Глава III

Представления комплексных классических категорий

Эта глава посвящена классификации голоморфных представлений категорий **GD**, **GA** и нескольких близких к ним категорий, мы эти категории называем классическими в честь классических групп. Мы начинаем (§§ 1–2) с обсуждения голоморфных представлений классических групп $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$. Здесь основное утверждение — обманчиво простая теорема Эли Картана о старшем весе, которая дает простую параметризацию множества всех неприводимых представлений — объектов, которые сами по себе устроены совсем не просто. Здесь мы не можем дать систематического изложения предмета (см. книги [Weyl (1939)], [Serre (1966)], [Наймарк (1976)], [Dixmier (1974)], [Желобенко (1976)], [Adams (1969)]) и ограничиваемся изложением лишь одной, самой удобной для наших целей конструкции. Мы предполагаем известной теорию соответствия между группами Ли и алгебрами Ли, более специальных предварительных познаний не предполагается. Читателю, совсем не знакомому с предметом, лучше сначала прочитать §§ 1–2, имея в виду лишь алгебру A_n и не обращая внимания на остальные серии.

Результаты этой главы используются в дальнейшем сравнительно мало.

Слово «представление» везде в этой главе означает конечномерное представление.

§ 1. Представления комплексных классических групп: введение

1.0. Комплексные классические группы и алгебры Ли. Классическими комплексными алгебрами Ли называются алгебры, принадлежащие нижеперечисленным сериям A_n, B_n, C_n, D_n.

а) Алгебра $\mathrm{A}_n \simeq \mathfrak{sl}(n+1)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $(n+1)\times(n+1)$ с нулевым следом.

б) Алгебра $\mathrm{B}_n \simeq \mathfrak{so}(2n+1)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $(2n+1)\times(2n+1)$, сохраняющих симметричную билинейную форму. Нам будет

удобно считать, что матрица этой формы имеет вид $\begin{pmatrix} & & E_n \\ & 1 & \\ E_n & & \end{pmatrix}$, где E_n — единичная матрица размера $n\times n$.

в) Алгебра $\mathrm{C}_n \simeq \mathfrak{sp}(2n)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $2n\times 2n$, сохраняющих невырожденную кососимметричную билинейную форму. Мы будем считать, что матрица этой формы имеет вид $\begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}$.

г) Алгебра Ли серии $\mathrm{D}_n \simeq \mathfrak{so}(2n)$ — алгебра Ли комплексных матриц размера $2n\times 2n$ ($n \geqslant 2$), сохраняющих невырожденную симметричную билинейную форму; нам будет удобно считать, что матрица этой формы имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$.

Например, алгебра D_n состоит из всех блочных матриц размера $(n+n)\times(n+n)$ вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}$, где $B = -B^{\mathrm{t}}$, $C = -C^{\mathrm{t}}$ (см. G.1.9). Переставляя в $\mathbb{C}^{2n}$ базисные элементы, мы можем сделать эту матрицу кососимметричной (как?).

Группы Ли, отвечающие алгебрам A_n, B_n, C_n, D_n — это соответственно группы $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ (см. Предварительные сведения). Группы $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ односвязны. Фундаментальная группа группы $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$ состоит из двух элементов, т. е. универсальная накрывающая группы $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$ двулистна (см. любой учебник по алгебраической топологии).

Задача*. Проверьте, что петля

$$\left(\begin{array}{cc|cc} e^{i\varphi} & & 0 & \\ & 0 & & E_n \\ \hline 0 & & e^{-i\varphi} & \\ & E_n & & 0 \end{array}\right), \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

является образующей фундаментальной группы группы $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$.

1.1. Картановские подалгебры. Пусть алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_{n-1}$, B_n, C_n, D_n реализованы как в п. 1.0. *Картановской подалгеброй* $\mathfrak{h}$ в A_{n-1}, B_n, C_n, D_n называется подалгебра, состоящая из всех диагональных матриц, т. е. соответственно подалгебра, состоящая из всех матриц вида

$$\Lambda_n; \quad \begin{pmatrix} \Lambda_n & & \\ & 1 & \\ & & -\Lambda_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \Lambda_n & \\ & -\Lambda_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \Lambda_n & \\ & -\Lambda_n \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(в случае $\mathfrak{sl}(n)$ выполнено $\sum \lambda_j = 0$).

Прежде всего мы хотим выяснить, как выглядит ограничение неприводимого представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$. Покажем сначала, что все операторы $\rho(X)$, где $X \in \mathfrak{h}$, одновременно диагонализируются в некотором базисе (алгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна, и наше высказывание, собственно, состоит в том, что операторы $\rho(X)$ не имеют жордановых клеток). Это можно сделать, работая лишь с алгебрами Ли (см. [Serre (1966)]), но мы предпочтем иной путь и временно перейдем к группам.

1.2. Унитарный прием Вейля. Пусть G — одна из групп $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$ или двулистная накрывающая группы $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$. Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G (т.е. соответственно $\mathrm{K} = \mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$, $\mathrm{SO}(k)$ или двулистная накрывающая группы $\mathrm{SO}(k)$).

Теорема 1.1. Пусть ρ — голоморфное представление группы G, $\operatorname{Res}\rho$ — ограничение ρ на K. Тогда ρ и $\operatorname{Res}\rho$ имеют одни и те же подпредставления.

Замечание. Мы говорим, что представление ρ *голоморфно*, если операторнозначная функция $\rho(g)$ голоморфна, или, что равносильно, матричные элементы $\rho(g)$ голоморфно зависят от g.

Доказательство. Пусть V — некоторое K-инвариантное подпространство, W — дополнение до V. Запишем $\rho(g)$ как блочный оператор в $V \oplus W$:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} A_{11}(g) & A_{12}(g) \\ A_{21}(g) & A_{22}(g) \end{pmatrix}.$$

Операторнозначная функция $A_{21}(g)$ тождественно равна нулю на K (это равносильно K-инвариантности V). Поэтому в силу теоремы единственности для голоморфных функций (см. замечание ниже) $A_{21}(g) = 0$ на G, что и требовалось доказать. ■

Замечание. Пусть M — комплексное связное многообразие, а L — вещественное подмногообразие половинной размерности. Обозначим через $T_x(L)$ и $T_x(M)$ касательные пространства к L и M в точке $x \in L$. Пусть в некоторой точке $x \in L$ выполнено $T_x(M) = T_x(L) \oplus iT_x(L)$. Пусть f — голоморфная функция на M. Тогда условие $f(z) = 0$ на L влечет $f(z) = 0$ на M (см. любой учебник по многомерному комплексному анализу, например, [Шабат (1976)]). У нас $M = \mathrm{G}$, $L = \mathrm{K}$, а в качестве x можно выбрать $x = E$.

В качестве следствия мы получаем теорему

Теорема 1.2. Голоморфные представления комплексных классических групп вполне приводимы.

Доказательство. В самом деле, представления компактных групп вполне приводимы. ■

Прием, использованный при доказательстве этой теоремы, называется *унитарным приемом Г. Вейля*.

Вспоминая, что представления группы Ли и соответствующей алгебры Ли — это по существу одно и то же, мы можем переформулировать теорему в виде

Теорема 1.3. Представления классических алгебр A_n, B_n, C_n, D_n вполне приводимы.

Предложение 1.4. Пусть ρ — представление алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_{n-1}$, B_n, C_n, D_n. Ограничение ρ на картановскую подалгебру вполне приводимо.

Доказательство. Картановской подалгебре соответствует подгруппа $\mathbb{T}$ в $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$, состоящая соответственно из матриц вида

$$M; \quad \begin{pmatrix} M & & \\ & 1 & \\ & & M^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} M & \\ & M^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} M & \\ & M^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}, \quad \mu_j \neq 0 \tag{1.1}$$

(в случае $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ мы имеем $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n = 1$). Во всех случаях группа $\mathbb{T}$ изоморфна произведению нескольких экземпляров группы $\mathbb{C}^*$.

Обсудим сначала случай $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Любое представление ρ алгебры A_{n-1} интегрируется до представления $\widetilde{\rho}$ группы $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Ограничим это представление на подгруппу $\mathbb{T}$ и покажем, что это ограничение вполне приводимо. Пусть $\mathbb{T}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{T}$ — подгруппа, состоящая из матриц вида (1.1) с $|\mu_j| = 1$. Теперь к комплексной группе $\mathbb{T}$ и ее компактной подгруппе $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ мы можем применить прием Вейля.

Случай $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ ничем не отличается от рассмотренного. В случае же серий B_n и C_n нас интересуют не сами группы $\mathrm{SO}(k,\mathbb{C})$, а их двулистные накрывающие. Подгруппа, соответствующая картановской подалгебре, — это или сама группа $\mathbb{T}$, или ее двулистная накрывающая (на самом деле выполнено второе, но нам это сейчас не интересно). Но двулистная накрывающая $\mathbb{T}$ сама представима в виде произведения групп $\mathbb{C}^*$, и мы снова можем применить трюк Вейля. ■

1.3. Веса и корни. Итак, рассмотрим неприводимое представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$, B_n, C_n, D_n в пространстве V. Как мы только что показали, ограничение $\operatorname{Res}\rho$ представления ρ на картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$ в некотором базисе состоит из диагональных операторов (алгебра $\mathfrak{h}$ абелева, поэтому ее неприводимые представления одномерны (см. Предварительные сведения, § 5), а с другой стороны, $\operatorname{Res}\rho$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений).

Ненулевой вектор $v \in V$ называется *весовым*, если для любого $h \in \mathfrak{h}$ выполнено $\rho(h)v = \lambda(h)v$, где $\lambda(h) \in \mathbb{C}$. *Веса́* представления ρ — это такие линейные функционалы $\mu(h)$ на $\mathfrak{h}$, что $\rho(h)w = \mu(h)w$ для некоторого $w \neq 0$. Если λ — вес представления, то *весовое подпространство* V_λ — это пространство всех векторов $v \in V$ таких, что $\rho(h)v = \lambda(h)v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Ясно, что

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda, \tag{1.2}$$

где суммирование ведется по всем весам представления (в самом деле, $\operatorname{Res}\rho$ диагонально в некотором базисе).

Корни алгебры $\mathfrak{g}$ — это ненулевые веса присоединенного представления. Весовые векторы присоединенного представления, отвечающие ненулевому весу α, называются *корневыми векторами*. Иными словами, вектор $x \in \mathfrak{g}$ является корневым, если для любого $h \in \mathfrak{h}$ выполнено $[h,x] = \lambda(h)x$, где $\lambda(h) \in \mathbb{C}$, и линейный функционал $\lambda(h)$ отличен от нуля. Подпространство в $\mathfrak{g}$ всех корневых векторов веса α обозначается через $\mathfrak{g}_\alpha$ и называется *корневым подпространством*.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$. Тогда корневые векторы — это просто матричные единицы E_{ij}, где $i \neq j$ (через E_{ij} обозначена матрица, у которой на ij-месте стоит 1, а остальные матричные элементы — нули). Корни — это линейные функционалы $\lambda_i - \lambda_j$ на $\mathfrak{g}$ (мы сохраняем обозначения п. 1.1).

Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{B}_n$. Тогда корни суть $\lambda_i + \lambda_j$, $-\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_j$ $(i \neq j)$ и $\pm\lambda_j$.

В случае C_n корни суть $\lambda_i + \lambda_j$, $-\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_j$ (где $i \neq j$) и $\pm 2\lambda_j$.

Наконец, в случае D_n корни суть $\lambda_i + \lambda_j$, $-\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_j$ $(i \neq j)$.

Задача. Проверьте это.

Отметим, что во всех случаях подпространства $\mathfrak{g}_\alpha$ одномерны. Подпространство в $\mathfrak{g}$, состоящее из всех векторов веса 0, во всех случаях совпадает с $\mathfrak{h}$.

Предложение 1.5. Пусть ρ — представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Пусть $v \in V_\mu$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$. Тогда $\rho(x)v \in V_{\mu+\alpha}$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned}\rho(h)\rho(x)v &= \rho(x)\rho(h)v + \rho([h,x])v = \\ &= \rho(x)\mu(h)v + \rho(\alpha(h)x)v = \\ &= (\mu(h)+\alpha(h))\rho(x)v.\end{aligned}$$

■

Следствие 1.6. Пусть $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$. Тогда $[x,y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Доказательство: применяем предложение 1.5 к присоединенному представлению. ■

1.4. Пример: алгебра $A_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Рассмотрим в A_1 следующие элементы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm, \qquad [E_+, E_-] = H. \tag{1.3}$$

Картановская подалгебра натянута на H, а корневые векторы суть $E_\pm$. Пусть ρ — неприводимое конечномерное представление алгебры A_1 в пространстве V. Разложим его в сумму весовых подпространств $V = \bigoplus V_\beta$, где V_β состоит из всех $v \in V$ таких, что $\rho(H)v = \beta v$. Пусть s таково, что $V_s \neq 0$, а $V_\beta = 0$ при всех s таких, что $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re} s$. Пусть w_0 — ненулевой вектор из V_s. Тогда, по предложению 1.5, выполнено $\rho(E_+)w_0 \in V_{s+2}$, а значит, $\rho(E_+)w_0 = 0$. Рассмотрим набор векторов $w_j = E_-^j w_0$ (мы пользуемся обычной вольностью обозначений и оператор $\rho(X)$ обозначаем через X). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} E_+ w_j &= E_+ E_-^j w_0 = \\ &= E_- E_+ (E_-^{j-1} w_0) + [E_+, E_-] E_-^{j-1} w_0 = \\ &= E_- E_+ (E_-^{j-1} w_0) + H w_{j-1} = \\ &= E_- E_+ E_-^{j-1} w_0 + (s - 2(j-1)) w_{j-1} = \\ &= E_-^2 E_+ E_-^{j-2} w_{j-2} + (s - 2(j-2)) w_{j-1} + (s - 2(j-1)) w_{j-1} = \\ &= E_-^j E_+ w_0 + [s + (s-2) + \ldots + (s - 2(j-1))] w_{j-1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$E_- w_j = w_{j+1}, \quad H w_j = (s-2j) w_j, \quad E_+ w_j = j(s-j+1) w_{j-1}. \tag{1.4}$$

Из формул (1.4) видно следующее.

Во-первых, линейная оболочка векторов w_j является подпредставлением в V. Так как V неприводимо, то оно натянуто на векторы w_0, w_1 . . .

Далее, так как V конечномерно, то при достаточно больших j выполнено $w_j = 0$. Пусть $w_j = 0$, а $w_{j-1} \neq 0$. Тогда из последнего равенства (1.4) вытекает, что или $s = 0$, или $j = s+1$.

Итак, неприводимые представления $V(s)$ алгебры A_1 нумеруются целым параметром $s = 0, 1, 2, \ldots$. Размерность $V(s)$ равна $s+1$, и в некотором подходящем базисе w_0, $w_1 \ldots, w_s$ представление задается формулами

$$\begin{gathered} H w_j = (s-2j) w_j, \quad E_- w_k = w_{k+1}, \quad E_- w_s = 0, \\ E_+ w_m = 2m(s-m+1) w_{m-1}, \quad E_+ w_0 = 0, \end{gathered}$$

где $k \neq s$, $m \neq 0$.

Замечание. Опишем наше представление на уровне группы Ли $SL(2,\mathbb{C})$. Пусть $V(s)$ — пространство однородных многочленов от x, y степени s. Группа $SL(2,\mathbb{C})$ действует в $V(s)$ операторами вида

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x,y) = f(ax+by, cx+dy),$$

векторы w_j суть $\frac{s!}{(s-j)!} x^{s-j} y^j$. Алгебра Ли A_1 действует в $V(s)$ по формулам

$$H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_+ = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_- = y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Подробнее о представлениях $SL(2,\mathbb{C})$ см., например, [Cartan (1938)].

1.5. Повышающие и понижающие подалгебры. *Повышающую подалгебру* $\mathfrak{n}_+$ в $\mathfrak{g} = A_{n-1}$, B_n, C_n, D_n мы определим как подалгебру, состоящую соответственно из всех матриц вида

$$T; \quad \begin{pmatrix} T & l & P \\ 0 & 0 & -l^t \\ 0 & 0 & -T^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} T & Q \\ 0 & -T^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} T & P \\ 0 & -T^t \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где $P = -P^t$, $Q = Q^t$, а T — верхнетреугольная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{n-1,n} \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание. Переставив подходящим образом базисные элементы, мы можем сделать каждую из матриц (1.6) верхнетреугольной. Например, в случае серий C_n, D_n нужно сменить порядок $e_1, \ldots, e_{2n}$ базисных элементов на $e_1, \ldots, e_n, e_{2n}, e_{2n-1}, \ldots, e_{n+1}$.

Понижающая подалгебра $\mathfrak{n}_-$ состоит из всех матриц $S \in \mathfrak{g}$ таких, что $S^t \in \mathfrak{n}_+$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-. \tag{1.7}$$

При этом

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] = \mathfrak{n}_+. \tag{1.8}$$

Пусть α — корень, X_α — корневой вектор. Легко видеть, что либо $X_\alpha \in \mathfrak{n}_+$, либо $X_\alpha \in \mathfrak{n}_-$ (в этом можно убедиться перебором, можно и вывести из (1.7) и (1.8)). В первом случае мы называем корень *положительным*, во втором —

отрицательным. Множество всех корней мы обозначим через Δ, положительных корней — через Δ_+, отрицательных — через Δ_-. Легко видеть, что $\alpha \in \Delta_+$ равносильно $(-\alpha) \in \Delta_-$.

Перечислим положительные корни

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{A}_n: & \lambda_i - \lambda_j, \text{ где } i < j; & & \\
\mathrm{B}_n: & \lambda_i - \lambda_j, \text{ где } i < j; & \lambda_i + \lambda_j, \text{ где } i \neq j; & \lambda_j; \\
\mathrm{C}_n: & \lambda_i - \lambda_j, \text{ где } i < j; & \lambda_i + \lambda_j; & 2\lambda_j; \\
\mathrm{D}_n: & \lambda_i - \lambda_j, \text{ где } i < j; & \lambda_i + \lambda_j, \text{ где } i \neq j. &
\end{array}
$$

Положительный корень α называется *простым*, если он не представим в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in \Delta_+$.

Пример. Корень $\lambda_1 - \lambda_5$ в A_n не является простым: $\lambda_1 - \lambda_5 = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_5)$. Ясно, что простые корни в A_n суть $\mu_j = \lambda_{n+j-1} - \lambda_{n+j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Перечислим простые корни μ_j для остальных трех серий:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{B}_n: & \mu_j = \lambda_{n-j+1} - \lambda_{n-j+2}, \text{ где } n \geqslant j \geqslant 2; & \mu_1 = \lambda_n; \\
\mathrm{C}_n: & \mu_j = \lambda_{n-j+1} - \lambda_{n-j+2}, \text{ где } n \geqslant j \geqslant 2; & \mu_1 = 2\lambda_n; \\
\mathrm{D}_n: & \mu_j = \lambda_{n-j+1} - \lambda_{n-j+2}, \text{ где } n \geqslant j \geqslant 3; & \mu_\pm = \lambda_{n-1} \pm \lambda_n.
\end{array}
$$

Замечание. Опять-таки, может, было бы приятнее переупорядочить базис так, как это делалось выше, тогда во всех случаях, кроме D_n, простой корень был бы разностью соседних собственных значений матрицы $h \in \mathfrak{h}$.

Обозначим через $\mathfrak{h}'$ пространство линейных функционалов на $\mathfrak{h}$.

Предложение 1.7.

а) Простые корни образуют базис в $\mathfrak{h}'$.

б) Любой положительный корень $\beta \in \Delta$ представим в виде $\sum n_i \mu_i$, где μ_i — простые корни, а n_i — неотрицательные целые числа.

в) Пусть μ_i — простые положительные корни, а X_{μ_i} — некоторые корневые векторы. Тогда X_{μ_i} является системой образующих алгебры $\mathfrak{n}_+$.

Доказательство. Все проверяется перебором. Чтобы убедить читателя в очевидности в), обсудим случай $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$. Обозначим через E_{ij} матрицу, у которой на ij-м месте стоит 1, а остальные матричные элементы — нули. Простому корню $\mu = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ соответствует корневой вектор $E_{i,i+1}$. Далее

$$E_{i,i+2} = [E_{i,i+1}, E_{i+1,i+2}]; \quad E_{i,i+3} = [E_{i,i+1}, E_{i+1,i+3}]; \quad \text{и т.д.}$$

■

1.6. Теорема Картана о старшем весе.

Теорема 1.8. Пусть ρ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$, B_n, C_n, D_n в пространстве V. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой вектор $v \in V$ такой, что $\rho(p)v = 0$ для всех $p \in \mathfrak{n}_+$. При этом v является весовым вектором, и его вес $\alpha \in \mathfrak{g}'$ однозначно определяет представление ρ.

Вектор v называется *вектором старшего веса* представления, а линейный функционал α — *старшим весом* представления.

Введем в $\mathfrak{h}'$ частичное упорядочение. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — простые корни (напомним, что они образуют базис в $\mathfrak{h}'$). Мы скажем, что $\alpha \gg \beta$, если $\alpha - \beta = \sum t_j \mu_j$, где $t_j \geqslant 0$ (в частности, $t_j \in \mathbb{R}$). Старший вес — это максимальный из весов представления (в смысле нашего упорядочения).

1.7. Доказательство теоремы о старшем весе.

Лемма 1.9. Пусть ρ — конечномерное представление классической комплексной алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда существует ненулевой весовой вектор v такой, что $\rho(p)v = 0$ для всех $p \in \mathfrak{n}_+$.

Доказательство. Возьмем в множестве весов представления ρ какой-нибудь элемент α, максимальный относительно упорядочения, введенного в предыдущем пункте, тогда в качестве v можно выбрать любой вектор веса α (см. предложение 1.5). ■

Теорема 1.10. Пусть ρ — конечномерное представление классической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V, а $v \in V$ — ненулевой весовой вектор такой, что $\rho(q)v = 0$ для всех $q \in \mathfrak{n}_+$. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_N$ — все отрицательные корни, а $X_{\theta_1}, \ldots, X_{\theta_N}$ — корневые векторы. Тогда линейная оболочка M_v всех векторов вида

$$v_{p_1,\ldots,p_N} = X_{\theta_1}^{p_1} \ldots X_{\theta_N}^{p_n} v,$$

является неприводимым подпредставлением в V.

Следствие 1.11. Следующие утверждения равносильны:

а) представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ неприводимо;

б) существует единственный с точностью до пропорциональности весовой вектор v, удовлетворяющий условию $\rho(q)v = 0$ для всех $p \in \mathfrak{n}_+$.

Доказательство следствия. Пусть ρ приводимо. Тогда в каждом его подпредставлении есть по такому вектору. Обратно, пусть есть два таких непропорциональных вектора v и v' с весами λ и λ'. Но множества M_v и $M_{v'}$ не могут совпадать ($v \in M_{v'}$ влечет $\lambda \ll \lambda'$, а $v' \in M_v$ влечет $\lambda' \ll \lambda$, наконец, если $\lambda = \lambda'$, то $v \notin M_{v'}$, а $v' \notin M_v$). ■

Замечание. Это следствие дает способ проверки неприводимости представления. Другой способ дает сама теорема: иногда удается явно проверить, что M_v совпадает со всем представлением.

Доказательство теоремы 1.10. Векторы $v_{p_1,\ldots,p_N}$ являются весовыми, поэтому подпространство M_v инвариантно относительно $\mathfrak{h}$.

Обозначим через M_v^n множество всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{p_1+\ldots+p_N \leqslant n} c_{p_1\ldots p_N} v_{p_1\ldots p_N}.$$

Лемма 1.12. Пусть $p_1 + \ldots + p_N = n$. Тогда

$$X_{\theta_j} v_{p_1\ldots p_n} = v_{p_1\ldots p_{j-1}(p_{j+1}+1)p_{j+1}\ldots p_N} + h,$$

где $h \in M_v^n$.

Доказательство по индукции. Утверждение верно при $n = 0$. Пусть оно верно при $n = k$. Пусть p_α — первое из чисел p_i, отличное от нуля. В случае $j \leqslant \alpha$ наше высказывание очевидно. Пусть $j > \alpha$. Тогда

$$X_{\theta_j}\left(X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v\right) = X_{\theta_j}X_{\theta_\alpha}\left(X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v\right) = $$
$$= \left[X_{\theta_j}, X_{\theta_\alpha}\right]X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v + X_{\theta_\alpha}X_{\theta_j}\left(X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v\right).$$

Если вектор $\left[X_{\theta_j}, X_{\theta_\alpha}\right]$ отличен от нуля, то он является корневым, т. е. имеет вид X_{θ_k}. Теперь мы можем применить предположение индукции к первому слагаемому. В силу предположения индукции $X_{\theta_j}X_{\theta_\alpha}^{p_\alpha-1}\dots X_{\theta_N}^{p_N}v$ представимо в виде

$$v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,\dots,p_j+1,\dots,p_N} + h',$$

где $h' \in M_v^{k-1}$. Но $X_{\theta_j}h' \in M_v^k$, и утверждение становится очевидным. ■

Лемма 1.13. Пусть $p_1 + \ldots + p_N = n$. Тогда

$$X_{-\theta_j}v_{p_1\dots p_N} \in M_v^n.$$

Доказательство по индукции. Пусть утверждение верно при $n \leqslant k$. Пусть p_α — первое из чисел p_i, отличное от 0.

$$X_{-\theta_j}v_{0,\dots,0,p_\alpha,\dots,p_N} = X_{-\theta_j}X_{\theta_\alpha}v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,\dots,p_N} =$$
$$= \left[X_{-\theta_j}, X_{\theta_\alpha}\right]v_{0,\dots,p_\alpha-1,\dots,p_N} + X_{\theta_\alpha}\left(X_{-\theta_j}v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,\dots,p_N}\right).$$

Ко второму слагаемому применяем предположение индукции. По предположению индукции $X_{-\theta_j}v_{0,\dots,0,p_\alpha-1,0,\dots,p_N} \in M_v^{k-1}$, а следовательно, по предыдущей лемме второе слагаемое лежит в M_v^k. Далее, $v_{0,\dots,p_\alpha-1,0,\dots,p_N} \in M_v^{k-1}$, а для $Y = [X_{-\theta_j}, X_{\theta_\alpha}]$ есть четыре возможности:

1. $Y = 0$ и тогда все очевидно;
2. $\theta_\alpha - \theta_j = 0$, следовательно, $Y \in \mathfrak{h}$, и этот случай тоже очевиден;
3. $\nu = \theta_\alpha - \theta_j \in \Delta_-$, тогда $Y \in \mathfrak{g}_\nu$, и мы применяем предположение индукции;
4. $\nu = \theta_\alpha - \theta_j \in \Delta_+$, тогда $Y \in \mathfrak{g}_\nu$ и мы применяем предыдущую лемму. ■

Из этих двух лемм следует, что $M_v = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} M_v^k$ является подпредставлением. Неприводимость M_v следует из леммы 5.5 предварительных сведений (для ее применения нужно или перейти к группам, или повторить доказательство для алгебр Ли). ■

Доказательство теоремы о старшем весе. Нам осталось проверить, что два модуля с одним старшим весом изоморфны. Итак, пусть ρ, ρ° — представления со старшим весом λ в пространствах V, V°, пусть v, v° — векторы старшего веса. Рассмотрим представление $\rho \oplus \rho^\circ$. Вектор $(v, v^\circ) \in V \oplus V^\circ$ имеет вес λ и аннулируется всеми операторами вида $\rho(p) \oplus \rho^\circ(p)$, где $p \in \mathfrak{n}_+$. Применим к (v, v°) теорему 1.10. Пусть $\widetilde{V}$ — циклическая оболочка вектора (v, v°). Тогда $\widetilde{V}$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным подпространством в $V \oplus V^\circ$, отличным от $V \oplus 0$ и $0 \oplus V^\circ$. Поэтому $\widetilde{V} \cap (V \oplus 0)$, $(0 \oplus V^\circ) \cap \widetilde{V}$ должны быть подпространствами соответственно в $V \oplus 0$ и $0 \oplus V^\circ$, в силу неприводимости V и V° эти пересечения равны 0. Аналогично проекции $\widetilde{V}$

на V и V° являются подпредставлениями в V и V° (как образы сплетающих операторов), а, значит, совпадают с V и V°. Итак, $\widetilde{V}$ — график оператора $V \to V^\circ$. Инвариантность $\widetilde{V}$ относительно $\mathfrak{g}$ равносильна тому, что этот оператор является сплетающим. Теорема доказана. ■

Подробнее о модулях со старшим весом см., например [Dixmier (1974)], глава VII.

1.8. Доминантные веса. Следующий вопрос: какие линейные функционалы могут быть старшими весами представлений?

Пусть α — корень алгебры $\mathfrak{g}$, а Y_α и $Y_{-\alpha}$ — ненулевые векторы в $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Пусть $K_\alpha = [Y_\alpha, Y_{-\alpha}]$. Ясно, что $K_\alpha \in \mathfrak{h}$; в самом деле, вес K_α в присоединенном представлении равен $(-\alpha) + \alpha = 0$ (см. предложение 1.5.). Итак,

$$[Y_\alpha, Y_{-\alpha}] = K_\alpha, \qquad [K_\alpha, Y_{\pm\alpha}] = \alpha(K_\alpha)Y_{\pm\alpha}.$$

Отсюда видно, что линейная оболочка $\mathfrak{Z}_\alpha$ векторов Y_α, $Y_{-\alpha}$, K_α является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{Z}_\alpha$ изоморфна $\mathrm{A}_1 \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Выберем в $\mathfrak{Z}_\alpha$ базис так, чтобы выполнялись соотношения (1.3), для этого положим

$$H_\alpha = \frac{2}{\alpha(K_\alpha)}K_\alpha, \qquad E_{\pm\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\alpha(K_\alpha)}}\,Y_{\pm\alpha}.$$

Тогда

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \qquad [H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}.$$

Обсудим, как может быть устроено ограничение неприводимого представления ρ классической алгебры $\mathfrak{g}$ в конечномерном пространстве V на подалгебру $\mathfrak{Z}_\alpha$. Для наших целей достаточно разобрать случай, когда α — простой корень.

Легко видеть, что верен следующий экспериментальный факт (во всех частных случаях он тривиален).

Лемма 1.14. Векторы вида H_{μ_i}, где μ_i — простые корни в $\mathfrak{g}$, образуют базис в $\mathfrak{h}$.

Предложение 1.15. Пусть λ — вес конечномерного (!) представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть μ_i — простой корень. Тогда $\lambda(H_{\mu_i}) \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. См. п. 1.4: в конечномерных представлениях алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ все веса — целые. ■

Введем в $\mathfrak{h}'$ следующие координаты: каждому $\lambda \in \mathfrak{h}'$ мы ставим в соответствие набор чисел $\left(\lambda(H_{\mu_1}), \dots, \lambda(H_{\mu_n})\right)$. Если λ — вес конечномерного представления, то его координаты, как мы только что видели, — целые числа. Множество всех векторов в $\mathfrak{h}'$ с целыми координатами обычно называется *решеткой весов* алгебры $\mathfrak{g}$.

Предложение 1.16. Пусть λ — старший вес (конечномерного) представления алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$, B_n, C_n, D_n, пусть μ_i — простые корни. Тогда $\lambda(H_{\mu_i}) \geqslant 0$.

Доказательство. В обозначениях п. 1.4 мы имеем $\lambda(H_{\mu_i}) = s$. ■

Доминантным весом алгебры $\mathfrak{g}$ называется линейный функционал λ на $\mathfrak{h}$ такой, что $\lambda(H_{\mu_i})$ — неотрицательные целые числа для всех простых корней μ_i.

Итак, мы видели, что старший вес неприводимого представления обязательно является доминантным. Следующий вопрос: верно ли обратное? Как мы сейчас увидим, ответ на этот вопрос положителен.

1.9. Фундаментальные веса. Рассмотрим два представления алгебры $\mathfrak{g}$ — представление ρ_1 со старшим весом λ_1 и вектором старшего веса v_1 и представление ρ_2 со старшим весом λ_2 и вектором старшего веса v_2. Рассмотрим их тензорное произведение. Ясно, что вектор $v_1 \otimes v_2$ аннулируется всеми операторами вида

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(p) = \rho_1(p) \otimes E + E \otimes \rho_2(p),$$

где $p \in \mathfrak{n}_+$, ясно также, что вес $v_1 \otimes v_2$ равен $\lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, циклическая оболочка вектора $v_1 \otimes v_2$ является неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом $\lambda_1 + \lambda_2$ (см. теорему 1.10).

Пусть λ — доминантный вес алгебры $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n$, B_n, C_n, D_n. Поставим ему в соответствие набор целых неотрицательных чисел $\big(\lambda(H_{\mu_1}), \ldots, \lambda(H_{\mu_n})\big) \in \mathbb{Z}_+^n$, как в п. 1.8. Вес λ называется *фундаментальным*, если в этом наборе все числа — нули, за исключением одной единицы. В силу замечания, с которого мы начали этот пункт, для того, чтобы научиться строить все конечномерные представления алгебры $\mathfrak{g}$, нам достаточно научиться строить все представления, отвечающие фундаментальным весам. Это будет сделано в следующем параграфе. Представления, старшие веса которых фундаментальны, называются *фундаментальными*.

Перечислим все фундаментальные веса $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (нумерация весов соответствует нумерации простых корней из п. 1.5) для классических алгебр Ли:

A_n: $\psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}$, $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$;

B_n: $\psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}$, $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$; $\quad \psi_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$;

C_n: $\psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}$, $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$;

D_n: $\psi_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-j}$, $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$; $\quad \psi_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} \pm \lambda_n)$.

1.10. Диаграммы Дынкина. Теория классических комплексных алгебр Ли включается в чуть более общую теорию простых алгебр Ли (алгебра Ли называется *простой*, если она не содержит нетривиальных идеалов). Великая классификационная теорема Киллинга (1888–1890) утверждает, что кроме классических алгебр $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ существует лишь 5 так называемых особых простых алгебр. Они обозначаются через $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$ и имеют соответственно размерности 14, 52, 78, 133, 248. Алгебры $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6$, интерпретируются в терминах линейной алгебры над числами Кэли (такая линейная алгебра, как известно, имеет смысл лишь в малых размерностях), для алгебр E_7 и E_8 это, вроде бы, не так.

Вопрос о том, как связана идеология настоящей книги с особыми математическими объектами (числами Кэли, особыми группами и алгебрами Ли, спорадическими конечными группами), выглядит совершенно осмысленно; я, однако, могу сказать мало вразумительного на эту тему.

Для простых алгебр Ли можно в абстрактных терминах определить картановские подалгебры, далее определяются веса, корни, простые корни и т. д. В каждой простой подалгебре Ли есть единственная с точностью до пропорциональности невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма $k(\cdot\,,\cdot)$ — так называемая форма Киллинга (инвариантность означает равенство $k([x,y],z) = k(y,[x,z])$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$). В классических алгебрах она задается формулой $k(p,q) = \mathrm{tr}(pq)$.

Ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{h}$ во всех алгебрах $\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ задается формулой

$$k\big((\lambda_1, \ldots, \lambda_n); (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)\big) = s \sum \lambda_j \lambda'_j,$$

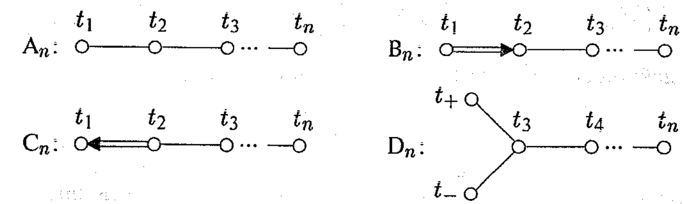
где λ_j — собственные числа матрицы Λ, см. п. 1.1, а $s > 0$.

Имея билинейную форму в $\mathfrak{h}$, мы, естественно, получаем и билинейную форму в $\mathfrak{h}'$. В частности, мы получаем и билинейную форму на решетке весов в $\mathfrak{h}'$. На решетке весов (или, точнее, на вещественном подпространстве, порожденном решеткой весов) эта билинейная форма (как легко видеть в случае $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$) положительно определена. При этом система корней алгебры $\mathfrak{g}$ образует очень красивую картинку в вещественном евклидовом пространстве $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ — пространстве линейных комбинаций корней с вещественными коэффициентами.

Задача. Нарисуйте эту картинку в случае A_2, $\mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_2$, $\mathrm{A}_3 = \mathrm{D}_3$, B_3, C_3.

Как заметил Е. Б. Дынкин, взаимное расположение простых корней в пространстве $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ полностью определяет простую алгебру Ли. А именно, каждому простому корню α ставится в соответствие вершина t_α некоторого графа. Вершины t_α и t_β соединяются $4\cos^2\varphi$ ребрами, где φ — угол между α и β; замечательно, что число $4\cos^2\varphi$ — всегда целое. Если корни α и β имеют разную длину, то в сторону длинного корня направляется стрелка.

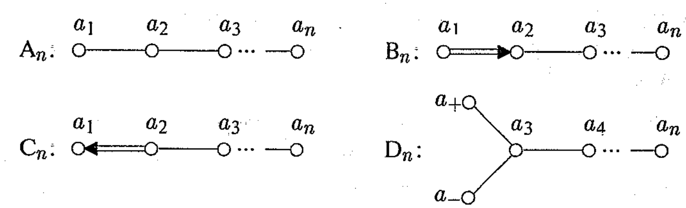
В случае A_n, B_n, C_n, D_n мы получаем



§ 2. Фундаментальные представления классических групп

Этот параграф содержит конструкции всех фундаментальных представлений классических групп. Доказательство неприводимости и вычисление старшего веса во всех случаях является несложным упражнением, и мы его в большинстве случаев опускаем (подробнее, см. [Adams (1969)]), о способах проверки неприводимости см. выше п. 1.7 (следствие 1.11 и следующее замечание).

2.1. Итак, каждому неприводимому конечномерному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ можно поставить в соответствие набор числовых отметок на диаграмме Дынкина



(2.1)

Это делается следующим образом. Пусть Λ — старший вес представления, пусть μ_α — простые корни. Тогда $a_\alpha = \Lambda(H_{\mu_\alpha})$.

Цель этого параграфа — построить все фундаментальные представления π_α алгебр $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ и соответствующих групп. Напомним, что все числовые отметки фундаментального представления π_α равны 0, кроме отметки a_α, которая равна 1.

Предположим, мы умеем строить все фундаментальные представления π_α алгебры $\mathfrak{g}$. Построим представление с набором числовых отметок $\{a_\alpha\}$. Для этого достаточно в тензорном произведении $\bigotimes\left(\pi_\alpha^{\otimes a_\alpha}\right)$ взять циклическую оболочку вектора старшего веса. Это и будет искомое представление.

2.2. Серия A_n. Пусть ρ — *тождественное* представление группы $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ (каждой матрице ставится в соответствие она сама). Фундаментальные представления группы $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ — это просто внешние степени $\Lambda^1\rho = \rho$, $\Lambda^2\rho, \ldots, \Lambda^n\rho$ представления ρ.

В самом деле, рассмотрим грассманову алгебру Λ_{n+1} от антикоммутирующих переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$. Пространство $\Lambda^k(\mathbb{C}^{n+1})$ мы реализуем как пространство Λ^k_{n+1} многочленов степени k от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$. Группа $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ действует в Λ^k_{n+1} заменами переменных

$$\left(\Lambda^k\rho(P)\right)f(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = f\left(\sum p_{1j}\xi_j, \ldots, \sum p_{(n+1),j}\xi_j\right),$$

алгебра Ли действует в Λ^k_n дифференциальными операторами вида

$$\sum q_{ij}\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}.$$

При этом элементам E_{ij} (где $j > i$) повышающей подалгебры соответствуют операторы $\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}$. Легко видеть, что вектор $\xi_1\xi_2\ldots\xi_k$ аннулируется всеми операторами вида $\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}$ при $i < j$, а его вес равен $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.

Задача.

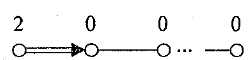
а) Докажите, что $\xi_1\xi_2\ldots\xi_k$ — единственный вектор в Λ^k_{n+1}, аннулируемый операторами $\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}$ при $i < j$.

б) Докажите, что циклическая оболочка вектора $\xi_1\ldots\xi_k$ совпадает со всем пространством Λ^k_{n+1}.

Из любого из утверждений а), б) задачи вытекает неприводимость представления $\Lambda^k\rho$, см. Следствие 1.11. Итак, в нумерации п. 1.9 фундаментальные представления π_j суть $\Lambda^{n+1-j}\rho$.

2.3. Серия B_n. Пусть ρ — тождественное представление группы $\mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$ в $\mathbb{C}^{2n+1}$. Тогда фундаментальные представления $\pi_n, \pi_{n-1}, \ldots, \pi_2$ (нумерация п. 1.9) суть $\rho, \Lambda^2\rho, \Lambda^3\rho, \ldots, \Lambda^{n-1}\rho$.

Задача. Докажите, что представление $\Lambda^n\rho$ неприводимо и имеет числовые отметки



Задача. Докажите, что $\Lambda^{n+k}\rho$ эквивалентно $\Lambda^{n-k+1}\rho$.

Решение. В самом деле, пусть V — некоторое m-мерное линейное пространство. Тогда пространства $\Lambda^j V$ и $\Lambda^{m-j}V$ двойственны (действительно, умножая $f \in \Lambda^j V$ на $g \in \Lambda^{m-j}V$, получаем $fg \in \Lambda^m V$, а $\dim \Lambda^m V = 1$, и мы получаем билинейное спаривание $\Lambda^j V \times \Lambda^{m-j}V \to \Lambda^m V \simeq \mathbb{C}$; легко видеть, что это спаривание невырожденно). С другой стороны, двойственное пространство $(\Lambda^j V)'$ отождествляется с $\Lambda^j V'$. У нас же в $V \simeq \mathbb{C}^{2n+1}$ введена невырожденная билинейная форма $\{\cdot,\cdot\}$, а тем самым V отождествляется с V' (каждому элементу $v \in V$ ставится в соответствие линейный функционал l_v по формуле $l_v(w) = \{v, w\}$). Таким образом, $\Lambda^j V$ отождествляется с $\Lambda^{2n+1-j}V$.

2.4. Серия C_n. Пусть ρ — тождественное представление группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$, пусть, как и прежде, группа $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ состоит из всех операторов в $\mathbb{C}^{2n}$, сохраняющих форму $\{\cdot,\cdot\}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Поставим в соответствие базисным элементам $e_1, \ldots, e_{2n}$ пространства $\mathbb{C}^{2n}$ антикоммутирующие переменные $\xi_1^+, \ldots, \xi_n^+, \xi_1^-, \ldots, \xi_n^-$. Пусть Λ_{2n} — грассманова алгебра от переменных $\xi_j^\pm$. Рассмотрим действие группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ в Λ^k_{2n}, где $k \leqslant n$. Легко проверяется, что вектор $\xi_1^+\ldots\xi_k^+$ является вектором старшего веса $\psi_{n-k+1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, тем самым его циклическая оболочка W_{n-k+1} является фундаментальным представлением π_{n-k+1} группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$.

Задача. Пусть $Q_k : \Lambda^k_{2n} \to \Lambda^{k+2}_{2n}$ — оператор умножения на $\sum_j \xi_j^+\xi_j^-$.

а) Покажите, что Q_k — сплетающий оператор.

б) Покажите, что факторпредставление группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ в $\Lambda^k_{2n} / \operatorname{Im} Q_{k-1}$ неприводимо и эквивалентно π_{n-k+1}.

в) Покажите, что W_{n-k+1} есть ядро оператора $\sum_j \frac{\partial}{\partial\xi_j^+}\frac{\partial}{\partial\xi_j^-}$.

г) Покажите, что $\Lambda^{n\pm k}_{2n}$ разлагается в сумму $\pi_k \oplus \pi_{k+2} \oplus \ldots$.

2.5. Серия D_n. Пусть снова ρ — тождественное представление $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$, пусть группа $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ состоит из операторов, сохраняющих форму $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Снова поставим в соответствие базисным элементам $e_1, \ldots, e_{2n}$ антикоммутирующие переменные $\xi_1^+, \ldots, \xi_n^+, \xi_1^-, \ldots, \xi_n^-$.

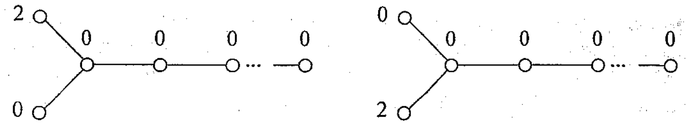
Фундаментальное представление π_k группы $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ при $k > 2$ есть $\Lambda^{n-k+1}\rho$, вектор старшего веса есть $\xi_1^+\ldots\xi_{n-k+1}^+$.

Обсудим, хотя это нам и не понадобится, что происходит в остальных внешних степенях.

Задача. Покажите, что $\Lambda^{n-1}\rho$ неприводимо и имеет старший вес $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = \psi_+ + \psi_-$ (обозначения п. 1.9).

Задача. Покажите, что векторы $v_+ = \xi_1^+\ldots\xi_{n-1}^+\xi_n^+$ и $v_- = \xi_1^+\ldots\xi_{n-1}^+\xi_n^-$ являются единственными векторами старшего веса в $\Lambda^n\rho$.

Простое вычисление показывает, что их веса равны $2\psi_\pm = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} \pm \lambda_n$, т. е. $\Lambda^n\rho$ разлагается в сумму двух представлений с числовыми отметками



Рассмотрим в Λ_{2n} оператор I (в литературе по дифференциальной геометрии его обычно обозначают через $*$) с ядром

$$K(\xi,\overline{\eta}) = \prod_{j=1}^{n}(\xi_j^- + \eta_j^+) \times \prod_{j=1}^{n}(\xi_j^+ + \overline{\eta}_j^-).$$

Этот оператор переставляет подпространства Λ_{2n}^{n-j} и Λ_{2n}^{n+j}.

Задача. Покажите, что $\Lambda^{n+j}(\rho(g))\,I = \det(g)\cdot I\cdot\Lambda^{n-j}\rho(g)$.

В частности, ограничение $I_{(n)}$ оператора I на Λ_{2n}^n является $SO(2n,\mathbb{C})$-сплетающим оператором в Λ_{2n}^n. Непосредственная проверка показывает, что $I_{(n)}^2 = E$. Представления $\mu_\pm$ реализуются в собственных подпространствах оператора $I_{(n)}$, отвечающих собственным числам ± 1.

2.6. Спинорные представления. Итак, для серий B_n и D_n мы с помощью внешних степеней не смогли получить все фундаментальные представления. Три непостроенных представления (π_1 для B_n и $\pi_\pm$ для D_n) являются двузначными (т. е. являются линейными представлениями для двулистных накрывающих B_n и D_n) и поэтому не могут быть получены тензорными операциями из однозначного тождественного представления. Начнем с серии D_n.

Как мы видели в п. II.3.9, операторы $\operatorname{spin}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ (двузначного) спинорного представления группы $SO(2n,\mathbb{C})$ имеют ядра вида

$$\pm\det(D)^{1/2}\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix} BD^{-1} & -D^{t-1} \\ D^{-1} & -D^{-1}C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \overline{\eta}^t\end{pmatrix}\right\}. \tag{2.2}$$

Перед этой формулой стоит двузначный множитель $\pm\det(D)^{1/2}$. Однако в малой окрестности единицы у этого множителя можно выбрать однозначную ветвь

$$\det(D^\alpha) := \det\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}(D-E)^k\right).$$

Задача. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & -K^t\end{pmatrix}$ — элемент алгебры Ли группы $SO(2n,\mathbb{C})$. Используя формулу (2.2), покажите, что

$$\operatorname{spin}(\exp(\varepsilon S)) = 1 + \varepsilon\cdot\tau(S) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\tau(S)f = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}K + \frac{1}{2}\sum l_{ij}\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \sum k_{ij}\xi_i\xi_j + \frac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)f. \tag{2.3}$$

Задача. Покажите непосредственно, что операторы $\tau(S)$ образуют (однозначное) представление алгебры Ли группы $SO(2n,\mathbb{C})$.

Задача. Покажите, что единственные векторы, аннулируемые всеми повышающими операторами, суть $f_+(\xi) = 1$, $f_-(\xi) = \xi_1$.

Легко видеть, что подпространства Λ_{2n}^+ и Λ_{2n}^- (состоящие соответственно из четных и нечетных функций, см. п. II.1.1) в Λ_{2n} являются инвариантными, а в силу утверждения последней задачи представления $SO(2n,\mathbb{C})$ в Λ_{2n}^+ и Λ_{2n}^- неприводимы.

Искомые представления $\pi_\pm$ группы $D_n \simeq SO(2n,\mathbb{C})$ — это просто неприводимые подпредставления спинорного представления (они называются *полуспинорными*).

Спинорное представление π_1 группы $B_n \simeq SO(2n+1,\mathbb{C})$ получается ограничением любого из полуспинорных представлений $\pi_\pm$ группы $SO(2n+2,\mathbb{C})$ на $SO(2n+1,\mathbb{C})$.

Задача. Докажите, что всевозможные операторы в Λ_n вида

$$\frac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum b_{ij}\xi\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \sum\alpha_i\xi_i + \sum\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \gamma,$$

где $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \alpha_i, \beta_i, \gamma \in \mathbb{C}$, $a_{ij} = -a_{ji}$, $c_{ij} = -a_{ji}$, образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^1$, где через $\mathbb{C}^1$ обозначена одномерная (абелева) алгебра Ли.

§ 3. Категории **A, B, C, D** *и их представления*

3.1. Категории A, B, C. Категория **A** — это категория линейных пространств и линейных операторов (сразу заметим, что это лишь одна из многих категорий, связанных с серией групп A_n, см. ниже п. 3.6).

Объект категории **B** — нечетномерное комплексное линейное пространство V, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}$. Пусть V, W — объекты категории **B**. Введем в $V\oplus W$ симметричную билинейную форму

$$\{(v,w),(v',w')\}_{V\oplus W} = \{v,v'\}_V - \{w,w'\}_W. \tag{3.1}$$

Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(V,W)$ состоит из null и максимальных изотропных подпространств в $V\oplus W$. Морфизмы перемножаются так же, как в категории **GA** (см. § II.7). Корректность определения проверяется так же, как и в категории **GD**, см. предложение II.7.4.

Объект категории **C** — конечномерное комплексное линейное пространство V, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой $\{\ ,\ \}_V$. Пусть V, W — объекты категории **C**. Введем в $V\oplus W$ кососимметричную билинейную форму по формуле (3.1). Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(V,W)$ состоит из null и всех максимальных изотропных подпространств в $V\oplus W$. Морфизмы перемножаются так же, как в категории **GA**.

Группы автоморфизмов объекта V для перечисленных категорий **A**, **B**, **C** — это соответственно $GL(V)$, $O(V)$ и $Sp(V)$. Следующей в этом списке хотелось бы написать категорию **GD** (см. § II.6), связанную с серией групп $O(2n,\mathbb{C})$. Мы, однако, предпочтем этой категории близкую к ней категорию **D**, связанную с группами $SO(2n,\mathbb{C})$.

3.2. Категория D. Пусть Y — комплексное четномерное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой. Через $\mathrm{Gr}(Y)$ мы обозначаем грассманиан всех максимальных изотропных пространств в Y.

Лемма 3.1. Множество $\mathrm{Gr}(Y)$ состоит из двух компонент связности. Подпространства $H_1, H_2 \in \mathrm{Gr}(Y)$ лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда коразмерность $H_1 \cap H_2$ в H_1 и H_2 четна.

Доказательство. По теореме Витта (см. [Bourbaki (1959)] или Предварительные сведения, § 1) пространство $\mathrm{Gr}(Y)$ является $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$-однородным. Стабилизатор точки изоморфен $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и, следовательно, связен. Группа $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ состоит из двух компонент связности, поэтому и $\mathrm{Gr}(Y)$ состоит из двух компонент связности. Пусть фиксировано $V \in \mathrm{Gr}(Y)$. Пусть $W \in \mathrm{Gr}(Y)$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_s$, $f_1, \ldots, f_k, f'_1, \ldots, f'_k, g_1, \ldots, g_s$ в Y так, что

$$\{e_i, g_j\} = \delta_{ij}, \quad \{f_i, f'_j\} = \delta_{ij}, \quad \{e_i, f_i\} = \{e_i, f'_j\} = \{g_i, f_j\} = \{g_i, f'_j\} = 0,$$
$$e_i \in V \cap W, \; f_j \in V, \; f'_j \in W, \; g_i \notin V + W.$$

Пусть k четно. Построим кривую $V(t)$ в $\mathrm{Gr}(Y)$, соединяющую V и W $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Пространство $V(t)$, по определению, натянуто на все векторы вида

$$e_i, \quad t\left(f_{2j-1} \pm f_{2j}\right) + (1-t)\left(f'_{2j-1} \mp f'_{2j}\right). \tag{3.2}$$

Тогда $V(0) = W$, $V(1) = V$.

Пусть k нечетно. Построим кривую $\widetilde{V}(t)$ в $\mathrm{Gr}(Y)$ такую, что пространство $\widetilde{V}(t)$ натянуто на векторы вида (3.2), где $2j \leqslant k$, а также на вектор f'_k. Очевидно, $V(0) = W$, а $V(1)$ натянуто на векторы $e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_{k-1}, f'_k$; тем самым $V(1) \cap V$ имеет коразмерность 1 в V. Пусть $\mathfrak{L}$ — множество всех подпространств в V, имеющих коразмерность 1, а $\mathfrak{M}$ — множество всех $W \in \mathrm{Gr}(Y)$ таких, что $W \cap V \in \mathfrak{L}$. Отображение $\varphi: W \mapsto W \cap V$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{L}$ является непрерывной биекцией. Но $\mathfrak{L}$ связно, значит, связно и $\mathfrak{M}$, а значит, связно и множество всех $Q \in \mathrm{Gr}(Y)$ таких, что $Q \cap V$ имеет нечетную коразмерность в V. Лемма доказана. ∎

Объект категории $\mathbf{D}$ — это объект V категории $\mathbf{GD}$, в котором дополнительно фиксирована одна из компонент связности $\mathrm{Gr}_+(V)$ множества $\mathrm{Gr}(V) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(0, V) \setminus \mathrm{null}$. Пусть V, W — объекты $\mathbf{D}$. Пусть $W_+ \in \mathrm{Gr}_+(W)$, $V_+ \in \mathrm{Gr}_+(V)$, а $W_- \in \mathrm{Gr}(W)$ — некоторое подпространство в W, дополнительное к W_+ (заметим, что W_- содержится или не содержится в $\mathrm{Gr}_+(W)$ в зависимости от четности числа $\frac{1}{2}\dim W$). Множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$ состоит из null и той компоненты связности $\mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, W) \setminus \mathrm{null} = \mathrm{Gr}(V \oplus W)$, которая содержит $V_+ \oplus W_-$. Морфизмы умножаются так же, как в категории $\mathbf{GD}$.

Лемма 3.2. Определение корректно, т. е. если $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$, а $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(W, Y)$, то $QP \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, Y)$.

Доказательство. Из соображений непрерывности достаточно проверить, что для некоторых $P_0 \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$ и $Q_0 \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(W, Y)$ таких, что $Q_0 P_0 \neq \mathrm{null}$, выполнено $Q_0 P_0 \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, Y)$. В качестве P_0 и Q_0 можно взять $V_+ \oplus W_-$ и $W_+ \oplus Y_-$ ($V_\pm$ и $Y_\pm$ определяются так же, как $W_\pm$). ∎

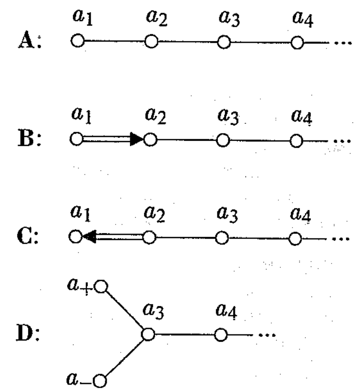
Легко видеть, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{D}}(V)$ совпадает с $\mathrm{SO}(V)$ (действительно, группа $\mathrm{SO}(V)$ должна целиком содержаться в одной из двух компонент многообразия $\mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, V) \setminus \mathrm{null}$, при этом легко видеть, что единичный элемент группы лежит именно в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, V) \setminus \mathrm{null}$).

3.3. Классификационная теорема.

Теорема 3.3.

а) Голоморфные проективные представления категорий **A**, **B**, **C**, **D**, **GD** вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные проективные представления категорий **A**, **B**, **C**, **D** нумеруются соответственно диаграммами вида

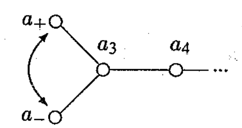


где a_j — неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Пусть a_α — самая правая ненулевая отметка. Если $n < \alpha - 1$ (sic!), то подчиненное представление группы $\mathrm{G}_n = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ соответственно, является нульмерным. Если же $n \geqslant \alpha - 1$, то подчиненное представление G_n неприводимо и имеет числовые отметки $(\ldots, a_{n-1}, a_n)$ на соответствующей диаграмме Дынкина.

В пп. 3.4–3.5 мы явно строим все представления категорий **A**, **B**, **C**, **D**. Проверку корректности этих построений и доказательство теоремы 3.1 мы откладываем до § 4.

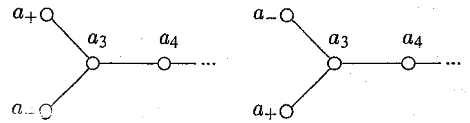
Замечание 1. Голоморфные проективные представления категории **A** линеаризуемы. Это будет ясно из явной конструкции.

Замечание 2. Можно показать, что неприводимые голоморфные проективные представления категории **GD** нумеруются диаграммами вида



(3.3)

где a_α — неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0, а перестановка a_+ и a_- не меняет представления. Если $a_+ = a_-$, то ограничение этого представления на категорию **D** неприводимо и имеет числовые отметки (3.3). Если же $a_+ \neq a_-$, то ограничение на **D** разлагается в сумму двух представлений с числовыми отметками



3.4. Фундаментальные представления. Пусть $\mathbf{K}$ — одна из категорий $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Обозначим через $\Pi^{\mathbf{K}}_\alpha = \left(\Pi^{\mathbf{K}}_\alpha, \pi^{\mathbf{K}}_\alpha\right)$ то из неприводимых представлений $\mathbf{K}$, у которого числовая отметка a_α равна 1, а остальные отметки — нули.

Замечание. Строго говоря, пока классификационная теорема не доказана, мы не имеем права говорить о числовых отметках неприводимых представлений. Поэтому под *фундаментальным представлением* $\Pi^{\mathbf{K}}_\alpha = \left(\Pi^{\mathbf{K}}_\alpha, \pi^{\mathbf{K}}_\alpha\right)$ пока можно понимать то представление категории $\mathbf{K}$, подчиненные представления которого суть фундаментальные представления π_α групп $\mathrm{K}_n = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ (при $n > \alpha - 1$). Сейчас мы построим такие представления, но уверенности в их единственности у нас пока не будет.

Итак, рассмотрим спинорное представление $\mathsf{Spin} = (\mathrm{Spin}, \mathrm{spin})$ категории $\mathbf{GD}$ (см. § II.6) и ограничим его на категорию $\mathbf{D}$. Если $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V, W)$, то ядро оператора $\mathrm{spin}(P)$ является четной функцией (см. вторую явную формулу из § II.6), поэтому $\mathrm{spin}(P)$ переводит четные функции из $\Lambda(V_+)$ в четные функции из $\Lambda(W_+)$, а нечетные функции — в нечетные. Представления $\Pi^{\mathbf{D}}_+ = \left(\Pi^{\mathbf{D}}_+, \pi^{\mathbf{D}}_+\right)$ и $\Pi^{\mathbf{D}}_- = \left(\Pi^{\mathbf{D}}_-, \pi^{\mathbf{D}}_-\right)$ — это подпредставления в ограничении $\mathsf{Spin} = (\mathrm{Spin}, \mathrm{spin})$ на $\mathbf{D}$, состоящие соответственно из четных и нечетных функций.

Далее, вложим категорию $\mathbf{B}$ в категорию $\mathbf{GD}$. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$, а L — одномерное комплексное пространство, снабженное ненулевой билинейной формой. Тогда $V \oplus L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GD})$. Пусть, далее, $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Определим подпространство $Q \subset (V \oplus L) \oplus (W \oplus L)$ как множество векторов вида $((v, l), (w, l))$, где $(v, w) \in P$, $l \in L$. Тогда $Q = Q(P) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GD}}(V, W)$. Ограничение $\mathsf{Spin} = (\mathrm{Spin}, \mathrm{spin})$ на $\mathbf{B}$ разлагается в сумму двух эквивалентных представлений вида $\Pi^{\mathbf{B}}_1 = \left(\Pi^{\mathbf{B}}_1, \pi^{\mathbf{B}}_1\right)$, одно из них реализуется в четных функциях, а другое — в нечетных.

Теперь рассмотрим фундаментальное представление $\Lambda = (\Lambda, \lambda)$ категории $\mathbf{GA}$ (см. § II.6). Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$, а $P \subset V \oplus W$ — ненулевой морфизм категории $\mathbf{GA}$, $\dim P = s$. Легко видеть, что оператор $\lambda(P)$ переводит подпространство $\Lambda^k V \subset \Lambda(V)$ в $\Lambda^{k-\dim(V)+s}(W)$. Ограничим представление $\Lambda = (\Lambda, \lambda)$ на категории $\mathbf{K} = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$, а $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$. Тогда $\dim P = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W)$. Таким образом, ограничение $\Lambda = (\Lambda, \lambda)$ на $\mathbf{K}$ разлагается в счетную прямую сумму

$$\Lambda\big|_{\mathbf{K}} = (\Lambda, \lambda)\big|_{\mathbf{K}} = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} \left(L^{\mathbf{K}}_j, l_j\right),$$

где $L^{\mathbf{K}}_j(V) = \Lambda^{\left[\frac{1}{2}\dim V\right]-j+1}(V)$.

Легко видеть, что

1. $\left(\Pi^{\mathbf{B}}_j, \pi^{\mathbf{B}}_j\right) = \left(L^{\mathbf{B}}_j, l_j\right)$ при $j \geqslant 2$;
2. $\left(\Pi^{\mathbf{D}}_j, \pi^{\mathbf{D}}_j\right) = \left(L^{\mathbf{D}}_j, l_j\right)$ при $j \geqslant 3$;

3. $\left(\Pi^{\mathbf{C}}_j, \pi^{\mathbf{C}}_j\right)$ есть факторпредставление $\left(L^{\mathbf{C}}_j, l_j\right) / Q\left(\left(L^{\mathbf{C}}_{j+2}, l_{j+2}\right)\right)$, где вложение Q представления $\left(L^{\mathbf{C}}_{j+2}, l_{j+2}\right)$ в $\left(L^{\mathbf{C}}_j, l_j\right)$ мы сейчас опишем. Обозначим через q элемент в $\Lambda^2 V$, инвариантный относительно $\mathrm{Sp}(V)$. Тогда $Qf := qf$, см. также п. 2.4.

Наконец, представление $\Pi^{\mathbf{A}}_1 = \left(\Pi^{\mathbf{A}}_1, \pi^{\mathbf{A}}_1\right)$ — это тождественное представление категории $\mathbf{A}$ (каждому линейному пространству ставится в соответствие оно само, а каждому оператору — он сам), а остальные фундаментальные представления категории $\mathbf{A}$ суть его внешние степени:

$$\left(\Pi^{\mathbf{A}}_j, \pi^{\mathbf{A}}_j\right) = \Lambda^j\left(\Pi^{\mathbf{A}}_1, \pi^{\mathbf{A}}_1\right).$$

3.5. Построение остальных представлений. Пусть $\mathbf{K} = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Сейчас мы построим неприводимое представление $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{K}$ с набором числовых отметок $\{a_\alpha\}$. Для этого рассмотрим тензорное произведение

$$(S, \sigma) := \bigotimes_\alpha \left(\Pi^{\mathbf{K}}_\alpha, \pi^{\mathbf{K}}_\alpha\right)^{\otimes a_\alpha}.$$

В каждом пространстве $\Pi^{\mathbf{K}}_\alpha(V)$ рассмотрим вектор $h_\alpha(V)$ старшего веса относительно группы $\mathrm{Aut}(V)$. Пусть $T(V)$ — циклическая оболочка вектора $\bigotimes_\alpha h_\alpha(V)^{\otimes a_\alpha} \in S(V)$ под действием группы $\mathrm{Aut}(V)$. Набор подпространств $T(V) \subset S(V)$ задает подпредставление в $\mathsf{S} = (S, \sigma)$, оно и имеет числовые отметки $\{a_\alpha\}$.

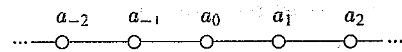
3.6. Замечания. Категории, связанные с серией групп A_n.

A. Категория $\mathbf{GA}$.

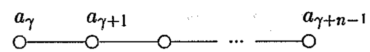
Теорема 3.4.

а) Голоморфные проективные представления категории $\mathbf{GA}$ вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные проективные представления категории $\mathbf{GA}$ нумеруются диаграммами вида



где a_j — неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0; при этом диаграммам, отличающимся друг от друга сдвигом, отвечают одинаковые представления. Пусть a_α — самая левая ненулевая числовая отметка, а a_β — самая правая. Тогда подчиненное представление группы $\mathrm{A}_n \simeq \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ есть однократная прямая сумма неприводимых представлений A_n с числовыми отметками

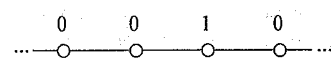


(3.4)

где $\gamma \leqslant \alpha + 1$, а $\gamma + n - 1 \geqslant \beta - 1$.

Замечания.

а) Фундаментальное представление из § II.7 имеет числовые отметки



все неприводимые представления $\mathbf{GA}$ реализуются в тензорных степенях фундаментального представления.

б) Пусть μ_γ — представление с числовыми отметками (3.4). Пусть R — элемент множества $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1}) \setminus \mathrm{null}$. Тогда $R\mu_\gamma \subset \mu_\gamma + \dim R - (n+1)$.

B. Категории $A(\lambda)$. Заметим, что диаграммы Дынкина для серий B_n, C_n, D_n могут расти только в одну сторону. Диаграммы Дынкина для серии A_n могут расти в обе стороны. Покажем, что любому росту диаграмм A_n соответствует своя категория.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — последовательность из нулей и единиц. Объекты категории $\mathbf{A}(\lambda)$ суть комплексные линейные пространства. Пусть $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}(\lambda))$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда множество $\mathrm{Mor}(V, W)$ состоит из null и линейных отношений размерности $n + \lambda_n + \lambda_{n+1} + \ldots + \lambda_{m-1}$.

Пронумеруем вершины бесконечной диаграммы Дынкина

$$\begin{array}{c}
\quad 0 \\
\cdots - \circ - \circ - \circ - \circ - \cdots
\end{array}$$

по следующему правилу. Поставим в каком-нибудь месте 0, далее ставим 1 слева от 0, если $\lambda_1 = 0$, и справа от 0, если $\lambda_1 = 1$. Вообще в случае $\lambda_j = 0$ номер j стоит на самом правом из мест, находящихся левее всех номеров $0, 1, \ldots, j-1$. В случае $\lambda_j = 1$ номер j стоит на самом левом из мест, находящихся правее всех номеров $0, 1, \ldots, j-1$ (таким образом, последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ задает «правило роста» диаграммы Дынкина).

Теорема 3.5. Пусть в последовательности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ бесконечно много нулей и бесконечно много единиц. Тогда

а) голоморфные проективные представления категории $\mathbf{A}(\lambda)$ вполне приводимы;

б) неприводимые голоморфные проективные представления категории $\mathbf{A}(\lambda)$ нумеруются диаграммами вида

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & s_{-2} & & s_{-1} & & 0 & & s_1 & & s_2 & \\
\cdots - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - \cdots \\
 & a_{-2} & & a_{-1} & & a_0 & & a_1 & & a_2 &
\end{array}$$

где числа верхнего ряда расставлены по изложенному выше правилу, а $a_j \in \mathbb{Z}_+$, причем лишь конечное число из них отлично от 0. Опишем подчиненное представление группы A_n. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc}
s_\gamma & & & & & & & & s_{\gamma+n-1} \\
\circ & - & \circ & - & \circ & - & \cdots & - & \circ \\
a_\gamma & & & & & & & & a_{\gamma+n-1}
\end{array} \tag{3.5}$$

— участок диаграммы, в котором числа верхнего ряда являются переставленными числами $0, 1, \ldots, n-1$. Тогда в случае

$$a_{\gamma-2} = a_{\gamma-3} = \ldots = 0 = a_{\gamma+n+1} = a_{\gamma+n+2} = \ldots \tag{3.6}$$

подчиненное представление неприводимо и имеет числовые отметки $a_\gamma, \ldots, a_{\gamma+n-1}$. Если же (3.6) не имеет место, то подчиненное представление нульмерно.

Задача. Докажите теорему 3.5.

Задача. Выведите теорему 3.4 из теоремы 3.5.

§ 4. *Упорядоченные категории*

В этом параграфе доказываются классификационные теоремы из § 3.

4.1. Упорядоченные категории. В этой книге обсуждается теория представлений нескольких десятков категорий. Эти теории имеют между собой кое-что общее, и это общее хотелось бы зааксиоматизировать, чтобы в дальнейшем избежать многократных повторов однотипных рассуждений. Следующее определение не так удачно, как этого бы хотелось, но мы увидим, что оно все-таки полезно.

Пусть Σ — частично упорядоченное множество, причем для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ существует $\sigma_3 \in \Sigma$ такой, что $\sigma_3 > \sigma_1$, $\sigma_3 > \sigma_2$. В этой главе множество Σ

всегда совпадает с $\mathbb{Z}_+$, но позже нам встретятся и более замысловатые примеры. Пусть $\mathbf{K}$ — категория, объекты которой V_σ нумеруются элементами множества Σ. Пусть для любых элементов $\sigma, \tau \in \Sigma$ таких, что $\sigma < \tau$, фиксированы морфизмы $\lambda_{\sigma\tau} : V_\sigma \to V_\tau$, $\mu_{\tau\sigma} : V_\tau \to V_\sigma$ такие, что

$$\mu_{\tau\sigma}\lambda_{\sigma\tau} = 1. \tag{4.1}$$

Пусть для любых $\sigma < \sigma' < \sigma''$ выполнено

$$\begin{aligned} \lambda_{\sigma'\sigma''}\lambda_{\sigma\sigma'} &= \lambda_{\sigma\sigma''}, \\ \mu_{\sigma'\sigma}\mu_{\sigma''\sigma'} &= \mu_{\sigma''\sigma}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Такие категории мы будем называть *чисто упорядоченными*. Категории, эквивалентные чисто упорядоченным, мы будем называть *упорядоченными*.

4.2. Примеры упорядоченных категорий: A, B, C, D. Мы обсудим подробно самый простой из этих случаев $\mathbf{K} = \mathbf{A}$ и самый сложный $\mathbf{K} = \mathbf{D}$.

Категория A. Рассмотрим категорию, объектами которой являются пространства $\mathbb{C}^n$, а морфизмами — линейные операторы. Эта категория эквивалентна категории $\mathbf{A}$. Пусть $m < n$, определим $\lambda_{mn} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $\mu_{nm} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ по формулам:

$$\lambda_{mn}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$
$$\mu_{nm}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$$

Категория D. Обозначим $2n$-мерный объект категории $\mathbf{D}$ через V_n. Пусть V — двумерное комплексное пространство, снабженное невырожденной билинейной симметричной формой. Пространство V содержит две изотропные прямые, которые мы обозначим через l и l'. Отождествим V_{n+1} с $V_n \oplus V$. Пусть S — график естественного вложения $V_n \to V_{n+1}$. Рассмотрим в $V_n \oplus V_{n+1} = V_n \oplus V_n \oplus V$ следующие максимальные изотропные подпространства H и H':

$$H = S \oplus l, \quad H' = S \oplus l'.$$

Легко видеть, что $H \cap H' = S$, следовательно (см. лемму 3.1) H и H' лежат в разных компонентах связности грассманиана $\mathrm{Gr}(V_n \oplus V_{n+1})$ (обозначения из п. 3.2). Заметим, что множества $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_n, V_{n+1}) \setminus \mathrm{null}$ и $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_{n+1}, V_n) \setminus \mathrm{null}$ являются компонентами связности многообразия $\mathrm{Gr}(V_n \oplus V_{n+1})$, и легко видеть, что эти компоненты различны (в самом деле, $V_n^- \oplus V_{n+1}^+ \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_n, V_{n+1})$, а $V_{n+1}^- \oplus V_n^+ \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_{n+1}, V_n)$, пересечение $V_n^- \oplus V_{n+1}^+$ и $V_n^+ \oplus V_{n+1}^-$ нулевое, а размерности этих подпространств нечетны).

Теперь $\lambda_{n,n+1}$ — это то из подпространств H, H', которое лежит в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_n, V_{n+1})$, а $\mu_{n+1,n}$ — то, которое лежит в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(V_{n+1}, V_n)$. Наконец, положим

$$\lambda_{ij} = \lambda_{j-1,j}\lambda_{j-2,j-1} \ldots \lambda_{i,i+1},$$
$$\mu_{ji} = \mu_{i+1,i}\mu_{i+1,i+2} \ldots \mu_{j,j-1}.$$

Категории B и C. Здесь все очень похоже на категорию $\mathbf{D}$, только в выборе прямых l и l' и морфизмов $\lambda_{n,n+1}$, $\mu_{n+1,n}$ здесь больше свободы: единственное требование — чтобы $l' \neq l$, а $\lambda_{n,n+1} = S \oplus l$, $\mu_{n+1,n} = S \oplus l'$.

4.3. Простейшие свойства упорядоченных категорий. Пусть $\sigma < \tau$. Введем элемент $\theta^\sigma_\tau \in \mathrm{End}(V_\tau)$

$$\theta^\sigma_\tau = \lambda_{\sigma\tau}\mu_{\tau\sigma}. \tag{4.3}$$

Легко видеть, что

$$(\theta^\sigma_\tau)^2 = \theta^\sigma_\tau, \quad \mu_{\tau\sigma}\theta^\sigma_\tau = \mu_{\tau\sigma}, \quad \theta^\sigma_\tau\lambda_{\sigma\tau} = \lambda_{\sigma\tau}. \tag{4.4}$$

Если $\sigma' < \sigma$, то

$$\theta^\sigma_\tau\theta^{\sigma'}_\tau = \theta^{\sigma'}_\tau\theta^\sigma_\tau = \theta^{\sigma'}_\tau \tag{4.5}$$

Проверим последнее равенство:

$$\begin{aligned}\theta^{\sigma'}_\tau\theta^\sigma_\tau &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\tau\sigma'}\lambda_{\sigma\tau}\mu_{\tau\sigma} = \\ &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\sigma\sigma'}\mu_{\tau\sigma}\lambda_{\sigma\tau}\mu_{\tau\sigma} = \\ &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\sigma\sigma'}\mu_{\tau\sigma} = \\ &= \lambda_{\sigma'\tau}\mu_{\tau\sigma'} = \\ &= \theta^{\sigma'}_\tau.\end{aligned}$$

Лемма 4.1. Пусть $\sigma' < \sigma$, $\tau' < \tau$. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V_{\sigma'}, V_{\tau'})$. Тогда существует $Q \in \mathrm{Mor}(V_\sigma, V_\tau)$ такое, что

$$P = \mu_{\tau\tau'}Q\lambda_{\sigma'\sigma}. \tag{4.6}$$

Доказательство: $Q = \lambda_{\tau'\tau}P\mu_{\sigma\sigma'}$. ■

Лемма 4.2. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — (проективное) представление упорядоченной категории **K**. Пусть $T(V_\varkappa) = 0$. Тогда $T(V_\sigma) = 0$ для всех $\sigma < \varkappa$.

Доказательство. Так как $T(V_\varkappa) = 0$, то $\tau(Q) = 0$ для всех $Q \in \mathrm{End}(V_\sigma)$. В силу равенства (4.6) $\tau(P) = 0$ для всех $P \in \mathrm{End}(V_\sigma)$. В частности, $\tau(1_{V_\sigma}) = 0$. Отсюда $T(V_\sigma) = 0$. ■

Лемма 4.3. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — (проективное) представление упорядоченной категории **K**. Следующие утверждения эквивалентны:

а) T неприводимо;

б) подчиненные представления всех полугрупп $\mathrm{End}(V_\tau)$ неприводимы.

Следствие 4.4. Фундаментальные представления из п. 3.4 неприводимы.

Доказательство леммы. Нужно доказать лишь утверждение б) $\Rightarrow$ а) (см. Лемму II.8.1). Пусть выполнено б). Пусть M — подпредставление в $\mathsf{T} = (T, \tau)$, а $\mathsf{N} = \mathsf{T}/\mathsf{M}$. Тогда для любого V_σ мы имеем или $M(V_\sigma) = 0$ или $N(V_\sigma) = 0$. Из леммы 4.2 мгновенно следует, что или $M(V_\sigma) = 0$ для всех σ, или $N(V_\sigma) = 0$ для всех σ. ■

4.4. Спускающий функтор. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление упорядоченной категории **K**. Пусть $\alpha < \beta$.

Лемма 4.5. Пусть $P \in \mathrm{End}(V_\alpha)$. Рассмотрим отображение $U^\beta_\alpha(P) = \lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha}$. Тогда отображение U^β_α является вложением полугруппы $\mathrm{End}(V_\alpha)$ в $\mathrm{End}(V_\beta)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}U^\beta_\alpha(P)U^\beta_\alpha(Q) &= \lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha}\lambda_{\alpha\beta}Q\mu_{\beta\alpha} = \\ &= \lambda_{\alpha\beta}PQ\mu_{\beta\alpha} = \\ &= U^\beta_\alpha(PQ).\end{aligned}$$

С другой стороны, $P = \mu_{\beta\alpha}U^\beta_\alpha(P)\lambda_{\alpha\beta}$, откуда следует инъективность U^β_α. Заметим, что

$$U^\beta_\alpha(1) = \theta^\alpha_\beta.$$ ■

Итак, при $\alpha < \beta$ полугруппа $\mathrm{End}(V_\alpha)$ вложена в $\mathrm{End}(V_\beta)$ (следует обратить внимание на то, что $U^\beta_\alpha(\mathrm{Aut}(V_\alpha)) \not\subset \mathrm{Aut}(V_\beta)$.

Предложение 4.6. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — проективное представление упорядоченной категории **K**, пусть $\alpha < \beta$. Тогда подпространство $\mathrm{Im}\,\theta^\alpha_\beta$ инвариантно относительно операторов $\tau(U^\beta_\alpha(P))$. Представление τ полугруппы $\mathrm{End}(V_\alpha)$ в $T(V_\alpha)$ эквивалентно представлению $\tau \circ U^\beta_\alpha$ в $\mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$.

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{Im}\,\tau(U^\beta_\alpha(P)) \subset \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$. В самом деле,

$$\begin{aligned}U^\beta_\alpha(P) &= \lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha} = \\ &= \lambda_{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}\lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha} = \\ &= \theta^\alpha_\beta\lambda_{\alpha\beta}P\mu_{\beta\alpha}.\end{aligned}$$

Далее, легко видеть, что $\tau(\lambda_{\alpha\beta}) : T(V_\alpha) \to \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$ и $\tau(\mu_{\beta\alpha}) : \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta) \to T(V_\alpha)$ являются взаимно обратными $\mathrm{End}(V_\alpha)$-сплетающими операторами. Предложение доказано. ■

Пусть $\alpha < \beta$. Определим *спускающий функтор* F^β_α, который каждому представлению σ полугруппы $\mathrm{End}(V_\beta)$ ставит в соответствие представление $\sigma \circ U^\beta_\alpha$ полугруппы $\mathrm{End}(V_\alpha)$ в $\mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\beta)$. Мы опускаем тривиальную проверку того, что F^β_α — действительно функтор. Легко видеть также, что $\mathsf{F}^\beta_\alpha\mathsf{F}^\gamma_\beta = \mathsf{F}^\gamma_\alpha$.

В следующих двух пунктах мы обсудим, как выглядят представления полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V_\alpha)$ в случаях $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$, а также обсудим, как в этих случаях выглядит спускающий функтор.

4.5. Представления полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ в случае $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Пусть **K** — одна из перечисленных категорий.

Лемма 4.7. Группа $\mathrm{Aut}(V)$ плотна в $\mathrm{End}(V)$.

Доказательство: очевидно. ■

Выберем в каждой из категорий **A**, **B**, **C**, **D** по одному объекту каждой размерности. Обозначим через V_n в случае категории **A** объект размерности $n+1$, в случае **C** и **D** — размерности $2n$, в случае **B** — размерности $2n+1$.

Лемма 4.8. Полугруппа $\mathrm{End}(V_n)$ порождена группой $\mathrm{Aut}(V_n)$ и линейным отношением $\theta_n^{n-1} = \lambda_{n-1,n}\mu_{n,n-1}$.

Доказательство: перебор случаев. ■

Пусть теперь τ — голоморфное проективное представление полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$. Так как группа $\mathrm{Aut}(V_n)$ плотна в $\mathrm{End}(V_n)$, то представление τ и ограничение τ на $\mathrm{Aut}(V_n)$ имеют одни и те же подпредставления. В частности, если τ неприводимо, то и его ограничение на $\mathrm{Aut}(V_n)$ неприводимо. Далее, известно, что проективные представления полупростых групп и, в частности, классических групп линеаризуются на их односвязных накрывающих (см., например, [Желобенко (1970)]). Таким образом, слова «проективное представление односвязной полупростой группы G» и «линейное представление G» по существу означают одно и то же. В частности, мы сразу получаем, что представления полугрупп $\mathrm{End}(V_n)$ вполне приводимы.

Рассмотрим теперь неприводимое представление $\pi = \pi[\ldots, a_{n-1}, a_n]$ классической группы $\mathrm{Aut}(V_n) = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ с числовыми отметками $(\ldots, a_{n-1}, a_n)$. Спрашивается, как может быть это представление продолжено до проективного представления τ полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$? Пусть последовательность $g_j \in \mathrm{Aut}(V_n)$ сходится к θ_n^{n-1}. Тогда для некоторых $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ мы имеем $\lambda_j\pi(g_j) = \lambda_j\tau(g_j) \to \tau(\theta_n^{n-1})$. Поэтому либо $\tau(\theta_n^{n-1}) = 0$, либо $\tau(\theta_n^{n-1})$ определено однозначно с точностью до пропорциональности. Таким образом (см. лемму 4.8), существует не более двух продолжений представления $\pi[\ldots, a_{n-1}, a_n]$ до голоморфного проективного представления полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$:

а) *нулевое продолжение* $\tau = \pi_0[\ldots, a_{n-1}, a_n]$; при этом $\tau(\theta_n^{n-1}) = 0$, а значит, $\tau(P)$ тождественно равно 0 на $\mathrm{End}(V_n) \setminus \mathrm{Aut}(V_n)$;

б) *максимальное продолжение* $\tau = \pi_{\max}[\ldots, a_{n-1}, a_n]$; при этом $\tau(\theta_n^{n-1}) \neq 0$.

Существование нулевого продолжения очевидно, существование максимального продолжения станет очевидным в следующем пункте.

4.6. Вычисление спускающего функтора в случае категорий A, B, C, D и корректность конструкции п. 3.5. Итак, пусть по-прежнему $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

Лемма 4.9. Пусть $\Pi_\alpha = (\Pi_\alpha, \pi_\alpha)$ — фундаментальное представление категории $\mathbf{K}$. Пусть $h_\alpha(V_n)$ — вектор старшего веса в $\Pi_\alpha(V_n)$. Тогда

$$\pi_\alpha(\theta_n^{n-1})h_\alpha(V_n) = s_n h_\alpha(V_n),$$
$$\pi_\alpha(\lambda_{n-1,n})h_\alpha(V_{n-1}) = r_n h_\alpha(V_n),$$
$$\pi_\alpha(\mu_{n,n-1})h_\alpha(V_n) = p_n h_\alpha(V_{n-1}),$$

где $r_n, s_n, p_n \in \mathbb{C}$ отличны от 0, если $\Pi_\alpha(V_{n-1}) \neq 0$.

Доказательство: перебор случаев. ■

Пусть теперь $a_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ и $a_\alpha = 0$ при достаточно больших α. Рассмотрим самую правую ненулевую отметку q. Пусть $\mathsf{S} = (S, \sigma) := \bigotimes_\alpha (\Pi_\alpha, \pi_\alpha)^{\otimes a_\alpha}$. Рассмотрим вектор старшего веса $h(V_n)$ в $S(V_n)$, т. е.

$$h(V_n) = \bigotimes_\alpha h_\alpha(V_n)^{\otimes a_\alpha}.$$

Заметим, что пространство $\Pi_\alpha(V_n)$ отлично от нуля в том и только в том случае, когда $n \geqslant \alpha - 1$ (здесь надо просмотреть все фундаментальные представления и убедиться в том, что это так). Поэтому $S(V_n)$ отлично от 0 тогда и только тогда, когда $n \geqslant q-1$, при тех же n отличен от 0 и вектор $h(V_n)$.

Выберем в каждом пространстве $S(V_n)$ циклическую оболочку $T(V_n)$ вектора $h(V_n)$ под действием группы $\mathrm{Aut}(V_n)$.

Лемма 4.10. Набор подпространств $T(V_n) \subset S(V_n)$ задает неприводимое подпредставление в $\mathsf{S} = (S, \sigma)$.

Доказательство. Возьмем циклическую оболочку H какого-нибудь вектора $h(V_n)$ под действием категории $\mathbf{K}$. В силу предыдущей леммы эта циклическая оболочка содержит все векторы $h(V_n)$; это верно для всех n, а поэтому $\mathbf{K}$-циклические оболочки всех векторов $h(V_n)$ совпадают. Следовательно, для любого k пространство $H(V_k)$ является $\mathrm{End}(V_k)$-циклической оболочкой вектора $h(V_k)$. Но группа $\mathrm{Aut}(V_k)$ плотна в $\mathrm{End}(V_k)$, поэтому $H(V_k) = T(V_k)$ для всех k. Далее, циклическая оболочка вектора является подпредставлением, поэтому набор подпространств $T(V_k)$ — действительно подпредставление в S. Его неприводимость следует из леммы 4.3. Лемма доказана. ■

Теперь посмотрим, какое именно представление τ_k полугруппы $\mathrm{End}(V_k)$ реализуется в $T(V_k)$. Это может быть либо $\pi_0[\ldots, a_{k-1}, a_k]$, либо $\pi_{\max}[\ldots, a_{k-1}, a_k]$. Заметим, что условия $T(V_{k-1}) = 0$ и $\tau(\theta_k^{k-1}) = 0$ равносильны (см. предложение 4.6). Поэтому (см. определение максимального и нулевого продолжение в п. 4.5)

$$\tau_{q-1} = \pi_0[\ldots, a_{q-1}], \tag{4.7}$$
$$\tau_k = \pi_{\max}[\ldots, a_{k-1}, a_k] \quad \text{при } k > q-1. \tag{4.8}$$

Здесь нам немножко везет. Мы построили некоторый набор представлений категории $\mathbf{K}$, и среди подчиненных представлений нам встретились все представления всех полугрупп $\mathrm{End}(V_k)$. Тем самым, предложение 4.6 мгновенно дает нам явный вид спускающего функтора

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_{n-1}^n \pi_0[\ldots, a_{n-1}, a_n] &= 0, \\ \mathsf{F}_{n-1}^n \pi_{\max}[\ldots, a_{n-1}, 0] &= \pi_{\max}[\ldots, a_{n-2}, a_{n-1}]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Если же $a_n \neq 0$, то

$$\mathsf{F}_{n-1}^n \pi_{\max}[\ldots, a_{n-1}, a_n] = \pi_0[\ldots, a_{n-2}, a_{n-1}]. \tag{4.10}$$

4.7. Согласованные системы. Пусть $\mathbf{K}$ — упорядоченная категория. Пусть для каждого объекта V_σ задано *неприводимое* проективное представление ρ_σ полугруппы $\mathrm{End}(V_\sigma)$. Этот набор представлений мы назовем *согласованной системой*, если для любых $\sigma < \tau$ выполнено $\mathsf{F}_\sigma^\tau \rho_\tau = \rho_\sigma$.

Предложение 4.11. Для любой согласованной системы ρ_σ существует единственное проективное представление $\mathsf{R} = (R, \rho)$ категории $\mathbf{K}$ такое, что для всех σ и всех $P \in \mathrm{End}(V_\sigma)$ выполнено $\rho(P) = \rho_\sigma(P)$.

Замечание. Здесь важнее единственность, чем существование. Только единственность используется в п. 4.8.

Лемма 4.12. Полугруппы $\mathrm{End}(V_\sigma)$ и элементы $\lambda_{\sigma\tau}$, $\mu_{\tau\sigma}$ порождают весь группоид морфизмов категории $\mathbb{K}$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V_\sigma, V_\tau)$. Пусть $\varkappa > \tau$ и $\varkappa > \sigma$. Тогда $P = \mu_{\varkappa\tau} P' \lambda_{\sigma\varkappa}$, где $P' = \lambda_{\tau\varkappa} P \mu_{\varkappa\sigma} \in \mathrm{End}(V_\varkappa)$. ■

Доказательство предложения.

а) *Единственность.* Обозначим через $R(V_\sigma)$ пространство представления ρ_σ. Пусть $\sigma < \tau$. В силу (4.4) оператор $\rho(\mu_{\tau\sigma})$ обращается в ноль на ядре проектора $\rho(\theta_\tau^\sigma)$. Кроме того, операторы $\rho(\lambda_{\sigma\tau}) : R(V_\sigma) \to \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma)$ и $\rho(\mu_{\tau\sigma}) : \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma) \to R(V_\sigma)$ должны быть (см. п. 4.4) взаимно обратными $\mathrm{End}(V_\sigma)$-сплетающими операторами. Учитывая неприводимость ρ_σ, мы получаем, что $\rho(\lambda_{\sigma\tau})$ и $\rho(\mu_{\tau\sigma})$ однозначно определены с точностью до умножения на константу. Теперь утверждение следует из леммы.

б) *Существование.* Итак, пусть дана согласованная система. Определим операторы $\rho(\lambda_{\sigma\tau}) : R(V_\sigma) \to \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma)$ и $L : \mathrm{Im}\,\rho_\tau(\theta_\tau^\sigma) \to R(V_\sigma)$ так, чтобы они были $\mathrm{End}(V_\sigma)$-сплетающими. В силу неприводимости обоих представлений эти операторы определены однозначно. Положим $\rho(\mu_{\tau\sigma}) = L\rho_\tau(\theta_\tau)$. Пусть, далее, $P \in \mathrm{Mor}(V_\alpha, V_\beta)$. Выберем $\varkappa$ так, что $\varkappa > \alpha$, $\varkappa > \beta$, и определим $\rho(P)$ по формуле

$$\rho(P) = \rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho_\varkappa(\lambda_{\beta\varkappa} P \mu_{\varkappa\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}). \tag{4.11}$$

Лемма 4.13. Оператор $\rho(P)$ не зависит от выбора $\varkappa$ (с точностью до множителя).

Доказательство леммы. Обозначим выражение (4.11) через $\rho^\varkappa(P)$. Пусть $\xi > \varkappa$. Тогда

$$\rho^\xi(P) = \rho(\mu_{\xi\beta})\rho_\xi(\lambda_{\beta\xi} P \mu_{\xi\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\xi}).$$

Из определения операторов $\rho(\mu_{\xi\varkappa})$ и $\rho(\lambda_{\varkappa\xi})$ видно, что для любого $S \in \mathrm{End}(V_\varkappa)$ выполнено

$$\rho_\varkappa(S) = s\rho(\mu_{\xi\varkappa})\rho_\xi(\lambda_{\varkappa\xi} S \mu_{\xi\varkappa})\rho(\lambda_{\varkappa\xi})$$

для некоторого $s \in \mathbb{C}^*$. Учитывая очевидные равенства

$$\rho(\mu_{\xi\beta}) = s'\rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho(\mu_{\xi\varkappa}),$$
$$\rho(\lambda_{\alpha\xi}) = s''\rho(\lambda_{\varkappa\xi})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}),$$

где $s', s'' \in \mathbb{C}^*$, мы получаем, что для некоторых $t, t', \ldots \in \mathbb{C}^*$ выполнено

$$\begin{aligned}\rho^\xi(P) &= t\rho(\mu_{\xi\beta})\rho_\xi(\lambda_{\beta\xi} P \mu_{\xi\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\xi}) = \\ &= t'\rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho(\mu_{\xi\varkappa})\rho_\xi(\lambda_{\varkappa\xi}\lambda_{\beta\varkappa} P \mu_{\varkappa\alpha}\mu_{\xi\varkappa})\rho(\lambda_{\varkappa\xi})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}) = \\ &= t''\rho(\mu_{\varkappa\beta})\rho_\varkappa(\lambda_{\beta\varkappa} P \mu_{\varkappa\alpha})\rho(\lambda_{\alpha\varkappa}) = t'''\rho^\varkappa(P).\end{aligned}$$

Теперь пусть $\varkappa$ и $\varkappa'$ мажорируют α и β. Тогда существует ξ, мажорирующее $\varkappa$ и $\varkappa'$, а потому

$$\rho^\varkappa(P) = \rho^\xi(P) = \rho^{\varkappa'}(P). \qquad ■$$

Осталось проверить равенство

$$\rho(P)\rho(Q) = s \cdot \rho(PQ)$$

для произвольных $Q \in \mathrm{Mor}(V_\sigma, V_\tau)$, $P \in \mathrm{Mor}(V_\tau, V_\gamma)$. Пусть ξ больше, чем σ, τ, γ. Тогда для некоторых s, s', … $\in \mathbb{C}^*$ мы имеем

$$\begin{aligned}\rho(P)\rho(Q) &= \rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} P \mu_{\xi\tau})\rho(\lambda_{\tau\xi})\rho(\mu_{\xi\tau})\rho_\xi(\lambda_{\tau\xi} Q \mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) = \\ &= s\rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} P \mu_{\xi\tau})\rho_\xi(\theta_\xi^\tau)\rho_\xi(\lambda_{\tau\xi} Q \mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) = \\ &= s'\rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} P[\mu_{\xi\tau}\theta_\xi^\tau\lambda_{\tau\xi}]Q\mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) = \\ &= s''\rho(\mu_{\xi\gamma})\rho_\xi(\lambda_{\gamma\xi} PQ \mu_{\xi\sigma})\rho(\lambda_{\sigma\xi}) = \\ &= s'''\rho(PQ).\end{aligned}$$

■

4.8. Полнота списков неприводимых представлений для $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Из формул (4.9), (4.10) сразу следует, что любая согласованная система для $\mathbf{K} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ имеет следующий вид. Имеется $q \in \mathbb{Z}_+$ и конечный набор $[\ldots, a_{q-1}, a_q] \in \mathbb{Z}_+^q$ такой, что $a_q \neq 0$. Представления ρ_j полугрупп $\mathrm{End}(V_j)$ должны иметь вид

$$\begin{aligned}&\rho_j = 0 && \text{при } j < q-1;\\ &\rho_{q-1} = \pi_0[\ldots, a_{q-1}]; &&\\ &\rho_j = \pi_{\max}[\ldots, a_{q-1}, a_q, 0, \ldots, 0] && \text{при } j > q-1.\end{aligned}$$

Представления, соответствующие таким согласованным системам, уже были построены в п. 4.6. Они имеют числовые отметки $(\ldots, a_{q-1}, a_q, 0, 0, \ldots)$. Утверждение б) классификационной теоремы доказано.

4.9. Вполне приводимость.

Теорема 4.14. Пусть $\mathbf{K}$ — упорядоченная категория. Пусть конечномерные проективные представления всех полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V_\sigma)$ вполне приводимы. Тогда проективные конечномерные представления категории $\mathbf{K}$ вполне приводимы.

Лемма 4.15. Пусть выполнены условия теоремы. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — представление $\mathbf{K}$, а $H \subset R(V_\sigma)$ — неприводимое подпредставление подчиненного представления полугруппы $\mathrm{End}(V_\sigma)$. Тогда $\mathbf{K}$-циклическая оболочка $\mathsf{S} = (S, \sigma)$ подпространства H является неприводимым подпредставлением в T.

Доказательство леммы. Для каждого объекта V_τ рассмотрим множество $M(V_\tau)$ всех $h \in S(V_\tau)$ таких, что циклическая оболочка h отлична от S. Условие $h \in M(V_\tau)$ равносильно тому, что для всех $P \in \mathrm{Mor}(V_\tau, V_\sigma)$ выполнено $\rho(P) = 0$ (если $\rho(P)h \neq 0$, то циклическая оболочка h содержит H, а значит, совпадает с S). Пусть для некоторого $\tau > \alpha$ пространство $M(V_\tau) \neq 0$. Пусть $K(V_\tau)$ — инвариантное относительно полугруппы $\mathrm{End}(V_\tau)$ дополнение до $M(V_\tau)$ в $S(V_\tau)$. Если $K(V_\tau) = 0$, то факторпредставление S/M удовлетворяет условию $(\mathsf{S}/\mathsf{M})(V_\tau) = 0$, и это противоречит лемме 4.3. Поэтому $K(V_\tau) \neq 0$. Циклическая оболочка любого вектора $h \in K(V_\tau)$ под действием $\mathbf{K}$ содержит H (так как $h \notin M(V_\tau)$), а значит, совпадает с S. С другой стороны, та часть циклической оболочки вектора h, которая лежит в $S(V_\tau)$, совпадает с $\mathrm{End}(V_\tau)$-циклической оболочкой вектора h, а последняя, в свою очередь, содержится в $K(V_\tau) \neq S(V_\tau)$. Противоречие. Итак, $M(V_\tau) = 0$ для всех $\tau > \alpha$. Но отсюда следует, что $M(V_\tau) = 0$ для всех τ. Поэтому S неприводимо. ■

Доказательство теоремы. Итак, выберем в представлении $\mathsf{R} = (R, \rho)$ какое-нибудь неприводимое подпредставление S. Пусть $R(V_\alpha) \neq S(V_\alpha)$. Пусть $T(V_\alpha)$ — некоторое $\mathrm{End}(V_\alpha)$-инвариантное дополнение до $S(V_\alpha)$. Возьмем циклическую оболочку T подпространства $T(V_\alpha)$. Ясно, что для любого V_β выполнено $T(V_\beta) \cap S(V_\beta) = 0$ (иначе набор подпространств $T(V_\beta) \cap S(V_\beta)$ образовывал бы нетривиальное подпредставление в S, которое, как мы помним, неприводимо). Может, однако, оказаться, что для некоторого V_β равенство $S(V_\beta) \oplus T(V_\beta) = R(V_\beta)$ не выполнено. Тогда найдется $\gamma > \alpha$ такое, что $S(V_\gamma) \oplus T(V_\gamma) \neq R(V_\gamma)$ (для этого достаточно взять любое γ такое, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$; действительно, тогда $R(V_\gamma) / [S(V_\gamma) \oplus T(V_\gamma)] = 0$ влекло бы $R(V_\beta) / [S(V_\beta) \oplus T(V_\beta)] = 0$). Возьмем в $R(V_\gamma)$ инвариантное относительно $\mathrm{End}(V_\gamma)$ дополнение $T'(V_\gamma)$ до $S(V_\gamma)$ такое, что $T'(V_\gamma) \supset T(V_\gamma)$. Пусть T$'$ — циклическая оболочка пространства $T(V_\gamma)$. Ясно, что для всех μ выполнено $T'(V_\mu) \supset T(V_\mu)$. В самом деле, $T'(V_\alpha) \supset T(V_\alpha)$, потому что циклическая оболочка N пространства $T(V_\gamma)$ содержит $T(V_\alpha)$, (действительно, $(T / N)(V_\gamma) = 0$, а значит, $(T / N)(V_\alpha) = 0$).

Далее мы можем продолжить ту же процедуру и выбрать $\mathsf{T}'' \supset \mathsf{T}'$, $\mathsf{T}''' \supset \mathsf{T}''$, ... и т. д., а затем взять их объединение. Если частично упорядоченное множество Σ индексов, нумерующих объекты категории $\mathbf{K}$, устроено достаточно сложно (чего в этой книге не случается), придется еще произнести стандартные заклинания, связанные с леммой Цорна. Мы избавляем читателя от этих заклинаний. Теорема доказана. ■

Теперь теорема о классификации голоморфных проективных представлений категорий **A**, **B**, **C**, **D** доказана полностью.

4.10. Упорядоченные категории с инволюцией. Пусть $\mathbf{K}$ — упорядоченная категория, и пусть на $\mathbf{K}$ введена инволюция $P \mapsto P^*$. Мы говорим, что $\mathbf{K}$ — *упорядоченная категория с инволюцией*, если

$$\lambda^*_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$$

для любых $\alpha < \beta$.

Отсюда, в частности, следует, что $(\theta^\alpha_\beta)^* = \theta^\alpha_\beta$, поэтому для любого $*$-представления $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{K}$ оператор $\tau(\theta^\alpha_\beta)$ является ортогональным проектором.

Глава IV

Фермионное пространство Фока

В этой главе мы обобщаем конструкцию главы II на случай бесконечного числа переменных.

§ 1. Фермионное пространство Фока

1.1. Предварительные замечания. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \bar\xi_1, \bar\xi_2, \dots$ — счетный набор антикоммутирующих переменных.

Через $\Lambda_{\min}$ мы обозначим пространство всех многочленов, зависящих от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots$, а через $\Lambda_{\max}$ — пространство всех формальных рядов, зависящих от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots$. Сразу заметим, что нас ни то, ни другое пространство сами по себе не интересуют, мы же будем работать с двумя определенными ниже промежуточными пространствами Λ и $\overline{\Lambda}$ такими, что $\Lambda_{\min} \subset \Lambda \subset \overline{\Lambda} \subset \Lambda_{\max}$.

Дифференцирование и интегрирование вводятся так же, как и в § II.1. Многочлен $f(\xi) = 1$ мы будем называть *вакуумным вектором*.

1.2. Гильбертово фермионное пространство Фока. Введем в $\Lambda_{\min}$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f(\xi), g(\xi) \rangle = \int \overline{g^\circ(\xi)} f(\xi)\, d\mu(\xi, \bar\xi) \tag{1.1}$$

(см. п. II.1.13). Одночлены вида

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}, \quad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_k, \tag{1.2}$$

образуют в $\Lambda_{\min}$ ортонормированный базис.

Через $\overline{\Lambda}$ мы обозначим пополнение пространства $\Lambda_{\min}$ по этому скалярному произведению.

Пусть $\overline{\Lambda}^{(k)}$ — подпространство в $\overline{\Lambda}$, состоящее из всех однородных форм степени k. Ясно, что $\overline{\Lambda}$ разлагается в следующую прямую сумму гильбертовых пространств:

$$\overline{\Lambda} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \overline{\Lambda}^{(k)}.$$

Задача. Пусть $f = \exp\left(\sum \lambda_i \xi_{2i-1}\xi_{2i}\right)$. При каких λ_i функция f содержится в $\overline{\Lambda}$?

1.3. Полинормированное фермионное пространство Фока. Пусть $f \in \overline{\Lambda}$. Пусть $f = \sum f_k$, где $f_k \in \overline{\Lambda}^k$. Рассмотрим в $\overline{\Lambda}$ подпространство Λ, состоящее из всех векторов f, удовлетворяющих условию: для любой константы C существует A такое, что

$$\|f_k\| \leqslant A \exp(-Ck).$$

Иными словами, нормы векторов f_k убывают быстрее любой последовательности $\exp(-Ck)$.

Введем в пространстве Λ счетное семейство полунорм

$$|||f|||_C = \sup_k \bigl(\|f_k\| \exp(Ck)\bigr).$$

Мы вскоре увидим, что эта топология в пространстве Фока в некоторых отношениях предпочтительнее гильбертовой.

Ясно, что пространство Λ локально выпукло.

Задача. Докажите, что Λ полно.

Задача. Пусть $\sum |\lambda_j|^2 < \infty$. Докажите, что функция $\exp\left(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\right)$ содержится в Λ.

1.4. Бескоординатные пространства $\Lambda(H)$ и $\overline{\Lambda}(H)$. Пусть H — гильбертово пространство (конечномерное или бесконечномерное). Выберем в нем базис $e_1, e_2, \dots$. Каждому базисному элементу e_i поставим в соответствие переменную ξ_i, построим по этому набору переменных пространства Λ и $\overline{\Lambda}$, которые мы и будем обозначать $\Lambda(H)$ и $\overline{\Lambda}(H)$. Подпространства в $\Lambda(H)$ и $\overline{\Lambda}(H)$, состоящие из однородных форм степени k, мы будем обозначать через $\Lambda^k(H)$, $\overline{\Lambda}^k(H)$ (отметим, что $\Lambda^k(H) = \overline{\Lambda}^k(H)$ совпадает с k-й внешней степенью гильбертова пространства H, см. Предварительные сведения, §4). Теперь мы видим, что конструкция $\Lambda(H)$ не зависит от выбора базиса. Пусть H, K — гильбертовы пространства. Пусть A — ограниченный оператор $H \to K$. Рассмотрим внешние степени $\Lambda^k A : \Lambda^k(H) \to \Lambda^k(K)$ оператора A (см. Предварительные сведения, §4). Мы видим, что для любого ограниченного оператора A корректно определен оператор $\Lambda(A) : \Lambda(H) \to \Lambda(K)$ как прямая сумма внешних степеней оператора A. Если при этом $\|A\| \leqslant 1$, то корректно определен и оператор $\overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(K)$ как $\oplus \Lambda^k(A) : \oplus \overline{\Lambda}^k(H) \to \overline{\Lambda}^k(K)$.

Задача. Пусть A — диагональная матрица с собственными числами λ_j. При каких λ_j оператор $\Lambda(A) := \oplus \Lambda^k(A)$ ограничен в $\overline{\Lambda}$?

1.5. Ядра. Как и в конечномерном случае, оператор $A : \Lambda(H) \to \Lambda(K)$ или $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(K)$ удобно записывать в виде

$$Af(\xi) = \int K(\xi, \overline{\eta}) f(\eta)\, d\mu(\eta, \overline{\eta}),$$

где $K(\xi, \overline{\eta})$ — некоторый формальный ряд. Ясно (см. § II.1), что в таком виде может быть записан любой оператор $\Lambda_{\min} \to \Lambda_{\max}$, а значит, в этой форме представимы и все ограниченные операторы $\Lambda(H) \to \Lambda(K)$ и $\overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(K)$.

1.6. Операторы рождения-уничтожения. Положим $V_{2\infty} = V_{2\infty}^+ \oplus V_{2\infty}^-$, где $V_{2\infty}^\pm \simeq \ell_2$. Билинейную форму L в $V_{2\infty}$ определим формулой

$$L\bigl((v^+, w^+), (v^-, w^-)\bigr) = \sum \left(v_i^+ w_i^- + v_i^- w_i^+\right) \tag{1.3}$$

Пусть $v = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_1^-, v_2^-, \dots) \in V_{2\infty}$. Тогда определен *оператор рождения-уничтожения* в Λ (или в $\overline{\Lambda}$)

$$\hat{a}(v)f(\xi) = \left(\sum v_i^+ \xi_i + \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) f(\xi). \tag{1.4}$$

Эти операторы по-прежнему удовлетворяют соотношениям (II.1.21)–(II.1.22).

Стоит обсудить определение операторов рождения-уничтожения в бескоординатном пространстве $\Lambda(H)$. Пусть H' — пространство, двойственное к H. Пусть $V = H \oplus H'$. Выберем в H и H' двойственные базисы (см. Предварительные сведения, § 2), тогда V отождествляется с $V_{2\infty}$, и операторы $\hat{a}(v)$ задаются формулой (1.3).

Задача. Проверьте, что оператор $\hat{a}(v)$ в $\Lambda(H)$ не зависит от выбора базиса в H.

Лемма 1.1. Операторы $\hat{a}(v)$ ограничены в обеих топологиях фермионного пространства Фока.

Доказательство. Достаточно проверить это отдельно для операторов рождения $\hat{a}(\alpha_+, 0)$ и для операторов уничтожения $\hat{a}(0, \alpha_-)$. Далее, у нас есть свобода выбора базиса в H. Поэтому нам достаточно рассмотреть операторы $\hat{a}_i^+ f = \xi_i f$ и $\hat{a}_i^- f = \frac{\partial}{\partial \xi_i} f$. Записывая a_i^+ в базисе (1.2), мы видим, что норма a_i^+ как оператора $\Lambda^k(H) \to \Lambda^{k+1}(H)$ равна 1 и, аналогично, норма a_i^- как оператора $\Lambda^{k+1}(H) \to \Lambda^k(H)$ тоже равна 1. Теперь утверждение становится очевидным. ■

Замечание. В пространстве $\overline{\Lambda}(H)$ выполнено

$$\hat{a}(v_+, v_-)^* = \hat{a}(\overline{v}_-, \overline{v}_+). \tag{1.5}$$

1.7. Замечания. Существуют еще 2 модели фермионного пространства Фока, которые нам не понадобятся.

А. «Полубесконечные формы» см. [Березин (1969б)], [Фейгин, Фукс (1982)]. Пусть $\xi_1^+, \xi_2^+, \dots, \xi_1^-, \xi_2^-, \dots$ — два набора антикоммутирующих переменных. Рассмотрим пространство M, базисом которого являются формальные выражения

$$\xi_{\beta_k}^+ \dots \xi_{\beta_1}^+ \xi_{\alpha_1}^- \xi_{\alpha_2}^- \dots,$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$, $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$, причем в последовательность α_j входят все натуральные числа, кроме некоторого конечного набора.

Вакуумным вектором мы назовем вектор $v = \xi_1^- \xi_2^- \xi_3^- \dots$. Тогда любой элемент из M записывается в виде

$$\sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_k \\ j_1 < j_2 < \dots < j_n}} a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_k} \xi_{j_1}^+ \xi_{j_2}^+ \dots \xi_{j_n}^+ \frac{\partial}{\partial \xi_{i_1}^-} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_{i_k}^-} v.$$

Ставя в соответствие этому элементу многочлен

$$\sum a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_k} \xi_{j_1} \xi_{j_2} \dots \xi_{j_n} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_k},$$

мы отождествляем M с пространством нечетных функций от переменных $\xi_1, \xi_2 \dots, \eta_1, \eta_2 \dots$, т. е. с фермионным пространством Фока (см. также добавление С).

В. L^2 на произведении двоеточий. Пусть D — пространство с мерой μ, состоящее из двух точек $-1, 1$, причем мера каждой точки равна $\frac{1}{2}$. Пусть D^∞ — произведение счетного числа экземпляров D. Каждой точке

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots) \in D^\infty$$

мы поставим в соответствие обобщенный вектор

$$\psi_\sigma = (1 + \sigma_1\xi_1)(1 + \sigma_2\xi_2)(1 + \sigma_3\xi_3)\dots \in \Lambda_{\max}.$$

Функции $f(\xi) \in \overline{\Lambda}$ мы сопоставим функцию $(If)(\sigma)$ на D^∞, равную формально вычисленному скалярному произведению

$$If(\sigma) = \langle f(\xi), \psi_\sigma \rangle_{\overline{\Lambda}}.$$

Базисные векторы $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\dots\xi_{j_k} \in \overline{\Lambda}$ при этом переходят в систему функций Уолша $\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\dots\sigma_{j_k}$, а эти функции образуют ортонормированный базис в $L^2(D^\infty)$. Отсюда видно, что I — унитарный оператор.

§ 2. *Операторы Березина: теоремы ограниченности*

2.1. Первое определение. Пусть H, $\widetilde{H}$ — гильбертовы пространства. *Оператором Березина* из $\Lambda(H)$ в $\Lambda(\widetilde{H})$ (или из $\overline{\Lambda}(H)$ в $\overline{\Lambda}(\widetilde{H})$) назовем произвольный оператор с ядром вида

$$\lambda \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(\sum \alpha_{jl}\xi_l + \sum \beta_{jm}\overline{\eta}_m\right) \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \ \overline{\eta}) \begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \overline{\eta}^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{2.1}$$

где L — ограниченный оператор, K и M — операторы Гильберта—Шмидта ($K = -K^t$, $M = -M^t$), векторы $(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots)$ и $(\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots)$ лежат в ℓ_2, а $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.2. Второе определение. Пусть, как и раньше (в § II.4),

$$T_i^\xi f(\xi) = \left(\xi_i + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) f(\xi),$$

$$T_j^\eta f(\eta) = \left(\eta_j + \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right) f(\eta).$$

Оператор Березина $\Lambda(H) \to \Lambda(\widetilde{H})$ — это оператор, представимый в виде

$$A = T_{\alpha_1}^\xi \dots T_{\alpha_k}^\xi A' T_{\beta_1}^\eta \dots T_{\beta_m}^\eta, \tag{2.2}$$

где A' имеет ядро вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \ \eta) \begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \overline{\eta}^t \end{pmatrix}\right\};$$

здесь по-прежнему L — ограниченный оператор, а K и M — операторы Гильберта—Шмидта ($K = -K^t$, $M = -M^t$).

Эквивалентность определений проверяется так же, как и в § II.4.

2.3. Теорема ограниченности.

Теорема 2.1. Любой оператор Березина $\Lambda(H) \to \Lambda(\widetilde{H})$ ограничен.

В сущности, именно это утверждение и было побудительной причиной для введения второй топологии в пространство Фока. Доказательство см. ниже в пп. 2.5–2.8.

2.4. Операторы Березина в гильбертовом пространстве. Здесь положение более сложное, и условие ограниченности состоит примерно в том, что оператор L должен не очень сильно отличаться от сжатия, т. е. от оператора с нормой $\leqslant 1$. Точный критерий ограниченности не известен, но «зазор» между необходимыми и достаточными условиями очень невелик.

Теорема 2.2. Пусть оператор $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(\widetilde{H})$ с ядром (2.1) ограничен. Тогда матрица L представима в виде $L = L'(1 + T)$, где $\|L'\| \leqslant 1$, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Теорема 2.3. Пусть матрица L представима в виде $L = L'(1 + T)$, где $\|L'\| < 1$, а T — оператор Гильберта—Шмидта. Тогда оператор $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(\widetilde{H})$ с ядром (2.1) ограничен.

Теорема 2.4. Пусть $A : \overline{\Lambda}(H) \to \overline{\Lambda}(\widetilde{H})$ — оператор с ядром (2.1). Пусть K и M — ядерные операторы. Тогда для ограниченности A необходимо и достаточно, чтобы матрица L представлялась в виде $L = L'(1 + T)$, где $\|L'\| \leqslant 1$, а T — ядерный оператор.

Кстати, эта теорема показывает, что условие теоремы 2.2 не является достаточным, а условие теоремы 2.3 — необходимым для ограниченности.

Из этих трех теорем мы докажем самую простую — теорему 2.4 — в п. 2.9. Пока же займемся доказательством теоремы 2.1.

2.5. Редукции. Прежде всего, заметим, что оператор T_j^ξ ограничен и обратим, $(T_j^\xi)^{-1} = -T_j^\xi$. Поэтому мы можем ограничиться операторами с ядрами вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \ \overline{\eta}) \begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \overline{\eta}^t \end{pmatrix}\right\}. \tag{2.3}$$

Далее, оператор A с ядром вида (2.3), как и в конечномерном случае (см. (II.1.11), (II.1.17) и п. II.3.9), представим в виде произведения трех операторов $A = BCD$,

$$Bf(\xi) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} f(\xi), \tag{2.4}$$

$$Cf(\xi) = f(L\xi), \tag{2.5}$$

$$Df(\eta) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial \eta_i}\frac{\partial}{\partial \eta_j}\right\}. \tag{2.6}$$

Таким образом, нам достаточно доказать три леммы.

Лемма 2.5. Оператор вида (2.4) ограничен.

Лемма 2.6. Оператор вида (2.5) ограничен.

Лемма 2.7. Оператор вида (2.6) ограничен.

Из этих лемм вторая является очевидной (мы это уже отмечали в п. 1.4), и нам остается доказать первую и третью.

Лемма 2.8. Пусть Q — кососимметричная билинейная форма на гильбертовом пространстве H, и пусть матрица этой формы в некотором ортогональном базисе является оператором Гильберта—Шмидта. Тогда унитарной заменой переменных форма Q приводится к виду

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 \; \ddots & & & & \\ \hline & 0 & \mu_1 & & \\ & -\mu_1 & 0 & & \\ & & & 0 & \mu_2 \\ & & & -\mu_2 & 0 \\ & & & & & \ddots \end{array}\right),$$

где $\mu_i > 0$ и $\sum \mu_i^2 < \infty$.

Доказательство. Представим нашу форму $Q(u, v)$ в виде $Q(u, v) = \langle u, Sv\rangle$, где S — антилинейный оператор. Равенство $Q(u, v) = -Q(v, u)$ влечет $\langle u, Sv\rangle = -\overline{\langle Su, v\rangle}$.

Овеществим пространство H, выражение $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ становится скалярным произведением в вещественном пространстве H, а S становится кососимметрическим оператором. Но тогда S^2 самосопряжен. Пусть λ_j — собственные числа оператора $(-S^2)$. Собственные числа S чисто мнимы, поэтому все λ_j положительны. Пусть $H_{\lambda_j} = \{v \in H : (-S^2)v = \lambda_j v\}$. По теореме Гильберта—Шмидта (см. [Reed, Simon (1972)], §VI.5) имеем $H = \bigoplus H_\lambda$. Далее, оператор S^2 является комплексно-линейным, поэтому подпространства H_λ инвариантны относительно умножения на i.

Со случаем $\lambda = \lambda_j = 0$ все ясно. Пусть $\lambda = \lambda_j \neq 0$. Рассмотрим оператор $J = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S$ в H_λ, этот оператор антилинеен и унитарен, $J^2 = -1$. Тем самым, оператор J задает в H_λ кватернионную структуру (мнимые единицы суть операторы $f \mapsto Jf$, $f \mapsto if$, $f \mapsto iJf$). Выберем в H_λ какой-нибудь кватернионный ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_s$. Легко видеть, что $e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_s, ie_s$ — искомый канонический базис в H_λ. Существование канонического вида доказано. ■

Итак, выражение $\frac{1}{2}\xi K \xi^t$ может быть унитарной заменой переменной $\xi = U\xi'$ приведено к виду $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi'_{2j-1}\xi'_{2j}$, где $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum \lambda_j^2 < \infty$.

Таким образом, леммы 2.5 и 2.7 могут быть переформулированы в следующем виде.

Лемма 2.9. Оператор

$$Bf(\xi) = \exp\Big(\sum_j \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Big) f(\xi),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum \lambda_j^2 < \infty$, ограничен.

Лемма 2.10. Оператор

$$Df(\eta) = \exp\Big(\sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial \eta_{2j-1}} \frac{\partial}{\partial \eta_{2j}}\Big) f(\eta),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum \lambda_j^2 < \infty$, ограничен.

Сейчас мы проведем простое вычисление, которое не является для нас необходимым, но, быть может, облегчит восприятие дальнейших рассуждений. Мы покажем, что вектор

$$\begin{aligned} v &= B \cdot 1 = \\ &= \exp\Big(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Big) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\big)^n}{n!} \end{aligned} \tag{2.8}$$

лежит в пространстве Λ. Оценим норму n-го слагаемого v_n в сумме (2.8). Заметим, что при возведении суммы в n-ю степень отличны от 0 лишь произведения n различных слагаемых, и каждое такое произведение войдет в сумму ровно $n!$ раз. Тем самым,

$$v_n = \frac{1}{n!}\Big(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Big)^n = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n} \xi_{2i_1-1}\xi_{2i_1}\ldots\xi_{2i_n-1}\xi_{2i_n}. \tag{2.9}$$

Поэтому

$$\|v_n\|^2 = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} \lambda_{i_1}^2 \ldots \lambda_{i_n}^2 \leqslant \frac{1}{n!}\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots\big)^n,$$

и, следовательно, $\|v_n\|$ убывает достаточно быстро.

2.6. Одна лемма об оценке нормы. Напомним, что через Λ^k мы обозначили подпространство в Λ (или $\overline{\Lambda}$), состоящее из всех форм степени k. Обозначим через P_r^s следующий оператор из Λ^s в Λ^{s+2r}:

$$P_r^{(s)} f(\xi) = \frac{1}{r!}\Big(\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}\Big)^r f(\xi), \quad \text{где } \lambda_j \geqslant 0.$$

Лемма 2.11. Пусть $A = \sum \lambda_j^2$, а $a = 2\max(A, 1)$. Тогда

$$\|P_r^{(s)}\|^2 \leqslant \frac{1}{r!} a^{r+s/2}.$$

Доказательство. Пусть

$$f(\xi) = \sum b_{i_1 \dots i_s} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}.$$

Тогда, используя (2.9), получаем

$$P_r^{(s)} f(\xi) = \sum b_{i_1 \dots i_s} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_r} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_s} \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(\xi_{2\alpha_i - 1} \xi_{2\alpha_i} \right), \qquad (2.10)$$

где среди индексов $i_1, \dots, i_s$, $2\alpha_1 - 1, 2\alpha_1, \dots, 2\alpha_r - 1, 2\alpha_r$ нет повторяющихся. Среди слагаемых в этой сумме могут быть подобные. Важно, однако, заметить, что ни один одночлен $\prod \xi_{\mu_k}$ не входит в эту сумму более $C^r_{r+[s/2]}$ раз (действительно, пусть моном $\prod \xi_{\mu_k}$ с некоторым коэффициентом входит в сумму (2.10); это значит, что из всех пар ξ_{2h-1}, ξ_{2h}, входящих в набор ξ_{μ_k}, мы выбрали r, составляющих произведение $\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(\xi_{2\alpha_i - 1} \xi_{2\alpha_i} \right)$, что можно сделать не более чем $C^r_{r+[s/2]}$ способами). Так как

$$\Big\| \sum_{i_1 < i_2 < \dots i_\xi} c_{i_1 \dots i_s} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_s} \Big\|^2 = \sum |c_{i_1 \dots i_s}|^2,$$

то, используя очевидное неравенство

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n|^2 \leqslant n \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \right),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \|P_r^{(s)} f(\xi)\|^2 &\leqslant C^r_{r+[s/2]} \sum |b_{i_1 \dots i_s}|^2 \lambda^2_{\alpha_1} \dots \lambda^2_{\alpha_r} \leqslant \\ &\leqslant C^r_{r+[s/2]} \left(\sum |b_{i_1 \dots i_s}|^2 \right) \left(\sum \lambda^2_{\alpha_1} \dots \lambda^2_{\alpha_r} \right) \leqslant \\ &\leqslant C^r_{r+[s/2]} \|f\|^2 \frac{\left(\sum \lambda_j^2 \right)^r}{r!}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $C_n^k \leqslant 2^n$, получаем

$$\|P_r^{(s)}\|^2 \leqslant C^r_{r+[s/2]} \frac{\left(\sum \lambda_j^2 \right)^r}{r!} \leqslant \frac{1}{r!} 2^{r+[s/2]} \left(\sum \lambda_j^2 \right)^r,$$

а отсюда уже вытекает требуемая оценка. ∎

2.7. Доказательство леммы 2.9.

Запишем наш оператор B как блочную матрицу $\bigoplus\limits_k \Lambda^k \to \bigoplus\limits_k \Lambda^k$. Эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ P_1^{(0)} & 0 & 1 & & \\ 0 & P_1^{(1)} & 0 & 1 & \\ P_2^{(0)} & 0 & P_1^{(2)} & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где операторы $P_r^{(s)}$ введены в предыдущем пункте.

Рассмотрим $f \in \Lambda$ и представим $f = \sum f_k$, где $f_k \in \Lambda_k$. Аналогичным образом представим Bf в виде $Bf = \sum (Bf)_k$, где $(Bf)_k \in \Lambda_k$.

$$\begin{aligned} \|(Bf)_k\| = \Big\| \sum_{2j \leqslant k} P_j^{(k-2j)} f_{k-2j} \Big\| &\leqslant \\ \leqslant \sum_{2j \leqslant k} \Big\| P_j^{(k-2j)} f_{k-2j} \Big\| &\leqslant \\ \leqslant \sum_{2j \leqslant k} \Big\| P_j^{(k-2j)} \Big\| \, \|f_{k-2j}\| &\leqslant \\ \leqslant \sum \frac{1}{\sqrt{j!}} a^{k/4} \|f_{k-2j}\|&. \end{aligned}$$

Пусть теперь $|||f|||_C \leqslant 1$, то есть (см. п. 1.3) для всех k

$$\|f_k\| \exp(Ck) \leqslant 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|(Bf)_k\| &\leqslant \sum \frac{1}{\sqrt{j!}} a^{k/4} \exp(-C(k-2j)) = \\ &= \exp\left(- \left(C - \tfrac{1}{4} \ln a \right) k \right) \sum_{2j \leqslant k} \frac{1}{\sqrt{j!}} e^{2Cj} \leqslant \\ &\leqslant M \exp\left(- \left(C - \tfrac{1}{4} \ln a \right) k \right), \end{aligned}$$

где $M = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j!}} e^{2Cj}$.

Мы видим, что $\|(Bf)_k\|$ быстро убывает, т. е. $Bf \in \Lambda$. Таким образом, наш оператор B корректно определен как оператор в Λ. На самом деле и ограниченность B тоже доказана, так как мы получили, что

$$|||Bf|||_{C - \frac{1}{4} \ln a} \leqslant M |||f|||_C.$$

∎

2.8. Доказательство леммы 2.10.

Она доказывается примерно так же, как и предыдущая лемма. Рассмотрим оператор $Q_r^{(s+2r)}$, действующий из Λ^{s+2r} в Λ^s по формуле

$$Q_r^{(s+2r)} f(\eta) = \left(\sum \lambda_j \frac{\partial^2}{\partial \eta_{2j-1} \partial \eta_{2j}} \right)^r f(\eta).$$

Легко видеть, что $Q_r^{(s+2r)} = (P_r^s)^*$ (в самом деле, оператор, сопряженный к $\hat{a}_j^+ f = \xi_j f$, есть $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$).

Пусть $f = \sum f_k$, $Df = \sum(Df)_k$, где f_k, $(Df)_k \in \Lambda^k$. Тогда

$$\begin{aligned}\|(Df)_k\| &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \left\|Q_r^{(k+2r)} f_{k+2r}\right\| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \left\|Q_r^{(k+2r)}\right\| \|f_{k+2r}\| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \left\|P_r^{(k)}\right\| \|f_{k+2r}\| \leqslant \\ &\leqslant \sum \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2+k/4} \|f_{k+2r}\|.\end{aligned}$$

Пусть теперь $|||f|||_C \leqslant 1$, т. е. для всех k выполнено

$$\|f_k\| \exp(Ck) \leqslant 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|(Df)_k\| &\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2+k/4} \exp(-(k+2r)C) = \\ &= a^{k/4} \exp(-Ck) \left(\sum \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2} e^{-2Cr}\right).\end{aligned}$$

Мы снова видим, что $(Df)_k$ убывает достаточно быстро, и тем самым $Df \in \Lambda$. При этом мы видим, что

$$|||Df|||_{C - \frac{1}{4}\ln a} \leqslant M |||f|||_C, \quad \text{где } M = \sum \frac{1}{\sqrt{r!}} a^{r/2} e^{-2Cr},$$

т. е. наш оператор ограничен.

Лемма 2.10 и вместе с ней теорема 2.1 доказаны. ∎

2.9. Доказательство теоремы 2.4. Прежде всего, заметим, что и здесь достаточно рассмотреть операторы с ядрами вида

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi\ \ \bar\eta)\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\right\} \tag{2.11}$$

(дело в том, что при домножении оператора с ядром вида (2.1) на T_j^ξ и T_j^η матрицы K, L, M подвергаются конечномерным возмущениям).

Лемма 2.12. Пусть K — ядерный оператор. Тогда оператор B умножения на $\exp\left\{\frac{1}{2}\xi K \xi^t\right\}$ ограничен и обратим в гильбертовом фермионном пространстве Фока $\overline{\Lambda}$.

Доказательство. В силу леммы 2.8 мы без ограничения общности можем считать, что

$$\frac{1}{2}\xi K \xi^t = \sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j},$$

где $\lambda_j \geqslant 0$, а $\sum |\lambda_j| < \infty$.

Пусть V_s — внешняя алгебра от переменных ξ_{2s-1}, ξ_{2s}. Тогда

$$\Lambda = \bigotimes_{s=1}^{\infty} V_s,$$

а оператор B разлагается в тензорное произведение

$$B = \bigotimes_{s=1}^{\infty} B_s,$$

где B_s — оператор умножения на $\exp(\lambda_s \xi_{2s-1}\xi_{2s})$ в V_s. Поэтому

$$\|B\| = \prod_{s=1}^{\infty} \|B_s\|. \tag{2.12}$$

Но B_s — это оператор в четырехмерном пространстве, и вычисление его нормы не составляет труда. Матрица этого оператора в базисе $1, \xi_{2s-1}, \xi_{2s}, \xi_{2s-1}\xi_{2s}$ равна

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \lambda_s & & & 1\end{pmatrix}.$$

Спектр оператора $B_s^* B$ состоит из чисел $1, 1, 1 \pm \lambda_s\sqrt{1 + \frac{\lambda_s^2}{4}} + \frac{\lambda_s^2}{2}$, а величина $\|B_s\|^2$ равна максимальному собственному значению $B_s^* B$. Поэтому

$$\|B_s\| = \left(1 + \lambda_s\sqrt{1 + \frac{\lambda_s^2}{4}} + \frac{\lambda_s^2}{2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\lambda_s + O(\lambda_s^2).$$

Следовательно, произведение (2.12) сходится.

Ограниченность оператора B доказана. Далее,

$$B^{-1} f(\xi) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} f(\xi),$$

а в силу только что доказанного оператор, стоящий в правой части равенства, ограничен. ∎

Лемма 2.13. Пусть K — ядерный оператор. Тогда оператор

$$D = \exp\left(\sum k_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)$$

ограничен и обратим в $\overline{\Lambda}(H)$.

Доказательство. Этот оператор сопряжен к оператору B из предыдущей леммы. ∎

Вернемся к общему случаю. Нам нужно исследовать на ограниченность оператор S с ядром (2.11).

Домножая S слева на оператор

$$B^{-1} f(\xi) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} f(\xi)$$

и справа на

$$D^{-1} = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right),$$

мы получаем оператор с ядром

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi\ \ \bar\eta)\begin{pmatrix} 0 & L \\ -L^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\right\},$$

или, что то же самое, оператор

$$Qf(\xi) = f(L\xi).$$

Этот оператор оставляет инвариантными подпространства Λ^s и действует в Λ^s как внешняя степень $\Lambda^s L$ оператора L. Тем самым, возникает вопрос: для каких L последовательность $\|\Lambda^s L\|$ ограничена? Доказательство теоремы завершается следующей леммой.

Лемма 2.14. Последовательность $\|\Lambda^s L\|$ ограничена тогда и только тогда, когда L представи́м в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L'\| \leqslant 1$, а T — ядерный оператор.

Доказательство. Пусть L представи́м в указанном виде. Ясно, что

$$\Lambda^k L = \Lambda^k L' \cdot \Lambda^k(1+T),$$

далее, $\|\Lambda^k L\| \leqslant 1$, а

$$\left\|\Lambda^k(1+T)\right\|^2 = \left\|\Lambda^k(1+T^*)\cdot\Lambda^k(1+T)\right\| = \left\|\Lambda^k[(1+T^*)(1+T)]\right\|.$$

Пусть $(1+T^*)(1+T) = 1+S$. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$ — положительные собственные числа оператора S (каждое собственное число входит в эту последовательность столько раз, какова его кратность), а $e_1, e_2, \ldots$ — соответствующие собственные векторы. Легко видеть, что

$$\|\Lambda^s(1+S)\| = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_s), \qquad (2.13)$$

причем норма достигается на векторе $e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_s$. Последовательность (2.13) ограничена сверху величиной $\prod(1+\lambda_j)$, которая в силу ядерности оператора S конечна. В одну сторону лемма доказана.

Обратно, пусть L — некоторый оператор, причем числа $\|\Lambda^s L\|$ ограничены. Пусть $L = UR$ — его полярное разложение (см. Предварительные сведения, §4). Тогда

$$\Lambda^s L = \Lambda^s U \cdot \Lambda^s R.$$

Оператор $\Lambda^s U$ является изометрией на образе $\Lambda^s R$, поэтому $\|\Lambda^s R\| = \|\Lambda^s L\|$. Таким образом, числа $\|\Lambda^s R\|$ ограничены. Пусть H_- и H_+ — спектральные подпространства положительного самосопряженного оператора R, отвечающее отрезку $[0,1]$ и интервалу $(1,\infty)$ соответственно. Определим операторы R' и $(1+T)$ из условия

$$\begin{cases} R'v = v, & v \in H_+; \\ R'v = Rv, & v \in H_-; \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+T)v = Rv, & v \in H_+; \\ (1+T)v = v, & v \in H_-. \end{cases}$$

Ясно, что $R = R'T$. Мы хотим доказать, что оператор T — ядерный. Пусть H_ε — спектральное подпространство оператора T, отвечающее интервалу (ε, ∞), где $\varepsilon > 0$. Допустим, H_ε бесконечномерно. Тогда для любого N найдутся ортогональные единичные векторы $e_1, \ldots e_N \in H_\varepsilon$ такие, что векторы $(1+T)e_1, \ldots (1+T)e_N$ также попарно ортогональны (это очевидно, если в H_ε содержится хотя бы одно бесконечномерное собственное подпространство, если же такого подпространства нет, то H_ε можно разложить в счетную сумму ненулевых спектральных подпространств $H_\varepsilon = \bigoplus Q_j$ и далее выбрать произвольные $e_j \in Q_j$). Поэтому

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda^N(1+T)\right\| &\geqslant \left\|\Lambda^N(1+T)(e_1\wedge\ldots\wedge e_N)\right\| = \\ &= \left\|(1+T)e_1\wedge\ldots\wedge(1+T)e_N\right\| = \\ &= \prod\|(1+T)e_j\| \geqslant \\ &\geqslant (1+\varepsilon)^N.\end{aligned}$$

Противоречие. Таким образом, все H_ε конечномерны, а значит, оператор T — компактен. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ — его собственные числа, а $e_1, e_2, \ldots$ — собственные векторы. Тогда

$$\left\|\Lambda^k(1+T)\right\| = (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_k), \qquad (2.14)$$

причем норма достигается на векторе $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$. Но числа (2.14) должны быть ограничены, следовательно, произведение $\prod(1+\lambda_k)$ сходится, а значит, оператор T — ядерный, что и требовалось доказать. ■

§ 3. *Категория* $\overline{\mathbf{GA}}$

В этом параграфе мы строим бесконечномерный аналог категории **GA**.

3.1. Первое определение. Объект категории $\overline{\mathrm{GA}}$ — прямая сумма двух гильбертовых пространств.

Определение морфизма будет двухступенчатым. Пусть $V = V_+ \oplus V_-$, $W = W_+ \oplus W_-$ — два объекта категории $\overline{\mathrm{GA}}$. Множество $m(V,W)$ мы определим как множество подпространств (линейных отношений) $P : V \rightrightarrows W$ таких, что P является графиком оператора $S(P) : W_+ \oplus V_- \to W_- \oplus V_+$, причем матрица $S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям:

1°. блоки B и C ограничены;

2°. блоки A и D являются операторами Гильберта—Шмидта.

Матрицу $S(P)$ мы будем называть *преобразованием Потапова* линейного отношения P.

Множество $\mathrm{Mor}(V,W)$ состоит из null и некоторых замкнутых линейных отношений $P : V \rightrightarrows W$, причем линейное отношение $P \in \mathrm{Mor}(V,W)$ содержится в $\mathrm{Mor}(V,W)$ в том и только том случае, когда существует $P' \in m(V,W)$ такое, что $P \cap P'$ имеет конечную коразмерность в P и P'.

Пусть α — коразмерность $P \cap P'$ в P', а β — коразмерность $P \cap P'$ в P. Величину $d(P) = \alpha - \beta$ мы назовем *дефектом размерности* морфизма. Мы опускаем тривиальную проверку того, что $d(P)$ не зависит от выбора P'.

Замечание. Пусть P — ненулевой морфизм $V \to W$. Пусть $s = \dim(P \cap (W_- \oplus V_+))$, пусть L — проекция P на $W_+ \oplus V_-$ параллельно $W_- \oplus V_+$. Пусть t — коразмерность L в P. Тогда легко видеть, что $d(P) = s - t$.

Умножение морфизмов мы определим так же как в категории **GA** (см. п. II.7.2), т. е. произведение null и любого морфизма равно null, если же $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — ненулевые морфизмы, то в случае

$$\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Im}\, P = 0, \quad D(Q) + \mathrm{Im}\, P = W \tag{3.1}$$

Q и P перемножаются как линейные отношения; в противном случае их произведение равно null.

3.2. Второе определение морфизмов. Это определение, не будучи двухступенчатым, не является, однако, более прозрачным. Пусть $V = V_+ \oplus V_-$, $W = W_+ \oplus W_-$ — объекты $\overline{\mathbf{GA}}$. Пусть $P \subset V \oplus W$ — замкнутое подпространство. Заметим, что тем самым на P определена структура гильбертова пространства. Линейное отношение P является морфизмом категории $\overline{\mathbf{GA}}$, если:

1°. оператор X проектирования P на $W_+ \oplus V_-$ (вдоль $W_- \oplus V_+$) является фредгольмовым (см. Предварительные сведения, § 4);

2°. операторы проектирования $P \cap (W \oplus V_-)$ на W_- и $P \cap (V \oplus W_+)$ на V_+ являются операторами Гильберта—Шмидта.

Дефект размерности $d(P)$ — это не что иное, как индекс фредгольмова оператора X.

Задача. Проверьте равносильность определений.

3.3. Корректность определения. Пункты 3.5–3.10 посвящены доказательству следующих утверждений 3.1–3.5.

Предложение 3.1. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ — морфизмы, отличные от null. Тогда:

а) подпространство $\mathrm{Ker}\, Q \cap \mathrm{Indef}\, P \subset W$ конечномерно;

б) подпространство $D(Q) + \mathrm{Im}\, P \subset W$ замкнуто и имеет конечную коразмерность в W.

Замечание. Тем самым устраняется некоторая двусмысленность в (3.1): нам не важно, какую сумму, алгебраическую или топологическую, мы рассматриваем. Заметим также, что сами подпространства $\mathrm{Im}\, P$ и $D(Q)$ могут не быть замкнутыми.

Теорема 3.2. Произведение морфизмов $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ категории $\overline{\mathbf{GA}}$ является морфизмом категории $\overline{\mathbf{GA}}$. При этом если $QP \neq \mathrm{null}$, то

$$d(Q) + d(P) = d(QP). \tag{3.2}$$

Полезна также следующая явная формула для произведения морфизмов.

Теорема 3.3. Пусть $P \in m(V, W)$, $Q \in m(W, Y)$; пусть

$$S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad S(Q) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$$

— их преобразования Потапова. Предположим, что матрица $(1 - AN)$ обратима. Тогда $QP \in m(V, Y)$ причем

$$S(QP) = \begin{pmatrix} K + L(1 - AN)^{-1}AM & L(1 - AN)^{-1}B \\ C(1 - NA)^{-1}M & D + C(1 - NA)^{-1}NB \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Отметим одну важную особенность формулы (3.3), которая не сразу бросается в глаза.

Лемма 3.4. Пусть A, N — операторы Гильберта—Шмидта, и матрица $(1 - AN)$ обратима. Тогда матрица $(1 - NA)$ обратима и

$$(1 - AN)^{-1}A = A(1 - NA)^{-1}. \tag{3.4}$$

3.4. Группа $\mathrm{Aut}(V)$. Два конечномерных объекта категории $\overline{\mathbf{GA}}$ изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их размерности. Условия 1° и 2° п. 3.1 в случае, когда V и W конечномерны, выполнены автоматически, поэтому в этом случае $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V, W) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{GA}}(V, W)$.

Задача. Покажите, что существует 3 попарно не изоморфных бесконечномерных объекта категории $\overline{\mathbf{GA}}$, а именно: $\ell_2 \oplus 0$, $0 \oplus \ell_2$ и $\ell_2 \oplus \ell_2$.

Пусть $V = V_+ \oplus V_- \in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$, причем V_+ и V_- бесконечномерны.

Предложение 3.5. Следующие условия на линейное отношение $P \subset V \oplus V$ равносильны:

1°. $P \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$;

2°. P является графиком обратимого ограниченного оператора $V \to V$, причем матрица

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_- \tag{3.5}$$

этого оператора удовлетворяет условию: B и C — операторы Гильберта—Шмидта.

Доказательство см. в п. 3.9.

Допуская некоторую неточность языка, мы будем считать, что $\mathrm{Aut}(V)$ — группа ограниченных операторов, удовлетворяющих условию 2°.

Замечание. Блоки A, D в матрице (3.5) являются фредгольмовыми операторами. В самом деле, пусть $\begin{pmatrix} F & G \\ H & J \end{pmatrix}$ — обратная матрица. Тогда

$$AF = 1 - BH, \quad FA = 1 - GC,$$

и тем самым оператор A почти обратим. Как показывает следующий пример, блоки A и D действительно могут быть необратимыми:

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{3.6}$$

Заметим далее, что отображение $P \mapsto d(P)$ является гомоморфизмом $\mathrm{Aut}(V)$ в аддитивную группу $\mathbb{Z}$. Отметим также, что дефект размерности графика оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ равен индексу оператора A.

Через $\mathrm{Aut}^{\circ}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ мы обозначим подгруппу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$, состоящую из автоморфизмов с дефектом 0.

3.5. Доказательство леммы 3.4. Пусть матрица $1 - NA$ необратима. В силу компактности оператора NA найдется ненулевой вектор v такой, что $NAv = v$. Но тогда $AN(Av) = Av$, а значит, и оператор $(1 - NA)$ необратим. Далее, равенство

$$A(1 - NA)^{-1} = (1 - AN)^{-1} A$$

очевидно в случае, если $\|AN\| \leqslant 1$, $\|NA\| \leqslant 1$, потому что в обеих его частях стоит

$$A + ANA + ANANA + \ldots .$$

Поэтому при малых λ

$$A(1 - \lambda NA)^{-1} = (1 - \lambda AN)^{-1} A.$$

В обеих частях последнего равенства стоят мероморфные операторнозначные функции от λ. Они совпадают в окрестности нуля, а значит, совпадают всюду.

3.6. Сравнимые подпространства. Пусть Y — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H. Подпространство $Y' \subset H$ мы назовем *сравнимым* с Y, если:

1. Y' замкнуто;
2. $Y \cap Y'$ имеет конечные коразмерности в Y и Y'.

Лемма 3.6. Условие 1 может быть заменено на условие

1′. $Y \cap Y'$ замкнуто.

Доказательство: Утверждение вытекает из следующей задачи. ∎

Задача. Пусть $A \supset B$ — подпространства в гильбертовом пространстве, причем B замкнуто и имеет конечную коразмерность в A. Тогда A замкнуто.

Задача. Пусть Y и Y' — сравнимы, а H — замкнутое подпространство. Тогда $H \cap Y$ сравнимо с $H \cap Y'$.

Лемма 3.7. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, а $A : H_1 \to H_2$ — ограниченный оператор. Пусть Y, Y' — сравнимые подпространства в H_1, и подпространство AY замкнуто в H_2. Тогда подпространства AY и AY' сравнимы.

Доказательство. В силу теоремы Банаха об обратном операторе (см. [Reed, Simon (1972)], § III.5) оператор A индуцирует гомеоморфизм

$$Y / (Y \cap \operatorname{Ker} A) \to AY$$

(слева стоит факторпространство Y по $Y \cap \operatorname{Ker} A$). Поэтому подпространство $A(Y \cap Y')$ замкнуто в H_2, и теперь утверждение становится очевидным. ∎

Следствие 3.8. Пусть Y, Y', Z, Z' — подпространства в H, причем Y сравнимо с Y', а Z сравнимо с Z'. Пусть $Y + Z$ замкнуто, тогда $Y' + Z'$ замкнуто и сравнимо с $Y + Z$.

Доказательство. Применяем лемму к оператору $A(x, x') = x + x'$ из $H \oplus H$ в H. ∎

Пусть Y и Y' сравнимы, пусть α — коразмерность $Y \cap Y'$ в Y, а β — коразмерность $Y \cap Y'$ в Y'. *Относительной размерностью* $\dim(Y \mid Y')$ мы назовем число $\alpha - \beta$.

3.7. Доказательство предложения 3.1.

Пусть сначала $P \in m(V, W)$, $Q \in m(W, Y)$.

$$S(Q) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}, \qquad S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

т. е. P состоит из векторов (v_+, v_-, w_+, w_-), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} w_- = Aw_+ + Bv_-, & (3.7) \\ v_+ = Cw_+ + Dv_-, & (3.8) \end{cases}$$

а Q — из векторов (w_+, w_-, y_+, y_-), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} y_- = Ky_+ + Lw_-, & (3.9) \\ w_+ = My_+ + Nw_-. & (3.10) \end{cases}$$

Поэтому $\operatorname{Indef} P$ и $\operatorname{Ker} Q$ удовлетворяют соответственно системам уравнений

$$\begin{cases} w_- = Aw_+, \\ Cw_+ = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} Lw_- = 0, \\ w_+ = Nw_-. \end{cases}$$

Пусть $(w_+, w_-) \in \operatorname{Indef} P \cap \operatorname{Ker} Q$. Тогда $(1 - AN)w_- = 0$. В силу компактности оператора AN ядро $(1 - AN)$ конечномерно. Итак, подпространство $\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P$ конечномерно.

Далее, заметим, что $D(Q)$ содержит множество F всех векторов (w_+, w_-), удовлетворяющих условию $w_+ = Nw_-$ (в самом деле, вектор $(Nw_-, w_-; 0, Lw_-) \in W \oplus Y$ содержится в Q). Множество $\operatorname{Im} P$ содержит множество G всех векторов (w_+, w_-), удовлетворяющих условию $w_- = Aw_+$. Подпространство $F + G$ совпадает с образом оператора

$$Z : \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & N \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

В силу альтернативы Фредгольма (см. [Reed, Simon (1972)], § VI.5) $\operatorname{Im} Z$ замкнут и имеет конечную коразмерность в W. Но подпространство $D(Q) + \operatorname{Im} P$ содержит $F + G = \operatorname{Im} Z$ и поэтому тоже замкнуто.

Для перехода к общему случаю $P \in \operatorname{Mor}(V, W)$, $Q \in \operatorname{Mor}(W, Y)$ остается применить соображения предыдущего пункта. ∎

3.8. Доказательство теоремы 3.3.

Итак, пусть оператор $1 - AN$ обратим. Из предыдущего доказательства ясно, что $\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P = 0$. Далее, оператор Z, задаваемый формулой (3.11), обратим:

$$\begin{pmatrix} 1 & N \\ A & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1 - NA)^{-1} & -N(1 - AN)^{-1} \\ -A(1 - NA)^{-1} & (1 - AN)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\operatorname{Im} P + D(Q) \supset \operatorname{Im} Z = W$. Таким образом, $QP \neq \mathrm{null}$.

Исключая w_- и w_+ из уравнений (3.7), (3.10), мы получаем

$$w_- = (1 - AN)^{-1}(AMy_+ + Bv_-), \quad w_+ = (1 - NA)^{-1}(My_+ + NBv_-).$$

Подставляя w_+ и w_- в уравнения (3.8), (3.9), мы получаем искомое утверждение. ∎

3.9. Доказательство теоремы 3.1.

Лемма 3.9. Пусть $P, P' : V \rightrightarrows W$ и $Q, Q' : W \rightrightarrows Y$ — линейные отношения, причем P сравнимо с P', а Q сравнимо с Q'. Пусть $R = QP$ (соответственно $R' = Q'P'$) — произведение Q и P (соответственно Q' и P') как линейных отношений. Тогда

$$\begin{aligned} d(QP, Q'P') = d(Q, Q') + d(P, P') - \\ - d\big(\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P,\ \operatorname{Ker} Q' \cap \operatorname{Indef} P'\big) + \\ + d\big(\operatorname{Im} P + D(Q),\ \operatorname{Im} P + D(Q')\big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Доказательство. Повторим рассуждения из п. II.7.2. Пусть $Z \subset T = V \oplus W \oplus W \oplus Y$ — подпространство всех векторов вида (v, w, w, y), а $P \oplus Q \subset V \oplus W \oplus W \oplus Y$ — подпространство, состоящее из векторов вида (v, w, w_1, y_1), где $(v, w) \in P$, $(w_1, y_1) \in Q$. Тогда QP — проекция $Z \cap (P \oplus Q)$ на $V \oplus Y$ вдоль $W \oplus W$. Пусть подпространство $L \subset V \oplus W \oplus W \oplus Y$ состоит из всех векторов вида $(0, w, w, 0)$. Ясно, что

$$(P \oplus Q) \cap L \simeq \operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Im} P. \tag{3.13}$$

Теперь мы должны проследить, что происходит с двумя парами Q, P и Q', P' сравнимых отношений. Следующие три равенства являются легко проверяемыми высказываниями из области чистой линейной алгебры:

1°. $$\begin{aligned} d(Q, Q') + d(P, P') = d\big(Z \cap (P \oplus Q),\ Z \cap (P' \oplus Q')\big) + \\ + d\big(Z + (P \oplus Q),\ Z + (P' \oplus Q')\big); \end{aligned}$$

2°. $$d\big(Z + (P \oplus Q),\ Z + (P' \oplus Q')\big) = d\big(\operatorname{Im} P + D(Q),\ \operatorname{Im} P' + D(Q')\big);$$

3°. $$d\big(Z \cap (P \oplus Q),\ Z \cap (P' \oplus Q')\big) = d\big(L \cap (P \oplus Q),\ L \cap (P' \oplus Q')\big) + d(PQ, P'Q').$$

Учитывая эти 3 равенства, а также (3.13), мы получаем искомое утверждение. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $P \in \operatorname{Mor}(V, W)$, $Q \in \operatorname{Mor}(W, Y)$. Возьмем $P' \in m(V, W)$, сравнимое с P, и $Q' \in m(W, Y)$ сравнимое с Q. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — преобразования Потапова морфизмов Q' и P'. Возможен случай, когда матрица $1 - AN$ необратима. Если это так, то выберем конечномерный оператор ΔN так, чтобы $\|N + \Delta N\| < \|A\|^{-1}$. Тогда матрица $(1 - (N + \Delta N)A)$ обратима. Пусть $Q'' \in m(W, Y)$ — морфизм с преобразованием Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N + \Delta N \end{pmatrix}$. Тогда к Q'' и P' применима теорема 3.3. В частности, $Q''P' \neq \text{null}$ и $d(Q''P') = 0$.

Применяя лемму 3.4 и учитывая, что в силу равенств

$$\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P = \operatorname{Ker} Q'' \cap \operatorname{Indef} P' = 0,$$
$$\operatorname{Im} P + D(Q) = \operatorname{Im} P' + D(Q'') = W$$

второе и третье слагаемое в формуле (3.12) равны 0, мы получаем искомое утверждение. ■

3.10. Доказательство предложения 3.5.

Пусть G — группа всех операторов в V, удовлетворяющих условию 2° предложения 3.5. Для любого $P \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ обозначим через $\widetilde{P}$ соответствующий оператор в V. Пусть $X \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$ — элемент, соответствующий элементу $\widetilde{X} \in \mathrm{G}$, задаваемому формулой (3.6).

Итак, пусть $P \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$. Мы хотим убедиться в том, что $\widetilde{P} \in \mathrm{G}$. Пусть $j = d(P)$. Рассмотрим $P' = X^{-j}P$. Тогда $d(P') = 0$, а нам достаточно проверить, что $\widetilde{P}' \in \mathrm{G}$. Рассмотрим конечномерное возмущение P'' элемента P' такое, что $P'' \in \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(V) \cap m(V, V)$. Тогда $\widetilde{P}'' - \widetilde{P}'$ имеет конечный ранг, поэтому нам достаточно проверить, что $\widetilde{P}'' \in \mathrm{G}$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ — преобразование Потапова P'', тогда $(v_+, v_-; w_+, w_-) \in P''$ равносильно

$$\begin{cases} w_- - Kw_+ = Lv_-, \\ Mw_+ = v_+ - Nv_-. \end{cases} \tag{3.14}$$

Рассмотрим операторы

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ -K & E \end{pmatrix} : W_+ \oplus W_- \to V_+ \oplus W_-,$$
$$Q = \begin{pmatrix} E & -N \\ 0 & L \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus W_-,$$

где $W = W_+ \oplus W_-$ — второй экземпляр пространства $V = V_+ \oplus V_-$. Условие $(v_+, v_-; w_+, w_-) \in P''$ в силу равенств (3.14) переписывается в виде

$$T\begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix}.$$

Теперь вспоминаем, что P'' — график обратимого оператора $V \to W$, поэтому

$$\operatorname{Ker} T = 0, \quad \operatorname{Ker} Q = 0, \quad \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} Q.$$

Но

$$W_- \subset \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} Q \supset V_+,$$

поэтому $\operatorname{Im} T \supset V_+ \oplus W_-$, следовательно (по теореме Банаха об обратном операторе), операторы T и Q обратимы. Теперь для оператора $\widetilde{P}''$ мы можем написать явную формулу

$$\widetilde{P}'' = T^{-1}Q = \begin{pmatrix} M^{-1} & M^{-1}N \\ KM^{-1} & L - KM^{-1}N \end{pmatrix},$$

и в одну сторону утверждение доказано.

Пусть $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, пусть индекс фредгольмова оператора A равен j. Тогда верхний левый блок оператора $X^{-j}U$ имеет индекс 0, а поэтому его можно подвергнуть конечномерному возмущению так, что верхний левый блок станет обратимым, а затем все сводится к простому вычислению (см. п. II.3.6). ■

3.11. Инволюция в категории $\overline{\mathrm{GA}}$. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, а $P : H_1 \rightrightarrows H_2$ — замкнутое линейное отношение (т. е. замкнутое подпространство в $H_1 \oplus H_2$). Определим сопряженное линейное отношение $P^* : H_2 \rightrightarrows H_1$ как множество всех $(\tilde h_2, \tilde h_1) \in H_2 \oplus H_1$ таких, что для любого вектора (h_1, h_2) выполнено

$$\langle \tilde h_2, h_2 \rangle_{H_2} = \langle \tilde h_1, h_1 \rangle_{H_1}.$$

Иными словами, P^* есть ортогональное дополнение в $H_1 \oplus H_2$ до P относительно эрмитовой формы

$$M\big((\tilde h_1, \tilde h_2), (h_1, h_2)\big) = \langle \tilde h_1, h_1\rangle_{H_1} - \langle \tilde h_2, h_2\rangle_{H_2} \tag{3.15}$$

(где $(\tilde h_1, \tilde h_2), (h_1, h_2) \in H_1 \oplus H_2$). В частности, $P^{**} = P$.

Задача. Пусть P — график некоторого оператора A. Покажите, что P^* — график оператора A^*.

Задача. Покажите, что для любых $P : H_1 \rightrightarrows H_2$, $Q : H_2 \rightrightarrows H_3$ выполнено

$$(QP)^* \supset P^*Q^*. \tag{3.16}$$

Задача. Приведите пример, когда $(QP)^* \not\supseteq P^*Q^*$.

Введем инволюцию в категории **GA**, положив, что для любого $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ морфизм P^* есть сопряженное линейное отношение, а $\mathrm{null}^*_{V,W} = \mathrm{null}_{W,V}$.

Теорема 3.10. Определение инволюции корректно, т. е.

а) если $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}(V, W)$, то $P^* \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}(W, V)$;

б) если $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}(W, Y)$, то

$$(QP)^* = P^*Q^*. \tag{3.17}$$

Кроме того, инволюция обладает следующими свойствами:

в) $d(P^*) = -d(P)$;

г) $\mathrm{Ker}(P^*) = (\mathrm{Im}\, P)^\perp$, $\mathrm{Indef}(P^*) = D(P)^\perp$ (3.18)

(ортогональное дополнение понимается в смысле скалярных произведений в V и W);

д) пусть $P \in m(V, W)$ и $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$. Тогда $P^* \in m(W, V)$ и

$$S(P^*) = \begin{pmatrix} -N^* & L^* \\ M^* & -K^* \end{pmatrix} : V_+ \oplus W_- \to V_- \oplus W_+.$$

Доказательство д). Пусть вектор $(\tilde v, \tilde w) = (\tilde v_+, \tilde v_-; \tilde w_+, \tilde w_-) \in V \oplus W$ ортогонален относительно формы (3.15) любому вектору $(v, w) = (v_+, v_-; w_+, w_-) \in P$. Учитывая, что

$$w_- = Kw_+ + Lv_-, \quad v_+ = Mw_+ + Nv_-,$$

получаем

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \tilde w, w\rangle - \langle \tilde v, v\rangle = \\
&= \langle \tilde w_+, w_+\rangle + \langle \tilde w_-, w_-\rangle - \langle \tilde v_+, v_+\rangle - \langle \tilde v_-, v_-\rangle = \\
&= \langle \tilde w_+, w_+\rangle + \langle \tilde w_-, Kw_+ + Lv_-\rangle - \langle \tilde v_+, Mw_+ + Nv_-\rangle - \langle \tilde v_-, v_-\rangle = \\
&= \langle \tilde w_+ + K^*\tilde w_- - M^*\tilde v_+, w_+\rangle - \langle \tilde v_- - L^*\tilde w_- + N^*\tilde v_+, v_-\rangle.
\end{aligned}$$

Учитывая, что w_+ и v_- могут быть любыми, получаем

$$\tilde v_- = -N^*\tilde v_+ + L^*\tilde w_-, \quad \tilde w_+ = -K^*\tilde w_- + M^*\tilde v_+,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение г) мы оставляем в качестве упражнения.

Далее, легко видеть, что если P и R сравнимы, то P^* и R^* сравнимы, и

$$d(P, R) + d(P^*, R^*) = 0.$$

Отсюда (и из д)) мгновенно следует а) и г).

Пусть, далее, P и Q удовлетворяют условиям теоремы 3.3. Тогда равенство (3.17) вытекает непосредственно из формул (3.3). Пусть P, Q произвольны. Тогда (3.18) вместе с г) дает $d((QP)^*) = d(P^*Q^*)$, что вместе с (3.16), в свою очередь, дает (3.17). Теорема доказана. ■

Легко видеть, что группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{GA}}}(V)$ всех унитарных элементов группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{GA}}}(V)$ (см. п. II.8.6) состоит из всех унитарных матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где B и C — операторы Гильберта—Шмидта.

3.12. Замечания. Пусть Y_1, Y_2 — подпространства в гильбертовом пространстве H. Пусть P_1, P_2 — проекторы на Y_1, Y_2. Мы скажем, что Y_1, Y_2 являются $\mathscr{L}_p$-сравнимыми, если операторы $(P_1P_2 - E)|_{Y_1}$ и $(P_2P_1 - E)|_{Y_2}$ содержатся в классе Шаттена $\mathscr{L}_p$.

Задача. Обобщите на $\mathscr{L}_p$-сравнимость рассуждения п. 3.6. Дайте определение категории $\overline{\mathbf{GA}}$ в терминах $\mathscr{L}_2$-сравнимости.

§ 4. *Категория* $\overline{\mathbf{GD}}$ *и спинорное представление*

4.1. Категория $\overline{\mathbf{GD}}$. Объект V категории $\overline{\mathbf{GD}}$ — это прямая сумма $H \oplus H'$ гильбертова пространства H и сопряженного к H пространства H'. Эта прямая сумма наделяется естественной структурой гильбертова пространства, а также симметричной билинейной формой

$$\{(v, v'), (w, w')\} = v'(w) + w'(v),$$

где $v, w \in H$, а $v', w' \in H'$. Подпространство $H \subset V$ мы будем обозначать через V_+, а подпространство $H' \subset V$ — через V_-.

Можно еще сказать, что объект V категории **GD** — это прямая сумма $V = V_+ \oplus V_-$ двух подпространств, при этом фиксирована антилинейная обратимая изометрия $U_V : V_+ \to V_-$ (в самом деле, пространство H' антиизоморфно H).

Множество $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V, W)$ состоит из null и линейных отношений $P : V \rightrightarrows W$, удовлетворяющих двум условиям:

а) P — морфизм категории $\overline{\mathbf{GA}}$;

б) P — максимальное изотропное подпространство в $V \oplus W$ относительно формы

$$\{(v_1, w_1), (v_2, w_2)\}_{V \oplus W} = \{v_1, v_2\}_V - \{w_1, w_2\}_W. \tag{4.1}$$

Правила умножения морфизмов — те же, что и в категории $\overline{\mathbf{GA}}$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}(V, W)$, причем P изотропно относительно формы (4.1). Докажите, что $d(P) \leqslant 0$, причем $d(P) = 0$ тогда и только тогда, когда P — максимальное изотропное подпространство.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(W, Y)$. Тогда $QP \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}(V, Y)$, при этом очевидно, что QP изотропно. С другой стороны, $d(QP) = d(Q) + d(P) = 0 + 0$ и, тем самым, $QP \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V, Y)$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(W,Y)$. Докажите, что произведение $QP : V \rightrightarrows Y$, вычисленное как произведение линейных отношений, содержится в $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,Y)$.

4.2. Преобразование Потапова.

Лемма 4.1. Пусть $P \in m(V,W)$ (см. п. 3.1). Пусть его преобразование Потапова равно $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Тогда условие $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,W)$ эквивалентно одновременному выполнению условий

$$B = C^{\mathrm{t}}, \quad A = -A^{\mathrm{t}}, \quad D = -D^{\mathrm{t}}. \tag{4.2}$$

Доказательство леммы мы опускаем (см. п. II.6.7). ■

4.3. Спинорное представление категории $\overline{\mathbf{GD}}$. Поставим в соответствие каждому $V \in \overline{\mathbf{GD}}$ пространство Фока $\Lambda(V_+)$. При этом каждому вектору $v \in V$ мы поставим в соответствие оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$. Напомним, что эти операторы удовлетворяют так называемым «*каноническим антикоммутационным соотношениям*»:

$$\hat{a}(v_1)\hat{a}(v_2) + \hat{a}(v_2)\hat{a}(v_1) = \{v_1, v_2\} \cdot 1.$$

Теорема 4.2.

а) Для любого $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,W) \setminus \mathrm{null}$ существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $\mathrm{spin}(P) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ такой, что

$$\hat{a}(w)\,\mathrm{spin}(P) = \mathrm{spin}(P)\hat{a}(v) \tag{4.3}$$

для всех $(v,w) \in P$.

б) Положим $\mathrm{spin}(\mathrm{null}) = 0$. Тогда для любых $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(W,Y) \setminus \mathrm{null}$

$$\mathrm{spin}(Q)\,\mathrm{spin}(P) = \lambda\,\mathrm{spin}(QP),$$

причем $\lambda \neq 0$.

в) Отображение $P \mapsto \mathrm{spin}(P)$ является биекцией множества $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,W)$ на множество всех операторов Березина $\Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$, определенных с точностью до умножения на константу.

Эта теорема является точным аналогом теоремы из § II.6; доказательство, приведенное там, основано на явных вычислениях и без каких-либо ощутимых изменений переносится на бесконечномерный случай.

4.4. Группа автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений. Определим инволюцию в категории $\overline{\mathbf{GD}}$ как ограничение инволюции в категории $\overline{\mathbf{GA}}$ (см. п. 3.11).

Задача. Проверьте, что $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,W)$ влечет $P^* \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(W,V)$.

Задача. Пусть операторы $U_V : V_+ \to V_-$ определены так же, как в п. 4.1. Покажите, что оператор

$$\begin{bmatrix} & & & U_V \\ & & U_V^{-1} & \\ & U_W & & \\ U_W^{-1} & & & \end{bmatrix} : V_+ \oplus V_- \oplus W_+ \oplus W_- \to W_+ \oplus W_- \oplus V_+ \oplus V_-$$

переводит любое подпространство $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V,W)$ в $P^* \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GD}}}(W,V)$.

Задача. Покажите, что

$$\mathrm{spin}(P^*) = [\mathrm{spin}(P)]^*$$

в том смысле, что при $f \in \Lambda(V)$, $g \in \Lambda(W)$

$$\langle f, \mathrm{spin}(P^*)g\rangle = \langle \mathrm{spin}(P)f, g\rangle.$$

Указание. Это видно из тождества (4.3).

Пусть теперь P — унитарный элемент группы $\mathrm{Aut}(V)$ (см. п. II.8.6). Тогда $P^* = P^{-1}$, поэтому матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ оператора с графиком P является унитарной. С другой стороны, матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ сохраняет каноническую билинейную форму в V с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $A = \overline{D}$, $B = \overline{C}$. Итак, матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Группой автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений называется группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{GD}}}(V)$ всех унитарных элементов в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{GD}}}(V)$. Она реализуется как группа унитарных матриц вида (4.5) таких, что Ψ — оператор Гильберта—Шмидта.

В силу леммы II.8.3 для любого $g \in \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{GD}}}(V)$ оператор $\mathrm{spin}(g)$ унитарен с точностью до умножения на константу.

Задача. Пусть $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{GD}}}(V)$. Пусть оператор Φ обратим. Отнормируем оператор $\mathrm{spin}(g)$ так, чтобы он имел ядро

$$\det\left[(\Phi^*\Phi)^{1/4}\right] \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\xi \;\; \overline{\eta}) \begin{pmatrix} \overline{\Psi}\Phi^{-1} & \Phi^{-1} \\ \Phi^{\mathrm{t}-1} & \Phi^{-1}\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \overline{\eta} \end{pmatrix}\right\}. \tag{4.6}$$

Тогда $\mathrm{spin}(g)$ унитарен (ср. с формулой (II.3.21)). Покажите, что $(\Phi^*\Phi - 1)$ — ядерный оператор (см. [Березин (1965)], § 5).

Задача. Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть G — группа вещественно-линейных операторов в V, сохраняющих форму $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ и представимых в виде $A(1+B)$, где A — (комплексно-линейный) унитарный оператор, а B — вещественно-линейный оператор Гильберта—Шмидта. Покажите, что G изоморфна группе автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений.

4.5. Спинорное представление категории $\overline{\mathbf{GA}}$. Пусть, как обычно, R' обозначает пространство, двойственное к R. Пусть $H = H_+ \oplus H_-$ — объект категории $\overline{\mathbf{GA}}$. Поставим ему в соответствие объект $V(H)$ категории $\overline{\mathbf{GD}}$:

$$V(H) = V_+ \oplus V_- = (H_+ \oplus H'_-) \oplus (H_- \oplus H'_+).$$

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H, Y) \setminus \mathrm{null}$, а P° — аннулятор P в $H' \oplus Y'$, т. е. множество всех функционалов $(h', y') \in H' \oplus Y'$ таких, что $h'(p) = y'(q)$ для любых $(p, q) \in P$. Тогда $P \oplus P^\circ \subset V(H) \oplus V(Y)$ есть морфизм категории $\overline{\mathrm{GD}}$. Таким образом, мы построили функтор из $\overline{\mathrm{GA}}$ в $\overline{\mathrm{GD}}$.

Ограничивая спинорное представление $\overline{\mathrm{GD}}$ на $\overline{\mathrm{GA}}$, мы получаем представление категории $\overline{\mathrm{GA}}$, которое мы тоже будем называть *спинорным*.

4.6. Замечания.

A. Спинорное представление групп $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ и $\mathrm{Aut}^\circ_{\overline{\mathrm{GA}}}(V)$. Пусть H_+ и H_- — бесконечномерные гильбертовы пространства, $H = H_+ \oplus H_-$. Тогда группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GA}}(H)$ действует в $\Lambda(H_+ \oplus H'_-)$, и это представление мы также назовем *спинорным*. Обозначим нечетные переменные, отвечающие пространству H_+, через $\xi_1^+, \xi_2^+, \ldots$, а нечетные переменные, отвечающие H'_- — через $\xi_1^-, \xi_2^-, \ldots$.

Задача. Докажите, что представление $\mathrm{Aut}^\circ_{\mathrm{GA}}(H)$ (см. п. 3.4) в $\Lambda(H_+ \oplus H'_-)$ приводимо. Его неприводимые подпредставления R_k $(k \in \mathbb{Z})$ действуют в подпространствах, натянутых на векторы вида

$$\xi_{i_1}^+ \ldots \xi_{i_{k+\alpha}}^+ \xi_{j_1}^- \ldots \xi_{j_\alpha}^-.$$

Задача. Докажите, что спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GA}}(H)$ неприводимо. (Покажите, что операторы $Q \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{GA}}$ с $d(A) = n$ переводят R_k в R_{k+n}).

B. Категории $\overline{\mathrm{B}}$ и $\overline{\mathrm{C}}$. Объект V категории $\overline{\mathrm{B}}$ есть сумма $\mathbb{C} \oplus H \oplus H'$, где H — гильбертово пространство. Подпространства H и H' в V мы будем обозначать через V_+ и V_-. В пространстве V вводится симметричная билинейная форма

$$L_V\big((c, v_+, v_-), (d, w_+, w_-)\big) = cd + v_-(w_+) + w_-(v_+).$$

Объект V категории $\overline{\mathrm{C}}$ — это прямая сумма $V = V_+ \oplus V_-$ гильбертова пространства H и его сопряженного H'. В V водится кососимметричная билинейная форма по формуле

$$L_V\big((v_+, v_-), (w_+, w_-)\big) = v_-(w_+) - w_-(v_+).$$

В обоих случаях объекты являются объектами категории $\overline{\mathrm{GA}}$ (в случае $\overline{\mathrm{B}}$ имеем $\mathbb{C} \oplus H \oplus H' = (\mathbb{C} \oplus H) \oplus H'$). Множество $\mathrm{Mor}(V, W)$ в обоих случаях состоит из null и морфизмов категории $\overline{\mathrm{GA}}$, являющихся максимальными изотропными пространствами в $V \oplus W$ относительно билинейной формы

$$L_{V\oplus W}\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = L_V(v_1, v_2) - L_W(w_1, w_2).$$

Спинорное представление категории $\overline{\mathrm{B}}$ строится точно так же, как спинорное представление категории B (см. § III.3). С другой стороны, мы имеем возможность ограничить спинорное представление $\overline{\mathrm{GA}}$ на $\overline{\mathrm{B}}$ и $\overline{\mathrm{C}}$ (и таким образом получить аналоги всех представлений главы III).

C. Линеаризация. Рассмотрим в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$ подгруппу G, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1+K & L \\ M & 1+N \end{pmatrix},$$

где K, N — ядерные операторы, а L и M — операторы Гильберта—Шмидта.

Задача. Докажите, что для $g \in \mathrm{G}$ операторы $\mathrm{spin}(g)$ можно выбрать так, что

$$\mathrm{spin}(g_1 g_2) = \pm\, \mathrm{spin}(g_1)\, \mathrm{spin}(g_2)$$

для всех $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$.

Указание. См. п. II.3.9.

D. Представления ограниченными операторами в гильбертовом пространстве.

Задача. Пусть Q — подгруппа в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$, состоящая из операторов, представимых в виде $A(1 + T)$, где $A \in \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$, а T — ядерный оператор. Докажите, что для $g \in \mathrm{Q}$ оператор $\mathrm{spin}(g)$ ограничен в топологии $\overline{\Lambda}(V_+)$.

4.7. Литературные замечания. Теорема существования спинорного представления для группы автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений получена независимо Шейлом и Стайнеспрингом [Shale, Stinespring (1964)] и Березиным [Березин (1965)]. Березин также получил явную формулу (4.6). На группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(V)$ представление продолжено в [Неретин (1986)]. Категории $\overline{\mathrm{GD}}$, $\overline{\mathrm{GA}}$ и их спинорные представления построены в [Неретин (1989.2)], там же получены теоремы ограниченности из § 2.