}$, a_{ij} обозначены матричные элементы матриц A_n и A соответственно).

Задача. Покажите, что если $A_n \to A$, $B_n \to B$ слабо, то не обязательно $A_nB_n \to AB$ слабо.

Пусть $\mathscr{B}$ — множество операторов в H с нормой $\leqslant 1$.

Теорема 4.3. Множество $\mathscr{B}$ компактно относительно слабой сходимости.

Доказательство достаточно провести в пространстве ℓ_2. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность в $\mathscr{B}$, пусть $a_{ij}^{(n)}$ — матричные элементы A_n. Так как $\|A_n\| \leqslant 1$, мы имеем $|a_{ij}^{(n)}| \leqslant 1$. Стандартное диагональное рассуждение (см. [Reed, Simon (1972)], § I.5) показывает, что существует подпоследовательность A_{n_k} такая, что для любых i, j последовательность $a_{ij}^{(n_k)}$ сходится при $k \to \infty$. В силу критерия слабой сходимости последовательность A_{n_k} сходится слабо. ■

Задача. Покажите, что слабая сходимость в $\mathscr{B}$ метризуема.

Поэтому мы будем всегда говорить лишь о «сходящихся последовательностях» и никогда — о «сходящихся направленностях».

Задача. Покажите, что в ℓ_2 сфера $\|x\| = 1$ плотна в шаре $\|x\| \leqslant 1$ относительно слабой сходимости в гильбертовом пространстве (последовательность x_n *сходится слабо*, если для любого $y \in \ell_2$ последовательность $\langle x_n, y\rangle$ сходится к $\langle x, y\rangle$).

Теорема 4.4. Унитарная группа слабо плотна в $\mathscr{B}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{B}$. Пусть a_{ij} — ее матричные элементы. Пусть сначала $a_{ij} = 0$ при всех $i > n$ и при всех $j > n$, т. е. $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где X имеет размеры $n \times n$. Пусть J_k — матрица размера $k \times k$ с единицами по побочной диагонали, а остальные ее матричные элементы — нули. Рассмотрим последовательность блочных унитарных матриц

$$U_k = \begin{pmatrix} X & 0 & -(1 - XX^*)^{1/2} & 0 \\ 0 & J_k & 0 & 0 \\ (1 - X^*X)^{1/2} & 0 & X^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

размера $(n + k + n + \infty) \times (n + k + n + \infty)$. По критерию слабой сходимости $U_k \to A$ слабо.

Далее, пусть $A \in \mathscr{B}$ произвольна, пусть A_n — матрица с матричными элементами $a_{ij}^{(n)}$ такими, что $a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$ при $i \leqslant n$, $j \leqslant n$, и $a_{ij}^{(n)} = 0$ в противном случае. Тогда $A_n \to A$ слабо (см. следствие 4.2). ■

4.2. Пусть G — «большая» (бесконечномерная) группа, и мы построили некоторое унитарное представление ρ группы G. После этого мы должны задать себе вопрос: «Представление какой группы мы построили?» Мы уже столкнулись с этим в п. 1.3, когда узнали, что сферические представления групп $\mathrm{GL}^2(\infty, \mathbb{C})$ и $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ — это одно и то же.

Первый раз подобный вопрос, а именно, вопрос о естественной области определения «представления Вейля» и спинорного представления, возник довольно давно (точнее — в 50-е годы, см. книгу [Friedrichs (1953)]). Хотелось бы уметь формулировать его четко. Следующая формализация этого вопроса не идеальна, но разумна: «Описать слабое замыкание множества $\rho(\mathrm{G})$ в полной унитарной группе».

Это слабое замыкание вкладывается в объект, описанный в следующем пункте.

4.3. Пусть G — большая группа, а $\overline{\mathrm{G}}$ — ее пополнение по правой равномерной структуре (подчеркнем, что $\overline{\mathrm{G}}$, вообще говоря, является полугруппой, а не группой). Пусть ρ — унитарное представление G в пространстве H, $\mathrm{U}(H)$ — унитарная группа пространства H, а $\overline{\mathrm{U}}(H)$ — ее пополнение по правой равномерной структуре (см. п. 1.4). Представление $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{U}(H)$ является равномерно непрерывной функцией, а поэтому продолжается до гомоморфизма $\overline{\rho} : \overline{\mathrm{G}} \to \overline{\mathrm{U}}(H)$.

На самом деле полугруппа $\overline{\mathrm{G}}$ является ничтожной частью настоящей мантии (полугрупповой оболочки) группы G.

4.4. Двойные классы смежности как бесконечно удаленные элементы группы. Вернемся к обозначениям п. 3.4. Безусловно, рассуждения п. 3.5 вызывают желание добавить к группе S_∞ элементы $h_n = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$. При этом естественно думать, что последовательность (3.3) сходится к h_n, т. е. h_n является «предельным элементом» группы S_∞. Вместе с элементами h_n придется добавить к S_∞ и произведения $h_n g h_m$, т. е. возможные матрицы из нулей и единиц вида

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} q & \\ & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}n \\ \}\infty \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\hphantom{q}}_{m} & \underbrace{\hphantom{0}}_{\infty} \end{matrix} & \end{array}$$

а множество таких матриц находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\mathrm{S}_\infty^n \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}_\infty^m$.

Итак, вроде бы получается, что двойные классы смежности $\gamma \in \mathrm{S}_\infty^n \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}_\infty^m$ являются «предельными элементами» группы S_∞.

В связи с этим встает вопрос: что такое вообще «предельные элементы» групп и как их искать?

4.5. Вопрос Ольшанского о слабом замыкании. Пусть G — группа, а ρ — ее неприводимое унитарное представление. Требуется описать слабое замыкание $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ множества $\rho(\mathrm{G})$ в множестве всех операторов.

Пусть $\mathscr{B}$ — по-прежнему полугруппа всех операторов с нормой $\leqslant 1$.

Лемма 4.5. $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ — замкнутая компактная подполугруппа в $\mathscr{B}$.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь то, что $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ — полугруппа. Пусть $\rho(g_i) \to A$, $\rho(h_i) \to B$ слабо. Не следует думать, что $\rho(g_i h_i) \to AB$, здесь нужно более аккуратное рассуждение. При фиксированном i мы имеем $\rho(h_i)\rho(h_j) \to \rho(h_i)B$ слабо. Значит, $\rho(h_i)B \in \Gamma(\mathrm{G}, \rho)$. Но $\rho(h_i)B \to AB$ слабо. Значит, $AB \in \Gamma(\mathrm{G}, \rho)$. ■

Итак, $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ — некоторая компактификация группы G. Обсудим сначала случай, когда G — группа Ли.

Теорема 4.6 ([Howe, Moore (1979)], [Ruppert (1984)]).

а) Пусть G — полупростая группа Ли с конечным центром. Тогда множество $\Gamma(\mathrm{G}, \rho) \setminus \rho(\mathrm{G})$ состоит из нулевого оператора (т. е. $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ — одноточечная компактификация группы G).

б) Пусть G — полупростая группа Ли с бесконечным центром A, пусть ρ — ее точное представление (т. е. $\rho(g) \neq \rho(h)$ при $g \neq h$). Тогда $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ состоит из нуля и всех операторов вида $\lambda\rho(g)$, где $g \in \mathrm{G}$, а λ — комплексное число, по модулю равное 1.

Итак, мы видим, что в случае конечномерных групп ничего интересного не происходит, полугруппа $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ почти не отличается от G. Но ясно, что «большую» (бесконечномерную) группу так просто не компактифицируешь!

Вообще, компактификация топологического пространства — операция опасная, здесь легко наткнуться на объекты совершенно необозримые. Однако оказывается, что полугруппы $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ никогда не являются патологическими объектами. Сейчас мы не можем привести действительно красивых примеров, но можем показать, что от полугруппы $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ можно ожидать любых неожиданностей.

Пример. Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{Diff}$ — группа диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Пусть Diff действует в L^2 на окружности по формуле

$$\rho(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))q'(\varphi)^{1/2} \tag{4.1}$$

Тогда полугруппа $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ содержит все операторы вида

$$Xf(\varphi) = A(\varphi)f(\varphi), \tag{4.2}$$

где $A(\varphi)$ — измеримая функция на окружности, такая, что $0 \leqslant A(\varphi) \leqslant 1$.

Задача. Пусть q_j, q такие же, как на рис. 1. Покажите, что $\rho(q_j) \to \rho(q)$, где ρ задано формулой (4.1).

Задача. Пусть q_j — такие же, как на рис. 2, а угол α не зависит от j. Куда сходится $\rho(q_j)$?

Задача. Покажите, что операторы (4.2) действительно содержатся в $\Gamma(\mathrm{Diff}, \rho)$.

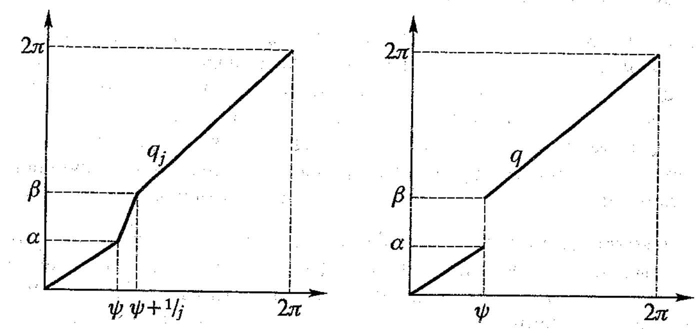


Рис. 1

Задача*. Опишите $\Gamma(\mathrm{Diff}, \rho)$.

Задача. Пусть H — группа, а π — унитарное представление группы H в пространстве V. Пусть $\widetilde{\mathrm{H}}$ — группа измеримых функций на $[0, 1]$ со значениями в H. Пусть $\widetilde{\mathrm{H}}$ действует в $L^2([0, 1], V)$ по формуле

$$\tilde{\pi}(A)f(x) = \pi(A(x))f(x). \tag{4.3}$$

а) Пусть $\mathbb{Z}_2$ — группа из двух элементов, а π — ее точное одномерное представление. Опишите $\Gamma(\widetilde{\mathbb{Z}}_2, \tilde{\pi})$.

б) Пусть $\mathbb{Z}_3$ — группа из трех элементов, а π — ее точное одномерное представление. Опишите $\Gamma(\widetilde{\mathbb{Z}}_3, \tilde{\pi})$.

в) Опишите $\Gamma(\widetilde{\mathrm{G}}, \tilde{\pi})$ в общем случае.

Указание. В вопросе а) полугруппа $\Gamma(\mathbb{Z}_2, \pi)$ состоит из всех вещественнозначных функций по модулю $\leqslant 1$.

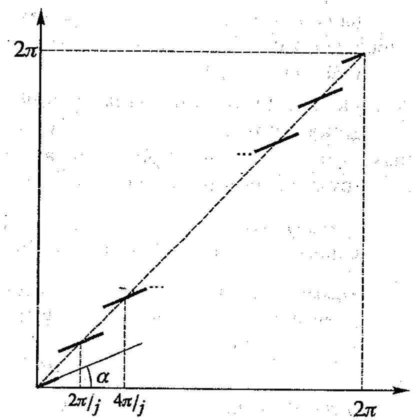


Рис. 2

4.6. Как связаны полугруппы $\Gamma(\mathrm{G}, \rho)$ при разных ρ? Здесь возможен хороший случай и сложный случай. Начнем с хорошего.

Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{S}_\infty$. Ее простейшее представление π реализуется в ℓ_2, группа S_∞ действует перестановками базисных элементов. Иными словами, S_∞ реализуется как группа бесконечных матриц, состоящих из 0 и 1, причем в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна единица. Полугруппа $\Gamma = \Gamma(\mathrm{S}_\infty, \pi)$ — это полугруппа матриц, состоящих из 0 и 1, у которых в каждой строке и каждом столбце стоит не более одной единицы.

Теорема 4.7 (см. теорему VIII.1.4). Любое унитарное представление ρ группы S_∞ продолжается до представления $\tilde{\rho}$ полугруппы Γ, причем $\Gamma(\mathrm{S}_\infty, \rho) = \tilde{\rho}(\Gamma)$.

Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{U}(\infty)$ — полная унитарная группа, снабженная слабой топологией, а $\mathscr{B}$ — полугруппа всех сжатий (т. е. операторов с нормой 1).

Теорема 4.8 (см. § VIII.3). Любое унитарное представление ρ группы $\mathrm{U}(\infty)$ продолжается до представления $\tilde{\rho}$ полугруппы $\mathscr{B}$, причем $\Gamma(\mathrm{U}(\infty), \rho) = \rho(\mathscr{B})$.

Так бывает часто, но так бывает не всегда. Бывает, что полугруппы $\Gamma(G,\rho)$ для разных ρ различны. Мы склонны верить, что эти полугруппы связаны между собой примерно следующим образом. Существует некоторая полугруппа Γ такая, что G плотна в Γ, любое представление ρ группы G продолжается до представления $\bar\rho$ полугруппы Γ, и множество $\bar\rho(\Gamma)$ «чуть-чуть меньше», чем $\Gamma(G,\rho)$.

Здесь возникает соблазн применить универсализацию из следующего пункта, эта идея разумна, но буквальное следование ей иногда опасно.

4.7. Попытка универсализации (см. [Olshanskii (1991)]). Пусть ρ_α — некоторый набор унитарных представлений группы G (α пробегает некоторое множество A, например, множество $\widehat{G}$ всех унитарных представлений группы G). Пусть H_α — пространство представления ρ_α, а $\mathscr{B}(H_\alpha)$ — полугруппа сжатий в H_α. Пусть $\mathscr{B}_A$ — произведение полугрупп $\mathscr{B}(H_\alpha)$; ясно, что $\mathscr{B}_A$ — компактная полугруппа. Рассмотрим естественное «диагональное» отображение $R : G \to \mathscr{B}_A$ (группа G вкладывается посредством отображения ρ в каждую из полугрупп $\mathscr{B}(H_\alpha)$, а значит, определено и отображение G в их произведение).

Обозначим через $\Gamma(G,A)$ замыкание G в $\mathscr{B}_A$; легко видеть, что $\Gamma(G,A)$ — компактная полугруппа. Полугруппу $\Gamma(G,\widehat{G})$ мы обозначим через $\Gamma(G)$.

Доказательство компактности континуального прямого произведения компактных топологических пространств основано на аксиоме выбора, поэтому наша конструкция иногда приводит к нежелательным последствиям.

Пример. Пусть G — локально компактная абелева группа. Тогда $\Gamma(G)$ — это в точности боровская компактификация G [Dixmier (1969), § 16].

Пример. Пусть G — простая группа Ли с бесконечным центром Z (например, G — универсальная накрывающая группы $SL(2,\mathbb{R})$). Рассмотрим диагональное вложение $Z \to G \times \Gamma(Z)$ (т. е. $z \mapsto z \times z$). Тогда $\Gamma(G)$ состоит из нуля и факторгруппы $(G\times\Gamma(Z))\,/\,Z$ (см. [Howe, Moore (1979)]).

Задача*. Опишите полугруппу $\Gamma(Z)$ в случае, когда G — группа Гейзенберга (ответ содержится в [Ruppert (1984)]).

В перечисленных примерах рассматривать в качестве основного объекта полугруппу $\Gamma(G)$ вместо G, мягко говоря, неразумно. Бесконечномерный пример, приводящий к патологии, приведен в следующей задаче.

Задача*. Постройте универсальную полугруппу для представлений $\tilde\pi$ группы $\widetilde{\mathbb{R}}$ (см. (4.3)), где π — пробегает все одномерные унитарные представления аддитивной группы $\mathbb{R}$.

§ 5. *Голоморфные продолжения*

В сущности, эта глава посвящена предмету довольно скучному — как, зная операторнозначную функцию ρ, найти ее истинную область определения. Один подобный способ, по крайней мере, для числовых функций, хорошо известен — голоморфное продолжение.

5.1. Пусть G — вещественная группа Ли, $G_{\mathbb{C}}$ — ее комплексная оболочка (см., например, [Желобенко (1970)]), а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Пусть ρ — унитарное представление G. Как любая уважающая себя функция, операторнозначная функция ρ является аналитической, и, естественно, встает вопрос о продолжении ρ в

комплексную область. Если ρ — конечномерно, то, как хорошо известно, ρ продолжается до голоморфной функции на группе $G_{\mathbb{C}}$. На этом основан знаменитый унитарный трюк Германа Вейля (см., например, [Желобенко (1970)] или ниже § III.1).

В случае, когда ρ бесконечномерно, положение резко меняется. Элементы из малой окрестности единицы группы G записываются в виде $g = \exp(tX)$, где $X \in \mathfrak{g}$, а $t \in \mathbb{R}$. Элементы из малой окрестности единицы группы $G_{\mathbb{C}}$ записываются в виде $g = \exp(tX)\exp(isY)$, где $X, Y \in \mathfrak{g}$, а $t, s \in \mathbb{R}$. Голоморфное продолжение представления ρ должно записываться в виде

$$\begin{aligned}\rho(g) &= \rho(\exp(tX)\exp(isY)) = \\ &= \rho(\exp(tX))\rho(\exp(isY)) = \\ &= \exp(t\rho(X))\exp(is\rho(Y)),\end{aligned} \tag{5.1}$$

представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы обозначаем той же буквой ρ, что и соответствующее представление группы Ли. Операторы $i\rho(X)$ и $i\rho(Y)$ самосопряжены и, вообще говоря, не ограничены. Поэтому первый сомножитель — $\exp(-it(i\rho(X)))$ — это обычный унитарный оператор. Но что такое экспонента от неограниченного самосопряженного оператора $is\rho(Y)$ и произведение (5.1), совершенно непонятно.

Здесь возможны 3 случая, которые мы обсудим на примерах. Первый из них наиболее типичен.

5.2. Первый случай. Пусть группа $SL(2,\mathbb{R})$ реализована как группа матриц вида $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, причем $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$. Пусть эта группа действует в L^2 на окружности $|z|=1$ (где $z\in\mathbb{C}$) унитарными преобразованиями

$$\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} f(z) = f\Bigl(\frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\Bigr)\,\bigl|\bar\beta z+\bar\alpha\bigr|^{-1} \tag{5.2}$$

Группа $SL(2,\mathbb{C})$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, где $ad-bc=1$. Формальное аналитическое продолжение формулы (5.2) дает выражение

$$\rho\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} f(z) = f\Bigl(\frac{az+b}{cz+d}\Bigr)(cz+d)^{-1/2}\,(b\bar z+a)^{-1/2} \tag{5.3}$$

Формула производит впечатление совершенно бессмысленной, потому что функция f определена лишь на окружности $|z|=1$, а точка $\frac{az+b}{cz+d}$ на окружности не лежит. Следующий пример, однако, покажет, что в подобных оценках следует быть более осторожным. Формуле же (5.3) можно придать смысл, если матрица $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ лежит в малой окрестности группы $SL(2,\mathbb{R})$. Тогда формула (5.3) задает неограниченный оператор в L^2, область определения которого содержит функции f, голоморфно продолжимые в кольцо $(1+\varepsilon)^{-1}<|z|<1+\varepsilon$. Ничего большего здесь сделать нельзя.

5.3. Второй случай. Рассмотрим группу Гейзенберга, т. е. группу матриц вида

$$A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & a & c\\ & 1 & b\\ & & 1\end{pmatrix}$$

Эта группа действует в $L^2(\mathbb{R})$ по формуле

$$T(A(a,b,c))f(x) = f(x+a)e^{i(bx+c)} \tag{5.4}$$

Пусть H — пространство целых функций (т. е. функций, голоморфных на $\mathbb{C}$), имеющих не более чем экспоненциальный рост. Ясно, что формула (5.4) задает корректно определенный оператор в H при любых $a, b, c \in \mathbb{C}$.

В чем же все-таки разница между первым и вторым примером? Напомним, что вектор v называется *аналитическим* ([Nelson (1959)]; [Кириллов (1972)], § 10) для унитарного представления группы Ли ρ, если для любого X из алгебры Ли существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\exp(tX)v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(X^k v) \tag{5.5}$$

при $|t| < \varepsilon$. (В обоих примерах, рассмотренных выше, аналитические векторы в L^2 — это вещественно-аналитические функции.) По известной теореме Нельсона для любого неприводимого унитарного представления группы Ли множество аналитических векторов всюду плотно. Определим *целый вектор* v [Goodman (1969)] как вектор, для которого ряд (5.5) сходится при всех $t \in \mathbb{C}$. Во втором примере пространство H целых векторов плотно в $L^2(\mathbb{R})$, и в нем-то и действует группа $G_{\mathbb{C}}$. В первом же примере целые векторы отсутствуют.

Пример с группой Гейзенберга обобщается на любые нильпотентные группы Ли ([Литвинов (1968), (1972)]; [Goodman (1969)]). Нам нечто подобное встретится (неявно) в главе IV, когда мы будем работать со спинорным представлением бесконечномерной комплексной ортогональной группы.

5.4. Третий случай (см. [Граев (1958)]), самый редкий и самый интересный для нас. Пусть H_n — пространство голоморфных функций, в круге $|z| < 1$ со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_{|z|<1} f(z)\overline{g(z)}\left(1-|z|^2\right)^{n-2} dz\, d\bar{z},$$

где $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ действует в H_n по формуле

$$T_n\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} f(z) = f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\right)\left(\bar\beta z+\bar\alpha\right)^{-n} \tag{5.6}$$

Группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ действует на сфере Римана (т. е. на пополненной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$) дробно-линейными преобразованиями $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Ее подгруппа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из преобразований, взаимно однозначно отображающих круг $D : |z| < 1$ на себя. Пусть $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ — подполугруппа, состоящая из преобразований, отображающих круг D в себя. Легко видеть, что представления T_n группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ продолжаются до голоморфных представлений полугруппы Γ (а именно, продолжение по-прежнему задается той же формулой (5.6)):

$$T_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-n}$$

Задача. Докажите, что операторы $T_n(g)$, где $g \in \Gamma$, ограничены.

Задача. Почему доводы против ограниченности из п. 5.1 здесь не действуют?

Указание. Генератор R группы вращений окружности в представлении T_n действует по формуле $i\left(z\frac{\partial}{\partial z} + n\right)$. Какой у него спектр? При каких $s \in \mathbb{C}$ оператор $\exp(sR)$ ограничен?

5.5. Еще раз предельные элементы. На последнем примере можно заметить еще одно явление природы. Пусть $\overline{\Gamma}$ — полугруппа отображений круга D в себя, состоящая из полугруппы Γ и отображений, переводящих весь круг D в точку. Представления T_n полугруппы Γ продолжаются до непрерывных *проективных* представлений полугруппы $\overline{\Gamma}$. А именно, пусть q_u отображает D в точку $u \in D$. Тогда

$$T_n(q_u)f(z) = f(u).$$

Это явление, столь ничтожное в случае $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, оказывается, однако, нетривиальным в бóльших размерностях (кстати, как описать q_u в терминах матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?).

Глава II

Спинорное представление

В главе разбирается одна из основных конструкций книги — спинорное представление ортогональной категории. В полной общности спинорное представление изучается в главе IV, здесь же рассматривается лишь его «конечномерная часть».

§ 1. Анализ по внешней алгебре

1.1. Грассманова алгебра. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — набор формальных антикоммутирующих переменных, т. е. переменных, удовлетворяющих соотношениям

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$$

для всех i, j. В частности, при $i = j$ мы получаем $\xi_i^2 = 0$. *Грассманова алгебра* Λ_n — это алгебра формальных ассоциативных многочленов с комплексными коэффициентами от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Элементы $f(\xi) := f(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Lambda_n$ мы будем называть *функциями*, зависящими от антикоммутирующих переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Легко видеть, что одночлены вида $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, образуют в Λ_n базис. В частности, размерность алгебры Λ_n равна 2^n.

Через Λ_n^k мы обозначим пространство многочленов в Λ_n степени k. Его размерность равна $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. В частности, $\dim \Lambda_n^0 = \dim \Lambda_n^n = 1$. Пространство Λ_n^0 состоит из констант (из одночленов степени 0). Одночлен $f(\xi) = 1$ мы будем называть *вакуумным вектором*. Пространство Λ_n^n состоит из одночленов вида $c\xi_1\xi_2 \dots \xi_n$, где $c \in \mathbb{C}$.

Если $f \in \Lambda_n^\alpha$, $g \in \Lambda_n^\beta$, то, как легко видеть,

$$fg = (-1)^{\alpha\beta} gf.$$

Задача. Покажите, что для любого $f \in \Lambda$ выполнено $\xi_j f(\xi) = f(-\xi)\xi_j$.

Элементы f подпространства $\bigoplus_j \Lambda_n^{2j}$ мы будем называть *четными функциями* ($f(\xi) = f(-\xi)$), а элементы из $\bigoplus_j \Lambda_n^{2j+1}$ — *нечетными функциями* ($f(\xi) = -f(-\xi)$).

Задача. Пусть функция f четна. Тогда для любой функции g выполнено равенство $fg = gf$.

Пусть функция f нечетна. Тогда для любой функции g выполнено равенство $f(\xi)g(\xi) = g(-\xi)f(\xi)$.

Пример. Пусть ξ_j, η_j — антикоммутирующие переменные. Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 \dots \xi_n \eta_n \dots \eta_1 &= \xi_1 \dots \xi_{n-1}(\xi_n\eta_n)\eta_{n-1} \dots \eta_1 = \\ &= \xi_1 \dots \xi_{n-1}\eta_{n-1} \dots \eta_1(\xi_n\eta_n) = \\ &= (\xi_1\eta_1) \dots (\xi_n\eta_n); \end{aligned} \tag{1.1}$$

порядок сомножителей в последнем произведении не существенен.

1.2. Экспонента. Для любой *четной* функции f мы определим функцию $\exp(f)$ при помощи обычной формулы:

$$\exp(f) = 1 + f + \frac{f^2}{2!} + \frac{f^3}{3!} + \dots$$

Задача. Докажите, что

$$\exp(f + g) = \exp(f)\exp(g).$$

В частности, если f — одночлен степени > 0, то $f^2 = 0$, а значит,

$$\exp(f) = 1 + f.$$

Если $f = \sum g_i$, где g_i — попарно различные одночлены положительной четной степени, то

$$\exp(f) = \exp\left(\sum g_i\right) = \prod(1 + g_i). \tag{1.2}$$

1.3. Замены переменной. Пусть Λ_n — грассманова алгебра функций, зависящих от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, а Λ_m — грассманова алгебра функций, зависящих от переменных $\eta_1, \dots, \eta_m$. Пусть A — матрица размера $m \times n$. Определим оператор линейной замены переменной $\Lambda_m \to \Lambda_n$, переводящий функцию $f(\eta)$ в

$$f(A\xi) = f(a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n, \dots, a_{m1}\xi_1 + \dots + a_{mn}\xi_n). \tag{1.3}$$

Задача. Докажите, что любой элемент из Λ_n^2 с помощью линейной замены переменной приводится к виду $\xi_1\xi_2 + \dots + \xi_{2k-1}\xi_{2k}$.

Задача. Докажите, что любой ненулевой элемент $f \in \Lambda_n^{n-1}$ приводится с помощью линейной замены переменной к виду $\xi_1\xi_2 \dots \xi_{n-1}$.

1.4. Функториальное определение. Пусть H — комплексное n-мерное линейное пространство. Тогда *внешняя алгебра* $\Lambda(H)$ — это ассоциативная алгебра с образующими a_h, где $h \in H$, и соотношениями

$$a_{\alpha h + \beta h'} = \alpha a_h + \beta a_{h'}, \qquad a_h \wedge a_{h'} = -a_{h'} \wedge a_h,$$

где $h, h' \in H$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; умножение во внешней алгебре принято обозначать знаком $\wedge$. Очевидно, такой набор образующих является избыточным, и алгебра $\Lambda(H)$ порождена образующими a_{e_j}, где e_j — некоторый базис в H. Обозначая a_{e_i} через ξ_i, мы получаем грассманову алгебру Λ_n. Таким образом, фиксирование базиса в H приводит к отождествлению $\Lambda(H)$ и Λ_n.

Подпространство в $\Lambda(H)$, порожденное одночленами степени k (по образующим a_h), мы будем обозначать через $\Lambda^k(H)$; это не что иное, как k-я *внешняя степень пространства* H. При отождествлении $\Lambda(H)$ с Λ_n подпространство $\Lambda^k(H)$ отождествляется с Λ_n^k.

Опишем на инвариантном языке операторы замены переменной. Пусть $A : H \to \widetilde{H}$ — линейный оператор. Тогда определен оператор $\Lambda(A) : \Lambda(H) \to \Lambda(\widetilde{H})$ по правилу

$$\Lambda(A)\left[a_{h_1} \wedge \ldots \wedge a_{h_k}\right] = a_{Ah_1} \wedge \ldots \wedge a_{Ah_k}.$$

В частности, этот оператор переводит $\Lambda^k H$ в $\Lambda^k \widetilde{H}$. Полученное отображение k-х внешних степеней называется *k-й внешней степенью оператора A* и обозначается через $\Lambda^k A$.

Мы почти всегда будем предпочитать неинвариантный язык п. 1.1.

1.5. Разложение на линейные множители.

Задача. Докажите, что если a_{ij} — матричные элементы квадратной матрицы A, то

$$(a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n)(a_{21}\xi_1 + \ldots + a_{2n}\xi_n) \ldots (a_{n1}\xi_1 + \ldots + a_{nn}\xi_n) = \det(A)\xi_1 \ldots \xi_n. \quad (1.4)$$

Лемма 1.1. Пусть $l \in \Lambda_n^1$, $f \in \Lambda_n$. Тогда следующие условия равносильны:
1. $lf = 0$;
2. функция f представима в виде $f = lg$.

Доказательство. С помощью подходящей замены переменной можно добиться того, чтобы $l(\xi) = \xi_1$, и тогда утверждение становится очевидным. ■

Следствие 1.2. Пусть $g \in \Lambda_n$. Пусть $l_1, \ldots, l_p \in \Lambda_n^1$ линейно независимы и $l_j g = 0$ для всех j. Тогда g представим в виде

$$g = l_1 \ldots l_p r.$$

Следствие 1.3. Пусть $g \in \Lambda_n^{n-1}$. Тогда g раскладывается на линейные множители.

Доказательство. Пусть $g = \sum a_j \xi_1 \ldots \xi_{j-1}\xi_{j+1} \ldots \xi_n$. Пусть $l(\xi) = \sum s_i \xi_i$. Тогда

$$lg = \left(\sum (-1)^{j-1} s_j a_j\right)\xi_1 \ldots \xi_n.$$

Отсюда мы видим, что существуют линейно независимые элементы $l'_1, \ldots, l'_{n-1} \in \Lambda_n^1$ такие, что $l'_j g = 0$. Теперь мы можем применить предыдущее следствие. ■

Задача. Докажите, что $\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4$ не раскладывается на линейные множители.

Пусть теперь $g = l_1 \ldots l_k$, где $l_j \in \Lambda_n^1$. Легко видеть, что это разложение не единственно:

$$(a_{11}l_1 + \ldots + a_{1n}l_n) \ldots (a_{n1}l_1 + \ldots + a_{nn}l_n) = \det(A) \cdot l_1 \ldots l_n.$$

И последнее замечание. Пусть L — подпространство размерности k в $\Lambda_n^1 \simeq \mathbb{C}^n$. Выберем в L базис $l_1, \ldots, l_k$ и рассмотрим вектор

$$q(L) = l_1 l_2 \ldots l_k \in \Lambda_n^k.$$

Легко видеть, что отображение $q : L \mapsto q(L)$ устанавливает биекцию между множеством Gr_n^k всех k-мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$ и множеством функций в Λ_n^k, разложимых на линейные множители и определенных с точностью до пропорциональности. Это так называемое *плюккерово вложение* Gr_n^k в проективное пространство размерности $C_n^k - 1$.

1.6. Дифференцирование.

Левая производная $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ — это линейный оператор в Λ_n, определяемый условиями

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\xi_j f(\xi)) = f(\xi), \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi) = 0,$$

где $f(\xi)$ — функция, не зависящая от ξ_j (то есть f — многочлен от $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n$).

Пример. $\frac{\partial}{\partial \xi_2}(\xi_1\xi_2) = \frac{\partial}{\partial \xi_2}(-\xi_2\xi_1) = -\xi_1$.

Несложно проверить следующие формулы

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(f(\xi)g(\xi)) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_j} g(\xi) + f(-\xi)\frac{\partial g}{\partial \xi_j}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^2 f(\xi) = 0. \quad (1.6)$$

В частности, применяя (1.5) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\exp(f(\xi)) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(1 + f + \frac{f^2}{2!} + \ldots\right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\left(1 + f + \frac{f^2}{2!} + \ldots\right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\exp(f(\xi)).\end{aligned} \quad (1.7)$$

Задача. Иногда вводятся также *правые производные* $\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_j}$, определяемые условиями

$$\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_j}(f(\xi)\xi_j) = f(\xi); \qquad \frac{\partial_r}{\partial_r \xi_j} f(\xi) = 0,$$

где $f(\xi)$ не зависит от ξ_j. Докажите, что

$$\frac{\partial_r f(\xi)}{\partial_r \xi_j} = \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(-\xi).$$

1.7. Интеграл Березина.

Интегралом Березина [Березин (1967)]

$$(\mathscr{B})\int f(\xi)\, d(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

называется линейный функционал на Λ_n, равный 1 на $\xi_1 \ldots \xi_n$ и равный 0 на всех остальных произведениях $\xi_{i_1}\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Задача. Как ведет себя интеграл Березина при линейных заменах переменных?

Задача. Легко видеть, что

$$(\mathscr{B})\int \frac{\partial}{\partial \xi} g(\xi)\, d(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Вывести отсюда аналог формулы интегрирования по частям.

1.8. Интеграл по гауссовой мере. Пусть теперь $\xi_1, \ldots, \xi_n, \bar\xi_1, \ldots, \bar\xi_n$ — набор антикоммутирующих переменных ($\bar\xi_j$ — это просто другие переменные). Интегралом

$$\int g(\xi, \bar\xi)\, d\mu(\xi, \bar\xi)$$

мы назовем линейный функционал на Λ_{2n}, определяемый условиями:

$$\int \prod_{\alpha=1}^{k} (\bar\xi_{j_\alpha} \xi_{j_\alpha})\, d\mu(\xi, \bar\xi) = 1$$

для любых наборов $j_1 < \ldots < j_k$; интегралы от всех остальных базисных одночленов равны 0.

Лемма 1.4.

$$\int g(\xi, \bar\xi)\, d\mu(\xi, \bar\xi) = (\mathscr{B}) \int g(\xi, \bar\xi) \exp\left(\sum \bar\xi_j \xi_j\right) d(\xi_1, \bar\xi, \ldots, \xi_n, \bar\xi_n).$$

Доказательство мы оставляем в качестве упражнения. ■

Сразу отметим, что мы будем работать почти исключительно со вторым интегралом (также введенным Березиным), а не с интегралом Березина из п. 1.7.

1.9. Операторы и их ядра. Пусть Λ_n — грассманова алгебра от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а Λ_m — грассманова алгебра от переменных $\eta_1, \ldots, \eta_m$. Пусть $K(\xi, \bar\eta)$ — функция, зависящая от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n, \bar\eta_1, \ldots, \bar\eta_m$ (все переменные $\xi_i, \eta_j, \bar\eta_k$ попарно антикоммутируют). Поставим в соответствие функции K оператор A_K : $\Lambda_m \to \Lambda_n$, задаваемый формулой

$$A_K f(\xi) = \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.9}$$

Мы будем называть функцию $K(\xi, \eta)$ *ядром* оператора A_K.

Замечание. Мы считаем, что «постоянные», т. е. множители, не зависящие от $\eta, \bar\eta$, выносятся из-под знака интеграла слева:

$$\int f(\xi) g(\eta, \bar\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = f(\xi) \int g(\eta, \bar\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta).$$

Теорема 1.5. Отображение $K \mapsto A_K$ является биекцией множества функций $K(\xi, \bar\eta) \in \Lambda_{m+n}$ на множество линейных операторов $\Lambda_m \to \Lambda_n$.

Доказательство. Высказывание является тавтологией. Нужно лишь понять, что утверждается. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \delta_1, \ldots, \delta_m} a^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\delta_1 \ldots \delta_m} \xi_1^{\varepsilon_1} \ldots \xi_n^{\varepsilon_n} \bar\eta_m^{\delta_m} \ldots \bar\eta_1^{\delta_1},$$

где ε_i, δ_j равны 0 или 1. Тогда $a^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\delta_1 \ldots \delta_m}$ — просто матричные коэффициенты оператора A в стандартном базисе. ■

Задача. Докажите, что ядро единичного оператора равно $\exp\left(\sum \xi_j \bar\eta_j\right)$.

Задача. Докажите, что оператор замены переменной имеет ядро вида $\exp\left(\sum a_{ij} \xi_i \bar\eta_j\right)$.

Задача. Описать оператор с ядром $\sum b_k \left(\sum \xi_i \bar\eta_j\right)^k$.

Задача. Описать оператор с ядром $\prod_{j=1}^{n} (\xi_j + \bar\eta_j)$.

Пусть, далее, $A : \Lambda_m \to \Lambda_n$ — оператор с ядром $K(\xi, \bar\eta)$, а $B : \Lambda_m \to \Lambda_n$ — оператор с ядром $L(\zeta, \bar\xi)$. Тогда, как легко видеть, ядро оператора BA вычисляется по формуле

$$M(\zeta, \bar\eta) = \int L(\zeta, \bar\xi) K(\xi, \bar\eta)\, d\mu(\xi, \bar\xi). \tag{1.10}$$

Приведем еще несколько несложных формул, иллюстрирующих работу с операторами в грассмановых алгебрах. Очевидно,

$$\int \lambda(\xi) K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \lambda(\xi) \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.11}$$

В частности, вспоминая формулу для ядра единичного оператора, получаем, что оператор умножения на функцию $\lambda(\xi)$ имеет ядро

$$\lambda(\xi) \exp\left(\sum \xi_j \bar\eta_j\right). \tag{1.12}$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int \frac{\partial K(\xi, \bar\eta)}{\partial \xi_j} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.13}$$

Пусть теперь $\varphi(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n) \in \Lambda_n$ — функция, зависящая от антикоммутирующих переменных $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$. Тогда (см. (1.6)) корректно определен оператор $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)$. Применяя (1.13) получаем

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) \int K(\xi, \bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int \left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) K(\xi, \bar\eta)\right] f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.14}$$

В частности, сам оператор $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)$ имеет ядро

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) \exp\left(\sum \xi_j \bar\eta_j\right) = \exp\left(\sum \xi_j \bar\eta_j\right) \varphi(\bar\eta_1, \ldots, \bar\eta_n). \tag{1.15}$$

Далее, легко видеть, что

$$\int K(\xi, \bar\eta) \eta_j f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int \frac{\partial K(\xi, \bar\eta)}{\partial \bar\eta_j} (-\xi, -\bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.16}$$

Аналогично

$$\int K(\xi, \bar\eta) \bar\eta_j f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int K(\xi, \bar\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_j} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.17}$$

Отсюда следует, что

$$\int K(\xi, \bar\eta) \bar\eta_{i_1} \ldots \bar\eta_{i_\alpha} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int K(\xi, \bar\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial \eta_{i_\alpha}} f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta).$$

Поэтому

$$\int K(\xi, \bar\eta) \lambda(\bar\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta) = \int K(\xi, \bar\eta) \lambda\left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \eta_m}\right) f(\eta)\, d\mu(\eta, \bar\eta). \tag{1.17a}$$

1.10. Операторы рождения-уничтожения. Рассмотрим пространство

$$V_{2n} = V_{2n}^+ \oplus V_{2n}^- := \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$$

с координатами $(v_1^+, \dots, v_n^+, v_1^-, \dots, v_n^-)$. Введем в V_{2n} симметричную билинейную форму

$$L(v, w) = \sum (v_i^+ w_i^- + v_i^- w_i^+). \tag{1.18}$$

Поставим в соответствие каждому вектору $v \in V$ линейный оператор $\hat{a}(v)$ по формуле

$$\hat{a}(v) f(\xi) = \left(\sum v_i^+ \xi_i + \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) f(\xi). \tag{1.19}$$

Замечание. По терминологии, заимствованной из квантовой механики, операторы $\hat{a}(v_+, 0)$ называются *операторами рождения*, а операторы $\hat{a}(0, v_-)$ — *операторами уничтожения*. Термины математического происхождения: операторы *внешнего* и *внутреннего умножения*. Мы будем называть операторы $\hat{a}(v)$ *операторами рождения-уничтожения*.

Введем операторы

$$a_i^+ f(\xi) = \xi_i f(\xi), \qquad a_i^- f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi). \tag{1.20}$$

Тогда, очевидно (см. (1.5)–(1.6)),

$$\begin{aligned} a_i^+ a_j^+ + a_j^+ a_i^+ &= 0, \\ a_i^- a_j^- + a_j^- a_i^- &= 0, \\ a_i^+ a_j^- + a_j^- a_i^+ &= \delta_{ij} E. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Эту систему равенств («*канонические антикоммутационные соотношения*») можно переписать в виде

$$\hat{a}(v)\hat{a}(w) + \hat{a}(w)\hat{a}(v) = L(v, w) \cdot E. \tag{1.22}$$

Задача. Найти ядро оператора $\hat{a}(v)$. Как найти ядра операторов $\hat{a}(v)A$ и $A\hat{a}(v)$, зная ядро оператора A?

Теорема 1.6. Алгебра операторов в Λ_n, порожденная всеми операторами рождения-уничтожения совпадает с полной алгеброй операторов в Λ_n.

Доказательство. Легко видеть, что проектор на подпространство Λ_n^0 задается формулой

$$Q = a_1^- a_2^- \dots a_n^- a_n^+ \dots a_2^+ a_1^+. \tag{1.23}$$

Пусть оператор A имеет ядро

$$K(\xi, \overline{\eta}) = \sum c_{\delta_1 \dots \delta_n}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \xi_1^{\varepsilon_1} \dots \xi_n^{\varepsilon_n} \overline{\eta}_n^{\delta_n} \dots \overline{\eta}_1^{\delta_1}$$

Тогда легко видеть, что

$$A = \sum c_{\delta_1 \dots \delta_n}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} (a_1^+)^{\varepsilon_1} \dots (a_n^+)^{\varepsilon_n} Q (a_n^-)^{\delta_n} \dots (a_1^-)^{\delta_1} \tag{1.24}$$

■

1.11. Виковские символы. Нам виковские символы не понадобятся, но в литературе они используются несравненно чаще, чем ядра $K(\xi, \overline{\eta})$, и поэтому их стоит обсудить.

Мы только что видели, что любой оператор в Λ_n может быть представлен как алгебраическое выражение от a_j^+, a_j^-. Коммутационные соотношения (1.21) позволяют переставить символы a_j^+, a_j^- так, чтобы операторы рождения a_j^+ стояли впереди операторов уничтожения a_i^-.

Пример.

$$\begin{aligned} a_1^- a_2^- a_2^+ a_1^+ &= a_1^- (1 - a_2^+ a_2^-) a_1^+ = \\ &= a_1^- a_1^+ - a_1^- a_2^+ a_2^- a_1^+ = \\ &= (1 - a_1^+ a_1^-) - a_2^+ a_1^- a_1^+ a_2^- = \\ &= 1 - a_1^+ a_1^- - a_2^+ (1 - a_1^+ a_1^-) a_2^- = \\ &= 1 - a_1^+ a_1^- - a_2^+ a_2^- + a_2^+ a_1^+ a_1^- a_2^- \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем любой оператор A в Λ_n записать как дифференциальный оператор вида

$$\sum v_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_{j_l}},$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $j_1 < j_2 < \dots < j_l$.

Функция

$$V(\xi, \eta) = \sum v_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \overline{\eta}_{j_1} \dots \overline{\eta}_{j_l}$$

называется *виковским символом* оператора A.

Теорема 1.7. Пусть A — оператор в Λ_n. Тогда его ядро $K(\xi, \overline{\eta})$ и виковский символ $V(\xi, \overline{\eta})$ связаны соотношением

$$V(\xi, \overline{\eta}) = K(\xi, \overline{\eta}) \exp\left(-\sum \xi_i \overline{\eta}_i\right). \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть Q — проектор на Λ_n^0; он задается формулой (1.23).

$$\begin{aligned} Q &= a_1^- \dots a_n^- a_n^+ \dots a_1^+ = \\ &= a_1^- \dots a_{n-1}^- a_{n-1}^+ \dots a_1^+ (a_n^- a_n^+) = \\ &= (a_1^- a_1^+) \dots (a_n^- a_n^+) = \\ &= (1 - a_1^+ a_1^-) \dots (1 - a_n^+ a_n^-). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Легко видеть, что виковский символ этого оператора равен

$$(1 - \xi_1 \overline{\eta}_1)(1 - \xi_2 \overline{\eta}_2) \dots (1 - \xi_n \overline{\eta}_n) = \exp\left(-\sum \xi_j \overline{\eta}_j\right) \tag{1.27}$$

Чтобы убедиться в этом, раскроем скобки (1.26) и (1.27). Элементы a_j^+ в (1.26) уже стоят впереди a_j^-, а правила перестановки элементов a_j^+ и a_i^- при $i \neq j$ в точности совпадают с правилами перестановки ξ_j и η_i (см. (1.21)).

Случай общего оператора $A : \Lambda_n \to \Lambda_n$ сводится к только что расмотренному с помощью формулы (1.24). ■

1.12. Каноническая билинейная форма в Λ_n. Определим линейный оператор $f \mapsto f^\sigma$ в алгебре Λ_n из условия

$$\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_k} \mapsto \xi_{i_k}\dots\xi_{i_2}\xi_{i_1}$$

(для любого базисного одночлена). Легко видеть, что

$$(fg)^\sigma = g^\sigma f^\sigma.$$

Задача. Доказать, что в случае $f \in \Lambda_n^{4k}$ или $f \in \Lambda_n^{4k+1}$ выполнено $f^\sigma = f$. Если же $f \in \Lambda_n^{4k+2}$ или $f \in \Lambda_n^{4k+3}$, то $f^\sigma = -f$.

Билинейную форму $B(f,g)$ в Λ_n мы определим по формуле:

$$B(f,g) = (\mathscr{B})\int f(\xi)^\sigma g(\xi)\, d(\xi_1,\dots,\xi_n).$$

Задача. Доказать, что при $n = 4l$ и $n = 4l+1$ форма B симметрична, а при $n = 4l+2$, $n = 4l+3$ — кососимметрична.

Лемма 1.8. Для любого $v \in V$ выполнено

$$B\big(\hat{a}(v)f, g\big) = B\big(f, \hat{a}(v)g\big).$$

Доказательство очевидно. ■

Следствие 1.9. Пусть $L(v,v) = 2$. Тогда оператор $\hat{a}(v)$ сохраняет форму $B(\cdot\,,\cdot)$.

Доказательство. Учитывая (1.22) получаем

$$\begin{aligned} B(\hat{a}(v)f, \hat{a}(v)g) = B(f, \hat{a}(v)^2 f) = \\ = B(f, \tfrac{1}{2}L(v,v)g) = \\ = B(f,g). \end{aligned}$$

■

1.13. Скалярное произведение в Λ_n. Скалярное произведение в Λ_n вводится по формуле

$$\langle f, g\rangle = \int \overline{g^\sigma(\xi)}\, f(\xi)\, d\mu(\xi,\bar{\xi}). \tag{1.28}$$

По существу, выражение (1.28) — лишь красивая запись того, что одночлены $\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}$ образуют в Λ_n ортонормированный базис.

Легко видеть, что $(a_j^+)^* = a_j^-$, а следовательно,

$$\hat{a}(v^+, v^-) = \hat{a}(\bar{v}^-, \bar{v}^+).$$

Задача. Вывести формулу для ядра сопряженного оператора.

Задача. Мы определили билинейную форму B и скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ в грассмановой алгебре Λ_n. Корректно ли они определены во внешней алгебре $\Lambda(H)$ (иными словами, зависят ли они от выбора базиса в H)?

1.14. Литературные замечания. Нечетный (грассманов) анализ впервые появляется, кажется, в статье [Onsager (1944)], имевшей чисто статфизические цели. Эта работа многократно переизлагалась (например, [Березин (1969.1)]). В книге [Березин (1965)] нечетный анализ имел уже вполне развитый вид.

§ 2. *Спинорные функции*

В нечетном анализе важное значение имеют аналоги гауссовых функций $\exp\big(\sum a_{ij}x_ix_j\big)$. На первый взгляд кажется, что такими аналогами должны быть выражения $\exp\big(\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\big)$, в действительности положение чуть-чуть сложней.

2.1. Спинорные функции. *Спинорными функциями* мы будем называть функции вида

$$\lambda \prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_s b_{js}\xi_s\Big)\cdot \exp\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j\Big), \tag{2.1}$$

где $\lambda, b_{js}, a_{ij} \in \mathbb{C}$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Для сокращения записи мы будем пользоваться обозначением

$$\xi A\xi^t := \sum a_{ij}\xi_i\xi_j; \tag{2.2}$$

при этом мы рассматриваем $\xi = (\xi_1\ \dots\ \xi_n)$ как матрицу-строку, а знак ^{t} обозначает транспонирование матрицы.

Множество всех спинорных функций в Λ_n мы будем обозначать через Car_n. Через $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$ мы обозначим множество $\mathrm{Car}_n \setminus 0$, профакторизованное по умножению на константы. Иными словами, $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$ — это множество ненулевых спинорных функций, определенных с точностью до умножения на константы.

Мы хотим выяснить строение множества $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$. Обозначим через Car_n^k подмножество Car_n, состоящее из всех функций вида (2.1), имеющих ровно k линейных сомножителей. На первый взгляд кажется, что множества Car_n^k являются, в каком-то смысле, компонентами Car_n. Но это — «обман зрения». Действительно,

$$\xi_1\xi_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\xi_1\xi_2\right).$$

Задача. Вывести отсюда, что Car_n^{k+2} содержится в замыкании Car_n^k.

Таким образом, $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$ состоит из двух компонент связности.

2.2.

Теорема 2.1. Пусть f — спинорная функция, а $\hat{a}(v)$ — оператор рождения-уничтожения. Тогда $\hat{a}(v)f$ — спинорная функция.

Сама теорема и ее доказательство довольно странны и не имеют аналогов в обычном анализе.

Доказательство. Итак, нам нужно вычислить

$$\left(\sum \alpha_j\xi_j + \sum \beta_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) l_1(\xi)\dots l_p(\xi)\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\}, \tag{2.3}$$

где A — кососимметричная матрица, $l_j \in \Lambda_n^1$. Заметим, что формы l_j можно считать линейно независимыми, иначе их произведение было бы равно 0. Выражение (2.3) равно

$$\left\{\left(\sum \alpha_j\xi_j\right) l_1\dots l_p + \left[\sum_{\alpha=1}^{p} c_\alpha l_1\dots l_{\alpha-1}l_{\alpha+1}\dots l_p\right] + \right.$$
$$\left. + (-1)^p l_1\dots l_p \sum \beta_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^t)\right\} \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\}, \qquad (2.4)$$

где через c_α обозначены числа $c_\alpha = (-1)^{\alpha-1}\sum\left(\beta_j \frac{\partial}{\partial\xi_j} l_\alpha(\xi)\right)$.

Дальше возможны два случая:

а) Сумма в квадратных скобках равна 0. Тогда (2.4) равно

$$(-1)^p l_1\dots l_p\left(\sum \alpha_j\xi_j + \sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^t)\right)\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\},$$

и мы получаем выражение вида (2.1).

б) Пусть сумма в квадратных скобках в (2.4) отлична от 0. Тогда (см. п. 1.5) эта сумма представляется в виде

$$[\dots] = \varkappa_1(\xi)\dots\varkappa_{p-1}(\xi),$$

где линейные функции $\varkappa_j(\xi)$ имеют вид

$$\varkappa_j(\xi) = \sum d_{jk} l_k$$

($d_{jk}\in\mathbb{C}$). Далее, выберем форму $\varkappa_p \in \Lambda_n^1$ так, чтобы формы $\varkappa_1,\dots,\varkappa_p$ образовывали базис в линейной оболочке форм $l_1,\dots,l_p$. Тогда

$$l_1\dots l_p = \sigma\varkappa_1\dots\varkappa_p,$$

где $\sigma\in\mathbb{C}^*$. Теперь (2.4) переписывается в виде

$$\varkappa_1\dots\varkappa_{p-1}\left[1 + (-1)^p\sigma\varkappa_p\left(\sum\alpha_j\xi_j + \sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^t)\right)\right]\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\} =$$
$$= \varkappa_1\dots\varkappa_{p-1}\exp\left\{(-1)^p\sigma\varkappa_p\left(\sum\alpha_j\xi_j + \sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^t)\right)\right\}\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\} =$$
$$= \varkappa_1\dots\varkappa_{p-1}\exp\left\{(-1)^p\sigma\varkappa_p\left(\sum\alpha_j\xi_j + \sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi A\xi^t)\right) + \tfrac{1}{2}\xi A\xi^t\right\}.$$

Теорема доказана. ■

2.3. Описание многообразия $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$. Рассмотрим линейное пространство V_{2n}, определенное в п. 1.10, и симметричную билинейную форму L в V_{2n}, заданную формулой (1.18). Пусть H — максимальное изотропное подпространство в V_{2n} (см. Предварительные сведения, § 1). Обозначим через $\mathscr{H}_H$ следующую систему дифференциальных уравнений в Λ_n

$$\left\{\hat{a}(v)f = 0 \quad \text{для всех } v\in H\right\}. \qquad (2.5)$$

Теорема 2.2.

а) Для любого максимального изотропного подпространства $H\subset V_{2n}$ система $\mathscr{H}_H$ имеет единственное с точностью до пропорциональности ненулевое решение. Это решение является спинорной функцией.

б) Обозначим решение системы $\mathscr{H}_H$, определенное с точностью до пропорциональности, через spin_H. Тогда отображение

$$H \mapsto \mathrm{spin}_H$$

является биекцией грассманиана Gr_{2n} максимальных изотропных подпространств в V_{2n} и многообразия $\mathbb{P}\mathrm{Car}_n$.

Мы дадим два доказательства этой теоремы (см. теоремы 2.6 и 2.7); для понимания дальнейшего достаточно более слабой теоремы 2.5.

Задача. Пусть $f = \xi_1\xi_2\dots\xi_k$. Найдите соответствующее подпространство в V_{2n}. Какое отношение имеет рассматриваемая конструкция к плюккерову вложению (см. п. 1.5)?

Задача. Пусть $v_1,\dots,v_p$ — набор векторов в V_{2n}. Когда система уравнений

$$\left\{a(v_j)f = 0\right\}$$

имеет ненулевое решение? Когда это решение единственно?

Указание. Пусть $L(v,\bar{v})\neq 0$. Тогда система из двух уравнений $\hat{a}(v)f = 0$, $\hat{a}(\bar{v}) = 0$ имеет лишь нулевое решение. Действительно,

$$L(v,\bar{v})\cdot f = \left(\hat{a}(v)\hat{a}(\bar{v}) + \hat{a}(\bar{v})\hat{a}(v)\right)f = 0.$$

Следующий вопрос более сложен.

Задача*. Пусть $v_j\in V_{2n}$, $c_j\in\mathbb{C}$. Когда система уравнений

$$\left\{a(v_j)f = c_j f\right\}$$

имеет ненулевое решение f? Когда это решение единственно?

2.4. Явная формула для соответствия $H\mapsto \mathrm{spin}_H$: простейший случай.

Предложение 2.3. Пусть W — линейное $2n$-мерное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}$. Пусть W_+ и W_- — максимальные изотропные подпространства в W, причем $W = W_+\oplus W_-$. Пусть подпространство $L\subset W$ является графиком оператора $A : W_-\to W_+$. Тогда следующие условия равносильны:

1. L является максимальным изотропным подпространством.
2. $A = -A^t$.

Замечание. Инвариантный смысл операции транспонирования обсуждается в § 2 Предварительных сведений. Читатель, не желающий вникать в инвариантные построения, может считать, что в W_+ и W_- фиксированы базисы $w_1^+,\dots,w_n^+$ и $w_1^-,\dots,w_n^-$ такие, что $\{w_i,w_j\} = \delta_{ij}$. Тогда ^{t} обозначает обычное транспонирование матриц.

Доказательство. Пусть $w_-, w'_- \in W_-$. Тогда $Aw_-, Aw'_- \in W_+$. Следовательно,

$$\{w_- + Aw_-, w'_- + Aw'_-\} = \{w_-, Aw'_-\} + \{w'_-, Aw_-\} = \tag{2.6}$$

(мы использовали изотропность W_+ и W_-)

$$= \{w_-, Aw'_-\} + \{w_-, A^{\mathrm{t}} w'_-\} =$$
$$= \{w_-, (A + A^{\mathrm{t}}) w'_-\}.$$

Если $A + A^{\mathrm{t}} = 0$, то L изотропно. Обратно, если L изотропно, т. е. (2.6) равно 0, то $A + A^{\mathrm{t}} = 0$. Предложение доказано. ■

Задача. Получите аналог этого утверждения для кососимметричной билинейной формы.

Предложение 2.4. Пусть W, W_+, W_- — те же что и выше. Следующие условия на максимальное изотропное подпространство $H \subset W$ равносильны:

а) H — график оператора $W_- \to W_+$;

б) $H \cap W_+ = 0$;

в) проекция H на W_- вдоль W_+ совпадает с W_-.

Доказательство. Достаточно проверить, что б) $\Leftrightarrow$ в). Пусть v — ненулевой вектор в $H \cap W_+$. Тогда в силу изотропности H для любого $(w_+, w_-) \in H$ выполнено

$$0 = \big\{(v, 0), (w_+, w_-)\big\} = \{v, w_-\}, \tag{2.7}$$

т. е. любой вектор w_- из проекции H на W_- удовлетворяет уравнению (2.7), поэтому в) не выполнено.

Обратно, пусть $N \subset W_-$ — проекция H на W_-, причем $N \neq W_-$. Тогда $(N \oplus W_+)^{\perp}$ является подпространством в W_+ (т. к. $N \oplus W_+ \supset W_+ = W_+^{\perp}$). Учитывая, что $H \subset N \oplus W_-$, мы получаем, что $H = H^{\perp} \supset (N \oplus W_+)^{\perp}$. ■

Задача. Пусть L — максимальное изотропное подпространство в W. Тогда размерность $L \cap W_+$ равна коразмерности в W_- проекции L на W_-.

Пусть V_{2n} — то же, что в п. 1.10.

Теорема 2.5. Пусть H — максимальное изотропное подпространство в V_{2n}, причем H является графиком оператора $A : V_- \to V_+$. Тогда система уравнений $\mathscr{Z}_H$ (см. (2.5)) имеет единственное с точностью до пропорциональности ненулевое решение

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $v = (v_1^+, \dots, v_n^+, v_1^-, \dots, v_n^-) \in H$.

$$\Big(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} =$$
$$= \Big(\sum v_j^+ \xi_j + \sum\sum v_j^- a_{jk}\xi_k\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} = \tag{2.9}$$
$$= \Big[\sum\big(v_j^+ - \sum a_{j\alpha} v_\alpha^-\big)\xi_j\Big] \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}.$$

Отсюда видно, что (2.8) удовлетворяет системе $\mathscr{Z}_H$.

Докажем единственность. Пусть $q(\xi)$ — другое решение системы $\mathscr{Z}_H$. Пусть

$$q(\xi) = r(\xi) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}.$$

Тогда

$$\Big(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) q(\xi) = \Big(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) r(\xi) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} =$$
$$= \Big[\Big(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}\Big] r(\xi) +$$
$$+ \Big(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} r(\xi)\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} = 0.$$

Учитывая, что выражение в квадратных скобках равно 0, получаем

$$\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} r(\xi) = 0.$$

Но набор чисел v_j^- может быть любым. Поэтому $r(\xi) = \mathrm{const}$, что и требовалось доказать. ■

2.5. Первая общая формула для соответствия $H \mapsto \operatorname{spin} H$.

Теорема 2.6. Пусть H — максимальное изотропное подпространство в V_{2n}. Пусть $H \cap V_+ = P$, а $u_k = (b_{k1}, \dots, b_{kn}) \in V_+$ — некоторый базис в P. Пусть H_0 — некоторое дополнение в H до P, а $\widetilde{H} \supset H_0$ — некоторое максимальное изотропное подпространство, являющееся графиком оператора $A : V_- \to V_+$. Тогда существует единственное с точностью до пропорциональности ненулевое решение системы $\mathscr{Z}_H$; оно задается формулой

$$f(\xi) = \prod_{k=1}^{\dim P} \Big(\sum b_{kj}\xi_j\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} \tag{2.10}$$

Доказательство. Проверим условия (2.5). Пусть сначала вектор v лежит в подпространстве P, $v = (v_1^+, \dots, v_n^+, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$\hat{a}(v) f(\xi) = \Big[\Big(\sum v_j^+ \xi_j\Big) \prod_{k=1}^{\dim P} \Big(\sum b_{kj}\xi_j\Big)\Big] \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}.$$

Выражение в квадратных скобках равно 0, т. к. это произведение линейно зависимых элементов из Λ_n^1.

Далее, пусть $v \in H_0$, $v = (v_1^+, \dots, v_n^+, v_1^-, \dots, v_n^-)$. Вычислим

$$\Big(\sum v_j^+ \xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) \prod_{k=1}^{\dim P} \Big(\sum b_{kj}\xi_j\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\}. \tag{2.11}$$

При этом векторы $v^- = (v_1^-, \dots, v_n^-)$ не произвольны. Вектор v ортогонален любому вектору из P, а это значит, что

$$\sum b_{ij} v_j^- = 0 \tag{2.12}$$

для всех i. Иными словами,

$$\Big(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\big(\sum b_{kj}\xi_j\big) = 0,$$

поэтому (2.11) равно

$$\Big((-\mathrm{i})^{\dim P}\prod_{k=1}^{\dim P}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\Big)\Big[\Big(\sum v_j^+\xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\exp\big\{\tfrac{\mathrm{i}}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\big\}\Big]$$

В силу вычислений (2.9) выражение в квадратных скобках равно 0.

Докажем единственность. Пусть $g(\xi)$ — решение системы $\mathscr{H}_H$. Тогда при $v \in P$ условие (2.5) дает

$$\big(\sum_j b_{ij}\xi_j\big)g(\xi) = 0,$$

поэтому $g(\xi)$ делится на $\sum b_{ij}\xi_j$ для всех i, а значит, $g(\xi)$ имеет вид

$$g(\xi) = \prod_i\big(\sum b_{ij}\xi_j\big)\cdot q(\xi).$$

Далее, представим $q(\xi)$ в виде $q(\xi) = r(\xi)\exp\big\{\frac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\big\}$. Тогда $r(\xi)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\Big(\sum v_j^+\xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\Big(\prod\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\big\}\, r(\xi)\Big) = 0,$$

где $v = (v_1^+, \dots, v_n^+, v_1^-, \dots, v_n^-) \in H_0$. Повторяя только что проделанные вычисления, мы получаем в левой части

$$(-1)^{\dim P}\prod\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\Big[\Big(\sum v_j^+\xi_j + \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)\exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\big\}\cdot r(\xi) + \\ + \Big(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) r(\xi)\cdot\exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\big\}\Big].$$

Далее, в силу вычислений (2.9) первое слагаемое в квадратных скобках равно 0. Поэтому $r(\xi)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\prod_{k=1}^{\dim P}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\Big(\sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big) r(\xi) = 0 \tag{2.13}$$

для всех $v_- = (v_1^-, \dots, v_n^-)$, удовлетворяющих (2.12).

Делая подходящую линейную замену переменной $\varkappa = H\xi$, мы можем перевести подпространство $P \subset V_+$ в подпространство, натянутое на первые $m := \dim P$ базисных векторов. Тогда система (2.13) перепишется в виде

$$\varkappa_1 \dots \varkappa_m \frac{\partial}{\partial \varkappa_{m+\alpha}} r(\varkappa) = 0,$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$. Поэтому $r(\varkappa)$ имеет вид

$$r(\varkappa) = a + \sum_{k=1}^{m}\varkappa_k\psi_k(\varkappa),$$

где $a \in \mathbb{C}$, а $\psi_j(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ — некоторые функции. Возвращаясь к старым переменным, мы получаем

$$r(\xi) = a + \sum_{k=1}^{m}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)\cdot\psi_k\big(\sum h_{1j}\xi_j, \dots, \sum h_{nj}\xi_j\big).$$

Поэтому

$$\prod_{k=1}^{m}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big)r(\xi) = a\prod_{k=1}^{m}\big(\sum b_{kj}\xi_j\big),$$

что и доказывает теорему. ■

Задача. Пусть

$$l_1 l_2 \dots l_k \exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\big\} = m_1 m_2 \dots m_p \exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi B\xi^{\mathrm{t}}\big\}$$

— две равные ненулевые спинорные функции (l_i, m_i — линейные формы). Докажите, что $l_1 \dots l_k = m_1 \dots m_p$ (в частности $k = p$), а $\xi B\xi^{\mathrm{t}}$ имеет вид

$$\xi A\xi^{\mathrm{t}} + \sum l_i(\xi)\mu_i(\xi),$$

где $\mu_i(\xi) \in \Lambda_n^1$.

2.6. Вторая общая формула. Пусть Gr_{2n} — грассманиан (см. Предварительные сведения, § 1) максимальных изотропных подпространств в V_{2n}. Сейчас мы построим атлас из 2^n карт на многообразии Gr_{2n}.

Пусть $e_1^+, \dots, e_n^+, e_1^-, \dots, e_n^-$ — стандартный базис в V_{2n}. Пусть числа $\delta_1, \dots, \delta_n$ пробегают значения ± 1. Обозначим через $V_+^{\delta_1 \dots \delta_n}$ подпространство, натянутое на базисные векторы $e_1^{\delta_1}, \dots, e_n^{\delta_n}$ (т. е. $e_j^{\delta_j} = e_j^+$, если $\delta_j = +1$, и $e_j^{\delta_j} = e_j^-$, если $\delta_j = -1$), а через $V_-^{\delta_1 \dots \delta_n}$ — подпространство, натянутое на базисные векторы $e_j^{-\delta_j}$. Легко видеть, что $V_+^{\delta_1 \dots \delta_n}$, $V_-^{\delta_1 \dots \delta_n}$ — максимальные изотропные подпространства в V_{2n}, причем

$$V_{2n} = V_+^{\delta_1 \dots \delta_n} \oplus V_-^{\delta_1 \dots \delta_n}.$$

Карта $\mathrm{Map}_{\delta_1 \dots \delta_n}$ на Gr_{2n} состоит из всех подпространств $L \in \mathrm{Gr}_{2n}$, являющихся графиками операторов

$$A_{\delta_1 \dots \delta_n}(L) : V_-^{\delta_1 \dots \delta_n} \to V_+^{\delta_1 \dots \delta_n}.$$

Задача. Докажите, что объединение всех 2^n карт $\mathrm{Map}_{\delta_1 \dots \delta_n}$ совпадает с Gr_{2n} (см. например, [Арнольд (1971)], § 41). Покажите, что если выкинуть любую из карт, то оставшиеся не покроют весь грассманиан.

Теорема 2.7. Пусть $L \in \mathrm{Map}_{\delta_1 \dots \delta_n}$, а $A_{\delta_1 \dots \delta_n}(L)$ — соответствующий оператор $V_-^{\delta_1 \dots \delta_n} \to V_+^{\delta_1 \dots \delta_n}$. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой вектор $f \in \Lambda_n$, удовлетворяющий системе $\mathscr{H}_L$; этот вектор задается формулой

$$\Big(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\Big)^{\frac{1-\delta_1}{2}} \dots \Big(\xi_n + \frac{\partial}{\partial \xi_n}\Big)^{\frac{1-\delta_n}{2}} \exp\big\{\tfrac{1}{2}\xi A_{\delta_1 \dots \delta_n}(L)\xi^{\mathrm{t}}\big\} \tag{2.14}$$

Доказательство. Пусть $\hat{s}_j$ — ортогональное преобразование в V, задаваемое формулой

$$\hat{s}_j e_k^\delta = e_k^\delta, \quad \hat{s}_j e_j^\delta = e_j^{-\delta}, \quad \text{где } k \neq j.$$

Замечание. Пусть $f(\xi)$, $g(\xi)$ не зависят от ξ_j. Тогда

$$\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\big(f(\xi) + \xi_j g(\xi)\big) = \xi_j f(\xi) + g(\xi).$$

Лемма 2.8. Функция f удовлетворяет системе $\mathscr{H}_L$ тогда и только тогда, когда функция $\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) f$ удовлетворяет системе $\mathscr{H}_{\hat{s}_j L}$.

Доказательство леммы. Лемма вытекает из легко проверяемого тождества

$$\hat{a}(\hat{s}_j v)\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) f = \left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\hat{a}(-v) f.$$

■

Лемма 2.9.

$$A_{\delta_1,\dots,-\delta_j,\dots,\delta_n}(L) = A_{\delta_1,\dots,\delta_j,\dots,\delta_n}(s_j L).$$

Эта лемма очевидна.

Теорема является очевидным следствием этих двух лемм. ■

2.7. Замечания. Пусть A — кососимметричная матрица размера $2n \times 2n$. *Пфаффианом* матрицы A называется число

$$\mathrm{Pfaff}(A) = \frac{1}{n!}(\mathscr{B})\int \left(\tfrac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^n d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}).$$

Задача. Докажите, что $\mathrm{Pfaff}(CAC^{\mathrm{t}}) = \det(C)\,\mathrm{Pfaff}(A)$.

Задача. Докажите, что $\det(A) = \mathrm{Pfaff}(A)^2$.

Легко видеть, что

$$(\mathscr{B})\int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A \xi^{\mathrm{t}}\right\} d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}) = \mathrm{Pfaff}(A),$$

где $(\mathscr{B})$ обозначает интеграл Березина из п. 1.7. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение из п. 1.13. Тогда

$$\left\langle \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\right\}, \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi B\xi^{\mathrm{t}}\right\}\right\rangle = (\mathscr{B})\int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}} - \tfrac{1}{2}\bar{\xi}B\bar{\xi}^{\mathrm{t}} + \bar{\xi}\xi^{\mathrm{t}}\right\} d(\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_n) =$$
$$= \mathrm{Pfaff}\begin{pmatrix} A & -1 \\ 1 & -\overline{B}\end{pmatrix}.$$

Задача. Вывести отсюда равенство

$$\left\langle \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\right\}, \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi B\xi^{\mathrm{t}}\right\}\right\rangle^2 = \det(1 + A\overline{B}).$$

В частности,

$$\left\|\exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi A\xi^{\mathrm{t}}\right\}\right\| = [\det(1 + AA^*)]^{\frac{1}{4}},$$

где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму в Λ_n.

§ 3. *Спинорное представление группы* $O(2n, \mathbb{C})$.

Наша следующая цель — изучение одного замечательного действия группы $O(2n, \mathbb{C})$ в Λ_n.

3.1. Теорема существования спинорного представления. Пусть пространство V_{2n} — то же, что и выше (п. 1.10). Пусть $O(2n, \mathbb{C})$ — группа всех операторов в V_{2n}, сохраняющих симметричную форму $L(\cdot,\cdot)$. Иными словами, группа $O(2n, \mathbb{C})$ состоит из блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ размера $(n \times n) \times (n \times n)$, удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Напомним, что по каждому элементу v пространства V_{2n} в п. 1.10 был построен оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$.

Теорема 3.1.

а) Для любого $Q \in O(2n, \mathbb{C})$ существует единствененный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $\mathrm{spin}(Q)$ в Λ_n такой, что

$$\hat{a}(Qv) = \mathrm{spin}(Q)\hat{a}(v)\,\mathrm{spin}(Q)^{-1} \tag{3.2}$$

для любого $v \in V_{2n}$.

б) Для любых $P, Q \in O(2n, \mathbb{C})$ выполнено

$$\mathrm{spin}(P)\,\mathrm{spin}(Q) = c(P, Q)\,\mathrm{spin}(PQ), \tag{3.3}$$

где $c(P, Q) \in \mathbb{C}^*$.

Утверждение б) означает, что $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$ — проективное представление (см. Предварительные сведения, § 5) группы $O(2n, \mathbb{C})$.

Наиболее трудным утверждением теоремы является существование оператора $\mathrm{spin}\,P$. Доказательство существования мы пока отложим и докажем остальные утверждения.

Следующая лемма, в частности, показывает, что б) следует из а).

Лемма 3.2. Пусть $P, Q \in O(2n, \mathbb{C})$ и существуют операторы A, B в Λ_n такие, что

$$\hat{a}(Pv) = A\hat{a}(v)A^{-1}, \qquad \hat{a}(Qw) = B\hat{a}(w)B^{-1} \tag{3.4}$$

для всех $v, w \in V_{2n}$. Тогда для всех $v \in V_{2n}$ выполнено

$$\hat{a}(PQv) = AB\hat{a}(v)(AB)^{-1}.$$

Доказательство.

$$\hat{a}(PQv) = A\hat{a}(Qv)A^{-1} = AB\hat{a}(v)B^{-1}A^{-1}.$$

■

Лемма 3.3. Для любого $Q \in O(2n, \mathbb{C})$ существует не более одного (с точностью до пропорциональности) оператора A, удовлетворяющего

$$\hat{a}(Qv) = A\hat{a}(v)A^{-1}$$

для всех $v \in V_{2n}$.

Доказательство. Пусть

$$\hat{a}(Qv) = A\hat{a}(v)A^{-1} = B\hat{a}(v)B^{-1},$$

тогда

$$\hat{a}(v) = B^{-1}A\hat{a}(v)A^{-1}B = (B^{-1}A)\hat{a}(v)(B^{-1}A)^{-1},$$

т. е. $B^{-1}A$ коммутирует со всеми операторами $\hat{a}(v)$. Но операторы рождения-уничтожения, согласно теореме 1.6, порождают всю алгебру операторов в Λ_n, а значит, $B^{-1}A$ коммутирует со всеми операторами, т. е. $B^{-1}A = \lambda E$. Лемма доказана. ■

3.2. Абстрактное доказательство теоремы существования. Это доказательство красиво и поучительно, но оно ничего не говорит о явном виде операторов $\mathrm{spin}(P)$. В дальнейшем мы не будем использовать рассуждения этого пункта.

Алгеброй Клиффорда Q_n называется ассоциативная алгебра с единицей с образующими $A_1^+, \ldots, A_n^+, A_1^-, \ldots, A_n^-$ и соотношениями

$$A_i^+A_j^+ + A_j^+A_i^+ = 0, \quad A_i^-A_j^+ + A_j^+A_i^- = \delta_{ij}, \quad A_i^-A_j^- + A_j^-A_i^- = 0$$

(ср. с (1.21)). Дадим эквивалентное определение. Алгебра Q_n — это алгебра с образующими $\hat{A}(v)$, где v пробегает V_{2n}, и с соотношениями

$$\hat{A}_v\hat{A}_w + \hat{A}_w\hat{A}_v = L(v,w)\cdot E, \qquad \hat{A}_{\alpha v+\alpha' v'} = \alpha\hat{A}_v + \alpha'\hat{A}_{v'},$$

где $v, v', w \in V_{2n}$, а $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$. Эквивалентность определений очевидна (образующие $A_j^{\pm}$ соответствуют базисным элементам из V_{2n}).

В силу соотношений (1.22) отображение $\hat{A}_v \mapsto \hat{a}(v)$ определяет некоторое представление алгебры Q_n, т. е. гомоморфизм ψ из Q_n в алгебру $\mathrm{Mat}(\Lambda_n)$ всех операторов в Λ_n. В силу теоремы 1.6 отображение ψ является эпиморфизмом, в частности $\dim \mathrm{Q}_n \geqslant 4^n$.

Теорема 3.4. Алгебра Клиффорда Q_n изоморфна алгебре всех операторов в Λ_n.

Доказательство. Нам остается показать, что $\dim \mathrm{Q}_n \leqslant 4^n$. Действительно, точно так же, как в п. 1.11, показывается, что любой элемент Q_n записывается в виде

$$\sum c^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\delta_1\ldots\delta_n}(A_1^+)^{\varepsilon_1}\ldots(A_n^+)^{\varepsilon_n}(A_1^-)^{\delta_1}\ldots(A_n^-)^{\delta_n},$$

где ε_i, δ_i могут быть равны 0 или 1, что завершает доказательство. ■

Пусть $P \in \mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$. Легко видеть, что отображение

$$\hat{A}_v \mapsto \hat{A}_{Pv}$$

множества образующих алгебры Q_n в себя продолжается до автоморфизма алгебры Q_n. Это вытекает из того, что

$$\begin{aligned}\hat{A}_{Pv}\hat{A}_{Pw} + \hat{A}_{Pw}\hat{A}_{Pv} &= L(Pv,Pw)E = \\ &= L(v,w)E = \\ &= \hat{A}_v\hat{A}_w + \hat{A}_w\hat{A}_v,\end{aligned}$$

т. е. $\hat{A}'_w := \hat{A}_{Pw}$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и $\hat{A}_w$.

Обозначим полученный автоморфизм через α_P.

Далее мы можем рассмотреть представление $\psi \circ \alpha_P$ алгебры Q_n. Но Q_n изоморфна матричной алгебре, а матричная алгебра имеет лишь одно неприводимое представление (см., например, [Bourbaki (1958)], VIII.1.1.3). Поэтому представления $\psi \circ \alpha_P$ и ψ эквивалентны. Следовательно, существует оператор $U(P) : \Lambda_n \to \Lambda_n$ такой, что

$$(\psi \circ \alpha_P)(B) = U(P)^{-1}\psi(B)U(P)$$

для любого $B \in \mathrm{Q}_n$. Полагая $B = \hat{A}_v$, мы получаем, что $U(P)$ — это не что иное как искомый оператор $\mathrm{spin}(P)$.

3.3. Конструкция Картана. Сначала мы заметим, что операторы рождения-уничтожения сами имеют вид $\mathrm{spin}(\;)$.

Лемма 3.5. Пусть $v \in V_{2n}$, $L(v,v) \neq 0$. Обозначим через s_v следующий линейный оператор в пространстве V_{2n}:

$$s_v(w) = -w + 2\,\frac{L(v,w)}{L(v,v)}\,v. \tag{3.5}$$

Тогда

$$\mathrm{spin}(s_v) = \hat{a}(v).$$

Замечание. s_v — симметрия относительно прямой λv, $\lambda \in \mathbb{C}$. В частности, $s_v \in \mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$.

Доказательство. Нужно проверить, что для всех $v \in V_{2n}$ выполнено равенство

$$\hat{a}(s_v w)\hat{a}(v) = \hat{a}(v)\hat{a}(w).$$

Учитывая, что $a(v)^2 = \frac{1}{2}L(v,v)E$, получаем, что левая часть равна

$$\left(-\hat{a}(w) + 2\,\frac{L(v,w)}{L(v,v)}\,\hat{a}(v)\right)\hat{a}(v) = -\hat{a}(w)\hat{a}(v) + L(v,w)\cdot E,$$

и теперь высказывание вытекает из равенства (1.22). ■

Лемма 3.6. Любой элемент группы $\mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$ представляется в виде произведения $s_{v_1}s_{v_2}\ldots s_{v_k}$.

Доказательство: см., например, [Bourbaki (1958)], IX.6.4. Мы для полноты приведем набросок доказательства.

Почти любой элемент $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ в подходящем базисе имеет блочно-диагональный вид, где на диагонали стоят блоки вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}, \quad \varphi_j \in \mathbb{C}. \tag{3.6}$$

Любая же матрица вида (3.6) представима как произведение двух симметрий. Поэтому почти любой элемент группы $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ представим в виде $s_{v_1}\ldots s_{2n}$. Рассматривая произведения таких элементов, мы уже получим всю группу $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$. Любой же элемент из $\mathrm{O}(2n,\mathbb{C}) \setminus \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ имеет вид $s_v g$, где $g \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$. Лемма доказана. ■

Пусть теперь

$$g = s_{v_1} s_{v_2} \dots s_{v_k},$$

тогда в силу леммы 3.2 мы имеем

$$\operatorname{spin}(g) = \hat{a}(v_1)\hat{a}(v_2)\dots\hat{a}(v_k). \tag{3.7}$$

Таким образом, мы еще раз доказали теорему существования оператора $\operatorname{spin}(P)$, а кроме того, получили для этого оператора явную, хотя и не слишком удобную формулу.

3.4. Двузначность. Напомним, что в п. 3.1 операторы $\operatorname{spin}(g)$ были определены лишь с точностью до умножения на комплексную константу.

Теорема 3.7. Операторы $\operatorname{spin}(g)$ можно выбрать так, чтобы для любых g_1, g_2 было выполнено равенство

$$\operatorname{spin}(g_1 g_2) = \pm \operatorname{spin}(g_1)\operatorname{spin}(g_2). \tag{3.8}$$

Доказательство. Заметим, что отражение s_v (см. (3.5)) зависит не от самого вектора v, а от содержащей его прямой $\mathbb{C}\cdot v$. Поэтому мы можем выбрать v так, что $L(v,v) = 2$. Тогда оператор $\hat{a}(v)$ сохраняет билинейную форму $B(\cdot,\cdot)$ в Λ_n (см. следствие 1.9 из п. 1.12). Поэтому оператор $\operatorname{spin}(g)$, определенный формулой (3.7), сохраняет билинейную форму $B(\cdot,\cdot)$. Далее, оба оператора $\operatorname{spin}(g_1g_2)$ и $\operatorname{spin}(g_1)\operatorname{spin}(g_2)$ сохраняют билинейную форму B и при этом отличаются лишь числовым множителем. Тем самым этот множитель может быть лишь ± 1. Теорема доказана. ■

Задача. Пусть g пробегает $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$. Пусть G — группа операторов в Λ_n вида $\lambda \operatorname{spin}(g)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$, сохраняющих форму $B(\cdot,\cdot)$. Покажите, что группа G связна. Выведите отсюда, что G — двулистное накрытие над $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$, а также то, что представление spin группы $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ нельзя линеаризовать, т. е. ни при каком выборе операторов $\operatorname{spin}(g)$ не будет выполнено тождество $\operatorname{spin}(g_1g_2) = \operatorname{spin}(g_1)\operatorname{spin}(g_2)$.

Указание. Кривая

$$\gamma(s) = \left(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\left(e^{-is}\xi_1 + e^{is}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \in \mathrm{G},$$

где $0 \leqslant s \leqslant \pi$, связывает оператор E с $-E$.

3.5. Ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$. Мы переходим к изложению основной конструкции спинорного представления, которая и будет важна в дальнейшем. Читатель, безусловно, заметил, что между спинорными функциями и спинорным представлением есть какая-то аналогия.

Задача. Доказать, что для $g \in \mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$, $L \in \mathrm{Gr}_{2n}$ выполнено $\operatorname{spin}(g)\operatorname{spin}_L = \operatorname{spin}_{gL}$.

Теорема 3.8. Ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$ является спинорной функцией.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что операторы рождения-уничтожения переводят пространство Λ_n^+ четных функций в пространство Λ_n^- нечетных функций, а Λ_n^- — в Λ_n^+. Вспоминая конструкцию Картана, мы замечаем, что элементы $g \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ представляются в виде произведения четного числа отражений s_{v_j}

(т. к. $\det(s_{v_j}) = -1$), а элементы $g \notin \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ — в виде произведения нечетного числа отражений s_{v_j}. Поэтому в случае $g \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$

$$\operatorname{spin}(g)\Lambda_n^+ = \Lambda_n^+, \qquad \operatorname{spin}(g)\Lambda_n^- = \Lambda_n^-.$$

Следовательно, в случае $g \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$ является четной функцией. В случае же $g \notin \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$ является нечетной функцией.

Пусть $v = (v_1^+, \dots, v_n^+, v_1^-, \dots, v_n^-)$, $gv = w = (w_1^+, \dots, w_n^-)$. Тогда

$$\hat{a}(w)\operatorname{spin}(g) = \operatorname{spin}(g)\hat{a}(v). \tag{3.9}$$

Пусть $K(\xi,\eta)$ — ядро оператора $\operatorname{spin}(g)$. Тогда равенства (3.9) в силу (1.11), (1.13), (1.16), (1.17) равносильны системе дифференциальных уравнений

$$\left(\sum w_j^+\xi_j + \sum w_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)K(\xi,\overline{\eta}) = \left(\sum v_j^+ \frac{\partial K}{\partial \overline{\eta}}(-\xi,-\eta) + \sum v_j^- \overline{\eta}_j K(-\xi,-\overline{\eta})\right).$$

Пусть, для определенности, $g \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ и, следовательно, функция $K(\xi,\overline{\eta})$ четна. Тогда

$$\left(\sum w_j^+\xi_j + \sum w_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \sum v_j^- \overline{\eta}_j + \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}_j}\right)K(\xi,\overline{\eta}) = 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, мы имеем систему дифференциальных уравнений на функцию $K(\xi,\overline{\eta}) \in \Lambda_{2n}$. Нам остается убедиться, что это — система вида $\mathscr{H}_H$ (см. п. 2.3).

Введем в $\widetilde{V} = V_{2n} \oplus V_{2n}$ симметричную билинейную форму

$$\{(v,w),(v',w')\} = L(w,w') - L(v,v'). \tag{3.11}$$

Тогда график T оператора g является максимальным изотропным подпространством в $V_{2n} \oplus V_{2n}$; действительно,

$$\{(v,gv),(v',gv')\} = \{v,v'\} - \{gv,gv'\} = 0.$$

Далее, отождествим $\widetilde{V} = V_{2n} \oplus V_{2n}$ с V_{4n} по формуле

$$\tau : \Big(\underbrace{v_+, v_-}_{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ V_{2n}}};\ \underbrace{w_+, w_-}_{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ V_{2n}}}\Big) \longleftrightarrow \Big(\underbrace{w_+, -v_-}_{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ V_{4n}^+}};\ \underbrace{w_-, v_+}_{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ V_{4n}^-}}\Big).$$

Заметим, что форма (3.11) при этом отождествляется со стандартной формой L в V_{4n}. Остается заметить, что система (3.10) — это система $\mathscr{H}_{\tau T}$, что и завершает доказательство. ■

Важно заметить, что доказанная теорема вместе с теоремами 2.5—2.7 дает явные формулы для ядра оператора $\operatorname{spin}(g)$, см. пункт 3.7. Отметим также, что эта теорема дает еще одно доказательство существования спинорного представления (ссылки на конструкцию Картана в начале доказательства легко «убрать», в § 6 это проделывается в несколько большей общности).

3.6. Преобразование Потапова.

Предложение 3.9. Пусть $Y = Y_+ \oplus Y_-$, $Z = Z_+ \oplus Z_-$ — линейные пространства. Пусть $z_\pm \in Z_\pm$, $y_\pm \in Y_\pm$ и

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Пусть матрица D обратима. Тогда

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BD^{-1} & A - BD^{-1}C \\ D^{-1} & -D^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_- \\ y_+ \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Доказательство. В силу (3.12)

$$z_+ = Ay_+ + By_-, \quad z_- = Cy_+ + Dy_-.$$

Исключая y_-, получаем

$$y_- = D^{-1}z_- - D^{-1}Cy_+,$$
$$z_+ = BD^{-1}z_- + (A - BD^{-1}C)y_+,$$

что и требовалось доказать. ■

Матрицу (3.13) мы будем называть *преобразованием Потапова* матрицы (3.12). Ниже мы увидим, что преобразование Потапова обладает целым рядом замечательных свойств.

Задача. Докажите, что в случае $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ преобразование Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ обладает следующими свойствами:

$$K = -K^t, \quad N = -N^t, \quad M = L^t.$$

3.7. Формула Березина.

Теорема 3.10. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$, причем матрица D обратима. Тогда оператор $\mathrm{spin}(g)$ имеет ядро

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} BD^{-1} & -(D^t)^{-1} \\ D^{-1} & -D^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar\eta^t \end{pmatrix}\right\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Мы позже обсудим этот вопрос подробнее и в большей общности. Сейчас лишь заметим, что для получения явной формулы из доказательства теоремы 3.8 нам не хватало только явного выражения, задающего подпространство τT как график оператора $V_{4n}^- \to V_{4n}^+$. Но именно это вычисление и проделано в п. 3.6. ■

3.8. Некоторые действия с блочными матрицами.

Лемма 3.11. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$ — блочная матрица, причем блок D обратим. Тогда

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & BD^{-1} \\ & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & \\ & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \\ D^{-1}C & E \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Доказательство очевидно. ■

Замечание. Сравните (3.13), (3.14) и (3.15).

Из этой формулы можно извлечь ряд полезных следствий. Во-первых,

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D)\det(A - BD^{-1}C). \tag{3.16}$$

Во-вторых, от каждой из матриц в правой части (3.15) легко вычислить обратную.

Задача. Вычислите.

В итоге мы получаем *формулу Фробениуса* для обращения блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & \\ & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ & E \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Эта формула не отличается особым изяществом, но бывает очень полезна.

Задача. Вычислите $\begin{pmatrix} A & E \\ E & B \end{pmatrix}^{-1}$.

3.9. Замечания. Еще один вывод формулы Березина.

Задача. Докажите непосредственно, что

$$\mathrm{spin}\begin{pmatrix} E & K \\ 0 & E \end{pmatrix} f(\xi) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} f(\xi), \tag{3.18}$$

$$\mathrm{spin}\begin{pmatrix} L^{-1} & \\ & L^t \end{pmatrix} f(\xi) = f(L\xi^t), \tag{3.19}$$

$$\mathrm{spin}\begin{pmatrix} E & 0 \\ M & E \end{pmatrix} f(\xi) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right\} f(\xi). \tag{3.20}$$

Теперь, разлагая произвольную ортогональную матрицу g в произведение (3.15) и вычисляя $\mathrm{spin}(\cdot)$ от каждого сомножителя по формулам (3.18)–(3.20), мы с помощью леммы 3.2 получаем явное выражение для оператора $\mathrm{spin}(g)$. Конечно при этом получится формула Березина (см. формулы (1.11), (1.17a)). В итоге мы получили еще один вывод формулы Березина, отсюда же несложно извлечь еще одно доказательство существования спинорного представления.

Задача. Докажите, что оператор

$$f(\xi) \mapsto \pm(\det(L))^{1/2} f(L\xi),$$

а также операторы (3.18), (3.20) сохраняют каноническую билинейную форму в Λ_n.

Следовательно, для того, чтобы сделать спинорное представление двузначным (см. теорему 3.7), нужно перед формулой Березина дописать

$$\pm(\det(D))^{-1/2}. \tag{3.21}$$

3.10. Литературные замечания. Спинорные представления ортогональных групп были обнаружены Э. Картаном [Cartan (1913)], см. также [Cartan (1938)]. Формула Березина была получена Ф. А. Березиным [Березин (1961)], см. также [Березин (1965)], впоследствии она была переоткрыта Сато, Дзимбо и Мивой [Sato, Miwa, Jimbo (1978)].

§ 4. Операторы Березина

4.1. Определения.

Определение 1. *Оператор Березина* $\Lambda_m \to \Lambda_n$ — это оператор, ядро которого является спинорной функцией. Иными словами, ядро должно иметь вид

$$\lambda \prod_{j=1}^{k} \Bigl(\sum a_{js}\xi_s + \sum \beta_{j\tau}\bar\eta_\tau\Bigr) \cdot \exp\Bigl\{\tfrac{1}{2}(\xi \ \ \bar\eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\Bigr\}, \tag{4.1}$$

где $\lambda, \alpha_{js}, \beta_{j\tau} \in \mathbb{C}$, $K = -K^t$, $M = -M^t$, а $\xi = (\xi_1 \ \dots \ \xi_n)$, $\eta = (\bar\eta_1 \ \dots \ \bar\eta_m)$ — матрицы-строки.

Введем операторы

$$T_j^\xi = \xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad T_j^\eta = \eta_j + \frac{\partial}{\partial \eta_j}. \tag{4.2}$$

Заметим, что при $i \neq j$

$$(T_j^\xi)^2 = 1, \quad T_j^\xi T_i^\xi = -T_i^\xi T_j^\xi. \tag{4.3}$$

Определение 2. Оператор Березина $\Lambda_m \to \Lambda_n$ — это оператор, представимый в виде

$$A = \lambda T_{j_1}^\xi \dots T_{j_\sigma}^\xi \mathscr{B}\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix} T_{i_1}^\eta \dots T_{i_\mu}^\eta, \tag{4.4}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $\mathscr{B}\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}$ — это оператор с ядром вида

$$\exp\Bigl\{\tfrac{1}{2}(\xi \ \ \bar\eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\Bigr\}. \tag{4.5}$$

Множество всех операторов Березина $\Lambda_m \to \Lambda_n$ мы обозначим $\mathrm{Ber}(\Lambda_m, \Lambda_n)$.

С операторами Березина мы уже встречались дважды. Во-первых, множество $\mathrm{Ber}(\Lambda_0, \Lambda_n)$ очевидным образом отождествляется с множеством Car_n спинорных функций в Λ_n. С другой стороны, мы видели (см. теорему 3.10), что операторы $\mathrm{spin}(g)$ являются операторами Березина.

4.2. Эквивалентность определений.

Предложение 4.1. Определения 1 и 2 п. 4.1 эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим функцию $K(\xi, \bar\eta)$ вида (4.1). Пусть A — соответствующий оператор. Учитывая, что T_j^ξ — оператор рождения-уничтожения, и теорему 2.1, мы получаем, что ядро $\bigl(\xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\bigr)K$ оператора $T_j^\xi A$ снова имеет вид (4.1).

Далее, ядро оператора AT_j^η

$$\bar\eta_j K(-\xi, -\bar\eta) + \frac{\partial K}{\partial \eta_j}(-\xi, -\bar\eta) = \pm\left(\bar\eta_j - \frac{\partial}{\partial \bar\eta_j}\right) K(-\xi, -\bar\eta)$$

тоже имеет вид (4.1). Поэтому оператор Березина в смысле определения 2 является оператором Березина в смысле определения 1.

Далее, пусть A имеет ядро $K(\xi, \bar\eta)$ вида (4.1). Пусть слагаемое $\xi_{j_1} \dots \xi_{j_\sigma} \bar\eta_{i_1} \dots \bar\eta_{i_\mu}$ входит в многочлен $K(\xi, \bar\eta)$ с ненулевым коэффициентом. Тогда ядро оператора

$$A' = T_{j_1}^\xi \dots T_{j_\sigma}^\xi A T_{i_1}^\eta \dots T_{i_\mu}^\eta$$

содержит ненулевой свободный член и по-прежнему имеет вид (4.1). Поэтому ядро A' имеет вид (4.5), и, учитывая равенства (4.3), мы получаем (4.4). ∎

4.3. Умножение операторов Березина.

Задача. Докажите, что замыкание множества операторов вида $\lambda\,\mathrm{spin}(g)$, где $g \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$, есть $\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_n)$.

Учитывая, что множество $\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ замкнуто во множестве всех операторов $\Lambda_n \to \Lambda_m$ (так как $\mathbb{P}\mathrm{Car}_{m+n}$ компактно, см. теорему 2.2), мы в качестве следствия из задачи получаем

Предложение 4.2. Множество $\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_n)$ образует полугруппу относительно умножения.

Теорема 4.3. Пусть $A \in \mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_m)$, $B \in \mathrm{Ber}(\Lambda_m, \Lambda_k)$. Тогда $BA \in \mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_k)$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что если $K(\xi, \bar\eta)$, $L(\zeta, \bar\xi)$ — спинорные функции, то

$$\int L(\zeta, \bar\xi) K(\xi, \bar\eta)\, d\mu(\xi, \bar\xi)$$

— спинорная функция. Пусть $N = \max(m, n, k)$. Допишем каждый из наборов переменных $\xi_1, \dots, \xi_m$; $\eta_1, \dots, \eta_n$; $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ до наборов $\xi_1, \dots, \xi_N$; $\eta_1, \dots, \eta_N$; $\zeta_1, \dots, \zeta_N$. Теперь мы можем рассматривать $K(\xi, \bar\eta)$ как многочлен от $\xi_1, \dots, \xi_N$; $\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_N$, а $L(\zeta, \bar\xi)$ — как многочлен от $\zeta_1, \dots, \zeta_N$; $\bar\xi_1, \dots, \bar\xi_N$. Таким образом, утверждение свелось к случаю, когда $m = n = k = N$, а это — утверждение предложения 4.2. Теорема доказана. ∎

Итак, мы получили какое-то умножение

$$\mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_m) \times \mathrm{Ber}(\Lambda_m, \Lambda_k) \to \mathrm{Ber}(\Lambda_n, \Lambda_k)$$

для любых m, n, k. При этом для любого n полугруппа операторов Березина в Λ_n, определенных с точностью до умножения на константы, содержит группу $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$. Наша следующая цель (§ 6) — описать эту алгебраическую структуру в простых терминах.

4.4. Замечания. Гауссов нечетный интеграл.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_{2n}, \theta_1, \dots, \theta_{2n}$ — попарно антикоммутирующие переменные.

Теорема 4.4. Пусть $K = -K^t$ — невырожденная матрица размера $2n \times 2n$. Тогда

$$(\mathscr{B}) \int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t + \theta\xi^t\right\} d(\xi_1, \dots, \xi_{2n}) = \mathrm{Pfaff}(K) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\theta K^{-1}\theta^t\right\}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Пусть K произвольна. Представим K в виде $K = N\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}N^t$. Далее делаем замену переменных $\xi' = \xi N$. Тогда левая часть (4.6) переписывается в виде

$$(\det(N))(\mathscr{B})\int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi'\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}(\xi')^t+\theta(N^{-1})^t(\xi')^t\right\}d(\xi_1,\dots,\xi_{2n})=$$

$$=\det(N)\exp\left\{\tfrac{1}{2}\theta(N^{-1})^t\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}N^{-1}\theta^t\right\}.$$

■

Теорема 4.5. Пусть матрица $1-MP$ обратима. Тогда

$$\mathscr{B}\begin{pmatrix}K&L\\-L^t&M\end{pmatrix}\mathscr{B}\begin{pmatrix}P&Q\\-Q^t&R\end{pmatrix}=\mathrm{Pfaff}\begin{pmatrix}M&1\\-1&P\end{pmatrix}\mathscr{B}\begin{pmatrix}X&Y\\Z&U\end{pmatrix},\tag{4.7}$$

где

$$\begin{pmatrix}X&Y\\Z&U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K+L(1-PM)^{-1}PL^t & L(1-PM)^{-1}Q\\ -Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R-Q^t(1-MP)^{-1}MQ\end{pmatrix}$$

Доказательство. Вычисляем свертку ядер с помощью формулы (4.6). ■

Операторы рождения-уничтожения, а значит, и их произведения, являются операторами Березина.

Задача. Докажите, что любой оператор Березина $\Lambda_n\to\Lambda_n$ разлагается в произведение операторов рождения-уничтожения.

4.5. Литературные замечания. Предложение 4.2 было получено в [Sato, Miwa, Jimbo (1978)]. Там же можно найти аналоги формулы (4.7) для общих операторов Березина в Λ_n. Общие операторы Березина $\Lambda_n\to\Lambda_m$ введены в [Неретин (1989.2)].

§ 5. Категории, функторы, представления категорий

5.1. Категории. Напомним, что такое категория. Чтобы определить категорию $\mathbf{K}$, нужно задать

а) некоторое множество $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, элементы которого называются *объектами* категории $\mathbf{K}$;

б) для любых двух объектов $V,W\in\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ определено множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V,W)$ (когда ясно, о какой категории идет речь, мы будем опускать индекс $\mathbf{K}$ и писать $\mathrm{Mor}(V,W)$), его элементы называются *морфизмами* из V в W;

в) для любых $P\in\mathrm{Mor}(V,V')$, $Q\in\mathrm{Mor}(V',V'')$ определено их *произведение* $QP\in\mathrm{Mor}(V,V'')$; умножение должно быть ассоциативным: для любых $P\in\mathrm{Mor}(V,V')$, $Q\in\mathrm{Mor}(V',V'')$, $R\in\mathrm{Mor}(V'',V''')$ должно быть выполнено $R(QP)=(RQ)P$;

г) обычно мы будем считать, что множество $\mathrm{Mor}(V,V)$ содержит элемент 1_V, называемый *единицей*, причем для любого $P\in\mathrm{Mor}(V,V')$ выполнено $P\cdot 1_V=P$, а для любого $Q\in\mathrm{Mor}(W,V)$ выполнено $1_V\cdot Q=Q$.

Пример. Определим категорию $\mathbf{A}$, объекты которой — конечномерные комплексные линейные пространства, а морфизмы — линейные операторы.

Пример. Объекты категории групп — группы. Морфизмы — гомоморфизмы групп (аналогично вводятся категории колец, алгебр, полей, полугрупп и т. д.).

Пример. Пусть G — фиксированная группа. Объекты категории представлений группы G — представления группы G, а морфизмы — сплетающие операторы (см. Предварительные сведения, § 5).

Пример. В п. 4.3 нам встретилась категория, объекты которой — грассмановы алгебры Λ_n, а морфизмы — операторы Березина. Сейчас нас интересует именно эта категория.

Множество $\mathrm{Mor}(V,V)$ — его мы будем тоже обозначать также через $\mathrm{End}(V)$ (или $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$) — является полугруппой. Элементы $\mathrm{End}(V)$ мы будем называть *эндоморфизмами*. Обратимые эндоморфизмы объекта V образуют группу $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$, ее элементы мы будем называть *автоморфизмами* объекта V.

Наконец, множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}$ всех морфизмов категории $\mathbf{K}$ образует так называемый группоид. Напомним, что *группоидом* называется множество с одной частично определенной операцией: некоторым парам элементов a,b группоида ставится в соответствие их произведение. При этом если определены произведения ab и $(ab)c$, то определены bc и $(ab)c$, и выполнено $(ab)c=a(bc)$.

Мы привыкли думать, что в математической иерархии категории стоят на ином уровне, чем группы, кольца, алгебры и т. д., см. например, [Шафаревич (1986)] (даже с формально-логической точки зрения обычно считают, что множество объектов категории — никакое не множество, а класс). В этой книге мы будем обходиться с категориями точно так же, как обходятся с группами, кольцами и т. п.

5.2. Пример: категория линейных отношений. Объектами этой категории являются линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ (пусть они будут конечномерными), а морфизмами $P:V\to W$ — *линейные отношения*, т. е. подпространства в $P\subset V\oplus W$.

Иногда такие подпространства являются графиками линейных операторов $V\to W$. В общем случае это не так, но полезно все-таки видеть в линейном отношении оператор $V\to W$, может быть, не всюду определенный, может быть, многозначный, но в остальном линейный. Кстати, в функциональном анализе операторы не обязаны быть всюду определенными (например оператор $\frac{d}{dx}$ в $L^2(\mathbb{R})$).

Если $P:V\rightrightarrows W$, $Q:W\rightrightarrows Y$ — линейные отношения, то определенно их произведение $QP:V\rightrightarrows Y$, а именно, $(v,y)\in V\oplus Y$ содержится в подпространстве QP, если существует $w\in W$ такой, что $(v,w)\in P$, $(w,y)\in Q$ (именно так и хочется определять произведение «многозначных отображений»).

У любого линейного отношения $P:V\rightrightarrows W$, так же, как у оператора, можно определить

а) *ядро* $\mathrm{Ker}\,P$ — множество всех $v\in V$ таких, что $(v,0)\in P$;

б) *образ* $\mathrm{Im}\,P$ — проекция P на W;

в) *область определения* $D(P)$ — проекция P на V;

Кроме того, введем

г) *неопределенность* $\mathrm{Indef}\,P$ — множество $w\in W$ таких, что $(0,w)\in P$; если P — график оператора, то $\mathrm{Indef}(P)=0$;

д) *ранг* $\mathrm{rk}(P)$:

$$\mathrm{rk}(P)=\dim D(P)-\dim\mathrm{Ker}\,P=\tag{5.1}$$
$$=\dim\mathrm{Im}\,P-\dim\mathrm{Indef}\,P=\tag{5.2}$$
$$=\dim P-\dim\mathrm{Ker}\,P-\dim\mathrm{Indef}\,P\tag{5.3}$$

Задача. Докажите, что три величины (5.1)–(5.3) действительно совпадают.

Задача. Пусть P — график линейного оператора $A:V\to W$. Что такое $\mathrm{Ker}\,P$, $\mathrm{Im}\,P$, $\mathrm{Indef}\,P$, $D(P)$?

Задача. Докажите, что

$$\mathrm{rk}(QP)\leqslant\min(\mathrm{rk}(Q),\mathrm{rk}(P)).$$

Задача. Покажите, что умножение линейных отношений не является даже раздельно непрерывным (т. е. $P_j \to P$ не влечет $QP_j \to QP$). Важный вопрос: в каких именно точках Q, P операция умножения разрывна?

Задача. Пусть P, Q — линейные отношения $V \rightrightarrows V$. Что можно сказать о $\dim(QP)$, зная $\dim Q$ и $\dim P$? (Ответ: почти ничего.) Что можно сказать, если подпространства $P, Q \subset V \oplus V$ находятся в «общем положении»?

Пусть $P : V \rightrightarrows W$ — линейное отношение. Тогда подпространство $P \subset V \oplus W$ можно рассматривать как подпространство в $W \oplus V$, т. е. как линейное отношение $W \rightrightarrows V$. Это линейное отношение мы будем обозначать через $P^\square$ и называть линейным отношением, *псевдообратным* к P.

Задача. Пусть P — график обратимого оператора A. Покажите, что $P^\square$ — график оператора A^{-1}.

Задача. Покажите, что

$$(QP)^\square = P^\square Q^\square.$$

5.3. Представления категорий. *Ковариантным функтором* $\mathsf{F} = (F, \varphi)$ из категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{L}$ называется следующий набор данных:

а) отображение $F : \mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$;

б) набор отображений $\varphi_{V,W} : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(F(V), F(W))$, определенных для всех $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Эти отображения должны удовлетворять условию

$$\varphi_{V,Y}(PQ) = \varphi_{W,Y}(P)\varphi_{V,W}(Q), \qquad \varphi(1_V) = 1_{F(V)}.$$

Для определения *контравариантного функтора* из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{L}$ нужно задать отображение $F : \mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$ и для всех $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ нужно задать отображение $\varphi_{V,W} : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(F(W), F(V))$ так, что

$$\varphi_{V,Y}(PQ) = \varphi_{V,W}(Q)\varphi_{W,Y}(P), \qquad \varphi(1_V) = 1_{F(V)}.$$

Пример. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{Op}$ — категория линейных пространств и операторов, а $\mathbf{K}$ — категория ассоциативных алгебр и гомоморфизмов. Построим функтор $\Lambda : \mathbf{Op} \to \mathbf{K}$. Каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Op})$ мы ставим в соответствие внешнюю алгебру $\Lambda(V)$, а каждому оператору $A : V \to W$ — соответствующее естественное отображение внешних алгебр (см. пп. 1.3–1.4).

Представлением категории $\mathbf{K}$ называется ковариантный функтор $\mathsf{T} = (T, \tau)$ из категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{Op}$. Иными словами, каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ ставится в соответствие линейное пространство $T(V)$, а каждому морфизму $P : V \to W$ — оператор $\tau(P) : T(V) \to T(W)$ так, что для любых $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ выполнено

$$\tau(QP) = \tau(Q)\tau(P).$$

Контравариантные функторы из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{Op}$ мы будем называть *антипредставлениями.*

Пример. Пусть $\mathbf{F}$ — категория конечных множеств и отображений. Определим $T(X)$ — пространство функций на X, а $\tau(p)f(x) = f(p(x))$ для любого отображения $p : X \to Y$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — антипредставление.

Любой математик, порывшись в памяти, может вспомнить много примеров представлений категорий. Чтобы оживить воспоминания, приведем 3 примера (впрочем, очень далеких от основного содержания книги).

Пример 1. Пусть $\mathbf{K}$ — категория гладких n-мерных многообразий и гладких отображений. Рассмотрим пространство $T_k(M)$ дифференциальных форм степени k на многообразии M. Пусть $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Для любого $P \in \mathrm{Mor}(M, N)$ рассмотрим естественное отображение дифференциальных форм $\tau_k(P) : T_k(N) \to T_k(M)$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{K}$ — та же категория, а $H_k(M)$ — пространство k-х (дерамовских или любых других) когомологий многообразия. Пусть $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Для любого $P \in \mathrm{Mor}(M, N)$ рассмотрим естественное отображение $h_k(P) : H_k(N) \to H_k(M)$. Тогда $\mathsf{H} = (H, h)$ — представление категории $\mathbf{K}$.

Пример 3. Пусть множество $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ состоит из двух элементов V, W. Пусть $\mathrm{End}(V)$ и $\mathrm{End}(W)$ состоят из единичного элемента, $\mathrm{Mor}(V, W)$ состоит из двух элементов, а $\mathrm{Mor}(W, V)$ пусто. Задача о классификации представлений категории $\mathbf{K}$ — это в точности задача Кронекера о приведении к канонической форме пары операторов из V в W, см. [Гантмахер (1953)].

5.4. Проективные представления категорий. Задать *проективное представление категории* $\mathbf{K}$ — значит по каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ построить линейное пространство $T(V)$, а по каждому $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ — линейный оператор $\tau(P) : T(V) \to T(W)$ так, что для любых $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ выполнено

$$\tau(QP) = \lambda(Q, P)\tau(Q)\tau(P),$$

где $\lambda(Q, P) \in \mathbb{C}^*$ (подчеркнем, что $\lambda(Q, P)$ не обращается в 0 — это важно).

Примеров проективных представлений категорий в этой книге очень много, ближайший — в следующем параграфе. Пока мы сделаем одно банальное замечание.

5.5. Категория $\mathbf{A}^*$. Объекты этой категории — линейные пространства, а морфизмы — линейные операторы, определенные с точностью до умножения на ненулевую константу. Проективное представление категории $\mathbf{K}$ — это, по существу, то же самое, что функтор из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{A}^*$.

§ 6. *Категория* GD *и функтор* Spin

В п. 4.3 был сформулирован вопрос об описании алгебраической структуры, связанной с операторами Березина. Как мы видели (см. теорему 2.2), операторы Березина $\Lambda_m \to \Lambda_n$, определенные с точностью до умножения на константу, нумеруются точками грассманиана максимальных изотропных подпространств в $V_{2m} \oplus V_{2n}$. Встает вопрос о том, как записывается умножение операторов Березина на языке грассманианов.

6.1. Определение категории GD. Объекты категории $\mathbf{GD}$ — четномерные комплексные линейные пространства V, снабженные невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}_V$.

Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$. Введем в $V \oplus W$ билинейную форму

$$\{(v, w), (v', w')\}_{V\oplus W} = \{v, v'\}_V - \{w, w'\}_W. \tag{6.1}$$

Морфизмы категории $\mathbf{GD}$ из V в W бывают двух типов:

а) максимальные изотропные подпространства в $V \oplus W$ (мы можем рассматривать их как линейные отношения, см. п. 5.2);

б) формальный элемент $\mathrm{null}_{V,W}$, чаще всего мы будем обозначать его просто через null; подчеркнем, что этому элементу не соответствует никакого подпространства в $V \oplus W$.

Теперь мы должны определить произведение QP морфизмов $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$ и $Q \in \mathrm{Mor}(W,Y)$. Во-первых, произведение null и любого другого морфизма равно null, т. е.

$$\mathrm{null}_{W,Y} \cdot P = \mathrm{null}_{V,Y}, \quad Q \cdot \mathrm{null}_{V,W} = \mathrm{null}_{V,Y}$$

для любых $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W,Y)$. Пусть P и Q — линейные отношения. Если

$$\mathrm{Ker}(Q) \cap \mathrm{Indef}\, P = 0, \tag{6.2}$$

то Q и P перемножаются, как линейные отношения. Если же (6.2) не выполнено, то $QP = \mathrm{null}_{V,Y}$.

6.2. Комментарии.

А. Группа автоморфизмов. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$.

Лемма 6.1. Следующие условия на подпространство $P \subset V \oplus V$ равносильны:
а) $P \in \mathrm{Aut}(V)$;
б) P является графиком оператора, содержащегося в ортогональной группе $\mathrm{O}(V)$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{O}(V)$. Тогда для любых $v, v' \in V$ выполнено

$$\{gv, gv'\} = \{v, v'\}, \tag{6.3}$$

т. е. график P_g оператора g является изотропным подпространством в $V \oplus V$. При этом P_g имеет половинную размерность в $V \oplus V$, а значит, является максимальным изотропным подпространством.

Обратно, пусть $P \in \mathrm{Aut}(V)$. Пусть Q — обратный к P элемент. Тогда

$$\mathrm{Ker}\, P \subset \mathrm{Ker}\, QP = \mathrm{Ker}\, E = 0,$$
$$D(P) \supset D(QP) = D(E) = V,$$
$$\mathrm{Indef}\, P \subset \mathrm{Indef}\, PQ = \mathrm{Indef}\, E = 0.$$

Поэтому P — график некоторого оператора g; в частности, P имеет половинную размерность. При этом в силу изотропности P выполнено (6.3), что и завершает доказательство. ■

Замечание. Если $\dim V \neq \dim W$, то линейное отношение $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$ не может быть ни графиком линейного оператора $V \to W$, ни графиком линейного оператора $W \to V$. В самом деле, $\dim P = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W)$. Тем не менее P, не будучи оператором, «сохраняет форму» в следующем смысле этого слова: если (v,w), $(v',w') \in P$, то

$$\{v, v'\} = \{w, w'\}. \tag{6.4}$$

В.

Лемма 6.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$. Тогда $(\mathrm{Ker}\, P)^{\perp} = D(P)$, $(\mathrm{Indef}\, P)^{\perp} = \mathrm{Im}\, P$ (в первом случае ортогональное дополнение берется в V, во втором — в W).

Доказательство. Проверим, например, первое равенство. Пусть $v \in \mathrm{Ker}\, P$, а $(p,q) \in P$. Так как $(v,0) \in P$, мы имеем $\{v,p\} = 0$, т. е. $p \in (\mathrm{Ker}\, P)^{\perp}$. Включение $(\mathrm{Ker}\, P)^{\perp} \supset D(P)$ доказано. Обратно, если $v \in D(P)^{\perp}$, то, как легко видеть, вектор $(v,0)$ ортогонален P, а следовательно, содержится в P, т. е. $v \in \mathrm{Ker}\, P$. ■

Следствие 6.3. Условие (6.2) равносильно условию

$$\mathrm{Im}\, P + D(Q) = W \tag{6.5}$$

Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V,W) \setminus \mathrm{null}$. Пусть $\dim V = 2n$, $\dim W = 2m$. Пусть $m > n$. Так как $\dim P$ равно $m+n$, то размерность $W \cap P = \mathrm{Indef}\, P$ не меньше $m-n$. Аналогично, если $m < n$, то $\dim(\mathrm{Ker}\, P) \geqslant n - m$.

С. Топология на $\mathrm{Mor}(V,W)$. Определим топологию на множестве $\mathrm{Mor}(V,W)$. На $\mathrm{Mor}(V,W) \setminus \mathrm{null}$ это обычная топология грассманиана (напомним, что в п. 2.6 на грассманиане максимальных изотропных подпространств был построен атлас и тем самым введена структура гладкого многообразия, а значит, и топологического пространства). Точка null содержится в замыкании любой точки (или, что то же самое, null содержится лишь в одном открытом множестве — всем $\mathrm{Mor}(V,W)$). Конечно, эта топология неотделима.

D. Корректность. Тут возникает три вопроса:

α. Пусть P, Q — ненулевые морфизмы, $QP \neq \mathrm{null}$. Очевидно, что подпространство QP изотропно (см. (6.4)). Но *почему QP — максимальное изотропное подпространство*? Иными словами, *почему оно имеет максимальную возможную размерность*?

β. *Почему умножение ассоциативно*?

γ. *Почему умножение непрерывно*? Любопытно, что если бы мы не ввели null, а произведение морфизмов определили бы как умножение линейных отношений, то умножение не было бы непрерывным: непрерывность нарушалась бы как раз в тех точках, где не выполнено условие (6.2).

Все эти вопросы отпадут сами собой в § 7 (см. предложение 7.4).

6.3. Функтор Spin.

Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$, $\dim V = 2n$. Разложим V в прямую сумму $V = V_+ \oplus V_-$ максимальных изотропных подпространств. Выберем в $V_+ \oplus V_-$ базисы $e_1^+(V), \dots, e_n^+(V)$ и $e_1^-(V), \dots, e_n^-(V)$ так, что

$$\{e_i^+(V), e_j^+(V)\} = \{e_i^-(V), e_j^-(V)\} = 0, \quad \{e_i^+(V), e_j^-(V)\} = \delta_{ij}. \tag{6.6}$$

Координаты вектора $v \in V$ в этом базисе мы будем обозначать через $(v_1^+, \dots, v_n^+; v_1^-, \dots, v_n^-)$. Таким образом, V отождествляется с координатным пространством V_{2n} из п. 1.10, причем билинейные формы в V и V_{2n} тоже отождествляются.

Объекту $V \simeq V_{2n}$ категории $\mathbf{GD}$ мы поставим в соответствие пространство $\mathrm{Spin}(V) := \Lambda(V_+)$ — внешнюю алгебру на V_+ (или грассманову алгебру Λ_n). Вспомним, что каждому вектору v пространства $V \simeq V_{2n}$ ставится в соответствие оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$.

Теорема 6.4.
а) Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$ — ненулевой морфизм. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор

$$\mathrm{spin}(P) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$$

такой, что

$$\hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(P) = \mathrm{spin}(P)\hat{a}(v) \tag{6.7}$$

для любых $(v, w) \in P$.

б) Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — ненулевые морфизмы. Тогда в случае $QP \neq \mathrm{null}$

$$\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P) = \lambda(P, Q)\,\mathrm{spin}(QP), \tag{6.8}$$

где $\lambda(P, Q) \in \mathbb{C}^*$; если же $QP = \mathrm{null}$, то

$$\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P) = 0. \tag{6.9}$$

Таким образом, отображение $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$, $\mathrm{null} \mapsto 0$ является проективным представлением категории $\mathbf{GD}$.

Теорема 6.5. Отображение $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$ является биекцией $\mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ на множество ненулевых операторов Березина $\Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$, определенных с точностью до пропорциональности.

Операторы вида $\mathrm{spin}(P)$ нам уже встречались дважды: один раз — когда мы обсуждали спинорное представление группы $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$, второй раз — когда мы говорили о спинорных функциях. Действительно, в силу теоремы 2.2 прямая spin_L есть не что иное, как образ оператора $\mathrm{spin}(L)$, соответствующего морфизму $L : 0 \rightrightarrows W$ категории $\mathbf{GD}$ (оператор $\mathrm{spin}(L)$ действует из одномерной грассмановой алгебры Λ_0 в $\Lambda(V_+)$).

Лемма 6.6. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — ненулевые морфизмы. Пусть $QP = R$ — их произведение, вычисленное как произведение линейных отношений. Пусть $A : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$, $B : \Lambda(W_+) \to \Lambda(Y_+)$ — операторы такие, что

$$\hat{a}(w)A = A\hat{a}(v), \quad \hat{a}(y)B = B\hat{a}(w') \tag{6.10}$$

для любых $(v, w) \in P$, $(w', y) \in Q$. Тогда для любых $(v, y) \in R$ выполнено

$$\hat{a}(y)BA = BA\hat{a}(v).$$

Таким образом, утверждение а) теоремы 6.4 почти влечет б); мы говорим «почти», потому что условия обращения произведения $\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P)$ в 0 все равно придется проверять отдельно в п. 6.5.

Простейшее известное мне доказательство теоремы 6.4а намечено в замечаниях к этому параграфу; это доказательство не слишком конструктивно и плохо переносится на бесконечномерный случай, поэтому мы предпочитаем более сложный путь (см. следующий пункт).

Доказательство леммы. Пусть $(v, y) \in R$. Тогда существует вектор $w \in W$ такой, что $(v, w) \in P$, $(w, y) \in Q$. В силу (6.10) имеем

$$\hat{a}(y)BA = B\hat{a}(w)A = BA\hat{a}(v).$$

Лемма доказана. ■

В п. 6.7 мы получим явную формулу для ядра оператора $\mathrm{spin}(P)$; эта формула будет для нас очень важна, хотя и пригодна не во всех случаях. Две общие формулы для оператора $\mathrm{spin}(P)$ будут выведены в п. п. 6.8–6.9, эти формулы при чтении вполне можно опустить.

6.4. Доказательство теоремы существования и единственности.

Пусть $V \simeq V_{2n}$, $W \simeq V_{2m}$. Пусть $P \subset V \oplus W$ — максимальное изотропное подпространство, а $(v, w) \in P$. Обозначим через $K(\xi, \bar\eta)$ ядро оператора $\mathrm{spin}(P)$. Тогда оператор $\hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(P)$ имеет ядро

$$\Big(\sum w_i^+ \xi_i + \sum w_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big) K(\xi, \bar\eta)$$

(мы использовали равенства (1.11), (1.13)). Оператор $\mathrm{spin}(P)\hat{a}(v)$ в силу равенств (1.16), (1.17) имеет ядро

$$\Big(\sum v_i^- \eta_i\Big) K(-\xi, -\bar\eta) + \sum v_i^+ \frac{\partial K}{\partial \bar\eta_i}(-\xi, -\bar\eta).$$

Поэтому ядро $K(\xi, \eta)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\Big(\sum w_i^+ \xi_i + \sum w_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big) K(\xi, \bar\eta) = \Big(\sum v_j^- \bar\eta_j\Big) K(-\xi, -\eta) + \sum v_j^+ \frac{\partial K}{\partial \bar\eta_j}(-\xi, -\bar\eta). \tag{6.11}$$

Разложим ядро $K(\xi, \bar\eta)$ в сумму четной и нечетной функций,

$$K(\xi, \bar\eta) = K_+(\xi, \bar\eta) + K_-(\xi, \bar\eta).$$

Тогда обе функции K_+ и K_- удовлетворяют дифференциальному уравнению (6.11). Но для этих двух функций система (6.11) может быть переписана в более простом виде

$$\Big(\sum w_i^+ \xi_i \mp \sum v_j^- \bar\eta_j + \sum w_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i} \pm \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar\eta_j}\Big) K_\pm(\xi, \bar\eta) = 0. \tag{6.12$\pm$}$$

Это система дифференциальных уравнений вида $\mathscr{L}_L$ в Λ_{m+n} (см. п. 2.3), соответствующая подпространству $L_\pm \subset V_{2(m+n)}$, состоящему из векторов вида

$$\big((w_+, \mp v_-); (w_-, \pm v_+)\big) \in V^+_{2(m+n)} \oplus V^-_{2(m+n)},$$

где $\big((v_+, v_-); (w_+, w_-)\big) \in P \subset V \oplus W$. Хотя обе системы уравнений $(6.12)_+$ и $(6.12)_-$ имеют решения, из этих двух решений нас удовлетворяет лишь одно. Действительно,

$$\dim\big(L_+ \cap V^+_{2(m+n)}\big) = \dim\big(L_- \cap V^+_{2(m+n)}\big),$$

а значит (см. формулу (2.10)), четность решений систем $(6.12)_+$ и $(6.12)_-$ на самом деле одинакова. Поэтому системе (6.11) удовлетворяет решение ровно одной из двух систем $(6.12)_+$, $(6.12)_-$. Утверждение а) теоремы 6.1 доказано. ■

Доказательство теоремы 6.5. Пусть, для определенности, спинорная функция $K(\xi, \eta)$ четна. Тогда по этой функции выписывается система дифференциальных уравнений вида $\mathscr{L}_L$, где L — некоторое максимальное изотропное подпространство в $V_{2(m+n)}$. Тогда морфизм $P : V \to W$, соответствующий оператору Березина с ядром $K(\xi, \eta)$, состоит из векторов $\big((v_+, v_-), (w_+, w_-)\big) \in V \oplus W$ таких, что

$$\big((w_+, v_-), (w_-, -v_+)\big) \in L \subset V^+_{2(m+n)} \oplus V^-_{2(m+n)}.$$

■

6.5. Условия обращения произведения $\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P)$ **в** 0.

Лемма 6.7. Пусть $w \in V_{2n}$ — ненулевой изотропный вектор. Тогда

$$\mathrm{Ker}\,\hat{a}(w) = \mathrm{Im}\,\hat{a}(w).$$

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь элемент $g \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$, переводящий w в $(1, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$\mathrm{spin}(g)\hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(g)^{-1} = \lambda\hat{a}(gw)$$

(где $\lambda \in \mathbb{C}^*$), и утверждение достаточно проверить для оператора

$$\hat{a}(gw)f = \xi_1 f,$$

а это уже очевидно. Лемма доказана. ■

Пусть теперь $\mathrm{Ker}\,Q \cap \mathrm{Indef}\,P \neq 0$, а $w \neq 0$ содержится в этом пересечении. Тогда

$$0 = \hat{a}(0)\,\mathrm{spin}(Q) = \mathrm{spin}(Q)\hat{a}(w),$$
$$0 = \mathrm{spin}(P)\hat{a}(0) = \hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(P),$$

отсюда

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{spin}\,Q \supset \mathrm{Im}\,\hat{a}(w) = \mathrm{Ker}\,\hat{a}(w) \supset \mathrm{Im}\,\mathrm{spin}\,P,$$

и мы получаем $\mathrm{spin}\,Q\,\mathrm{spin}\,P = 0$.

Доказательство обратного утверждения значительно сложнее. Мы сначала докажем его частный случай.

Лемма 6.8. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Пусть $L \subset V$ — максимальное изотропное подпространство (т. е. $L \in \mathrm{Mor}(0, V)$). Тогда следующие условия равносильны:

а) $(\mathrm{Ker}\,P) \cap L \neq 0$;

б) $\mathrm{spin}(P)\,\mathrm{spin}(L) = 0$ (или, что то же самое, $\mathrm{spin}(P)$ обращается в 0 на прямой $\mathbb{C}\cdot\mathrm{spin}_L$).

Доказательство. Утверждение а) $\Rightarrow$ б) только что доказано. Пусть выполнено б). Группа $\mathrm{O}(V)$ действует транзитивно на $\mathrm{Mor}(0, V) \setminus \mathrm{null}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $L = V_-$, тем самым прямая spin_L состоит из констант.

Итак, предположим, что оператор $\mathrm{spin}\,P$ переводит 1 в 0. Ядро $K(\xi, \bar{\eta})$ оператора $\mathrm{spin}\,P$ имеет вид

$$l_1(\xi, \bar{\eta}) \ldots l_s(\xi, \bar{\eta}) \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \quad \bar{\eta})\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{6.13}$$

где l_j — линейные выражения. Равенство $\mathrm{spin}(P) \cdot 1 = 0$ равносильно равенству $K(\xi, 0) = 0$, т. е.

$$l_1(\xi, 0) \cdot l_2(\xi, 0) \cdot \ldots \cdot l_s(\xi, 0) = 0.$$

Поэтому линейные формы $l_1(\xi, 0), \ldots, l_s(\xi, 0)$ линейно зависимы. Пусть, например, $\sum \alpha_j l_j(\xi, 0) = 0$. Но произведение $l_1(\xi, \bar{\eta}) \ldots l_s(\xi, \bar{\eta})$ делится на любую линейную комбинацию форм $l_j(\xi, \eta)$, в частности, и на форму

$$\varphi(\xi, \bar{\eta}) = \sum \alpha_j l_j(\xi, \bar{\eta}).$$

Поэтому $\varphi(\xi, \bar{\eta})$ имеет вид $\sum p_j\bar{\eta}_j$. Следовательно, $K(\xi, \bar{\eta})\left(\sum p_j\bar{\eta}_j\right) = 0$. Но функция $K(\xi, \bar{\eta})\left(\sum p_j\bar{\eta}_j\right)$ является (см. (1.17)) ядром оператора

$$\mathrm{spin}(P) \cdot \left(\sum p_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right),$$

тем самым этот оператор равен 0. Оператор $\sum p_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}$ имеет вид $\hat{a}(u)$, где $u = (0, \ldots, 0; p_1, \ldots, p_n)$. Легко видеть, что пара векторов $w = 0$, $v = u$ удовлетворяет уравнению (6.7). Поэтому (см. задачи к теореме 2.2) вектор $(0, u)$ ортогонален к P. Но P — максимальное изотропное пространство, поэтому $(0, u) \in P$, или, что равносильно, $u = (0, \ldots, 0; p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{Ker}\,P$. Лемма доказана. ■

Предложение 6.9. Образ оператора $\mathrm{spin}(P) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ порожден всеми векторами вида spin_L, где L пробегает все максимальные изотропные подпространства в W, содержащие $\mathrm{Indef}\,P$.

Доказательство. Докажем, что для любого максимального изотропного подпространства $L \subset W$, содержащего $\mathrm{Indef}\,P$, прямая spin_L содержится в $\mathrm{Im}\,\mathrm{spin}\,P$. Рассмотрим подпространство $S = P^{\square}L \subset V$ (напомним, что $P^{\square}$ обозначает псевдообратное линейное отношение). Тогда S — максимальное изотропное подпространство в V. Но, к сожалению, $S \supset \mathrm{Ker}\,P$, и если $\mathrm{Ker}\,P \neq 0$, то $PS = \mathrm{null}$ в категории **GD** (хотя $PS = L$ в смысле произведения линейных отношений). Выберем в S какое-нибудь подпространство S_0, дополнительное до $\mathrm{Ker}\,P$, и далее выберем в V какое-нибудь максимальное изотропное подпространство $S' \supset S_0$ такое, что $S' \cap \mathrm{Ker}\,P = 0$. Тогда произведения PS, PS_0, PS' в смысле произведения линейных отношений совпадают. Поэтому $PS' = L$ в категории **GD**, а значит, по лемме 6.8 в равенстве

$$\mathrm{spin}(P)\,\mathrm{spin}(S') = \lambda\,\mathrm{spin}(L)$$

множитель λ отличен от 0. Итак, $\mathrm{spin}_L \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{spin}(P)$ и, следовательно, $\mathrm{Im}\,\mathrm{spin}\,P$ содержит линейную оболочку Ω функций вида spin_L, где $L \supset \mathrm{Indef}\,P$. Включение же $\Omega \supset \mathrm{Im}\,\mathrm{spin}\,P$ очевидно (линейная оболочка спинорных функций под действием $\Lambda(V_+)$ совпадает с $\Lambda(V_+)$, а образ спинорной функции под действием $\mathrm{spin}\,P$ — спинорная функция). ■

Теперь мы готовы окончить доказательство теоремы 6.4 б). Пусть $\mathrm{Ker}\,Q \cap \cap\,\mathrm{Indef}\,P = 0$. Возьмем максимальное изотропное подпространство $H \subset W$ такое, что $H \supset \mathrm{Indef}(P)$, $H \cap \mathrm{Ker}\,Q = 0$. Тогда $\mathrm{spin}_H \in \mathrm{Im}\,\mathrm{spin}(P)$, а $\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}_H \neq 0$. Поэтому $\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P) \neq 0$.

6.6. Преобразование Потапова. Фиксируем в каждом $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$ разложение $V = V_+ \oplus V_-$ в прямую сумму двух максимальных изотропных подпространств.

Теорема 6.10. Пусть V, W — объекты **GD**. Пусть P — график оператора S из $W_- \oplus V_+$ в $W_+ \oplus V_-$. Тогда следующие условия равносильны:

а) $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$;

б) матрица S имеет вид

$$S = S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}, \quad \text{где } K = -K^t,\ M = -M^t. \tag{6.14}$$

Доказательство. Теорема — прямое следствие предложения 2.3. В обозначениях предложения 2.3 мы имеем $Y_+ = W_+ \oplus V_-$, $Y_- = W_- \oplus V_+$. Здесь, однако, необходима некоторая осторожность, чтобы не запутаться в знаках. Спаривание $Y_+ = W_+ \oplus V_-$ с $Y_- = W_- \oplus V_+$ задается формулой

$$\langle (w_+, v_-); (w_-, v_+) \rangle := L(w_+, w_-) - L(v_-, v_+).$$

Транспонирование $S \mapsto S^{\mathrm{T}}$ относительно этого спаривания (см. Предварительные сведения, § 2) задается формулой

$$S^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $S \mapsto S^{\mathrm{t}}$ — транспонирование относительно спаривания

$$\{(w_+, v_-); (w_-, v_+)\} := L(w_+, w_-) + L(v_-, v_+).$$

Теперь условие $S = -S^{\mathrm{T}}$ дает в точности (6.14) (читатель, не склонный к инвариантному языку, может повторить рассуждения из доказательства предложения 2.3). ■

6.7. Явная формула для ядра оператора spin P**: простейший случай.** Мы переходим к выписыванию явных формул. На самом деле все необходимое для этого уже сделано в п. 6.4, а именно, там записана система дифференциальных уравнений на ядро оператора spin P. Решать же эти системы мы научились в пп. 2.3–2.6.

Теорема 6.11. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ и пусть P — график оператора

$$S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-.$$

Тогда ядро оператора spin(P) задается формулой

$$K(\xi, \eta) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\mathrm{t}} \\ \bar\eta^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}\right\} \tag{6.15}$$

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы 2.5. ■

Замечание. Отсюда вытекает формула Березина (3.14).

6.8. Первая общая явная формула. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Рассмотрим подпространство $\mathscr{T} := P \cap (W_+ \oplus V_-)$. Выберем какое-нибудь дополнение P° до $\mathscr{T}$ в P (т. е. $P = \mathscr{T} \oplus P^\circ$) и выберем какой-нибудь $P' \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ такой, что P' является графиком оператора

$$S(P') = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-$$

и, кроме того, $P' \supset P^\circ$. Выберем также в $\mathscr{T}$ какой-нибудь базис $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$, и запишем его в виде

$$\lambda_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j^+(W) + \sum_k \beta_{ik} e_k^-(V).$$

Теорема 6.12. Ядро оператора spin(P) при сформулированных выше предположениях задается формулой

$$\prod_{i=1}^{\sigma}\Big(\sum_j \alpha_{ij}\xi_j + (-1)^\sigma \sum_k \beta_{ik}\bar\eta_k\Big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & (-1)^\sigma L \\ -(-1)^\sigma L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\mathrm{t}} \\ \bar\eta^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}\right\}.$$

Доказательство. Теорема является следствием из теоремы 2.6. ■

6.9. Вторая общая явная формула. Пусть $e_1^+(V), \ldots, e_n^+(V)$, $e_1^-(V), \ldots, e_n^-(V)$ и $e_1^+(W), \ldots, e_m^+(W)$, $e_1^-(W), \ldots, e_m^-(W)$ — стандартные базисы в V и W. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, \delta_1, \ldots, \delta_n$ равны ± 1. Рассмотрим подпространство $V^+_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \subset V$, натянутое на $e_1^{\varepsilon_1}(V), \ldots, e_n^{\varepsilon_n}(V)$, и подпространство $V^-_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \subset V$, натянутое на $e_1^{-\varepsilon_1}(V), \ldots, e_n^{-\varepsilon_n}(V)$. Аналогично, рассмотрим подпространства $W^\pm_{\delta_1\ldots\delta_m} \subset W$, натянутые на $e_1^{\pm\delta_1}(W), \ldots, e_m^{\pm\delta_m}(W)$.

Теорема 6.13. Предположим, что $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ является графиком оператора

$$S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix} : W^-_{\delta_1\ldots\delta_m} \oplus V^+_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \to W^+_{\delta_1\ldots\delta_m} \oplus V^-_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}.$$

Тогда оператор spin(P) задается формулой

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_j + \frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{(1-\delta_j)/2} \cdot R \cdot \prod_{j=1}^{n}\left(\eta_j + \frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)^{(1-\varepsilon_j)/2}, \tag{6.17}$$

где R — оператор с ядром

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \bar\eta)\begin{pmatrix} K & (-1)^\sigma L \\ -(-1)^\sigma L^{\mathrm{t}} & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\mathrm{t}} \\ \bar\eta^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}\right\},$$

а $\sigma = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \delta_1 \ldots \delta_m$.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы 2.7. ■

Замечание. Любая из теорем 6.12, 6.13 влечет теорему 6.5.

6.10. Замечания.

A.

Задача. Опишите орбиты группы $\mathrm{O}(V) \times \mathrm{O}(W)$ на $\mathrm{Mor}(V, W)$. Покажите, что единственным инвариантом является ранг линейного отношения.

Задача. Покажите, что подпространство $\mathrm{Im}\,\mathrm{spin}\,P$ совпадает с множеством решений системы уравнений $\hat a(w) f = 0$, где w пробегает $\mathrm{Indef}\,P$.

Указание. Использовать предыдущую задачу.

Задача. Покажите, что ядро оператора spin(P) : $\Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ совпадает с суммой подпространств вида $\hat a(v)\Lambda(V_+)$, где v пробегает $\mathrm{Ker}\,P$.

B.

Задача. Пусть M — множество пар вида (P, Q), где $P \in \mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y) \setminus \mathrm{null}$. Пусть группа $\mathrm{O}(V) \times \mathrm{O}(W) \times \mathrm{O}(Y)$ действует на M преобразованиями вида

$$(g_V, g_W, g_Y) : (P, Q) \to (g_W^{-1} P g_V, g_Y^{-1} Q g_W).$$

Покажите, что орбиты полностью определяются набором инвариантов

$$\dim \mathrm{Ker}\, Q, \quad \dim \mathrm{Indef}\, P, \quad \dim(\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P).$$

Задача. Вывести отсюда теорему 6.4.

§ 7. *Категория* GA

7.1. Однородные операторы Березина. Пусть $A : \Lambda_n \to \Lambda_m$ — линейный оператор. Мы скажем, что A — *однородный оператор* степени s, если $A\Lambda_n^k \subset \Lambda_m^{k+s}$ для всех k, т.е. A переводит однородные многочлены степени k в однородные многочлены степени $k+s$.

Ядро $K(\xi, \bar\eta)$ однородного оператора степени s имеет вид

$$K(\xi,\bar\eta) = \sum a_{i_1 \ldots i_{\alpha+s} j_1 \ldots j_\alpha} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{\alpha+s}} \bar\eta_{j_1} \ldots \bar\eta_{j_\alpha}.$$

Иначе говоря, $K(\lambda\xi, \lambda^{-1}\bar\eta) = \lambda^s K(\xi,\bar\eta)$.

Несложно проверить, что оператор Березина является однородным в том и только в том случае, когда его ядро имеет вид

$$K(\xi,\bar\eta) = \prod_{i=1}^{t}\Big(\sum \alpha_{ij}\xi_j\Big) \prod_{m=1}^{r}\Big(\sum \beta_{mk}\bar\eta_k\Big) \exp\{\xi L \bar\eta^t\}; \tag{7.1}$$

степень однородности оператора с таким ядром равна $t - r$.

Задача. Покажите, что оператор A с ядром (7.1) представим в виде произведения $A = BCD$, где

1. B — оператор умножения на $\prod_{i=1}^{t}\big(\sum \alpha_{ij}\xi_j\big)$;
2. C — оператор с ядром $\exp\{\xi L \bar\eta^t\}$, т.е. оператор замены переменной;
3. $D = \prod_{m=1}^{r}\big(\sum \beta_{mk}\frac{\partial}{\partial \eta_k}\big)$.

Очевидно, произведение однородных операторов Березина — снова однородный оператор Березина. Теперь мы можем задать себе тот же вопрос, что и в § 4: какая алгебраическая структура стоит за однородными операторами Березина?

7.2. Категория GA. Объекты категории **GA** — конечномерные комплексные линейные пространства. Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V,W)$ состоит из всевозможных линейных отношений $V \rightrightarrows W$, а также формального элемента $\mathrm{null} = \mathrm{null}_{V,W}$, который не отождествляется ни с каким линейным отношением.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V,W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(W,Y)$. Определим их произведение $QP \in \mathrm{Mor}(V,Y)$ по следующему правилу:

а) произведение null с чем угодно дает null:

$$\mathrm{null}_{W,Y} \cdot P = \mathrm{null}_{V,Y}, \quad Q \cdot \mathrm{null}_{V,W} = \mathrm{null}_{V,Y};$$

б) если $P \neq \mathrm{null}$ и $Q \neq \mathrm{null}$, и

$$\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P = 0, \tag{7.2}$$

$$\operatorname{Im} P + D(Q) = W, \tag{7.3}$$

то Q и P перемножаются как линейные отношения. В противном случае $QP = \mathrm{null}$.

Введем на $\mathrm{Mor}(V,W)$ неотделимую топологию. Для этого положим, что множество $\mathrm{Mor}(V,W) \setminus \mathrm{null}$ снабжено топологией несвязного объединения $\dim V + \dim W$ грассманианов, а $\mathrm{null}_{V,W}$ содержится лишь в одном открытом множестве — всем $\mathrm{Mor}(V,W)$.

Предложение 7.1.
а) Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V,W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(W,Y)$, пусть $QP \neq \mathrm{null}$. Тогда

$$\dim QP = \dim P + \dim Q - \dim W. \tag{7.4}$$

б) Умножение морфизмов — непрерывная по совокупности переменных операция.

Доказательство.
а) Пусть $H = V \oplus W \oplus W \oplus Y$, а его подпространство Z состоит из векторов вида (v,w,w,y). Подпространство $T = Q \oplus P \subset H$ мы определим как множество всех векторов вида (v,w,w',y), где $(v,w) \in P$, $(w',y) \in Q$. В силу равенства (7.3) мы имеем $T + Z = H$. Таким образом $T \cap Z$ имеет размерность

$$\dim Z + \dim T - \dim H = \dim P + \dim Q - \dim W.$$

Пусть, далее, π — проектор в H на $V \oplus Y$ вдоль $W \oplus W$. Легко видеть, что $\pi(T \cap Z)$ — это в точности произведение QP. Более того, проекция π инъективна на $T \cap Z$. В самом деле, $\pi(v,w,w',y) = 0$ означает $v = 0$, $y = 0$, а $(v,w,w',y) \in Z$ означает, что $w = w'$, наконец $(0,w,w,0) \in T$ значит, что w содержится в подпространстве $\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P$, которое в силу (7.2) равно 0. Утверждение а) доказано.

Утверждение б) следует из тех же рассуждений. ■

7.3. Двойственность. Обозначим через V' пространство, двойственное к V, т.е. пространство линейных функционалов на V.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V,W)$. Построим по P *двойственный* морфизм $P' \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V',W')$. Если P — ненулевой элемент, то P', по определению, состоит из всех пар $(f,g) \in V' \oplus W'$ таких, что $f(v) = g(w)$ для всех $(v,w) \in P$. Положим также $\mathrm{null}'_{V,W} = \mathrm{null}_{V',W'}$.

Двойственный морфизм можно описать чуть-чуть по-иному. Рассмотрим в $V \oplus W$ подпространство P°, состоящее из всех векторов вида $(v,-w)$, где $(v,w) \in P$. Тогда $P' \subset (V \oplus W)' = V' \oplus W'$ совпадает с аннулятором подпространства P° в $V \oplus W$ (см. Предварительные сведения, § 2).

Обозначим через $\operatorname{Ann} Q \subset H'$ аннулятор подпространства $Q \subset H$.

Лемма 7.2. Пусть $P : V \rightrightarrows W$, $Q : W \rightrightarrows Y$ — морфизмы категории **GA**. Тогда
а) $(P')' = P$;
б) $\dim P' + \dim P = \dim V + \dim W$; (7.5)
в) $\operatorname{Ker} P' = \operatorname{Ann} D(P)$, $D(P') = \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} P$, $\operatorname{Indef} P' = \operatorname{Ann} \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Im} P' = \operatorname{Ann} \operatorname{Indef} P$;
г) $Q'P' = \mathrm{null}$ в категории **GA** тогда и только тогда, когда $QP = \mathrm{null}$ в категории **GA**;
д) $(QP)' = Q'P'$.

Доказательство.
а) $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} T = T$.
б), в) Упражнение по линейной алгебре.
г) Условия (7.2) и (7.3) при переходе к двойственному морфизму меняются местами.

д) Пусть Q, P, QP — ненулевые морфизмы. Пусть $(f'', f) \in Q'P'$. Тогда существует $f' \in W'$ такой, что $(f'', f') \in Q'$, $(f', f) \in P'$. Пусть (y, v) — произвольный элемент QP. Тогда существует $w \in W$ такое, что $(w, y) \in Q$, $(v, w) \in P$. По определению двойственного морфизма $f''(y) = f'(w) = f(v)$. Таким образом, $(f'', f) \in (QP)'$. Итак, $Q'P' \subset (QP)'$. С другой стороны, размерности $Q'P'$ и $(QP)'$ равны (см. Предложение 7.1), что завершает доказательство. ■

Лемма 7.3. Умножение морфизмов категории **GA** ассоциативно.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$, $R \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$. Пусть $R(QP) = \mathrm{null}$. Это значит, что выполнено одно из четырех условий:

1°. $\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P \neq 0$; $\quad 2^\circ$. $\mathrm{Ker}\, R \cap \mathrm{Indef}(QP) \neq 0$;

3°. $\mathrm{Im}\, P + D(Q) \neq W$; $\quad 4^\circ$. $D(R) + \mathrm{Im}\, QP \neq Y$.

Предположим сначала, что выполнено 1°. Очевидно, $\mathrm{Ker}(RQ) \supset \mathrm{Ker}\, Q$, поэтому $\mathrm{Indef}\, P \cap \mathrm{Ker}(RQ) \neq 0$ и, значит, $(RQ)P = \mathrm{null}$.

Пусть выполнено 2°. Тогда существует ненулевой вектор $y \in \mathrm{Indef}(QP) \cap \mathrm{Ker}\, R$. Возьмем $w \in W$ такой, что $(0, w) \in P$, $(w, y) \in Q$. Если $w = 0$, то $RQ = \mathrm{null}$. Пусть $w \neq 0$. При этом $(y, 0) \in R$, а поэтому $w \in \mathrm{Indef}\, P \cap \mathrm{Ker}(RQ)$.

Следовательно, $(RQ)P = \mathrm{null}$.

Случаи 3° и 4° сводятся к 1° и 2° с помощью перехода к двойственным морфизмам. ■

Предложение 7.4. Данное выше (п. 6.1) определение категории **GD** корректно.

Доказательство. Ассоциативность мы только что проверили. Если $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, W)$, а $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(W, Y)$, и $QP \neq \mathrm{null}$, то в силу предложения 7.1

$$\dim QP = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W).$$

Следовательно, изотропное подпространство QP имеет максимальную возможную размерность. ■

Задача. Пусть $V, W, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$. Пусть $P \subset V \oplus W$, $Q \subset W \oplus Y$ — максимальные изотропные подпространства. Тогда их произведение QP в смысле произведения линейных отношений является максимальным изотропным подпространством в $V \oplus Y$.

7.4. Фундаментальное представление категории GA. Построим сначала функтор $\mathrm{M} = (M, \mu)$ из категории **GA** в категорию **GD**. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$. Положим $M(V) = V \oplus V'$ и снабдим $M(V)$ симметричной билинейной формой

$$\{(v_1, f_1), (v_2, f_2)\} = f_1(v_2) + f_2(v_1),$$

тем самым $M(V)$ становится объектом категории **GD**.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GA}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Положим $\mu(P) := P \oplus P' \subset (V \oplus W) \oplus (V' \oplus W')$, положим, наконец $\mu(\mathrm{null}) = \mathrm{null}$. Функтор построен.

Композиция функтора Spin и функтора M дает нам проективное представление (Λ, λ) категории **GA**. Это представление мы будем называть *фундаментальным представлением категории* **GA** (происхождение названия станет ясно в § III.3).

7.5. Явная конструкция фундаментального представления. Итак, каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$ ставится в соответствие внешняя алгебра $\Lambda(V)$ на V. Опишем операторы $\lambda(P) : \Lambda(V) \to \Lambda(W)$. Разберем сначала 3 простых случая.

A. Пусть $L \subset V$ — подпространство. Пусть $T : V \rightrightarrows L$ — график вложения L в V. Выберем в V какой-нибудь базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что L натянуто на векторы $e_1, \dots, e_m$. Пространство $\Lambda(V)$ мы отождествим с грассмановой алгеброй от переменных $\eta_1, \dots, \eta_n$, а $\Lambda(L)$ — с грассмановой алгеброй от переменных $\eta_1, \dots, \eta_m$. Тогда

$$\lambda(T) f(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_{m+1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \eta_n} f(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

B. Пусть $R : L \rightrightarrows N$ — график оператора. Тогда $\lambda(R)$ — естественное отображение внешних алгебр, соответствующее этому оператору.

C. Пусть $N = W / K$, где K — подпространство, пусть $Q : N \rightrightarrows W$ — график проекции $W \to N$. Выберем базис $e_1, \dots, e_m$ в W так, чтобы K порождалось векторами $e_1, \dots, e_\alpha$. Тогда $\lambda(Q)$ — оператор умножения на поливектор $e_1 \wedge \dots \wedge e_\alpha$ (полезно заметить, что поливектор $e_1 \wedge \dots \wedge e_\alpha$ определяется подпространством K лишь с точностью до умножения на константу, см. п. 1.5). Скажем то же самое чуть-чуть иначе. Пространство $\Lambda(W)$ отождествляется с алгеброй Λ_m от переменных $\xi_1, \dots, \xi_m$, а $\Lambda(N)$ — с алгеброй $\Lambda_{m-\alpha}$ от переменных $\xi_{\alpha+1}, \dots, \xi_m$. Тогда $\lambda(Q)$ можно записать в виде

$$\lambda(Q) f(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_1 \dots \xi_\alpha f(\xi_{\alpha+1}, \dots, \xi_m).$$

Во всех этих случаях нужно проверить, что $\lambda(\cdot)$ — те же операторы, что и в предыдущем пункте. Здесь проще всего проверить соотношения (6.7). Мы опускаем эти вычисления, потому что их проще провести, чем прочитать.

Задача. Проверьте последнее высказывание.

Пусть теперь $P : V \rightrightarrows W$ — произвольное линейное отношение. Тогда P разлагается в произведение $P = QRT$ следующих линейных отношений:

α) $T : V \rightrightarrows D(P)$ — график тождественного вложения $D(P) \to V$;

β) $R : D(P) \rightrightarrows W / \mathrm{Indef}\, P$, оно строится так: P содержится в $D(P) \oplus W$, а R — образ P при естественной проекции $D(P) \oplus W \to D(P) \oplus W / \mathrm{Indef}(P)$. Ясно, что R — график оператора $D(P) \to W / \mathrm{Indef}(P)$;

γ) $Q : W / \mathrm{Indef}\, P \rightrightarrows W$ — график проекции $W \to W / \mathrm{Indef}\, P$.

Теперь $\lambda(P) := \lambda(Q)\lambda(R)\lambda(T)$, а операторы $\lambda(Q)$, $\lambda(R)$, $\lambda(T)$ были описаны выше.

7.6. Явная формула для ядра оператора $\lambda(P)$. Пусть $P : V \rightrightarrows W$ — линейное отношение. Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_n$ в V и базис $f_1, \dots, f_m$ в W. Пусть $p_1, \dots, p_a$ — базис в $\mathrm{Ker}\, P$, $p_i = \sum \beta_{ij} e_j$, а $q_1, \dots, q_b$ — базис в $\mathrm{Indef}\, P$, $q_i = \sum \alpha_{ik} f_k$. Рассмотрим подпространство $\widetilde{P}$ в P, дополнительное к $\mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Indef}\, P$. Пусть A — некоторый оператор $V \to W$, график которого содержит $\widetilde{P}$. Тогда ядро оператора $\lambda(P) : \Lambda(V) \to \Lambda(W)$ задается формулой

$$\prod_{i=1}^{a} \Big(\sum \alpha_{ik} \xi_k\Big) \prod_{i=1}^{b} \Big(\sum \beta_{ij} \overline{\eta}_j\Big) \exp\big\{(-1)^{a+b} \xi A \overline{\eta}^{\mathrm{t}}\big\}.$$

Эта формула мгновенно следует из формулы для ядра (см. п. 6.8) оператора $\mathrm{spin}(\cdot)$.

§ 8. Представления категорий: терминология

8.1. Топологические категории. Пусть $\mathbf{K}$ — категория, и пусть на каждом множестве $\mathrm{Mor}(V, W)$ введена некоторая топология. Мы скажем, что $\mathbf{K}$ — *топологическая категория*, если для любых объектов V, W, Y и любых $P_0 \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q_0 \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ отображения $Q \mapsto QP_0$ из $\mathrm{Mor}(W, Y)$ в $\mathrm{Mor}(V, Y)$ и $P \mapsto Q_0P$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $\mathrm{Mor}(V, Y)$ непрерывны. Подчеркнем, что мы требуем лишь раздельную непрерывность умножения морфизмов.

Представления топологических категорий, естественно, должны удовлетворять каким-то требованиям непрерывности. Пусть $\mathrm{R} = (R, \rho)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Мы требуем, чтобы все пространства $R(V)$ были полными локально выпуклыми пространствами (см. определение в [Reed, Simon (1972)], § V.1), а все операторы $\rho(L)$ — ограниченными. Обозначим через $B(H_1, H_2)$ множество всех ограниченных операторов $H_1 \to H_2$. Функции $Q \mapsto \rho(Q)$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $B(T(V), T(W))$ должны быть непрерывными. Здесь, однако, может возникнуть двусмысленность: на множестве $B(T(V), T(W))$ существует несколько естественных топологий. Мы всегда будем считать, что на $B(T(V), T(W))$ введена слабая топология, т. е. слабейшая топология, в которой для любого $h \in T(V)$ и любого непрерывного линейного функционала l на $T(W)$ функция $\varphi_{h,l}(Q) = l(\rho(Q)h)$ непрерывна. Иными словами, мы требуем непрерывности всех «матричных элементов»

$$\varphi_{h,l}(P) = l(\rho(P)h)$$

представления $\mathrm{R} = (R, \rho)$.

Определим непрерывность проективного представления $\mathrm{R} = (R, \rho)$. Рассмотрим факторпространства $B(T(V), T(W)) \,/\, \mathbb{C}^*$ (мы отождествляем операторы A и λA, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$), и снабдим каждое из них естественной фактортопологией (см. [Bourbaki (1942)]), которая, кстати, неотделима. Все функции $Q \mapsto \rho(Q)$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $B(T(V), T(W))$ должны быть непрерывны.

8.2. Подпредставления. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть в каждом пространстве $T(V)$ выбрано замкнутое подпространство $A(V)$ так, что для любых $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ и $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ выполнено $\tau(P)A(V) \subset A(W)$. Тогда мы получаем следующее представление категории $\mathbf{K}$: каждому объекту V ставится в соответствие пространство $A(V)$, а каждому морфизму $P : V \to W$ — оператор $a(P)$ — ограничение оператора $\tau(P)$ на $A(V)$. В этом случае мы будем говорить, что $\mathrm{A} = (A, a)$ — *подпредставление* представления $\mathrm{T} = (T, \tau)$.

Представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ мы назовем *неприводимым*, если оно не имеет подпредставлений, отличных от самого себя и нулевого подпредставления.

Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть S — подмножество в некотором пространстве $T(V)$. Пусть $A(W)$ — замкнутая линейная оболочка множества всех векторов вида $\tau(P)h$, где $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, а $h \in S$. Несложно убедиться в том, что набор подпространств $A(W)$ задает подпредставление в T.

Задача. Докажите это.

Это подпредставление мы будем называть *циклической оболочкой* множества S.

8.3. Подчиненные представления. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Тогда в каждом пространстве $T(V)$ действует операторами $\tau(P)$ полугруппа $\mathrm{End}(V)$, а также группа $\mathrm{Aut}(V)$. Эти представления полугрупп $\mathrm{End}(V)$ и групп $\mathrm{Aut}(V)$ мы будем называть *представлениями, подчиненными* представлению T.

Лемма 8.1. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ неприводимо. Тогда все подчиненные представления полугрупп $\mathrm{End}(V)$ неприводимы.

Доказательство. Пусть $T(V)$ содержит $\mathrm{End}(V)$-инвариантное подпространство A. Тогда циклическая оболочка A — нетривиальное подпредставление в T. ■

Замечание. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Оно, однако, верно для упорядоченных категорий, см. § III.4.

Задача. Приведите контрпример.

8.4. Прямые суммы. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ — подпредставления в T, и пусть для любого $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ выполнено

$$T(V) = A_1(V) \oplus A_2(V).$$

Тогда мы говорим, что T — *прямая сумма* подпредставлений $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$.

Мы говорим, что $\mathrm{T} = (T, \tau)$ *вполне приводимо*, если T разлагается в прямую сумму неприводимых подпредставлений $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$. Кстати, даже в конечномерном случае (т. е. в случае, когда все $T(V)$ конечномерны) количество этих A_j может быть бесконечным (если для любого V лишь конечное число пространств $A_j(V)$ отлично от 0).

Наконец, если есть набор *линейных* представлений $\mathrm{T}_i = (T_i, \tau_i)$ категории $\mathbf{K}$, то определена их *внешняя прямая сумма* $\mathrm{S} = (S, \sigma)$: пространства $S(V)$ суть $\bigoplus T(V_i)$, а операторы $\sigma(P)$ суть $\bigoplus \tau_i(P)$.

8.5. Сплетающие преобразования. Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$ и $\mathrm{T}' = (T', \tau')$ — два представления категории $\mathbf{K}$. *Сплетающим преобразованием* $A : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ мы назовем набор ограниченных операторов $A(V) : T(V) \to T'(V)$ такой, что для всех $V_1, V_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, $P \in \mathrm{Mor}(V_1, V_2)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(V_1) \arrow[r, "\tau(P)"] \arrow[d, "A(V_1)"'] & T(V_2) \arrow[d, "A(V_2)"] \\
T'(V_1) \arrow[r, "\tau'(P)"] & T'(V_2)
\end{tikzcd}$$

коммутативна (т. е. $\tau'(P)A(V_1) = A(V_2)\tau(P)$). Если мы имеем дело с проективными представлениями, то мы требуем, чтобы $\tau(P)A(V_1)$ и $A(V_2)\tau(P)$ совпадали с точностью до умножения на константу.

Задача. Пусть $A : \mathrm{T} = (T, \tau) \to \mathrm{T}' = (T', \tau')$ — сплетающее преобразование. Рассмотрим его график, т. е. в каждом пространстве $T(V) \oplus T'(V)$ возьмем график $\Gamma(V)$ оператора $A(V)$. Тогда Γ — подпредставление в $\mathrm{T} \oplus \mathrm{T}'$.

Пусть $\mathrm{T} = (T, \tau)$, $\mathrm{T}' = (T', \tau')$ — представления категории $\mathbf{K}$, и пусть существуют сплетающие преобразования $A : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ и $B : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ такие, что $A(V)B(V) = E$, $B(V)A(V) = E$ для всех V. Тогда мы говорим, что *представления* T и T' *эквивалентны*.

Замечание. Наше определение эквивалентности является хорошим лишь в случае конечномерных представлений и $*$-представлений (см. ниже), в более общем случае оно неудачно. Мы уклонимся от обсуждения того, чем его можно было бы заменить.

8.6. $*$-представления. Пусть для любых $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ задано отображение $s : P \mapsto P^*$ из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $\mathrm{Mor}(W, V)$. Мы скажем, что s — *инволюция*, если выполнены тождества

$$P^{**} = P, \quad (PQ)^* = Q^*P^*.$$

Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Мы скажем, что T является *$*$-представлением*, если пространства $T(V)$ гильбертовы и для любого $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ выполнено

$$\tau(P)^* = \tau(P^*).$$

Лемма 8.2. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — некоторое $*$-представление категории $\mathbf{K}$, пусть A — его подпредставление. Выберем в каждом $T(V)$ подпространство $B(V)$ — ортогональное дополнение до $A(V)$. Тогда B — тоже подпредставление.

Доказательство. Пусть $v \in B(V)$. Для любого $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ и любого $w \in A(W)$ мы имеем

$$\langle Pv, w \rangle_W = \langle v, P^*w \rangle_V = 0,$$

так как $P^*w \in A(V)$. Поэтому $Pv \in B(W)$. ■

Назовем элемент $P \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$ *унитарным*, если $P^* = P^{-1}$ (или, иначе, $P^*P = PP^* = E$). Множество всех унитарных элементов $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$ мы обозначим через $\mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$. Ясно, что $\mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$ — подгруппа в $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(V)$.

Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — линейное $*$-представление категории $\mathbf{K}$. Тогда подчиненное представление группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$, очевидно, является унитарным. Чуть менее очевидно следующее высказывание:

Лемма 8.3. Пусть T — проективное $*$-представление категории $\mathbf{K}$. Тогда для любого $P \in \mathrm{Aut}^*_{\mathbf{K}}(V)$ оператор $\tau(P)$ унитарен с точностью до умножения на константу.

Доказательство. Действительно,

$$\tau(P)^*\tau(P) = \lambda \cdot \tau(P^*P) = \lambda\tau(1_V) = \lambda E,$$
$$\tau(P)\tau(P^*) = \mu \cdot \tau(PP^*) = \mu\tau(1_V) = \mu E$$

для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Далее заметим, что $\tau(P)^*\tau(P)$ и $\tau(P)\tau(P^*)$ — положительные самосопряженные операторы, поэтому $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

$$\lambda \cdot \tau(P) = \tau(P)(\tau(P)^*\tau(P)) = (\tau(P)\tau(P^*))\tau(P) = \mu \cdot \tau(P).$$

Следовательно, $\lambda = \mu$ и поэтому оператор $\lambda^{-\frac{1}{2}}\tau(P)$ унитарен. Лемма доказана. ■

8.7. Тензорное произведение. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ и $\mathsf{T}' = (T', \tau')$ — конечномерные представления категории $\mathbf{K}$ или $*$-представления категории $\mathbf{K}$. Определим их *тензорное произведение* $\mathsf{T} \otimes \mathsf{T}' = (T \otimes T', \tau \otimes \tau')$. Пространства $(T \otimes T')(V)$ суть $T(V) \otimes T'(V)$, операторы $(\tau \otimes \tau')(P) : T(V) \otimes T'(V) \to T(W) \otimes T'(W)$ суть $\tau(P) \otimes \tau'(P)$.

Определим далее *k-ю внешнюю степень* представления $\mathsf{T} = (T, \tau)$. Для этого положим (см. § G.4)

$$(\Lambda^k T)(V) := \Lambda^k(T(V)), \quad (\Lambda^k \tau)(P) := \Lambda^k \tau(P).$$

Точно так же определяется *k-я симметричная степень* представления.

8.8. Эквивалентность категорий. Пусть $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — две категории. Эти категории хотелось бы назвать *изоморфными*, если существует биекция $H : \mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \leftrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$ и набор биекций

$$h_{V,W} : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(H(V), H(W))$$

такой, что

$$h_{W,Y}(Q)h_{V,W}(P) = h_{V,Y}(QP)$$

для всех $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(W, Y)$, $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(V, W)$.

Это определение, однако, плохое.

Пример. Пусть $\mathbf{K}$ — категория конечномерных комплексных пространств и линейных операторов. Пусть $\mathbf{L}$ — категория, объекты которой натуральные числа, а морфизмы $m \to n$ — матрицы размера $m \times n$. Тогда $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ не изоморфны, потому что нет биекции $\mathrm{Ob}(\mathbf{K}) \leftrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$.

Пусть $\mathbf{K}$ — категория. Назовем $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ *изоморфными*, если существует пара морфизмов $P : V \to W$, $Q : W \to V$ таких, что $PQ = 1$, $QP = 1$. Составим *«урезанную категорию»* $\mathbf{K}'$. Для этого из каждого класса изоморфных объектов $\mathbf{K}$ выберем по одному объекту. Это будет множество $\mathrm{Ob}(\mathbf{K}')$. Множества $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}'}(V, Y)$ совпадают с $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, Y)$.

Категории $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ мы назовем *эквивалентными*, если их урезанные категории изоморфны.

Пример. Категории $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ из предыдущего примера эквивалентны.

8.9. Подкатегории. Мы говорим, что категория $\mathbf{L}$ — *подкатегория* в $\mathbf{K}$, если $\mathrm{Ob}(\mathbf{L}) \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ и для любых $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{L})$ выполнено $\mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(V, W) \subset \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W)$.

8.10. Факторпредставления. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$. Пусть $\mathsf{A} = (A, \alpha)$ — его подпредставление. *Факторпредставление*

$$\mathsf{S} = (S, \sigma) = \mathsf{T} \,/\, \mathsf{A}$$

определяется следующим образом. Пространства $S(V)$ суть $T(V) \,/\, A(V)$, а операторы $\sigma(P) : T(V) \,/\, A(V) \to T(W) \,/\, A(W)$ суть естественные факторотображения, индуцированные отображениям $\tau(P) : T(V) \to T(W)$.