Глава V

Представление Вейля: конечномерный случай

В работах по математической физике 50-х — начала 60-х годов было обнаружено, что вещественная симплектическая группа $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ имеет представление, поразительно похожее на спинорное представление группы $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$. По трудно объяснимой причуде математической терминологии это представление называется представлением Вейля (или Сигала—Шейла—Вейля), хотя правильней был бы термин «представление Фридрихса—Сигала—Березина», см. п. VI.2.5. В этой и следующей главе мы проводим по отношению к «представлению Вейля» ту же программу, что уже проведена в отношении спинорного представления. При этом (в отличие от главы II) мы избегаем промежуточных мотивировок и сразу излагаем то, что получается в итоге.

§ 1. Классические эрмитовы категории U, Sp, SO*

По аналогии с изучавшимися выше категориями линейных отношений **GA**, **B**, **C**, **D** хочется ввести похожие категории вещественных линейных отношений. Однако буквальное следование комплексным образцам приводит к объектам, которые не особенно интересны. Оказывается, что разумные вещественные аналоги категорий **GA**, **B**, **C**, **D** устроены несколько более замысловато. В этом параграфе мы вводим три такие вещественные категории **Sp**, **U** и **SO*** (об остальных вещественных «классических» категориях см. добавление А). Сразу оговоримся, что в этой книге нас интересует главным образом категория **Sp** (хотя две другие категории ничем ее не хуже).

1.1. Категория U. Объект категории **U** — конечномерное комплексное линейное пространство V, снабженное невырожденной эрмитовой формой $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ (вообще говоря, знаконеопределенной). Пусть p_V и q_V — положительный и отрицательный индексы инерции формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

Пусть V, W — объекты категории **U**. Как всегда, снабдим прямую сумму $V \oplus W$ разностью форм $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$, т. е. формой

$$\langle (v, w), (v', w')\rangle_{V\oplus W} = \langle v, v'\rangle_V - \langle w, w'\rangle_W. \tag{1.1}$$

До этого места все очень знакомо. Здесь, однако, начинаются различия с комплексным случаем. Морфизмом в $V \to W$ называется подпространство $P \subset V \oplus W$, удовлетворяющее условиям:

а) форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ на P неотрицательно определена, причем P — максимальное из подпространств, удовлетворяющих этому свойству (тем самым, $\dim P = p_V + q_W$);

б) форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ строго положительно определена на $\operatorname{Ker} P$, а форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ строго отрицательно определена на $\operatorname{Indef} P$.

Морфизмы умножаются как линейные отношения.

Замечание 1. Условие а) можно понять как то, что линейное отношение P «сжимает» форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$; в самом деле, $(v, w) \in P$ влечет $\langle v, v\rangle_V \geqslant \langle w, w\rangle_W$.

Замечание 2. Неотрицательность формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ на $\operatorname{Ker} P \subset V$ и неположительность формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ на $\operatorname{Indef} P \subset W$ следует из условия а). Условие б) лишь чуть-чуть усиливает условие а).

Предложение 1.1. Определение корректно, т. е. произведение морфизмов категории **U** является морфизмом категории **U**.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(W, Y)$. В проверке нуждается лишь то, что QP является максимальным среди подпространств, на которых форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ неотрицательно определена.

Покажем, что $QP \neq \mathrm{null}$ в категории **GA**. В самом деле, условие б) влечет $\operatorname{Indef} P \cap \operatorname{Ker} Q = 0$.

Осталось показать, что $\operatorname{Im} P + D(Q) = W$. Для этого рассмотрим в W ненулевой вектор $w \in D(Q)^\perp$. Отметим, что тем самым $(w, 0)$ ортогонален Q. Если $\langle w, w\rangle_W \geqslant 0$, то вектор $(w, 0)$ можно добавить к подпространству Q: форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W\oplus Y}$ останется неотрицательно определенной на линейной оболочке подпространства Q и вектора w. В силу максимальности Q мы имеем $(w, 0) \in Q$. Поэтому $(w, 0) \in Q \cap Q^\perp$; это возможно лишь в случае $\langle w, w\rangle = 0$, что противоречит строгой положительной определенности формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\operatorname{Ker} Q$.

Итак, форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ строго отрицательно определена на $D(Q)^\perp$. Точно так же показывается, что $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ строго положительно определена на $\operatorname{Im}(P)^\perp$. Поэтому $D(Q)^\perp \cap \operatorname{Im}(P)^\perp = 0$, а значит, $D(Q) + \operatorname{Im}(P) = W$.

Итак, $QP \neq \mathrm{null}$, а следовательно (см. предложение II.7.1),

$$\begin{aligned}\dim QP &= \dim Q + \dim P - \dim W = \\ &= (p_W + q_Y) + (p_V + q_W) - (p_W + q_W) = \\ &= p_V + q_Y,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ∎

Заметим, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{U}}(V)$ — это не что иное, как псевдоунитарная группа $\mathrm{U}(p_V, q_V)$. В самом деле, автоморфизм объекта V должен быть графиком обратимого оператора $A: V \to V$ (см., например, рассуждения п. II.6.2), причем по условию а) для всех v должно быть выполнено:

$$\langle Av, Av\rangle \leqslant \langle v, v\rangle; \quad \langle A^{-1}v, A^{-1}v\rangle \leqslant \langle v, v\rangle,$$

а значит, $\langle Av, Av\rangle = \langle v, v\rangle$.

Полугруппа $\mathrm{End}(V)$ содержит, однако, еще много операторов (формально говоря, графиков операторов). А именно, любой оператор $T: V \to V$, удовлетворяющий условию

$$\langle Tv, Tv\rangle \leqslant \langle v, v\rangle \tag{1.2}$$

для всех $v \in V$, содержится в $\mathrm{End}(V)$. Операторы, удовлетворяющие (1.2), мы будем называть $\langle\cdot,\cdot\rangle$-*сжимающими*.

Задача. Приведите пример такого оператора.

1.2. Преобразование Потапова. Условия а), б) сами по себе не очень наглядны, и есть способ сделать их более понятными. Сейчас мы введем на множестве $\mathrm{Mor}(V, W)$ удобные координаты.

Для каждого $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{U})$ фиксируем разложение $V = V_+ \oplus V_-$ в прямую сумму ортогональных подпространств V_+, V_-, причем форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ положительно определена на V_+ и отрицательно определена на V_-.

Теорема 1.2. Подпространство $P \subset V \oplus W$ является морфизмом категории U тогда и только тогда, когда P является графиком оператора

$$S = S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-,$$

удовлетворяющего условиям:

i) $\|S\| \leqslant 1$;

ii) $\|K\| < 1$, $\|N\| < 1$.

Замечание. Пространство $W_- \oplus V_+$ является евклидовым по определению, на пространстве же $W_+ \oplus V_-$ форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ отрицательно определена, поэтому форма $-\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ определяет скалярное произведение в $V_+ \oplus W_-$. Норма оператора здесь, как и везде в этой книге, означает евклидову норму. Норма вектора ниже означает норму в одном из пространств $V_+ \oplus W_-$, $V_- \oplus W_+$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V, W)$. Так как форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ отрицательно определена на $W_+ \oplus V_-$ и неотрицательно определена на P, мы имеем $P \cap (W_+ \oplus V_-) = 0$. Так как $\dim P = \dim(W_- \oplus V_+)$, подпространство P является графиком оператора $S : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-$. Далее, для любого $h \in W_- \oplus V_+$ мы имеем

$$0 \leqslant \langle (h, Sh), (h, Sh) \rangle_{V\oplus W} = \|h\|^2_{W_-\oplus V_+} - \|Sh\|^2_{W_+\oplus V_-}, \tag{1.3}$$

а тем самым $\|S\| \leqslant 1$.

Допустим, что $\|K\| = 1$, пусть w_- — вектор, на котором эта норма достигается:

$$\|Kw_-\| = \|w_-\|. \tag{1.4}$$

Тогда $S\begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kw_- \\ Mw_- \end{pmatrix}$, а значит,

$$\left\| S\begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|Kw_-\|^2 + \|Mw_-\|^2.$$

Учитывая, что $\|S\| \leqslant 1$, мы получаем $Mw_- = 0$. Поэтому $S\begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kw_- \\ 0 \end{pmatrix}$, а следовательно, вектор $r = (w_-, Kw_-) \in W_- \oplus W_+$ содержится в P, т. е. $r \in \mathrm{Ker}\, P$. С другой стороны, из (1.4) следует, что $\langle r, r \rangle = 0$, что противоречит условию б) в определении морфизма. Легко видеть, что эти рассуждения обратимы, тем самым обратное высказывание тоже верно. Теорема доказана. ∎

Матрицу $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, соответствующую подпространству P, мы будем называть *преобразованием Потапова* морфизма P и обозначать через $S(P)$.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V, V')$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V', V'')$. Пусть

$$S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}; \quad S(Q) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}.$$

Тогда $S(QP)$ равно

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} K + LX(1 - NX)^{-1}M & L(1 - XN)^{-1}Y \\ Z(1 - NX)^{-1}M & W + Z(1 - NX)^{-1}NY \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

(мы уже проводили это вычисление в п. IV.3.3).

1.3. Полугруппа $\mathrm{End}(V)$. Обсудим теперь, как выглядит преобразование Потапова на полугруппе $\mathrm{End}(V)$. Во избежание путаницы мы будем считать, что элемент $P \in \mathrm{End}(V)$ является подпространством не в $V \oplus V$, а в $V \oplus W$, где W — другой экземпляр пространства V.

Предложение 1.3.

а) Пусть $P \in \mathrm{End}(V)$ является графиком обратимого оператора $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ из V в $W = V$. Тогда

$$S(P) = \begin{pmatrix} BD^{-1} & A - BD^{-1}C \\ D^{-1} & -D^{-1}C \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

б) Пусть $P \in \mathrm{End}(V)$, а $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$. Пусть блок M обратим. Тогда P является графиком оператора $V \to W = V$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L - KM^{-1}N & KM^{-1} \\ -M^{-1}N & M^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

в) $P \in \mathrm{End}(V)$ является графиком оператора из $\mathrm{U}(p_V, q_V)$ тогда и только тогда, когда матрица $S(P)$ унитарна.

Доказательство.

а) Применяя оператор $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ к вектору $(0, v_-)$, получаем вектор (Cv_-, Dv_-). В силу условия (1.2) мы имеем

$$\|Cv_-\|^2 - \|Dv_-\|^2 \leqslant -\|v_-\|^2.$$

Отсюда $\|Dv_-\| \geqslant \|v_-\|$, и, следовательно, оператор D обратим. Далее (см. п. II.3.6) честно выражаем v_- и w_+ через v_+ и w_- из соотношения

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix}.$$

∎

Задача. Докажите утверждения б) и в).

1.4. Категория Sp. Пусть $V_{\mathbb{R}}$ — конечномерное вещественное линейное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}_V$.

Рассмотрим комплексификацию V пространства $V_{\mathbb{R}}$. Тогда в V канонически определена кососимметричная билинейная форма $L_V(\cdot,\cdot)$ — комплексификация формы $\{\cdot,\cdot\}_V$. Но форма $\{\cdot,\cdot\}_V$ может быть продолжена в V и по полуторалинейности (см. Предварительные сведения, пп. 2.5, 2.7). Поэтому в V определена канонически и полуторалинейная форма

$$M_V(v, w) = \frac{1}{i} L(v, \bar{w}). \tag{1.8}$$

Она индефинитна, и ее отрицательный и положительный индексы инерции совпадают.

Задача. Проверьте последнее высказывание.

Объект категории **Sp** — это пространство V, снабженное тремя перечисленными структурами (т. е. структурой комплексификации пространства $V_{\mathbb{R}}$, кососимметричной билинейной формой L_V и эрмитовой формой M_V). Итак, V одновременно и объект категории **U**, и объект категории **C** (см. п. III.3.1). Морфизм $V \to W$ — это, по определению, линейное подпространство $P \subset V \oplus W$, которое является одновременно и морфизмом категории **U**, и морфизмом категории **C**.

Лемма 1.4. Группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Sp}}(V)$ совпадает с вещественной симплектической группой $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Aut}(V)$, тогда P является графиком обратимого оператора A. Так как P — автоморфизм категории **C**, то $L(Av, Av) = L(v, v)$ для всех v. Так как P — автоморфизм категории **U**, то $M(Av, Av) = M(v, v)$ (см. п. 1.1).

Покажем, что из этого следует $\overline{Aw} = A\overline{w}$. В самом деле, для любых v, w выполнено

$$\begin{aligned} L(v, \overline{Aw}) &= iM(v, Aw) = \\ &= iM(A^{-1}v, w) = \\ &= L(A^{-1}v, \overline{w}) = \\ &= L(v, A\overline{w}), \end{aligned}$$

и, значит, $\overline{Aw} = A\overline{w}$.

Таким образом, A сохраняет вещественное подпространство $V_{\mathbb{R}} \subset V$ и форму $\{\cdot, \cdot\}$ в этом подпространстве. Лемма доказана. ■

Разложим $V_{\mathbb{C}}$ в прямую сумму двух подпространств $V_{\mathbb{C}} = V_+ \oplus V_-$, которые изотропны относительно кососимметричной формы L и ортогональны относительно эрмитовой формы M, причем M положительно определена на V_+ и отрицательно определена на V_-. Мы потребуем также, чтобы подпространства V_+ и V_- были комплексно сопряжены друг другу.

Такое разложение действительно возможно: пусть $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ — канонический базис в $V_{\mathbb{R}}$, т. е.

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = \{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}.$$

В качестве V_+ и V_- можно выбрать подпространства, натянутые на векторы вида $e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_\alpha - iq_\alpha)$ и $f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_\alpha + iq_\alpha)$ соответственно. Тогда

$$\begin{gathered} L(e_\alpha, e_\beta) = L(f_\alpha, f_\beta) = 0, \quad L(e_\alpha, f_\beta) = i\delta_{\alpha\beta}; \\ M(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad M(f_\alpha, f_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}, \quad M(e_\alpha, f_\beta) = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Обычно бывает приятней думать, что в V с самого начала фиксирован базис e_α, f_α, удовлетворяющий (1.9).

Пусть $Q \in \mathrm{Aut}(V)$. Как мы видели, Q является графиком оператора в V, перестановочного с операцией сопряжения $v \mapsto \overline{v}$. Отсюда следует, что матрица

оператора $Q : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$ должна иметь вид $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$; естественно, она должна быть также симплектической, т. е. сохранять форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Так же, как и в **U**, в категории **Sp** определено преобразование Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ морфизма P.

Теорема 1.5. Подпространство $P \subset V_+ \oplus V_-$ является морфизмом категории **Sp** тогда и только тогда, когда его преобразование Потапова $S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\text{i) } \|S\| \leqslant 1; \\ &\text{ii) } \|K\| < 1, \ \|N\| < 1; \\ &\text{iii) } S = S^{t}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Задача. Докажите эту теорему (см. пп. 1.3 и II.6.7, о транспонировании см. Предварительные сведения, § 2).

Как и в случае категории **U**, условие $P \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Sp}}(V)$ равносильно тому, что матрица $S(P)$ унитарна.

1.5. Категория SO*. Эта категория не играет в книге сколько-нибудь заметной роли, но так как она ничем не хуже категорий **U** и **Sp**, она тоже должна быть упомянута.

Объект категории **SO*** — конечномерное кватернионное пространство V, снабженное невырожденной антиэрмитовой формой $H(\cdot, \cdot)$.

Пусть $V^{\mathbb{C}}$ — то же самое пространство V, но рассматриваемое как линейное пространство над $\mathbb{C}$ (см. Предварительные сведения, п. 2.9). Представим нашу антиэрмитову форму H в виде суммы

$$H(v, w) = iM(v, w) + jL(v, w),$$

где $M(v, w)$ и $L(v, w)$ — формы со значениями в $\mathbb{C}$. Легко видеть, что M — эрмитова форма в $V_{\mathbb{C}}$, а L — симметричная билинейная форма. Таким образом, $V_{\mathbb{C}}$ становится одновременно и объектом категории **U**, и объектом категории **GD**. Морфизм V в W — это (комплексное) подпространство в $V^{\mathbb{C}} \oplus W^{\mathbb{C}}$, которое одновременно является морфизмом категорий **U** и **GD**.

Группа автоморфизмов n-мерного (в кватернионном смысле) объекта V изоморфна группе $\mathrm{SO}^*(2n)$.

Как и в случае категории **Sp**, разложим пространство $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму двух подпространств $V^{\mathbb{C}} = V_+ \oplus V_-$, где V_+ — максимальные изотропные подпространства относительно формы L, ортогональные относительно M, причем форма M положительно определена на V_+ и отрицательно определена на V_-; удобно также считать, что оператор умножения на j в $V^{\mathbb{C}}$ переставляет V_+ и V_-.

Так же, как и выше, определяется преобразование Потапова $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ морфизма P, оно удовлетворяет условиям:

i) $\|S\| \leqslant 1$;

ii) $\|K\| < 1$, $\|N\| < 1$;

iii) $K = -K^{t}$, $N = -N^{t}$, $M = L^{t}$.

1.6. Инволюция в эрмитовых категориях. Пусть $P = \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$. Через P^* мы обозначим элемент пространства $\mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$ такой, что подпространство $P^* \subset V \oplus W$ является ортогональным дополнением до P.

5 Зак. 320

Пример. Если $P \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(V)$, то $P^* = P^{-1}$, потому что подпространство P совпадает со своим ортогональным дополнением; минус первая степень появляется из-за перестановки слагаемых в сумме $V \oplus V$.

Предложение 1.6. Если $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, то

$$S(P^*) = S^\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S(P)^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^* & M^* \\ L^* & K^* \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

(мы опускаем тривиальное доказательство).

Несложно проверить (см. аналогичное высказывание в п. II.7.2), что

$$(QP)^* = P^*Q^*,$$

т. е. $P \mapsto P^*$ действительно является инволюцией в категории $\mathbf{U}$ (см. п. II.8.6).

Пусть, далее, $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$. Через P^* мы обозначим элемент $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(W, V)$, являющийся ортогональным дополнением до P относительно эрмитовой формы $M_{V \oplus W}$ в $V \oplus W$. Не сразу очевидно, что это самое ортогональное дополнение является изотропным подпространством относительно кососимметричной формы $L_{V \oplus W}$. Это, однако, легко усмотреть из формулы (1.11): если S — преобразование Потапова морфизма $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$ (т. е. удовлетворяет условиям (1.10)), то S^σ оказывается преобразованием Потапова некоторого элемента $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(W, V)$ (см. также замечание на с. 392). Инволюция в категории $\mathbf{SO}^*$ определяется аналогично.

1.7. Замечания.

А. Канонические формы. Пусть $\mathbf{K}$ — одна из трех категорий $\mathbf{Sp}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{SO}^*$. Нас интересуют две тесно связанные между собой задачи:

1. описать орбиты группы $\mathrm{Aut}(V) \times \mathrm{Aut}(W)$ на $\mathrm{Mor}(V, W)$;
2. описать орбиты группы $\mathrm{Aut}(V)$ на множестве самосопряженных элементов $\mathrm{End}(V)$.

Мы начнем со следующей элементарной задачи линейной алгебры. Пусть V — пространство, снабженное невырожденной (вообще говоря, индефинитной) эрмитовой формой M_V, а A — самосопряженный относительно формы M_V оператор в V (т. е. $M_V(Av_1, v_2) = M_V(v_1, Av_2)$). Назовем самосопряженные операторы A_1, A_2 эквивалентными, если существует оператор B, сохраняющий форму M_V, такой, что $BA_1B^{-1} = A_2$. Мы хотим описать классы эквивалентности.

Задача равносильна следующей. Пусть V и A — те же, что и выше. Мы назовем набор $\{V, M_V, A\}$ *разложимым*, если существуют A-инвариантные подпространства $V_1, V_2 \subset V$ такие, что $V = V_1 \oplus V_2$, $V_2 = V_1^\perp$. Требуется описать все неразложимые наборы.

Задача. Покажите, что все неразложимые наборы исчерпываются следующими:

а) тип $\mathrm{I}^\pm(\lambda, n)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Базис в V состоит из элементов $e_1, \dots, e_n$, причем (при $k \neq n$)

$$M(e_i, e_j) = \pm\delta_{i+j,n+1}, \quad Ae_k = \lambda e_k + e_{k+1}, \quad Ae_n = \lambda e_n;$$

б) тип $\mathrm{II}(\lambda, n)$, где $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Базис в V состоит из элементов $e_1, \dots, e_n$, $f_1, \dots, f_n$, причем (при $k \neq n$)

$$M(e_i, e_j) = M(f_i, f_j) = 0, \qquad Ae_k = \lambda e_k + e_{k+1}, \qquad Ae_n = \lambda e_n,$$
$$M(e_i, f_j) = \delta_{i+j,n+1}, \qquad Af_k = \bar\lambda f_k + f_{k+1}, \qquad Af_n = \bar\lambda f_n.$$

Из этих типов несложно отобрать те, в которых оператор A является M_V-сжатием. Оказывается, что неразложимые M_V-сжатия исчерпываются операторами в одномерном пространстве, а также двумерными жордановыми клетками $\mathrm{I}^\pm(\mp 1, 2)$.

Случай произвольного самосопряженного элемента $P \in \mathrm{End}_{\mathrm{U}}(V)$ мгновенно сводится к случаю оператора. Для этого заметим, что

$$V = \mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Indef}\, P \oplus (\mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Indef}\, P)^\perp.$$

Это решает задачу об описании орбит группы $\mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(V)$ на множестве самосопряженных элементов $\mathrm{End}_{\mathrm{U}}(V)$.

Перейдем к задаче об орбитах $\mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(V) \times \mathrm{Aut}_{\mathrm{U}}(W)$ на $\mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V, W)$. Она сводится к предыдущей преобразованием $P \mapsto P^*P$. Снова назовем элемент $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$ *неразложимым*, если существуют V_1, V_2, W_1, $W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{U})$ и $P_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V_1, W_1)$, $P_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{U}}(V_2, W_2)$ такие, что $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$ (прямые суммы — ортогональные) и $P = P_1 \oplus P_2$.

Задача. Докажите, что неразложимые морфизмы $P : V \to W$ категории $\mathbf{U}$ исчерпываются следующими (мы выписываем преобразования Потапова):

1°–4°. нулевые операторы $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0$, $\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0$, $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0$;

5°–6°. оператор умножения на $\lambda : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^0$, $\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1$ (где $0 < \lambda \leqslant 1$);

7°. оператор $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$, где $0 < \alpha < 1$ (при этом при разных α морфизмы эквивалентны).

Для нас важнее случай категории $\mathbf{Sp}$.

Задача (см. [Ольшанский (1995)]). Докажите, что неразложимые морфизмы $P : V \to W$ категории $\mathbf{Sp}$ исчерпываются следующими (мы выписываем преобразования Потапова):

1. $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$;
2. $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} : \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$, где $0 < \alpha < 1$, причем при разных α морфизмы эквивалентны.

В. Диссипативные операторы. Пусть V — объект категории $\mathbf{U}$. Оператор A в V называется *M_V-диссипативным*, если $M_V(Ax, x) \leqslant 0$ для всех $x \in V$.

Задача. Докажите, что следующие условия на оператор $A : V \to V$ равносильны:

а) A является M_V-диссипативным;

в) $\exp(tA)$ является M_V-сжатием для всех $t \geqslant 0$.

Задача. Пусть A — невырожденный оператор в V, причем A является M_V-сжатием. Тогда A единственным образом представимо в виде

$$A = Q \exp(tH), \qquad (1.11)$$

где $Q \in \mathrm{Aut}(V)$, H — самосопряженный M_V-диссипативный оператор, а $t \geqslant 0$ ([Потапов (1955)]).

Указание. A^*A имеет простую каноническую форму.

Замечание. Очевидно, что M_V-диссипативные операторы образуют выпуклый конус $\tilde{C}$, инвариантный относительно действия $g : A \mapsto g^{-1}Ag$ группы $\mathrm{Aut}(V)$. При этом $\tilde{C}$ разлагается в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы $\mathrm{Aut}(V)$ и инвариантного выпуклого конуса C всех M_V-самосопряженных M_V-диссипативных операторов. Продолжение этого сюжета см. [Винберг (1980)], [Ольшанский (1981)], [Paneitz (1981)].

§ 2. Функтор Крейна—Шмульяна

Пусть $\mathbf{K}$ — произвольная категория. Построим по каждому объекту Z^0 категории $\mathbf{K}$ некоторый функтор $\mathsf{I} = (I, i)$ из $\mathbf{K}$ в категорию множеств. А именно, пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$. Тогда $I(V) := \mathrm{Mor}(Z^0, V)$, а любому морфизму $P : V_1 \to V_2$ ставится в соответствие отображение

$$i(P) : Q \mapsto PQ$$

из $I(V_1) = \mathrm{Mor}(Z^0, V_1)$ в $I(V_2) = \mathrm{Mor}(Z^0, V_2)$.

Во многих частных случаях эта общая тривиальная конструкция оказывается весьма содержательной. В этом параграфе мы применим конструкцию к категориям $\mathbf{U}$, $\mathbf{Sp}$, $\mathbf{SO}^*$, а в качестве Z^0 во всех случаях будем брать нульмерные объекты этих категорий (мы их будем обозначать через 0).

2.1. Функтор Крейна—Шмульяна для категории $\mathbf{U}$.

Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{U})$.

Предложение 2.1. Следующие условия на подпространство $H \subset V$ равносильны:

а) $H \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(0, V)$;

б) H — график оператора $S = S(H) : V_- \to V_+$, причем $\|S\| < 1$.

Доказательство. Это предложение является частным случаем теоремы 1.2. ■

Оператор $S = S(H) : V_- \to V_+$ называется *угловым оператором* подпространства H.

Итак, множество $\mathscr{X}(V) := \mathrm{Mor}(0, V)$ отождествляется с множеством операторов $V_- \to V_+$ с нормой < 1 (или, иначе, с множеством $\mathscr{X}_{p,q}$ матриц размера $q \times p$, где $p = p_V$, $q = q_V$ — индексы инерции эрмитовой формы в V). Такие множества мы будем называть *операторными* (*матричными*) *шарами*.

Опишем теперь действие категории $\mathbf{U}$ на матричных шарах.

Предложение 2.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, а $H \in \mathscr{X}(V) = \mathrm{Mor}(0, V)$. Пусть $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$, $S(H) = X$.

Тогда преобразование

$$\tau(P) : H \mapsto PH$$

из $\mathscr{X}(V)$ в $\mathscr{X}(W)$ задается формулой

$$\tau(P)X = K + LX(1 - NX)^{-1}M. \tag{2.1}$$

Доказательство. Это частный случай формулы (1.5). ■

В силу того, что τ — функтор, для любых $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ выполнено

$$\tau(Q)\tau(P) = \tau(QP). \tag{2.2}$$

Задача. Докажите равенство (2.2) непосредственно, исходя из формулы (2.1).

Пусть $p = p_V$, $q = q_V$ — индексы инерции эрмитовой формы M_V в V. Тогда, очевидно, группа $\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{U}(p, q)$ действует на $\mathscr{X}(V) \simeq \mathscr{X}_{p,q}$ обратимыми преобразованиями.

Предложение 2.3. $\mathscr{X}(V)$ является однородным $\mathrm{U}(p, q)$-пространством, причем стабилизатор точки $0 \in \mathscr{X}(V)$ есть $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$.

Доказательство. Транзитивность действия $\mathrm{U}(p, q)$ следует из теоремы Витта (см. предварительные сведения, § 1). Далее, пусть 0 остается на месте под действием $g \in \mathrm{U}(p, q)$. Тогда $gV_- = V_-$, а $V_+ = V_-^{\perp}$, и, следовательно, $gV_+ = V_+$. Утверждение доказано. ■

Полезно иметь удобную формулу для этого действия, сейчас мы выведем ее в чуть большей общности.

Предложение 2.4. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$ — график линейного оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to W_+ \oplus W_-$.

Тогда

$$\tau(P)X = (AX + B)(CX + D)^{-1}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим подпространство Q с угловым оператором X. Оно состоит из векторов вида $(Xv_-, v_-) \in V_+ \oplus V_- = V$. Тогда подпространство $PQ \subset W$ состоит из векторов вида

$$r = \big((AX + B)v_-, (CX + D)v_-\big). \tag{2.4}$$

Обозначая $(CX + D)v_-$ через w_-, мы получаем, что PQ состоит из векторов вида $\big((AX + B)(CX + D)^{-1}w_-, w_-\big)$, т. е. угловой оператор подпространства PQ задается формулой (2.3).

Однако нам надо еще доказать, что оператор $CX + D$ обратим. Действительно, допустим, что для некоторого v_- выполнено $(CX + D)v_- = 0$. Рассмотрим вектор r, заданный формулой (2.4). Тогда $\langle r, r\rangle_{V \oplus W} = \|(AX + B)v_-\|^2 \geqslant 0$, а это противоречит тому, что $r \in PQ$ (в самом деле, на PQ форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ строго отрицательно определена). Утверждение доказано. ■

Формула (2.3), безусловно, более привычна читателю, чем (2.1). Преобразования вида (2.3) называются *дробно-линейными*, а отображения вида (2.1) — *обобщенно дробно-линейными*.

Задача. В чем разница между дробно-линейными и обобщенно дробно-линейными отображениями в случае $p = q = 1$?

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{U}}(V, W)$ является графиком оператора

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : W_+ \oplus W_- \to V_+ \oplus V_-.$$

Выведите формулу для $\tau(P)$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{End}_{\mathbf{U}}(V)$ — график обратимого оператора. Докажите, что $\tau(P)$ инъективно. Когда $\tau(P)$ биективно?

Задача*. Пусть $\overline{\mathscr{X}}(V)$ — множество всех операторов $V_- \to V_+$ с нормой $\leqslant 1$. Для каких линейных отношений P формула (2.1) задает отображение а) $\mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(V)$; б) $\mathscr{X}(V) \to \overline{\mathscr{X}}(V)$; в) $\overline{\mathscr{X}}(V) \to \overline{\mathscr{X}}(V)$; г) $\overline{\mathscr{X}}(V) \to \mathscr{X}(V)$? (См. [Шмульян (1978)].)

2.2. Функтор Крейна—Шмульяна для категории Sp. Итак, каждому $V \in \mathrm{Ob(Sp)}$ ставится в соответствие множество $L(V) = \mathrm{Mor_{Sp}}(0, V)$. Его элементы — подпространства в V, являющиеся максимальными изотропными относительно формы L_V, а форма M_V на них отрицательно определена. Преобразование Потапова отождествляет $L(V)$ с множеством $\mathscr{X}(V)$ симметрических операторов $V_- \to V_+$ с нормой < 1 (пространство $\mathscr{X}(V)$ мы будем также называть *матричным шаром*). Каждому морфизму $V \to W$ соответствует обобщенно дробно-линейное отображение $\mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(W)$, задаваемое формулой (2.1).

Мы видели, что группа $\mathrm{Aut_{Sp}}(V) = \mathrm{Sp}(V_\mathbb{R})$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$: $V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$, сохраняющих кососимметричную билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (см. п. 1.5), эта группа действует на $\mathscr{X}(V)$ преобразованиями вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} : Z \to (\Phi Z + \Psi)(\overline{\Psi} Z + \overline{\Phi})^{-1}$$

(см. (2.2)).

Лемма 2.5. Группа $\mathrm{Aut_{Sp}}(V) \simeq \mathrm{Sp}(V_\mathbb{R})$ действует на $\mathscr{X}(V_\mathbb{C})$ транзитивно.

Доказательство. Дробно-линейное преобразование области $\mathscr{X}(V)$, соответствующее оператору

$$\begin{pmatrix} (1 - Z\overline{Z})^{-1/2} & Z(1 - \overline{Z}Z)^{-1/2} \\ \overline{Z}(1 - Z\overline{Z})^{-1/2} & (1 - \overline{Z}Z) \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V),$$

переводит точку 0 в Z. Легко видеть, что стабилизатор точки 0 состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$. В силу симплектичности $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ матрица Φ должна быть унитарной. Лемма доказана. ■

Таким образом, если $\dim V = 2n$, то $\mathscr{X}(V)$ как $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-однородное пространство есть $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) / \mathrm{U}(n)$.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{End_{Sp}}(V)$, а $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Покажите, что $P \in \mathrm{Aut_{Sp}}(V)$ равносильно унитарности матрицы $S(P)$.

Задача. Опишите функтор Крейна—Шмульяна для категории $\mathbf{SO}^*$.

2.3. Замечания. Три типа матричных шаров, которые нам встретились в этом параграфе (включая последнюю задачу), являются важными объектами сразу в нескольких областях математики.

Во-первых, они есть не что иное, как эрмитовы симметрические пространства

$$\mathrm{U}(p, q) / (\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)), \quad \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) / \mathrm{U}(n), \quad \mathrm{SO}^*(2n) / \mathrm{U}(n)$$

(см., например, [Helgason (1962)]).

Во-вторых, они являются *областями Картана*. Напомним, что любая односвязная область в $\mathbb{C}$ (отличная от $\mathbb{C}$) конформно эквивалентна единичному кругу, а группа конформных автоморфизмов круга изоморфна $\mathrm{PSU}(1, 1) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_0(2, 1)$. Эти факты не переносятся на многомерный случай. При этом для случайно взятой области в $\mathbb{C}^N$ группа ее биголоморфных автоморфизмов, как правило, тривиальна. Однако существуют так называемые области Картана, на которых группа голоморфных автоморфизмов действует транзитивно (см. [Пятецкий-Шапиро (1961)] или [Cartan (1935)]). Матричные шары как раз и являются такими областями Картана.

Задача*. Докажите, что группа биголоморфных (т. е. голоморфных вместе со своим обратным) отображений $\mathrm{Mor_{Sp}}(0, V)$ в себя изоморфна $\mathrm{Sp}(V)$ (см. [Пятецкий-Шапиро (1961)]).

В-третьих, матричные шары используются в теории операторов.

A. Инвариантные подпространства. Пусть $V \in \mathrm{Ob(U)}$. Пусть $\overline{\mathscr{X}}(V)$ — множество всех операторов $V_- \to V_+$ с нормой $\leqslant 1$.

Задача. Пусть P — график M_V-сжимающего оператора A в V. Пусть $X \in \overline{\mathscr{X}}(V)$. Тогда следующие условия равносильны:

а) $\tau(P)X = X$;

б) подпространство в V с угловым оператором X инвариантно.

Следствие 2.6 (Крейн). Любой M_V-сжимающий оператор в V имеет инвариантное подпространство размерности $\dim V_-$, на котором форма M_V отрицательно определена.

Задача. Выведите отсюда описание канонических форм (см. п. 1.7) для строгих M_V-сжатий.

Задача. Покажите, что орбиты $\mathrm{Aut}(V)$ на $\overline{\mathscr{X}}(V)$ нумеруются числом $\mathrm{rk}(1 - X^*X)$.

B. Заметим, что множество $\mathrm{Mor}(V, W)$ само является матричным шаром.

Задача. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(W, Y)$, $Q \in \mathrm{Mor}(Z, V)$. Покажите, что отображение

$$X \mapsto PXQ \tag{2.5}$$

из $\mathrm{Mor}(V, W)$ в $\mathrm{Mor}(Z, Y)$ является обобщенно дробно-линейным. Покажите, что если $P \in \mathrm{Aut}(W)$, $Q \in \mathrm{Aut}(V)$, то (2.5) является автоморфизмом матричного шара $\mathrm{Mor}(V, W)$.

C. Пусть A — открытая ограниченная область в $\mathbb{C}^N$, а $\overline{A}$ — ее замыкание. *Граница Шилова* области A определяется следующим образом: точка $a \in \overline{A}$ лежит в границе Шилова, если существует голоморфная в A и непрерывная на $\overline{A}$ функция $f(z)$ такая, что максимум модуля $f(z)$ достигается в a.

Задача. Докажите, что граница Шилова содержится в $\overline{A} \setminus A$.

Задача. Пусть $a \in \overline{A}$. Пусть окрестность точки a в $\overline{A}$ содержит одномерное комплексное подмногообразие, содержащее a. Тогда a не содержится в границе Шилова.

Задача. Найдите границу Шилова шара $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum |z_i|^2 \leqslant 1\}$ и полукруга $D^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall i : |z_i| < 1\}$ в $\mathbb{C}^N$.

Задача. Пусть $\overline{\mathscr{X}}_n$ — множество симметричных матриц с нормой $\leqslant 1$. Докажите, что граница Шилова $\overline{\mathscr{X}}_n$ состоит из унитарных симметричных матриц (ср. с задачей из п. 2.2). Найдите границу Шилова для остальных матричных шаров (см. [Пятецкий-Шапиро (1961)]).

§ 3. *Бозонное пространство Фока с конечным числом степеней свободы*

3.1. Определение. Пусть H — конечномерное комплексное евклидово пространство размерности $n = 0, 1, 2 \ldots$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Введем на H

гауссову меру $d\mu(z)$ с плотностью $\pi^{-n}e^{-\|z\|^2}$ относительно меры Лебега. *Бозонное пространство* Фока $F(H)$ состоит из голоморфных функций $f(z)$ на H, удовлетворяющих условию

$$\iint_H |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty.$$

Введем в $F(H)$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \iint_H f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z).$$

Число n называется числом степеней свободы пространства H. Функцию $f(z) = 1$ называют *вакуумным вектором.*

Теорема 3.1.
а) Одночлены вида

$$e_{k_1\ldots k_n}(z) = \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!}\ldots\sqrt{k_n!}} \tag{3.1}$$

образуют в $F(\mathbb{C}^n)$ ортонормированный базис.
б) Пространство $F(H)$ полно.

Доказательство. Вычислим скалярное произведение

$$\left\langle z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}, z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n}\right\rangle = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \iint_H z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}\bar z_1^{l_1}\ldots \bar z_n^{l_n}\, d\mu(z) = \\ = \prod_{j=1}^n \iint_{\mathbb{C}} z_j^{k_j}\bar z_j^{l_j}\frac{1}{\pi}\, e^{-|z_j|^2} dz_j\, d\bar z_j.$$

Вычислим отдельно каждый из сомножителей

$$\iint_{\mathbb{C}} z^k\bar z^l \frac{1}{\pi}\, e^{-|z|^2} dz\, d\bar z = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} r^{k+l+1}e^{i(k-l)\varphi}e^{-r^2}d\varphi\, dr = \\ = \int_0^\infty r^{2k}e^{-r^2}dr^2\cdot\delta_{k,l} = \\ = \Gamma(k+1)\,\delta_{k,l} = \\ = k!\,\delta_{k,l}.$$

Итак, мы видим, что одночлены вида (3.1) образуют в $F(H)$ ортонормированную систему. Из тех же вычислений видно, что функции (3.1) попарно ортогональны (но не ортонормированы) в любом поликруге вида $|z_1| \leqslant A_1, \ldots, |z_n| \leqslant A_n$.

Пусть

$$f(z) = \sum \frac{c_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!}\ldots\sqrt{k_n!}}. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\iint |f(z)|^2 d\mu(z) = \lim_{A\to\infty}\sum |c_{k_1\ldots k_n}|^2 \iint_{\substack{|z_1|\leqslant A\\ \cdots\\ |z_n|\leqslant A}} \frac{\left|z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}\right|^2}{k_1!\ldots k_n!}\, d\mu(z) = \sum |c_{k_1\ldots k_n}|^2.$$

Итак, $f(z)\in F(H)$ тогда и только тогда, когда $\sum |c_{k_1\ldots k_n}|^2 < \infty$. Отсюда вытекают оба утверждения теоремы. ■

Замечание 1. Обозначим через $F^{(k)}(H)\subset F(H)$ подпространство, состоящее из всех однородных многочленов степени k. Ясно, что подпространства $F^{(k)}(H)$ и $F^{(j)}(H)$ попарно ортогональны, причем

$$F(H) = \bigoplus_{j=0}^\infty F^j(H).$$

Замечание 2. У нас есть небольшое несогласование в обозначениях $\Lambda(H)$ и $F(H)$ для фермионного и бозонного пространства Фока: пространство $\Lambda(H)$ — это внешняя алгебра на H, а пространство $F(H)$ есть алгебра функций на H, т.е. $F(H)$ — это симметрическая алгебра не на H, а на двойственном пространстве H'. Это рассогласование объясняется исключительно вредными привычками автора.

Задача. При каких λ функция $\exp\left(\frac{1}{2}\lambda z^2\right)$ содержится в $F(\mathbb{C})$?

Задача. Для каких матриц A функция $\exp\left(\frac{1}{2}\sum a_{ij}z_iz_j\right)$ содержится в $F(\mathbb{C})^n$?

3.2. Воспроизводящее свойство. Пусть $u\in H$. Обозначим через $\varphi_u(z)$ функцию

$$\varphi_u(z) = \exp(z, u). \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. $\varphi_u(z)\in F(H)$. При этом

$$\langle\varphi_u, \varphi_v\rangle = \exp(v, u). \tag{3.4}$$

Доказательство. Разлагая (3.3) в ряд, получаем

$$\varphi_u(z) = \prod_j\sum\frac{(z_j\bar u_j)^{k_j}}{k_j!} = \\ = \sum\frac{\bar u_1^{i_1}\ldots\bar u_n^{i_n}}{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_n!}}\,\frac{z_1^{i_1}\ldots z_n^{i_n}}{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_n!}} = \\ = \sum\frac{\bar u_1^{i_1}\ldots\bar u_n^{i_n}}{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_n!}}\, e_{i_1\ldots i_n}(z). \tag{3.5}$$

И теперь утверждение очевидно. ■

Теорема 3.3. Для любой $f\in F(H)$ и любого $u\in H$ выполнено

$$\langle f, \varphi_u\rangle = f(u). \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum a_{j_1\dots j_n} \frac{z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n}}{\sqrt{j_1!}\dots\sqrt{j_n!}} = \sum a_{j_1\dots j_n} e_{j_1\dots j_n}(z).$$

Тогда в силу (3.5)

$$\langle f, \varphi_u\rangle = \sum a_{j_1\dots j_n} \frac{u_1^{j_1}\dots u_n^{j_n}}{\sqrt{j_1!}\dots\sqrt{j_n!}},$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание. Равенство (3.6), в частности, влечет непрерывность линейного функционала $l_u : f \mapsto f(u)$ на $F(H)$.

3.3. Ядра операторов. Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$. Рассмотрим функцию

$$K_A(u, \bar v) = \langle A\varphi_v, \varphi_u\rangle_{F(H_2)}, \tag{3.7}$$

где φ_u задается формулой (3.3). Мы вскоре покажем, что $K_A(u,\bar v)$ есть не что иное, как ядро оператора A в обычном смысле слова.

Замечание. Запись $K(u,\bar v)$ можно понимать двумя способами. Можно считать, что $K_A(u,\bar v)$ есть функция двух переменных $u \in H$, $v \in H$, а черта над v показывает, что $K_A(u,\bar v)$ антиголоморфна по v. С другой стороны, $\bar v$ можно понимать как элемент двойственного пространства H', соответствующий элементу v при отождествлении H с H'.

Введем функции

$$k_A^{\bar u}(z) = K_A(z,\bar u), \quad k_A^{z}(u) = \overline{K_A(z,\bar u)}. \tag{3.8}$$

Тогда легко видеть, что

$$k_A^{\bar u}(z) = K_A(z,\bar u) = \langle A\varphi_u, \varphi_z\rangle = (A\varphi_u)(z), \tag{3.9}$$
$$k_A^{z}(u) = \overline{K_A(z,\bar u)} = \langle \varphi_z, A\varphi_u\rangle = \langle A^*\varphi_z, \varphi_u\rangle = (A^*\varphi_z)(u). \tag{3.10}$$

В частности, $k_A^u \in F(H_2)$, а $k_A^z \in F(H_1)$.

Теорема 3.4. Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$. Для любого $f \in F(H_1)$ функция Af восстанавливается по формуле

$$(Af)(z) = \langle f, k_A^z\rangle. \tag{3.11}$$

Расписывая скалярное произведение в правой части этого равенства, мы сразу получаем

Следствие 3.5. Для любого ограниченного A

$$Af(z) = \int K(z,\bar u) f(u)\, d\mu(u). \tag{3.12}$$

Доказательство теоремы 3.4. Равенство достаточно проверить в случае $f = \varphi_h$, т. е. нужно доказать

$$(A\varphi_h)(z) = \overline{k_A^z(h)}$$

(заметим, что и в левой, и в правой части стоит функция от z). Для этого достаточно убедиться в том, что для любого $g \in F(H)$ выполнено

$$\langle (A\varphi_h), g(z)\rangle = \langle \overline{k_A^z(h)}, g(z)\rangle.$$

При этом достаточно проверить равенство для всех g вида $g = \varphi_p(z)$. Но тогда в обеих частях стоит $K(p,\bar h)$ (см. равенства (3.7) и (3.8)). Теорема доказана. ■

Теорема 3.6. Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$, пусть $c^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_n}$ — его матричные коэффициенты в базисе (3.1) (где $k = \dim H_2$, $n = \dim H_1$). Тогда

$$K_A(z,\bar u) = \sum c^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_n} \frac{z_1^{i_1}}{\sqrt{i_1!}}\dots\frac{z_k^{i_k}}{\sqrt{i_k!}}\frac{u_1^{j_1}}{\sqrt{j_1!}}\dots\frac{u_n^{j_n}}{\sqrt{j_n!}}, \tag{3.13}$$

причем этот ряд сходится равномерно на любом поликруге $|z_1| \leqslant C_1, \dots, |z_n| \leqslant C_n$, $|u_1| \leqslant B_1, \dots, |u_k| \leqslant B_k$.

Доказательство. Легко видеть, что ряд (3.5) сходится равномерно в $F(H)$ в любом поликруге $|u_j| \leqslant B_j$. Поэтому

$$K_A(z,\bar u) = \left\langle A\left(\sum \frac{\bar u_1^{j_1}\dots\bar u_n^{j_n}}{\sqrt{j_1!}\dots\sqrt{j_n!}} e_{j_1\dots j_n}\right), \left(\sum \frac{\bar z_1^{i_1}\dots\bar z_k^{i_k}}{\sqrt{i_1!}\dots\sqrt{i_k!}} e_{i_1\dots i_k}\right)\right\rangle,$$

что, очевидно, равно (3.13). ■

Предложение 3.7. Пусть $K_A(u,\bar v)$ — ядро оператора $A : F(H_1) \to F(H_2)$, а $K_B(z,\bar u)$ — ядро оператора $B : F(H_2) \to F(H_3)$. Тогда ядро оператора BA задается формулой

$$K_{BA}(z,\bar v) = \langle k_A^{\bar v}, k_B^{z}\rangle_{F(H_2)}. \tag{3.14}$$

Следствие 3.8.

$$K_{BA}(z,\bar v) = \int K_B(z,\bar u)\, K_A(u,\bar v)\, d\mu(u). \tag{3.15}$$

Конечно, (3.14) и (3.15) — это одна и та же формула. Формула (3.15) более привычна, но (3.14) в некоторых отношениях (см. следующую главу) более предпочтительна.

Доказательство. По определению

$$K_{BA}(z,\bar v) = \langle BA\varphi_v, \varphi_z\rangle = \langle A\varphi_v, B^*\varphi_z\rangle,$$

и искомое равенство вытекает из формулы (3.11). ■

Замечание. Аналогии с § II.1 достаточно очевидны.

Задача. Покажите, что ядро единичного оператора равно $\exp\left(\sum z_i\bar u_i\right)$.

Задача. Какому оператору соответствует ядро $\frac{1}{k!}\left(\sum z_i\bar u_i\right)^k$?

Задача. Пусть $K(z,\bar u)$ — ядро оператора A. Докажите, что ядро оператора A^* задается формулой $L(u,\bar z) = \overline{K(z,\bar u)}$.

Замечание. Как показывает опыт, применение формул этого пункта к неограниченным операторам почти никогда не приводит к недоразумениям.

3.4. Замены переменной. Пусть $A : H_1 \to H_2$ — ограниченный оператор. Рассмотрим оператор

$$F(A) : f(z) \mapsto f(Az)$$

из $F(H_2)$ в $F(H_1)$. Тогда в подпространствах $\mathrm{S}^k H$ оператор $F(A)$ действует как k-я симметричная степень $\mathrm{S}^k A$ оператора A. Учитывая, что $\|\mathrm{S}^k A\| = \|A\|^k$, мы получаем, что $F(A)$ ограничен тогда и только тогда, когда $\|A\| \leqslant 1$.

Задача. Докажите, что ядро оператора $F(A)$ равно $\exp(z, Au)$.

3.5. Операторы рождения-уничтожения. Пусть H — конечномерное евклидово пространство, а H' — двойственное пространство (напомним, что H' антиизоморфно H; если $h \in H$, то ему соответствует линейный функционал $f_h(z) = \langle z, h\rangle$; мы будем обозначать f_h через $\overline{h}$). Рассмотрим пространство $V = V_+ \oplus V_- := H' \oplus H$. Выберем в H ортонормированный базис, а в H' — двойственный базис. Возьмем вектор $v = (v_+, v_-) \in H' \oplus H = V$. Пусть v_i^+, v_i^- — координаты вектора v. Оператор рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$ в $F(H)$ задается формулой

$$\hat{a}(v)f(z) = \left(\sum v_i^+ z_i - \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial z_i}\right) f(z). \tag{3.16}$$

Эти операторы не ограничены. В качестве общей плотной инвариантной области определения можно выбрать, например, пространство всех многочленов.

Введем в V кососимметричную билинейную форму по формуле

$$L(v, w) = \sum (v_i^+ w_i^- - v_i^- w_i^+).$$

Тогда, как легко видеть,

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)] = L(v, w)E.$$

Лемма 3.9. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $f, g, z_j f, \frac{\partial}{\partial z_j} g \in F(H)$. Тогда

$$\langle z_j f, g\rangle = \left\langle f, \frac{\partial}{\partial z_j} g \right\rangle. \tag{3.17}$$

Доказательство. Пусть, для определенности $j = 1$. Пусть

$$f = \sum c_{k_1 \ldots k_n} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!} \ldots \sqrt{k_n!}}, \quad g = \sum d_{k_1 \ldots k_n} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}}{\sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!} \ldots \sqrt{k_n!}}.$$

Тогда в обеих частях равенства (3.17) стоит

$$\sum c_{k_1 - 1, k_2, \ldots, k_n} \sqrt{k_1}\, \overline{d}_{k_1 \ldots k_n}.$$ ■

Итак, мы видим, что оператор умножения на z_j и оператор $\frac{\partial}{\partial z_j}$ сопряжены.

Теорема 3.10. Операторы $\hat{a}(v, -\overline{v})$, заданные на пространстве многочленов, существенно самосопряжены в $F(H)$.

Доказательство. Подходящим образом выбирая координаты в H, мы можем все свести к случаю оператора $z_1 + \frac{\partial}{\partial z_1}$.

Пусть $F^k(H) \subset F(H)$ — пространство многочленов степени k. Пусть $A_k : F^k(H) \to F^{k+1}(H)$ — оператор умножения на z_1, тогда $A_k^* : F^{k+1}(H) \to F^k(H)$ — это оператор $\frac{\partial}{\partial z_1}$. Вычислим $\|A_k\| = \|A_k^*\| = \|A_k A_k^*\|^{1/2}$. Оператор $A_k A_k^*$ — это просто ограничение $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ на $F_k(H)$, одночлены являются собственными векторами, а значит, $\|A_k A_k^*\| = k$, причем норма достигается на векторе z_1^k.

Теперь мы можем применить признак Карлемана (см. Предварительные сведения, § 4). ■

3.6. Слабая сходимость операторов.

Предложение 3.11. Пусть A_n, A — операторы $F(H) \to F(K)$, а $K_n(z, \overline{u})$, $K(z, \overline{u})$ — их ядра.

а) Если последовательность $K_n(z, \overline{u})$ сходится к $K(z, \overline{u})$ поточечно, а числа $\|A_n\|$ ограничены сверху некоторой константой C, то оператор A ограничен, и $A_n \to A$ слабо.

б) Если $A_n \to A$ слабо, то последовательность $K_n(z, \overline{u})$ сходится к $K(z, \overline{u})$ поточечно.

Доказательство. Утверждение б) мгновенно следует из явной формулы (3.7) для ядра оператора. Утверждение а) вытекает из критерия слабой сходимости (см. п. I.4.1), примененнного к системе функций φ_h, и того, что линейные комбинации функций $\varphi_h(z)$ плотны в пространстве Фока. ■

§ 4. Представление Вейля симплектической категории

4.1. Операторы с гауссовыми ядрами. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — симметричная блочная матрица размера $(m+n) \times (m+n)$. Обозначим через $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ оператор $F(\mathbb{C}^n) \to F(\mathbb{C}^m)$ с ядром

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{4.1}$$

где $z = (z_1 \ldots z_m)$, $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$ — матрицы-строки.

Предложение 4.1. Пусть оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ ограничен. Тогда

а) $\|S\| \leqslant 1$;

б) $\|K\| < 1$, $\|M\| < 1$.

Замечание. См. теорему 1.5.

Доказательство. Пусть A — ограниченный оператор, K_A — его ядро. Тогда в силу (3.7), (3.4)

$$K_A(z, \overline{u}) = \langle A\varphi_u, \varphi_z\rangle \leqslant \|A\|\, \|\varphi_u\|\, \|\varphi_z\| = \|A\| e^{\frac{1}{2}\|u\|^2} e^{\frac{1}{2}\|v\|^2}.$$

Отсюда следует утверждение а).

Далее, пусть $f \in F(H)$. Тогда $f(u) = \langle f, \varphi_u\rangle \leqslant \|f\| e^{\frac{1}{2}\|u\|^2}$. Более того, это неравенство является строгим за исключением случая, когда f имеет вид φ_a, а $u = a$. Но $B[S]\cdot 1 = \exp\left\{\frac12 zKz^{t}\right\}$, а $B[S]^*\cdot 1 = \exp\left\{\frac12 zMz^{t}\right\}$. Эти векторы должны лежать в пространстве Фока, и отсюда следует б). ■

Теорема 4.2. Условия $\|S\| \leqslant 1$, $\|K\| < 1$, $\|M\| < 1$ достаточны для ограниченности оператора $B[S]$.

4.2. Представление Вейля (We, we) **категории Sp.** Каждому объекту V категории **Sp** мы ставим в соответствие пространство We(V) — бозонное пространство Фока $F(V_-)$. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$. Пусть $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Тогда положим

$$\mathrm{we}(P) = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Замечание. Проще всего считать, что во всех пространствах $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$ фиксированы канонические базисы. Тогда выражение (4.1) имеет вполне понятный смысл. Иногда такая точка зрения не очень удобна, и поэтому необходимо описать инвариантный смысл выражения (4.1). На знак транспонирования над вектором (т. е. над $z, \bar u$) в этом случае не следует обращать внимания. Тогда $z^t \in W_-$, $Kz^t \in W_+$, а $zKz^t := L(z, Kz^t)$, где L — каноническая кососимметричная форма в V. Аналогично определяются $\bar u M \bar u^t$ и $zL\bar u^t$.

Теорема 4.3.

а) We = (We, we) — проективное представление категории **Sp**. Более точно, пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(W, Y)$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$ — их преобразования Потапова. Тогда

$$\mathrm{we}(Q)\,\mathrm{we}(P) = \det\left[(1 - KC)^{-1/2}\right] \mathrm{we}(QP). \tag{4.3}$$

б) We = (We, we) является $*$-представлением категории **Sp**.

в) Пусть $P \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Sp}}(V) \simeq \mathbf{Sp}(V_{\mathbb{R}})$. Тогда оператор we$(P)$ унитарен с точностью до умножения на константу.

Замечание. Матрица $(1 - KC)^{-1/2}$ корректно определена. Действительно, $\|KC\| < 1$, а поэтому

$$(1 - KC)^{\alpha} = 1 + \alpha KC + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}(KC)^2 + \dots$$

Доказательства теорем 4.2–4.3 займут оставшуюся часть параграфа. Из вспомогательных утверждений самостоятельный интерес представляет верхняя оценка нормы $B[S]$, см. п. 4.10–4.12, а также прием с неподвижной точкой, используемые для этой оценки. Замечания содержат существенные добавления к этим теоремам.

4.3. Гауссов интеграл.

Предложение 4.4. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — симметричная матрица размера $(n+n) \times (n+n)$, пусть $\|S\| < 1$, а α, β — матрицы строки длины n. Тогда

$$\iint \exp\left\{\tfrac12 \begin{pmatrix} z & \bar z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \bar z^t \end{pmatrix} + \alpha z^t + \beta \bar z^t\right\} d\mu(z) =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} E - L & -K \\ -M & E - L^t \end{pmatrix}^{-1/2}\right] \exp\left\{\tfrac12 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M & E - L \\ E - L^t & -N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^t \\ \beta^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{4.4}$$

причем интеграл сходится абсолютно.

Доказательство. Все сводится к следующей стандартной формуле из элементарного анализа:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \exp\left(-\tfrac12 xAx^t + bx^t\right) dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\tfrac12 bA^{-1}b^t\right), \tag{4.5}$$

где A симметричная матрица, причем вещественная часть A положительно определена.

Делая замену $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$, получаем, что левая часть (4.4) равна

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \iint \exp\left\{\tfrac12 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - x^2 - y^2 \right\} dx\, dy,$$

т. е., в обозначениях (4.4),

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \frac12 \begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}, \\ b &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & +iE \\ E & -iE \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Дальше эти A и b нужно подставить в правую часть (4.5). Не совсем очевидно лишь вычисление $\det A$; чтобы его проделать, вынесем в (4.6) слева за скобки $\theta_1 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE \end{pmatrix}$, а справа — $\theta_2 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} \det A &= \det(\theta_1\theta_2) \det\left(\theta_1^{-1}\theta_2^{-1} - \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \det\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\right) = \\ &= (-1)^n \det\begin{pmatrix} -K & 1 - L \\ 1 - L^t & -M \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и, переставляя столбцы, мы получаем искомое выражение. ■

Нас будет интересовать в основном случай $L = 0$. В этом случае выражение (4.4) может быть записано в более удобной форме. А именно, учитывая формулы (II.3.16)–(II.3.17), получаем:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -M \\ -N & 1 \end{pmatrix} = \det(1 - MN), \tag{4.7}$$

$$\begin{pmatrix} -M & 1 \\ 1 & -N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} N(1 - MN)^{-1} & (1 - NM)^{-1} \\ (1 - MN)^{-1} & M(1 - NM)^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

(впрочем, (4.8) проверяется и непосредственно умножением).

Поэтому верна формула

$$\iint \exp\left\{\tfrac12 zMz^t + \tfrac12 \bar zN\bar z^t + \alpha\bar z^t + \beta\bar z^t\right\} d\mu(z) =$$

$$= \det(1 - MN)^{-1/2} \exp\left\{\tfrac12 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(1 - MN)^{-1} & (1 - NM)^{-1} \\ (1 - MN)^{-1} & M(1 - NM)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^t \\ \beta^t \end{pmatrix}\right\}. \tag{4.9}$$

4.4. Векторы $b[T\,|\,l]$. Пусть T — симметрический оператор $V_- \to V_+$ с нормой <1, а $l^t \in V_+$. Определим функцию $b[T\,|\,l] \in F(V_+)$ по формуле

$$b[T\,|\,l](z) = \exp\left\{\tfrac{1}{2} z T z^t + l z^t\right\}$$

Замечание. Если V — координатное пространство, то $zl^t = lz^t$ обозначает просто $\sum z_j l_j$. На инвариантном языке zl^t — это результат спаривания $l \in V_+$ и $z \in V_-$.

Лемма 4.5. $b[T\,|\,l^t] \in F(V_-)$.

Доказательство. Утверждение следует из предложения 4.4. ∎

Предложение 4.6.

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} b[T\,|\,l^t] = \det\left[(1-MT)^{-1/2}\right] b\left[K + LT(1-MT)^{-1}L^t \,\middle|\, L(1-TM)^{-1}l^t\right]. \tag{4.10}$$

Более точно, обозначим ядро (4.1) оператора $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ через $K(z,u)$. Пусть $k^z(u) := \overline{K(z,\overline{u})}$ (см. (3.9)–(3.10)). Тогда интеграл

$$\iint K(z,\overline{u}) \exp\left\{\tfrac{1}{2} u T^t u^t + l u^t\right\} d\mu(u) = \langle k^z, b[T\,|\,l^t]\rangle \tag{4.11}$$

сходится абсолютно, а вектор $b[\cdot\,|\,\cdot]$ из правой части (4.10) действительно лежит в $F(V_-)$, т. е.

$$\left\| K + LT(1-MT)^{-1}L^t \right\| < 1. \tag{4.12}$$

Доказательство. Выражение (4.11) равно

$$\exp\left\{\tfrac{1}{2} z K z^t\right\} \iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + u L^t z^t\right\} d\mu(u),$$

и теперь применение формулы (4.9) доказывает (4.10).

Утверждение (4.12) доказать «в лоб» довольно трудно, но, к счастью, оно нами уже доказано, а именно: неравенство (4.12) означает, что обобщенно дробно-линейное отображение переводит матричный шар в себя (см. п. 2.2). ∎

Заметим, что мы пока не знаем, являются ли операторы $B[S]$ ограниченными.

4.5. Умножение операторов $B[S]$. Обозначим через $F_0(H) \subset F(H)$ множество конечных линейных комбинаций векторов вида $b[T\,|\,l^t]$.

Рассмотрим теперь произвольный оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} : F(V_-) \to F(W_-)$. В силу предложения 4.6 оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ переводит $F_0(V_-)$ в $F_0(W_-)$. Итак, пока мы не знаем, будет ли наш оператор ограниченным, но, по крайней мере, знаем, что он корректно определен как оператор $F_0(V_-) \to F_0(W_-)$. Из сказанного также ясно, что корректно определено произведение таких операторов.

Теорема 4.7. Пусть даны $B\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{bmatrix} : F(W_-) \to F(Y_-)$. Тогда для любой $f \in F_0(V_-)$ выполнено

$$B\begin{bmatrix} K & L^t \\ L^t & M \end{bmatrix} B\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{bmatrix} f =$$

$$= \det(1-MP)^{-1/2} B\begin{bmatrix} K + LP(1-MP)^{-1}L^t & L(1-PM)^{-1}Q \\ Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R + Q^t(1-MP)^{-1}MQ \end{bmatrix} f. \tag{4.13}$$

В качестве следствия мы получаем утверждение а) теоремы 4.3, т. е. то, что $P \mapsto \mathrm{we}(P)$ — действительно представление категории **Sp** (см. формулу (1.5)).

Формальное рассуждение. Вычисляя формально свертку ядер по формуле (3.15), мы получаем, что произведение (4.13) должно иметь ядро вида

$$\iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L^t \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{w}^t \end{pmatrix}\right\} d\mu(u) =$$

$$= \exp\left\{\tfrac{1}{2} z K z^t + \tfrac{1}{2}\overline{w} R \overline{w}^t\right\} \iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q\overline{w}^t \\ L^t z^t \end{pmatrix}\right\} d\mu(u).$$

По предложению 4.4 получаем, что это равно

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & -M \\ -P & 1 \end{pmatrix}^{-1/2}\right] \exp\left\{\tfrac{1}{2} z K z^t + \tfrac{1}{2}\overline{w} R \overline{w}^t\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\begin{pmatrix} zL & \overline{w} Q^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L^t z^t \\ Q\,\overline{w}^t \end{pmatrix}\right\}, \tag{4.14}$$

после чего применение формул (4.7)–(4.8) дает искомое выражение.

К сожалению, мы до сих пор не выяснили, являются ли наши операторы ограниченными, поэтому формула (3.15) неприменима. Следовательно, наши рассуждения нуждаются в дополнительном обосновании.

Доказательство.

$$B\begin{bmatrix} K & L^t \\ L^t & M \end{bmatrix} \left(B\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{bmatrix} b[T\,|\,l]\right)(z) = \iint \left[\iint \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u & \overline{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ \overline{w}^t \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} w T w^t + l w^t\right\} d\mu(w)\right] d\mu(u). \tag{4.15}$$

Нам нужно обосновать возможность перестановки порядка интегрирования в «повторном» интеграле с $d\mu(w)\,d\mu(u)$ на $d\mu(u)\,d\mu(w)$. Это заведомо можно сделать, если (4.15) сходится абсолютно как двойной интеграл. Последнее, в свою очередь, выполнено, по крайней мере, в случае $\left\|\begin{matrix} P & Q \\ Q^t & R \end{matrix}\right\| < 1$, $\left\|\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\right\| < 1$.

Соображения непрерывности завершают доказательство. Действительно, обозначим оператор с ядром (4.14) через U. Тогда $Ub[T\,|\,l^t]$ имеет вид

$$\det(A)^{-1/2} b[Z\,|\,m^t],$$

а (4.15) имеет вид

$$\det(B)^{-1/2} b[Y\,|\,n^t],$$

причем A, Z, B, Y, m, n рационально зависят от K, L, M, P, Q, R, T, l, поэтому из соображений непрерывности $A = B$, $Z = Y$, $m = n$. ∎

4.6. Эквивариантное отображение матричного шара $\mathscr{X}(V)$ в проективное пространство $\mathbb{P}F(V_-)$. Поставим в соответствие каждой точке T области $\mathscr{X}(V) \simeq \simeq \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sp}}(0,V)$ вектор $b[T] := b[T\,|\,0]$.

Пусть $Q \in \mathrm{Mor}(V,W)$, а $S(Q) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Тогда в силу формулы (4.10) мы имеем

$$\mathrm{we}(Q) b[T] = \det(1-MT)^{-1/2} b[\tau(Q)T], \tag{4.16}$$

где $\tau(\cdot)$ обозначает функтор Крейна—Шмульяна. Замечу также, что (4.16) есть частный случай уже доказанной формулы (4.3) = (4.13). А именно, если $R \in \mathrm{Mor}(0, V)$ — подпространство с угловым оператором T, то $b[T]$ есть не что иное, как $\mathrm{we}(R) \cdot 1$.

4.7. Сопряженный оператор. Проверим утверждение б) теоремы 4.3. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(V, W)$, а $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Преобразованием Потапова морфизма P^* служит матрица

$$S^{\sigma} = \begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix}^{\sigma} := \begin{pmatrix} \overline{M} & \overline{L}^{t} \\ \overline{L} & \overline{K} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Вычисляя формально ядро оператора, сопряженного к $B[S] = \mathrm{we}(P)$, мы получим в точности ядро оператора $B[S^{\sigma}] = \mathrm{we}(P^*)$. Пока, однако, мы не убедились, что имеем дело с ограниченными операторами, писать

$$B[S]^* = B[S^{\sigma}]$$

было бы опасно. Соблюдем аккуратность.

Лемма 4.8. Для любых $f_1 \in F_0(V_-)$, $f_2 \in F_0(W_-)$ выполнено

$$\langle B[S]f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, B[S^{\sigma}]f_2 \rangle.$$

Доказательство. Если $\|S\| < 1$, то в обеих частях равенства стоит один и тот же абсолютно сходящийся интеграл, различен лишь порядок интегрирования. В случае $\|S\| = 1$, как и в доказательстве теоремы 4.7, используем соображения непрерывности. В частности, если $S = S^{\sigma}$, то оператор $B[S]$ — симметрический на F_0. ■

4.8. Проверка унитарности. Унитарность операторов $\mathrm{we}(P)$, где $P \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}$, есть следствие леммы II.8.3.

4.9. Сведение к симметричному случаю. Наша следующая цель — доказать утверждение об ограниченности операторов $\mathrm{we}(P)$ — самое трудное утверждение теоремы. Вспомним обычный прием вычисления нормы оператора: $\|A\|^2 = \|A^*A\|$.

Лемма 4.9. Оператор $B[S]$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор $B[S^{\sigma}]B[S]$.

Доказательство. Пусть оператор $B[S^{\sigma}]B[S]$ ограничен. В частности, функция $q(f) = \langle B[S^{\sigma}]B[S]f, f \rangle$ ограничена на единичном шаре D пространства F_0. В силу леммы 4.8 мы имеем $q(f) = \langle B[S^{\sigma}]f, B[S]f \rangle = \|B[S]f\|^2$. Ограниченность последнего выражения на D и означает ограниченность $B[S]$. ■

Оператор $B[S^{\sigma}]B[S]$ — симметрический и сам имеет вид $B[\cdot]$. Таким образом, нам достаточно проверить ограниченность оператора $B[S]$ в случае, когда он является симметрическим.

4.10. Принцип неподвижной точки. Обозначим вектор $b[T \mid 0]$ через $b[T]$. Напомним, что

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix} b[T] = \det(1 - MT)^{-1/2} b\big[K + LT(1 - MT)^{-1}L^{t}\big]. \tag{4.18}$$

Предложение 4.10. Следующие утверждения равносильны:

а) $b[T]$ — собственный вектор оператора $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix}$;

б) T — неподвижная точка преобразования

$$\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{pmatrix} : T \mapsto K + LT(1 - MT)^{-1}L^{t}. \tag{4.19}$$

Доказательство: очевидно. ■

Замечание. Еще раз подчеркнем, что отображение (4.18) переводит матричный шар в себя (см. п. 2.2).

Пусть теперь оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix} : F(V_-) \to F(V_-)$ — симметрический, т. е. $K = \overline{M}$, $L = L^*$.

Теорема 4.11. Пусть оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix}$ — симметрический. Пусть T — неподвижная точка преобразования (4.18), $\|T\| < 1$. Тогда

$$\left\| B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix} \right\| = \det\big[(1 - MT)^{-1/2}\big], \tag{4.20}$$

при этом норма достигается на векторе $b[T]$.

Доказательство. Особенно просто дело обстоит в случае $T = 0$. Тогда из (4.18) видно, что $K = 0$, а значит, и $M = 0$, т. е. наш оператор имеет вид $B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^{t} & 0 \end{bmatrix}$. Но, как мы уже видели в п. 3.4,

$$B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^{t} & 0 \end{bmatrix} f(z) = f(Lz).$$

Пусть, как и раньше, $F^{(k)}(V_-) \subset F(V_-)$ — пространство однородных многочленов степени k. Ограничение оператора $f(z) \mapsto f(Lz)$ на $F^{(k)}(V)$ есть k-я симметричная степень $\mathrm{S}^k L$ оператора L. Учитывая, что $\|L\| \leqslant 1$, получаем, что $\|\mathrm{S}^k L\| = \|L\|^k \leqslant 1$. Мы видим, что $\left\| B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^{t} & 0 \end{bmatrix} \right\| = 1$, причем норма достигается на векторе $f(z) = 1$.

Пусть теперь T произвольно. Мы видели (см. лемму 2.5), что симплектическая группа $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$ действует на матричном шаре $\mathscr{X}(V)$ транзитивно. Рассмотрим элемент $g \in \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$ такой, что соответствующее преобразование $\tau(g)$ матричного шара переводит 0 в T. Тогда оператор $\mathrm{we}(g)$ переводит вектор $b[T]$ в $b[0]$. Поэтому вектор $b[0]$ является собственным для оператора

$$A = \mathrm{we}(g)^{-1} B\begin{bmatrix} K & L \\ L^{t} & M \end{bmatrix} \mathrm{we}(g),$$

который по-прежнему симметрический (вспомним, что оператор $\mathrm{we}(g)$ унитарен с точностью до умножения на константу) и имеет вид $\lambda B[H]$, где λ — скаляр. Как только что было доказано, норма оператора A достигается на векторе $b[0]$. Поэтому норма оператора

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} = \mathrm{we}(g)A\,\mathrm{we}(g)^{-1}$$

достигается на собственном векторе $b[T]$. Теперь (4.20) следует из (4.18). ■

4.11. Существование неподвижной точки.

Предложение 4.12. Пусть $\left\| \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \right\| < 1$. Тогда обобщенно дробно-линейное отображение $\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ матричного шара в себя имеет неподвижную точку.

Первое доказательство: см. п. VI.3.7. ■

Второе доказательство. В п. 2.2 мы через $\mathscr{X}(V)$ обозначали множество симметрических операторов $V_+ \to V_-$ с нормой < 1. Обозначим через $\overline{\mathscr{X}(V)}$ множество симметрических операторов $V_+ \to V_-$ с нормой $\leqslant 1$. Очевидно, отображение (4.19) продолжается до непрерывного отображения $\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} : \overline{\mathscr{X}(V)} \to \overline{\mathscr{X}(V)}$.

Лемма 4.13. Если $\left\| \begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix} \right\| < 1$, то $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ переводит $\overline{\mathscr{X}(V)}$ в $\mathscr{X}(V)$.

Задача. Докажите лемму.

Продолжим доказательство предложения. С топологической точки зрения $\overline{\mathscr{X}(V)}$ есть шар. Отображение $\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ по теореме Брауэра имеет неподвижную точку в $\overline{\mathscr{X}(V)}$, а по лемме эта неподвижная точка содержится в $\mathscr{X}(V)$. ■

4.12. Оценка нормы оператора we(P).

Теорема 4.14. Пусть $P \in \mathrm{End}_{\mathrm{Sp}}(V)$, причем $P = P^*$. Пусть $S = \begin{pmatrix} \overline{M} & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — его преобразование Потапова. Тогда

$$\| \mathrm{we}(P)\| \leqslant \det(1 - |M|)^{-1/2}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Начнем со случая, когда $\|S\| < 1$. Тогда у нас есть теорема 4.11 и предложение 4.12, поэтому нам достаточно убедиться в истинности высказывания:

Лемма 4.15. Пусть M, X — матрицы размера $n \times n$, причем $\|M\| < 1$, $\|X\| < 1$. Тогда

$$|\det(1 - XM)| \geqslant \det(1 - |M|).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что матрица M самосопряжена и положительна. Мы хотим доказать, что

$$1 \leqslant \det(1 - M)^{-1} |\det(1 - XM)|. \tag{4.22}$$

Преобразуя правую часть, мы получаем

$$\left|\det(1 + (1 - X)M(1 - M)^{-1})\right|. \tag{4.23}$$

Пусть $\Lambda = \sqrt{M(1 - M)^{-1}}$. Тогда (4.23) равно

$$\det(1 + \Lambda(1 - X)\Lambda), \tag{4.24}$$

и для того, чтобы доказать (4.22), нам достаточно убедиться в том, что собственные числа матрицы $\Lambda(1 - X)\Lambda$ имеют неотрицательные вещественные части. Для этого достаточно проверить, что

$$\mathrm{Re}\langle \Lambda(1 - X)\Lambda v, v\rangle \geqslant 0$$

для всех v. Преобразуя это выражение, получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle \Lambda(1 - X)\Lambda v, v\rangle = \mathrm{Re}\langle (1 - X)\Lambda v, \Lambda v\rangle &= \\ = \|\Lambda v\|^2 - \mathrm{Re}\langle X\Lambda v, \Lambda v\rangle &\geqslant \\ \geqslant \|\Lambda v\|^2 - \|X\|\,\|\Lambda v\|^2 &\geqslant \\ \geqslant 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Теорема 4.14, а вместе с ней и ограниченность оператора we(P) в случае $\|S\| < 1$ доказаны. Пусть теперь $\|S\| = 1$. Рассмотрим последовательность линейных отношений P_n с преобразованиями Потапова

$$S_n = \begin{pmatrix} \overline{M} & \left(1 - \frac{1}{n}\right)\overline{L} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)L^t & M \end{pmatrix}.$$

Пусть $K_n(z, \bar{u})$ — ядро оператора we(P_n), а $K(z, \bar{u})$ — ядро оператора we(P). Тогда, очевидно, $K_n(z, \bar{u})$ сходится к $K(z, \bar{u})$ поточечно, при этом нормы операторов we(P_n) ограничены константой $\det(1 - |M|)$. Поэтому в силу предложения 3.11

$$\| \mathrm{we}(P)\| \leqslant \det(1 - |M|).$$ ■

4.13. Замечания

A. Еще одно доказательство ограниченности операторов $B[S]$.

Задача. Пусть $Y = B\begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix} : F(\mathbb{C}^1) \to F(\mathbb{C}^1)$, где $0 < \lambda < 1$. Докажите, что $\|Y\| = \sqrt{1 - \lambda}$.

Указание. Постройте спектральное разложение оператора Y по обобщенным собственным функциям. Обобщенные собственные функции ищутся в виде $b[T\,|\,l^t]$, см. VI.1.9.D.

Пусть $B[S]$ — некоторый самосопряженный оператор в $F(\mathbb{C}^n)$. При доказательстве ограниченности $B[S]$ можно без ограничения общности считать, что S имеет канонический вид из п. 1.7, а для такого оператора ограниченность достаточно очевидна.

B. Коммутационные соотношения.

Задача. Пусть $Q \in \mathrm{Mor}(V, W)$. Докажите, что we(Q) — единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $F(V_-) \to F(W_-)$ такой, что для любого многочлена $f \in F(V_-)$ и любых $(v, w) \in Q$ выполнено

$$\hat{a}(w)\,\mathrm{we}(Q)f = \mathrm{we}(Q)\hat{a}(v)f. \tag{4.25}$$

C. Линеаризация. Пусть $P \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V) \simeq \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{R}})$. Пусть P — график оператора с матрицей $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$.

Задача. Докажите, что операторы

$$\widetilde{\mathrm{we}}(P) = \pm \det(\Phi)^{-1/2}\, \mathrm{we}(P)$$

унитарны, причем

$$\widetilde{\mathrm{we}}(PQ) = \pm\, \widetilde{\mathrm{we}}(P)\, \widetilde{\mathrm{we}}(Q).$$

D. Компактность.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$. Докажите, что оператор $B[S]$ компактен.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$. Найти $\mathrm{tr}\, B[S]$.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$, причем $S = S^{\sigma}$. Мы видели, что оператор $B[S]$ имеет собственную функцию вида $\exp\{zTz^t\}$. Докажите, что все собственные функции оператора $B[S]$ имеют вид $p(z)\exp\{zTz^t\}$, где $p(z)$ — многочлены.

E. Точные формулы для норм операторов $B[S]$ известны, см. [Ольшанский (1994)]; однако они не очень удобны.

Глава VI

Представление Вейля: бесконечномерный случай

§ 1. Бозонное пространство Фока с бесконечным числом степеней свободы

1.1. Координатное пространство F. Рассмотрим пространства Фока $F(\mathbb{C}^0)$, $F(\mathbb{C}^1)$, ... Рассмотрим изометрическое вложение

$$\lambda_n f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_n)$$

пространства $F(\mathbb{C}^n)$ в $F(\mathbb{C}^{n+1})$. Таким образом, мы можем отождествить $F(\mathbb{C}^n)$ с подпространством в $F(\mathbb{C}^{n+1})$. Рассмотрим неполное евклидово пространство $\bigcup_{n=0}^{\infty} F(\mathbb{C}^n)$. *Пространство Фока F* — это пополнение пространства $\bigcup F(\mathbb{C}^n)$.

Как мы видели (в п. V.3.1), функции вида

$$e_{j_1 \dots j_n}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k^{j_k}}{\sqrt{j_k!}} \tag{1.1}$$

образуют ортонормированный базис в $F(\mathbb{C}^n)$. Отображение λ_n отождествляет функции $e_{j_1 \dots j_n}$ и $e_{j_1 \dots j_n 0}$. Теперь из ортогональных базисов (1.1) в $F(\mathbb{C}^n)$ мы можем составить базис в F. Его элементы $e_{j_1 j_2 \dots}(z)$ нумеруются последовательностями неотрицательных целых чисел $j_1, j_2, \dots$, у которых начиная с некоторого места стоят нули; при этом функция $e_{j_1 \dots j_n}(z) \in F(\mathbb{C}^n)$ отождествляется с $e_{j_1 \dots j_n 00 \dots}(z) \in F$.

Теперь элементы пространства F можно рассматривать как формальные ряды вида

$$r(z) = \sum_{j_1, j_2, \dots} c_{j_1 j_2 \dots} e_{j_1 j_2 \dots}(z), \tag{1.2}$$

где $\sum |c_{j_1 j_2} \dots|^2 < \infty$.

1.2. Пространство F как пространство голоморфных функций.

Лемма 1.1. Ряд (1.2) сходится для любого $z = (z_1, z_2, \dots) \in \ell_2$.

Доказательство. Пусть $(a_1, a_2, \dots) \in \ell_2$. Рассмотрим формальный ряд

$$\varphi_a(z) = \sum_{j_1, j_2, \dots} \left(\frac{\overline{a}_1^{j_1}}{\sqrt{j_1!}} \frac{\overline{a}_2^{j_2}}{\sqrt{j_2!}} \cdots \right) e_{j_1 j_2 \dots}(z_1, z_2, \dots). \tag{1.3}$$

Легко видеть, что $\varphi_a(z) \in F$ Действительно,

$$\begin{aligned}\|\varphi_a\|^2 &= \sum \frac{|a_1|^{2j_1}}{j_1!}\frac{|a_2|^{2j_2}}{j_2!}\dots = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_k|^{2j}}{j!}\right) = \\ &= e^{-\|a\|^2}.\end{aligned}$$

Вычисляя скалярное произведение функции $\varphi_a(z)$ и функции $r(z)$, заданной формулой (1.2), мы получаем

$$\langle r(z), \varphi_a(z)\rangle = \sum c_{j_1 j_2\dots}\frac{a_1^{j_1}}{\sqrt{j_1!}}\frac{a_2^{j_2}}{\sqrt{j_2!}}\dots .$$

Но это выражение в точности равно $r(a_1, a_2, \dots)$. Тем самым сходимость ряда (1.2) в любой точке доказана. ■

Далее, пусть A — линейный оператор $H_1 \to H_2$, причем $\|A\| \leqslant 1$. Тогда оператор замены переменной $F(A) : f(z) \mapsto f(zA)$ является ограниченным оператором $F(H_2) \to F(H_1)$. В самом деле, в каждом пространстве $\mathrm{S}^k(H_2)$ наш оператор $F(A)$ действует как k-я симметричная степень $\mathrm{S}^k A$ оператора A, а $\|\mathrm{S}^k A\| = \|A\|^k$.

1.3. Гауссова мера и пространство Фока как подпространство в L^2. Итак, пространство Фока $F(H)$ можно рассматривать как некоторое пространство голоморфных функций на гильбертовом пространстве H. Однако до сих пор для вычисления скалярного произведения мы должны были обращаться к пространствам $F(\mathbb{C}^n)$ или к разложению по базису $e_{j_1 j_2\dots}$. Сейчас мы запишем скалярное произведение в $F(H)$ более привычным образом.

Введем в $\mathbb{C}$ гауссову меру ν с плотностью $\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}$ (множитель $\frac{1}{\pi}$ выбран так, чтобы мера всего $\mathbb{C}$ была равна 1). Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^\infty$ всех комплексных последовательностей $(z_1, z_2, \dots)$. Введем в $\mathbb{C}^\infty$ гауссову меру μ — произведение гауссовых мер ν на каждом сомножителе.

Задача. Докажите, что пространство ℓ_2 имеет в $\mathbb{C}^\infty$ меру 0.

Любая функция $e_{j_1 j_2\dots}(z)$ на ℓ_2 зависит лишь от конечного числа переменных, а тем самым корректно определена и на $\mathbb{C}^\infty$.

Лемма 1.2. Функции $e_{j_1 j_2\dots}(z)$ образуют ортонормированную систему в $L^2(\mathbb{C}^\infty,\ d\mu)$.

Доказательство. Функции $e_{j_1 j_2\dots}$ зависят лишь от конечного числа переменных, поэтому интегрирование $\int e_{j_1 j_2\dots}\overline{e_{i_1 i_2\dots}}\, d\mu$ сводится к интегрированию по $\mathbb{C}^n$, а вычисления в этом случае мы уже проводили в п. V.3.1. ■

Замечание. Система функций $e_{j_1 j_2\dots}(z)$, конечно, не является базисом в $L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

Таким образом, ряд (1.2) как ряд функций на $\mathbb{C}^\infty$ сходится в среднем квадратичном на $\mathbb{C}^\infty$, а поэтому пространство $F(\ell_2)$ изометрически вкладывается в $L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

С этого места мы будем отождествлять $F(\ell_2)$ с подпространством в $L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

1.4. Воспроизводящее свойство и ядра. Пусть $a \in H$. Рассмотрим в $F(H)$ функцию

$$\varphi_a(z) = \exp(z, a), \tag{1.4}$$

где через (z, a) обозначено скалярное произведение z и a в H.

Лемма 1.3. Для любой $f \in F(H)$ и любого $a \in H$ выполнено

$$\langle f, \varphi_a\rangle = f(a). \tag{1.5}$$

Доказательство: по существу, именно это вычисление было проведено при доказательстве леммы 1.1, см. также п. V.3.2. ■

Пусть A — ограниченный оператор $F(H_1) \to F(H_2)$. Определим его *ядро* по формуле

$$K_A(u, \overline{v}) = \langle A\varphi_v, \varphi_u\rangle_{F(H_2)}, \tag{1.6}$$

где $v \in H_1$, $u \in H_2$.

Так же, как и в п. V.3.3, для ядра $K_A(z, \overline{u})$ определим функции

$$k_A^{\overline{u}}(z) = K_A(z, \overline{u}), \quad k_A^{z}(u) = \overline{K_A(z, \overline{u})}.$$

Так же, как и в конечномерном случае (см. п. V.3.3), мы имеем $k_A^z(u) \in F(H_1)$, $k_A^{\overline{u}}(z) \in F(H_2)$. Так же, как и в п. V.3.3, мы имеем

$$Af(z) = \langle f, k_A^z\rangle. \tag{1.7}$$

Мы будем символически записывать эту формулу в виде

$$Af(z) = \iint K_A(z, \overline{u}) f(u)\, d\mu(u), \tag{1.8}$$

но теперь мы уже обязаны помнить, что запись (1.8) является чисто символической.

Наконец, если $A : F(H_1) \to F(H_2)$, $B : F(H_2) \to F(H_3)$ — операторы с ядрами $K_A(u, \overline{v})$ и $K_B(z, \overline{u})$, то ядро $K_{BA}(z, \overline{v})$ оператора BA равно

$$K_{BA}(z, \overline{v}) = \left\langle k_A^{\overline{v}}, k_B^{z}\right\rangle_{F(H_2)}, \tag{1.9}$$

или, в символической форме,

$$K_{BA}(z, \overline{v}) = \iint K_B(z, \overline{u}) K_A(u, \overline{v})\, d\mu(u).$$

Наконец, по-прежнему верна формула

$$K_A(z, \overline{u}) = \sum \left\langle Ae_{k_1 k_2\dots}, e_{j_1 j_2\dots}\right\rangle_{F(H_2)} e_{j_1 j_2\dots}(z)\, e_{k_1 k_2\dots}(\overline{u}). \tag{1.10}$$

Замечание. Стоит обсудить, можно ли формулы (1.8) и (1.10) понимать буквально как интеграл по гауссовой мере. Оказывается, что совсем буквально их понимать нельзя: функция $K_A(z, \overline{u})$, определенная на $\ell_2 \times \ell_2$, не продолжается до функции на $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$. Она, однако, канонически продолжается и на $\ell_2 \times \mathbb{C}^\infty$, и на $\mathbb{C}^\infty \times \ell_2$ (т. к. функции $k_A^{\overline{u}}$ и k_A^z продолжаются на $\mathbb{C}^\infty$). Поэтому формулу (1.8) можно понимать так: продолжаем ядро $K_A(z, \overline{u})$ на $\ell_2 \times \mathbb{C}^\infty$, а потом интегрируем и получаем значение функции Af в точке $z \in \ell_2$. Но значение функции Af в $z \in \mathbb{C}^\infty$ так не получается.

Еще стоит отметить, что эта же техника применима и к неограниченным операторам. Пусть Q — какое-нибудь плотное подпространство в $F(H)$, содержащее все функции φ_a, а $\widetilde{F}(H)$ — пространство всех целых функций на H. Тогда формула (1.6) имеет смысл для любого оператора $Q \to \widetilde{F}(H)$. Использование этой техники возможно и в более общей ситуации, если не требовать, чтобы «ядро» $K_A(z, \overline{u})$ было определено на всем $H \oplus H$; с ней вполне можно работать даже если ядро определено лишь на некотором шаре в $H \oplus H$ (нам это не понадобится).

1.5. Операторы рождения-уничтожения. Пусть H — гильбертово пространство, H' — двойственное пространство, $V = V_+ \oplus V_- := H' \oplus H$. Выберем в H ортогональный базис, а в H' — сопряженный базис. Пусть $v = (v_+, v_-) \in H' \oplus H = V$. Пусть $(v_1^+, v_2^+, \dots; v_1^-, v_2^-, \dots)$ — координаты вектора v. Определим оператор рождения-уничтожения в $F(H)$ по формуле

$$\hat{a}(v)f(z) = \left(\sum v_i^+ z_i - \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial z_i}\right) f(z).$$

Эти операторы неограничены, в качестве их общей плотной области определения можно взять, например, пространство $F_{\mathrm{fin}}(H)$ всех финитных векторов, т. е. векторов, представимых в виде конечной суммы

$$\sum_{j=0}^{n} c_j f_j, \quad \text{где } f_k \in \mathrm{S}^k(H').$$

Введем на V кососимметричную билинейную форму

$$\{(v_+, v_-), (w_+, w_-)\} = v_+(w_-) - w_+(v_-)$$

(напомним, что $v_+, w_+ \in H'$, а $v_-, w_- \in H$). Тогда

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)] = \hat{a}(v)\hat{a}(w) - \hat{a}(w)\hat{a}(v) = \{v, w\} \cdot E$$

(*«канонические коммутационные соотношения»*). Операторы $\hat{a}(\cdot)$ неограничены, поэтому для осторожности лучше сказать, что это равенство есть равенство операторов на $F_{\mathrm{fin}}(H)$.

Так же, как и в п. V.3.5, доказывается, что операторы $\hat{a}(v_+, -\overline{v_+})$ существенно самосопряжены.

1.6. Группа Гейзенберга. Пусть $b \in H$. Рассмотрим оператор $T(b)$ в $F(H)$, задаваемый формулой

$$T(b)f(z) = f(z - b) \exp\left(-\tfrac{1}{2}(b, b) + (z, b)\right). \tag{1.11}$$

Задача.
а) Покажите, что операторы $T(b)$ унитарны.
б) Проверьте равенство

$$T(b)T(b') = \exp\big(i \operatorname{Im}(b, b')\big)T(b + b').$$

Таким образом, $b \mapsto T(b)$ является унитарным проективным представлением аддитивной группы гильбертова пространства. Это представление можно также рассматривать как линейное представление так называемой группы Гейзенберга. *Группа Гейзенберга* есть пространство $H \oplus \mathbb{R}$ с операцией умножения

$$(h, r)(h_1, r_1) = \big(h_1 + h_2, r_1 + r_2 + \operatorname{Im}(h, h_1)\big).$$

Задача. Покажите, что генератор однопараметрической группы операторов $T(sb)$, где $s \in \mathbb{R}$, есть $\hat{a}(b, \overline{b})$.

Задача. Докажите, что представление T неприводимо.

1.7. Действие группы изометрий. Пусть $\mathrm{Isom}(H)$ — группа изометрий гильбертова пространства H, т. е. группа всех преобразований H вида $z \mapsto Az + b$, где A — унитарный оператор, а $b \in H$. Сдвиги $z \mapsto z + b$ образуют в $\mathrm{Isom}(H)$ нормальную подгруппу, изоморфную аддитивной группе пространства H. Кроме того, $\mathrm{Isom}(H)$ содержит полную унитарную группу $\mathrm{U}(H)$ пространства H. Мы видели, что и $\mathrm{U}(H)$, и группа сдвигов действует в $F(H)$ (см. п. 1.2 и 1.6). Эти два действия можно объединить, а именно: поставим в соответствие изометрическому преобразованию $[A, b] : z \mapsto Az + b$ унитарный оператор

$$\mathrm{Exp}[A, b]f(z) = f\big(A^{-1}(z - b)\big) \exp\left(-\tfrac{1}{2}(b, b) + (z, b)\right) \tag{1.12}$$

Мы получаем проективное унитарное представление группы $\mathrm{Isom}(H)$:

$$\mathrm{Exp}[A_1, b_1]\, \mathrm{Exp}[A_2, b_2] = \exp\big(i \operatorname{Im}(b_1, A_1 b_2)\big)\, \mathrm{Exp}\left([A_1, b_1] \circ [A_2, b_2]\right). \tag{1.12a}$$

Эта конструкция будет существенно расширена в § 4, действие группы изометрий будет продолжено до действия значительно более широкой группы. Однако в главах IX–X мы увидим, что группа Isom и ее представление Exp имеют самостоятельную ценность.

Отметим также, что конструкция представления Exp допускает небольшое шевеление, а именно: можно определить представление Exp_s по формуле

$$\mathrm{Exp}_s[A, b]f(z) = f\big(A^{-1}(z - sb)\big) \exp\left(-\tfrac{1}{2}|s|^2(b, b) + s(z, b)\right),$$

где $s \in \mathbb{C}$.

Задача. Покажите, что Exp_s и Exp_t эквивалентны тогда и только тогда, когда $|s| = |t|$.

Задача. Покажите, что

$$\mathrm{Exp}_s \otimes \mathrm{Exp}_t \simeq \mathrm{Exp}_{\sqrt{s^2+t^2}} \otimes \mathrm{Exp}_0. \tag{1.13}$$

Что из себя представляет представление Exp_0?

Пусть, далее, Y — вещественное гильбертово пространство, а $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(Y)$ — группа изометрий Y. Ограничение представления Exp_s группы $\mathrm{Isom}(Y_{\mathbb{C}})$ на $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(Y)$ мы будем обозначать через $\mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}$. Из формулы (1.12a) видно, что это представление является линейным.

Задача. Покажите, что $\mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}$ неприводимо при $s \neq 0$.

Задача. Покажите, что при $|s| \neq |t|$ представления $\mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}$ и $\mathrm{Exp}_t^{\mathbb{R}}$ не эквивалентны.

Указание. Покажите, что $f(z) = 1$ — единственный $\mathrm{O}(H)$-инвариантный вектор в $F(H)$, далее вычисляются сферические функции $\langle \mathrm{Exp}_s^{\mathbb{R}}(g) \cdot 1, 1\rangle$ и показывается, что они различны.

1.8. Тензорные произведения. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, в них введены координаты $z_1, z_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots$ соответственно. Построим канонический изоморфизм

$$F(H_1) \otimes F(H_2) \simeq F(H_1 \oplus H_2).$$

Это очень просто: если $f(z) \in F(H_1)$, а $g(h) \in F(H_2)$, то

$$f(z) \otimes g(h) \mapsto f(z)g(h).$$

Дословно также строится канонический изоморфизм

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} F(H_i) \simeq F\Big(\bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i\Big) \tag{1.14}$$

(в каждом $F(H_i)$ отмечен вакуумный вектор (см. Предварительные сведения, §4)). При этом, если A_i — операторы в $F(H_i)$, а $K_i(z_i, \bar{u}_i)$ — их ядра, то ядро оператора $\otimes A_i$ равно $\prod_{i=1}^{\infty} K_i(z_i, \bar{u}_i)$.

Здесь стоит заметить, что в правой части равенства (1.14) можно поставить и прямой интеграл гильбертовых пространств, тогда левую часть придется понимать как непрерывное тензорное произведение, и тем самым мы получаем способ определения непрерывных тензорных произведений (он неявно будет использован ниже (глава X) при построении мультипликативного интеграла Араки).

1.9. Замечания. Вещественная модель пространства Фока. Вещественная модель пространства Фока была обнаружена раньше голоморфной ([Segal I. E. (1956)], [Segal I. E. (1958)]), она менее удобна, но по-своему замечательна. Подробное изложение перечисленных ниже в A, B фактов содержится в книге [Шилов, Фан Дык Тинь (1967)], см. также [Kuo (1975)].

A. Пространство $L^2(\mathbb{R}^\infty)$. Введем на $\mathbb{R}$ гауссову меру с плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ (так, что мера $\mathbb{R}$ равна 1). Рассмотрим произведение $\mathbb{R}^\infty$ счетного числа экземпляров $\mathbb{R}$ и снабдим его произведением мер $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_i^2/2}$.

Пусть $t = (t_1, t_2, \ldots) \in \ell_2$. Рассмотрим «линейный функционал» $f(x) = \sum t_j x_j$ на $\mathbb{R}^\infty$. На первый взгляд кажется, что выражение $\sum t_j x_j$ не имеет смысла.

Задача. Покажите, что ряд $\sum t_j x_j$ сходится в среднем квадратичном.

Задача. Покажите, что ряд $\sum t_j x_j$ сходится почти всюду.

Последнее высказывание нетривиально; оно, однако, вытекает из следующей теоремы (см., например, [Ширяев (1980)]).

Теорема 1.4 (Колмогоров—Хинчин). Пусть f_i — независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием. Пусть ряд $\sum Df_i$, составленный из их дисперсий, сходится. Тогда ряд $\sum f_i$ сходится почти всюду.

B. Преобразования пространства $\mathbb{R}^\infty$. Пусть $O(\infty)$ — группа всех ортогональных операторов в вещественном пространстве ℓ_2. Пусть A — матрица из $O(\infty)$, а $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$. Умножим формально вектор x на матрицу A. Как мы только что видели, ряды $\sum x_j a_{ij}$ сходятся почти всюду, поэтому *почти всюду* определено отображение $x \mapsto xA$.

Теорема 1.5. Отображение $x \mapsto xA$ сохраняет меру μ в $\mathbb{R}^\infty$.

В частности, группа $O(\infty)$ действует в пространстве $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ операторами вида $f(x) \mapsto f(xA)$.

Задача. Пусть $t = (t_1, t_2, \ldots) \in \ell_2$. Покажите, что отображение $x \mapsto x + t$ оставляет меру μ в $\mathbb{R}^\infty$ квазиинвариантной, причем производная Радона—Никодима равна $\exp\left(-\sum t_j x_j - \frac{1}{2}\sum t_j^2\right)$.

Пусть теперь $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ — группа изометрий вещественного пространства ℓ_2. Как мы только что видели, $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ действует на $\mathbb{R}^\infty$ преобразованиями, оставляющими меру μ квазиинвариантной. Поэтому мы можем определить унитарное представление Exp группы $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ по формуле

$$\mathrm{Exp}[A, b]f(x) = f\big((x-b)A^{-1}\big)\exp\left(-\tfrac{1}{4}(b,b) + \tfrac{1}{2}xb^t\right). \tag{1.15}$$

Задача. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots > 0$. Рассмотрим преобразование

$$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto \big((1+\lambda_1)x_1, (1+\lambda_2)x_2, \ldots\big)$$

пространства $\mathbb{R}^\infty$. Докажите, что мера μ квазиинвариантна относительно этого преобразования тогда и только тогда, когда $\sum \lambda_j^2 < \infty$.

Замечание. При решении задачи на первый взгляд кажется, что необходимо выполнение более сильного условия $\sum |\lambda_j| < \infty$.

Обозначим через $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\big)$ группу всех операторов в ℓ_2, представимых в виде $A(1+T)$, где $A \in O(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Теорема 1.6 (Фельдман—Гаек) [Feldman (1958)], [Hajek (1958)]. Пусть B — ограниченный оператор в ℓ_2. Преобразование $x \mapsto xB$ оставляет меру μ квазиинвариантной тогда и только тогда, когда $B \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\big)$.

Задача. Докажите теорему в одну сторону: условие $B \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\big)$ влечет квазиинвариантность μ.

В частности, мы получаем серию T_w унитарных представлений $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)\big)$ в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$:

$$T_w(B)f(x) = f(xB)\left[\frac{d\mu(xB)}{d\mu(x)}\right]^{1/2+iw}, \tag{1.16}$$

где $w \in \mathbb{R}$, а $\frac{d\mu(xB)}{d\mu(x)}$ — производная Радона—Никодима.

C. Изоморфизм $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ и пространства Фока. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — элемент комплексного ℓ_2.

Определим функцию

$$\tilde{\varphi}_a(x) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum a_j^2 + \sqrt{2}\sum a_j x_j\right) \in L^2(\mathbb{R}^\infty). \tag{1.17}$$

Задача. Проверьте, что

$$\langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b \rangle = \exp\left(\sum a_j \bar{b}_j\right).$$

Таким образом, скалярные произведения функций $\tilde{\varphi}_a \in L^2(\mathbb{R}^\infty)$ совпадают со скалярными произведениями функций $\varphi_a \in F(\ell_2)$.

Следовательно, мы можем отождествить $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ с $F(\ell_2)$, полагая, что элементы «переполненного» базиса $\tilde{\varphi}_a \in L^2(\mathbb{R}^\infty)$ соответствуют элементам «переполненного базиса» $\varphi_a \in F(\ell_2)$.

Задача. Пусть $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^\infty)$, а f — соответствующий элемент $F(\ell_2)$. Тогда

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^\infty} \tilde{f}(x)\overline{\varphi_z(x)}\, d\mu(x).$$

Для обратного преобразования можно написать формальное выражение

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{C}^\infty} f(u)\overline{\varphi_u(x)}\, d\mu(u).$$

Оператор $f \mapsto \tilde{f}$ называется *преобразованием Баргмана—Сигала*.

Задача. Куда переходят элементы базиса $e_{j_1 j_2 \ldots} \in F(\ell_2)$ при этом соответствии?

Ответ. В функции

$$\tilde{e}_{j_1 j_2 \ldots}(x) = H_{j_1}(x_1)H_{j_2}(x_2)\ldots,$$

где $H_j(x)$ — многочлены Эрмита (которые, как известно, образуют ортогональный базис в $L^2\bigl(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\bigr)$).

Задача. Покажите, что представления (1.12) и (1.15) группы $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}$ на самом деле совпадают.

Задача. Что соответствует в пространстве $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ операторам рождения-уничтожения?

Ответ.

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \leftrightarrow -i\,\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad z_j \leftrightarrow i\left(x_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Задача. Перенесите действие группы Гейзенберга в пространство $L^2(\mathbb{R}^\infty, d\mu)$.

D. Конечномерный случай. Только что мы отождествили $F(\ell_2)$ с $L^2(\mathbb{R}^\infty, d\mu)$. Точно так же проводится отождествление $F(\mathbb{C}^n)$ с $H_n := L^2\left(\mathbb{R}^n, (2\pi)^{-n/2}e^{-\sum x_j^2/2}dx\right)$. Пространство H_n, в свою очередь, отождествляется с обычным пространством $L^2(\mathbb{R}^n)$, а именно: функции $f(x) \in H_n$ соответствует функция $f(x)e^{-\sum x_j^2/4} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Задача. Покажите, что векторам вида $b[T \mid l^t] \in F(\mathbb{C}^n)$ соответствуют функции вида

$$b[Q \mid m^t] := \exp\left\{-\tfrac{1}{2}xQx^t + xm^t\right\} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

где матрица $\mathrm{Re}\, Q$ положительно определена.

Задача. Пусть $\|S\| < 1$. Покажите, что операторам $B[S] : F(\mathbb{C}^n) \to F(\mathbb{C}^m)$ соответствуют интегральные операторы в $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^m)$ вида

$$f(x) \mapsto \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(x \;\; y)\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^t \\ y^t\end{pmatrix}\right\} f(y)\, dy, \tag{1.18}$$

где $A = A^t$, $C = C^t$, а матрица $\mathrm{Re}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C\end{pmatrix}$ положительно определена.

Замечание. В предельном случае $\|S\| = 1$ это уже не так, и наряду с операторами вида (1.18) (пример: преобразование Фурье) встречаются операторы вида

$$f(x) \mapsto \int_L \chi(x, y) f(y)\, dy,$$

где $\chi(x, y)$ — гауссова плотность, сосредоточенная на некотором линейном подпространстве $L \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Подробнее об операторах вида (1.18) см. [Howe (1988)], [Hörmander (1994)].

Задача. Истолкуйте формулу (1.18) через преобразование Потапова.

Задача. Покажите, что оператор $B\begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda\end{bmatrix} : F(\mathbb{C}^1) \to F(\mathbb{C}^1)$ соответствует оператору

$$f(x) \mapsto (1-\lambda)^{-1/2}e^{-(1-\lambda)x^2}f(x) \tag{1.19}$$

в $L^2(\mathbb{R}^1)$.

E. Группа Гейзенберга. Пусть V — вещественное линейное пространство размерности $2n$, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}$. Введем на $V \oplus \mathbb{R}$ структуру группы, положив

$$(v_1, r_1) \times (v_2, r_2) = \bigl(v_1 + v_2, r_1 + r_2 + \{v_1, v_2\}\bigr).$$

Построенный объект называется *группой Гейзенберга* H_{2n+1}.

Пусть V_+ и V_- — два дополнительных изотропных подпространства в V. Пусть $v = (v_+, v_-) \in V_+ \oplus V_-$. Определим операторы $T_\lambda(v, r)$ в $L^2(V_+)$ по формуле

$$T_\lambda(v, r)f(x) = f(x + v_+)e^{i\lambda(\{x, v_-\}+r)}. \tag{1.20}$$

Задача. Проверьте, что это представление эквивалентно представлению из п. 1.6.

Заметим, что элементы вида $(0, r)$ образуют центр группы, и, следовательно, в любом неприводимом унитарном представлении они должны действовать скалярными операторами $e^{i\lambda r} \cdot E$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.7 (Стоун—фон Нейман). *Для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ группа Гейзенберга H_{2n+1} имеет ровно одно унитарное представление T_λ такое, что $T_\lambda(0, r) = e^{i\lambda}$. Это представление задается формулой* (1.20).

Пусть $g \in \mathrm{Sp}(V, \mathbb{R})$. Тогда преобразование $(v, r) \mapsto (gv, r)$ является автоморфизмом H_{2n+1}, а значит, $(v, r) \mapsto T_\lambda(gv, r)$ является снова представлением H_{2n+1}; в силу теоремы Стоуна—фон Неймана представления $T_\lambda(gv, r)$ и $T_\lambda(v, r)$ эквивалентны. Поэтому существует унитарный оператор $U(g)$ такой, что

$$T_\lambda(gv, r) = U(g)^{-1}T_\lambda(v, r)U(g) \tag{1.21}$$

для всех (v, r).

Задача.

а) Покажите, что

$$U(g_1 g_2) = e^{i\mu}U(g_1)U(g_2).$$

б) Покажите, что $g \mapsto U(g)$ есть представление Вейля группы $\mathrm{Sp}(V, \mathbb{R})$.

Замечания.

а) Конечно, (1.20) есть лишь другая форма записи коммутационных соотношений (V.4.25).

б) См. аналогичные рассуждения в п. II.3.2.

в) Для бесконечномерной группы Гейзенберга теорема Стоуна—фон Неймана не верна (см. [Gårding, Wightman (1954)]).

1.10. Замечания. Канонические расширения гильбертовых пространств (см. [Kuo (1975)], главы I—II). Рассмотрим теперь произвольное *вещественное* гильбертово пространство H. Выберем в нем ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots$. Пространство H состоит из рядов вида $\sum \alpha_j e_j$, где $\sum \alpha_j^2 < \infty$.

Рассмотрим пространство $\widehat{H}$, состоящее из формальных выражений (рядов) вида $\sum \beta_j e_j$, где $\beta_j \in \mathbb{R}$ произвольны. Тогда $\widehat{H}$ отождествляется с $\mathbb{R}^\infty$, и тем самым мы получим гауссову меру на $\widehat{H}$.

Формально пространство $\widehat{H}$ зависит не только от самого гильбертова пространства H, но и от базиса $e_1, e_2, \ldots$. Поэтому мы должны были бы писать $\widehat{H}(e_1, e_2, \ldots)$ вместо $\widehat{H}$. Однако в силу $\mathrm{O}(\infty)$-инвариантности конструкции разные пространства $\widehat{H}(e_1, e_2, \ldots)$ и $\widehat{H}(e_1', e_2', \ldots)$ канонически изоморфны (они изоморфны как пространства с мерой, а не как множества и не как линейные пространства!).

Пространство $L^2(\widehat{H})$ теперь естественным образом отождествляется с пространством Фока $F(H_{\mathbb{C}})$. Естественно, встает вопрос о том, можно ли «пощупать руками» пространство $\widehat{H}$, потому что в только что описанном виде оно выглядит совершенно неосязаемым.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — последовательность положительных чисел, причем $\sum \lambda_j^2 < \infty$. Обозначим через $\mathbb{R}^\infty_\Lambda$ подмножество в $\mathbb{R}^\infty$, состоящее из последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ таких, что

$$\sum \lambda_j^2 x_j^2 < \infty.$$

Теорема 1.8.

$$\mu(\mathbb{R}^\infty_\Lambda) = 1.$$

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Беппо Леви о монотонной сходимости (см. [Колмогоров, Фомин (1981)]) (можно также сослаться на теорему Колмогорова—Хинчина) ряд $\sum x_j^2 \lambda_j^2$ сходится почти всюду на $\mathbb{R}^\infty$. ■

Заметим, далее, что пространство $\mathbb{R}^\infty_\Lambda$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\{x, y\} = \sum_j \lambda_j^2 x_j y_j,$$

и, таким образом, мы можем считать, что мера μ сосредоточена не на $\mathbb{R}^\infty$, а на гильбертовом пространстве $\mathbb{R}^\infty_\Lambda$.

Отметим также, что для конкретного функционального пространства H пространство $\widehat{H}$, как правило, может быть точно описано, см. примеры ниже в замечаниях к § IX.6.

§ 2. *Представление Вейля.*

2.1. Категория $\overline{\mathbf{Sp}}$. Объект V категории $\overline{\mathbf{Sp}}$ — это прямая сумма $V = V_+ \oplus V_- := H' \oplus H$, где H — гильбертово пространство, а H' — двойственное пространство. Обозначим через I естественный антилинейный оператор, отождествляющий H с H'. Для $h \in H$ линейный функционал Ih мы будем обозначать через $\bar{h}$. Аналогично, для $v \in H'$ мы положим $\bar{v} := I^{-1}v$. Таким образом, в V определен антилинейный оператор «сопряжения»: $(v, h) \mapsto (\bar{h}, \bar{v})$. Снабдим $H' \oplus H$ следующими структурами:

а) эрмитовой знаконеопределенной формой

$$M_V\big((v_1', v_1), (v_2', v_2)\big) = \langle v_1', v_2' \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle;$$

б) кососимметричной билинейной формой

$$L_V\big((v_1', v_1), (v_2', v_2)\big) = v_1'(v_2) - v_2'(v_1).$$

Морфизмом из V в W мы будем называть линейные отношения $P : V \rightrightarrows W$, которые являются графиками операторов

$$S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} : W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-,$$

причем матрица $S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$ (*преобразование Потапова* линейного отношения P) удовлетворяет условиям

1. $S(P) = S(P)^t$;
2. $\|S(P)\| \leqslant 1$;
3. $\|A\| < 1$, $\|C\| < 1$;
4. A и C — операторы Гильберта—Шмидта.

Дадим интерпретацию условий 1–3 на языке форм а)–б).

Условие 1 означает, что P является максимальным изотропным подпространством в $V \oplus W$ относительно формы

$$L_{V\oplus W}\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = L_V(v_1, v_2) - L_W(w_1, w_2).$$

Условие 2 означает, что форма

$$M_{V\oplus W}\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = M_V(v_1, v_2) - M_W(w_1, w_2)$$

неотрицательно определена на P.

Условие 3 означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $v \in \operatorname{Ker} P$, $w \in \operatorname{Indef} P$ выполнено

$$M(v, v) \geqslant \varepsilon \|v\|_V^2, \quad M(w, w) \leqslant -\varepsilon \|w\|_W^2$$

(через $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$ обозначены нормы в гильбертовых пространствах V и W).

Что касается условия 4, то оно означает, что P — морфизм категории $\overline{\mathbf{GA}}$.

Морфизмы категории $\overline{\mathbf{Sp}}$ перемножаются как линейные отношения.

Задача. Докажите корректность определения.

Введем в $\overline{\mathbf{Sp}}$ инволюцию, положив, что $P^* \in \operatorname{Mor}(W, V)$ есть ортогональное дополнение до $P \in \operatorname{Mor}(W, V)$ относительно формы $M_{V\oplus W}$ (см. п. V.1.6). Так же, как и в п. V.1.6, из $S(P) = S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & N \end{pmatrix}$ вытекает

$$S(P^*) = S^\sigma := \begin{pmatrix} N^* & \overline{L} \\ L^* & K^* \end{pmatrix}.$$

Замечание. Точно так же можно ввести категории $\overline{\mathbf{U}}$ и $\overline{\mathbf{SO}}^*$.

Пусть $V = V_+ \oplus V_-$ — бесконечномерный объект категории $\overline{\mathbf{Sp}}$. Легко видеть, что группа $\operatorname{Aut}(V)$ состоит из всех операторов $V \to V$ вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

сохраняющих форму L, таких, что Ψ — оператор Гильберта—Шмидта.

Задача. Докажите это. Покажите, что $\operatorname{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Sp}}} = \operatorname{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$ (определение Aut^* см. в п. II.8.6).

2.2. Векторы $b[T \mid l^t]$. Пусть T — оператор Гильберта—Шмидта $V_- \to V_+$, причем $\|T\| < 1$. Пусть $l \in V_+$. Определим функцию $b[T \mid l^t]$ на V_+ по формуле

$$b[T \mid l^t] = \exp\left\{\tfrac{1}{2} zTz^t + lz^t\right\}$$

(мы, как и раньше, предпочитаем координатную форму записи, см. п. V.4.1).

Предложение 2.1. Функции $b[T \mid l^t]$ содержатся в $F(V_+)$, причем

$$\left\langle b[T \mid m^t], b[R \mid n^t]\right\rangle =$$
$$= \det\left((1 - T\overline{R})^{-1/2}\right) \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} m & \bar{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{R}(1-T\overline{R})^{-1} & (1-\overline{R}T)^{-1} \\ (1-T\overline{R})^{-1} & T(1-\overline{R}T)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^t \\ \bar{n}^t\end{pmatrix}\right\}. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Пусть $V_+ = \ell_2$. Рассмотрим сначала случай, когда матрицы T, R и векторы m, n финитны. Тогда проверка формулы (2.2) сводится к вычислению гауссова интеграла, что мы умеем делать (см. формулу (V.4.9)). Далее, заметим, что числовая функция $\Delta(T, R, m, n)$, стоящая в правой части (2.2), непрерывна относительно естественной топологии в ℓ_2 и топологии пространства операторов Гильберта—Шмидта на множестве матриц. Пусть теперь T_j — последовательность финитных матриц, сходящихся к T, а m_j — последовательность финитных векторов, сходящаяся к m. Тогда из соображений непрерывности легко выводится, что последовательность $q_j = b[T_j \mid m_j^t]$ фундаментальна в $F(V_+)$. Действительно,

$$\|q_i - q_j\|^2 = \Delta(T_i, T_i, m_i, m_i) + \Delta(T_j, T_j, m_j, m_j) - 2\,\mathrm{Re}\,\Delta(T_i, T_j, m_i, m_j).$$

В силу непрерывности Δ это выражение стремится к 0 при $i, j \to \infty$.

Итак, последовательность q_j сходится. Пусть q — ее предел. В силу воспроизводящего свойства (1.5) последовательность $q_j(z) = b[T_j \mid m_j^t](z) = \langle q_j, \varphi_z\rangle$ сходится поточечно к $q(z)$, т. е. $q(z) = b[T \mid m^t](z)$, и, тем самым, $b[T \mid m] \in F(V_+)$.

Равенство (2.2) теперь вытекает из соображений непрерывности. Предложение доказано. ■

Пусть матрица $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям 1—4 из п. 2.1, тогда (см. п. 1.4) определим оператор

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M\end{bmatrix} f(z) = \int K(z, \bar{u}) f(u)\, d\mu(u) := \langle f, k^z\rangle, \qquad (2.3)$$

где

$$K(z, \bar{u}) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \bar{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t\end{pmatrix}\right\}. \qquad (2.4)$$

Предложение 2.2. Оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M\end{bmatrix}$ корректно определен на векторах вида $b[T \mid l^t]$, при этом

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M\end{bmatrix} b[T \mid l^t] = \det\left((1-MT)^{-1/2}\right) b\left[K + LT(1-MT)^{-1}L^t \,\middle|\, L(1-TM)^{-1} l^t\right]. \quad (2.5)$$

Доказательство. Вычисление (2.5) сводится к формуле (2.2) (см. также предложение V.4.6). ■

Обозначим через $F_0(V_+)$ пространство финитных линейных комбинаций векторов вида $b[T \mid l^t]$.

Как показывает предложение 2.2, оператор $B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M\end{bmatrix}$ является корректно определенным оператором $F_0(V_+) \to F_0(W_+)$.

2.3. Представление Вейля. Поставим в соответствие каждому $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sp})$ пространство $F(V_+)$, а каждому морфизму $P : V \to W$ — линейный оператор $\mathrm{we}(P) = B[S]$, где S — преобразование Потапова—Гинзбурга линейного отношения P.

Теорема 2.3.

а) Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$, а $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C\end{pmatrix}$ — их преобразования Потапова. Тогда для любой функции $f \in F_0(V_+)$ выполнено

$$\mathrm{we}(Q)\,\mathrm{we}(P) f = \det\left((1 - CK)^{-1/2}\right) \mathrm{we}(QP) f. \qquad (2.6)$$

б) $P \mapsto \mathrm{we}(P)$ является $*$-представлением категории $\overline{\mathbf{Sp}}$.

в) Пусть $P \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$ является графиком оператора $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$ в V. Тогда оператор

$$\left[\det(\Phi^*\Phi)\right]^{-1/4} \mathrm{we}(P) \qquad (2.7)$$

является унитарным.

Доказательство. Понятно, что для любой $f = b[T \mid l^t]$ обе части равенства (2.6) вычисляются явно. Поэтому их можно вычислить и сверить ответы, которые, конечно, совпадают. Мы проведем несколько иное рассуждение в чуть большей общности в § 4.

Утверждение б) достаточно очевидно.

В случае $P \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$ мы имеем $P^* = P^{-1}$, а потому (см. п. 1.8.3) оператор $\mathrm{we}(P)$ унитарен с точностью до умножения на константу. Для вычисления скалярного множителя в (2.7) достаточно вычислить норму гауссовского вектора $\mathrm{we}(P) \cdot 1$, что мы оставляем читателю в качестве упражнения (см. также [Березин (1965)]). ■

2.4. Замечания.

Задача. Рассмотрим в группе $\mathrm{Aut}(V)$ подгруппу G, состоящую из всех матриц вида $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$, где оператор $\Phi - 1$ является ядерным. Докажите, что формула

$$\widetilde{\mathrm{we}}(g) = \pm \det(\Phi)^{-1/2}\, \mathrm{we}(g)$$

задает двузначное унитарное представление группы G, в частности,

$$\widetilde{\mathrm{we}}(g_1)\, \widetilde{\mathrm{we}}(g_2) = \pm\, \widetilde{\mathrm{we}}(g_1 g_2).$$

Замечу, что в $\mathrm{Aut}(V)$ существуют и другие подгруппы, на которых представление Вейля линеаризуется (см. §§ IX.1—IX.2).

2.5. Литературные замечания к главам V–VI. Бозонное пространство Фока действительно введено В. А. Фоком ([Fock (1932)], [Fock (1934)]). Используемая нами функциональная модель предложена Баргманом ([Bargmann (1961)], [Bargmann (1962)]), Березиным ([Березин (1961)], [Березин (1965)]) и И. Сигалом. С точки зрения комплексного анализа пространство Фока — довольно обычный пример гильбертова пространства голоморфных функций, речь идет о стандартной технике, связанной с керн-функцией Бергмана (S. Bergman), см. например, [Шабат (1976)], § 18, или [Hua (1958)].

Вопрос о том, когда было обнаружено «представление Вейля», не лишен забавности. Общепринято мнение (десятки раз повторенное в различных статьях и книгах), что «представление Вейля» было в конечномерном случае построено И. Сигалом ([Segal I. E (1959)]), а в бесконечномерном случае — Д. Шейлом ([Shale (1962)]). Странно, однако, что Березин ([Березин (1965)], [Березин (1969)]) утверждал, что конструкция *в бесконечномерном случае* содержится в книге [Friedrichs (1953)] (которая, кстати, часто цитируется в связи с каноническими коммутационными соотношениями). Книга Фридрихса написана не очень прозрачно, и я видел несколько человек, которые безуспешно пытались найти в ней какие-нибудь следы «представления Вейля». Мне, кстати, однажды удалось это сделать, но повторная попытка, сделанная через несколько лет, успеха не имела. Потом Лундбергу (Lundberg) и мне удалось все же найти это рассуждение, и оно сводится примерно к следующему. Матрица $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ раскладывается в произведение вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и дальше строится оператор we(·) для каждого сомножителя; на нашем языке это значит

$$\mathrm{we}\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} = \lambda B\begin{bmatrix} \overline{\Psi}\Phi^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B\begin{bmatrix} 0 & \Phi \\ \Phi^t & 0 \end{bmatrix} B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\Phi^{-1}\Psi \end{bmatrix}.$$

К сожалению, первый и последний сомножители в этом произведении — очень плохие неограниченные операторы, и мне кажется сомнительным, что Фридрихс мог заделать эту зияющую дыру[1]. Однако даже сама постановка вопроса об автоморфизмах канонических коммутационных соотношений в бесконечномерном случае у Фридрихса предполагает понимание того, что «представление Вейля» для групп $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ существует. Первый внятный текст на эту тему был действительно написан И. Сигалом.

Аккуратные тексты о бесконечномерном случае были написаны независимо Шейлом ([Shale (1962)]) и Березиным ([Березин (1961)], [Березин (1965)]). В работе Шейла содержится доказательство теоремы существования, у Березина же была явная и очень удобная конструкция, на которую тогда никто, кажется, не обратил внимания (книга [Березин (1965)] написана четко, но очень сыро), и в последующие 15–20 лет результаты книги [Березин (1965)] постепенно переоткрывались. Что касается А. Вейля, то его работа [Weil (1964)] никакого отношения к открытию «представления Вейля» группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ не имеет, в ней конструкция обобщается на конечные и локальные поля.

В начале 80-х годов в неопубликованной работе Г. И. Ольшанского появился вопрос о полугруппе ВО ограниченных операторов с ядрами вида

$$K(z,\overline{u}) = \exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} z & \overline{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \overline{u}\end{pmatrix}\right\}.$$

Достаточные условия ограниченности таких операторов (а именно, условия 1–4 из п. 2.1) получаются легко, см. п. V.4.1.

[1] Вообще-то Березин четко различал доказательства и правдоподобные рассуждения, и я не уверен, что источником информации для Березина была именно книга Фридрихса. На одном из стендов механико-математического факультета Московского Университета им. Ломоносова долгое время висела любительская фотография конца 50-х годов с подписью «После лекции профессора Фридрихса». Среди лиц на фотографии — молодой Березин. Кажется правдоподобным, что на фотографии изображен момент, который (с точки зрения специалиста по бесконечномерным группам) является «историческим».

Ольшанский доказал, что упомянутые условия достаточны в $F(\mathbb{C}^n)$ (независимо вопрос об ограниченности этих операторов изучался в [R. Howe (1988)] в вещественной модели) и предположил, что они достаточны и в бесконечномерном случае (контрпример см. в п. 3.1). Вопрос о полугруппе ВО несколько лет обсуждался на семинаре А. А. Кириллова. Осенью 1987 г. Ольшанский, Назаров и я обсудили несколько различных доказательств теоремы ограниченности, которые никак не доводились до полной четкости, и один из этих путей доказательства оказался удачным. Тогда же прояснилась и алгебраическая структура полугруппы ВО (см. [Nazarov, Neretin, Olshanskii (1989)], [Неретин (1990)]). Позднее эта алгебраическая структура в конечномерном случае была переоткрыта Л. Хёрмандером [Hörmander (1994)].

§ 3. Геометрия симметрических пространств Sp / U и теоремы ограниченности операторов $B[S]$

3.1. Формулировка теорем. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям п. 2.1.

Теорема 3.1. Если операторы K и M — ядерные, то $B[S]$ ограничен. При этом если $B[S]$ самосопряжен, то $\|B(S)\| \leqslant \det(1-|M|)^{-1/2}$.

Теорема 3.2. Если $\|S\| < 1$, то оператор $B[S]$ ограничен.

Контрпример. Пусть Λ — диагональная матрица с собственными числами λ_j, причем $0 \leqslant \lambda_j < 1$, $\sum \lambda_j^2 < \infty$. Пусть $S = \begin{pmatrix} \Lambda & 1-\Lambda \\ 1-\Lambda & \Lambda \end{pmatrix}$. Тогда

$$\|B[S]\| = \prod_{j=1}^{\infty} (1-\lambda_i)^{-1/2}.$$

В частности, в случае, когда $\sum \lambda_j = \infty$, оператор $B[S]$ неограничен.

Доказательства теорем 3.1, 3.2 занимают оставшуюся часть параграфа. Используемая для доказательства теоремы 3.2 теорема 3.9 интересна сама по себе.

3.2. Доказательство теоремы 3.1. Прежде всего, заметим, что так же, как и в п. V.4.7, все сводится к самосопряженному случаю. Итак, рассмотрим симметрический оператор $A = B\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} : F(\ell_2) \to F(\ell_2)$. Напомним, что симметричность равносильна условию $K = \overline{M}$, $L = L^*$. Ядро оператора A задается формулой

$$K(z,\overline{u}) = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij}z_iz_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} l_{ij}z_i\overline{u}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty} m_{ij}\overline{u}_i\overline{u}_j\right\}.$$

Рассмотрим последовательность операторов $A_N : F(\ell_2) \to F(\ell_2)$ с ядрами

$$K_N(z,\overline{u}) = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k_{ij}z_iz_j + \sum_{i,j=1}^{N} l_{ij}z_i\overline{u}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}\overline{u}_i\overline{u}_j\right\}.$$

Обозначим через F_N подпространство в $F(\ell_2)$, состоящее из функций, не зависящих от переменных $z_{N+1}, z_{N+2}, \ldots$. Ясно, что F_N отождествляется с $F(\mathbb{C}^N)$.

Обозначим через P_N проектор на F_N в F. Следующее высказывание очевидно, но оно заслуживает того, чтобы быть сформулированным.

Предложение 3.3. Пусть $Q: F(\ell_2) \to F(\ell_2)$ — оператор с ядром $L(z, \overline{u})$. Тогда ядро оператора $P_m Q P_n$ получается из $L(z, \overline{u})$ подстановкой $z_{m+1} = z_{m+2} = \ldots = 0$, $\overline{u}_{n+1} = \overline{u}_{n+2} = \ldots = 0$.

Итак,

$$A_N = P_N A P_N. \tag{3.1}$$

Обозначим через A_N^0 ограничение оператора A_N на F_N. Оператор A_N^0 переводит F_N в себя и имеет вид

$$A_N^0 = B\begin{bmatrix} (K)_N & (L)_N \\ (L^t)_N & (M)_N \end{bmatrix},$$

где матрицы $(K)_N$, $(L)_N$, $(M)_N$ — это верхние левые уголки матриц K, L, M размера $N \times N$. При этом $\|A_N\| = \|A_N^0\|$, что ясно из равенства (3.1).

Теперь в силу теоремы 4.14

$$\|A_N\| = \|A_N^0\| \leqslant \det\bigl(1 - |(M)_N|\bigr)^{-1/2} = \det\left(1 - \begin{pmatrix} |(M)_N| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1/2}.$$

Далее, так как $A_N = P_N A_{N+1} P_N$, то последовательность $\|A_N\|$ является монотонно возрастающей. С другой стороны, функция $\gamma(X) = \det(1 - |X|)^{-1/2}$ непрерывна в ядерной топологии, поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \|A_N\| \leqslant \lim_{N\to\infty} \det\bigl(1 - |(M)_N|\bigr) = \det\bigl(1 - |M|\bigr)^{-1/2}$$

Учитывая равенство (3.1) и критерий слабой сходимости (см. I.4.1), мы получаем, что A ограничен. Поэтому $\|A\| \leqslant \det\bigl(1 - |M|\bigr)^{-1/2}$, а $A_N \to A$ слабо.

3.3. Сложное расстояние. Для доказательства теоремы 3.2 нам придется обсудить геометрию матричных шаров.

Итак, пусть V — гильбертово пространство, V' — двойственное пространство. Обозначим через $\mathscr{K}(V)$ множество симметрических операторов Гильберта—Шмидта $V' \to V$ с нормой < 1. Напомним, что каждой точке $T \in \mathscr{K}(V)$ мы ставили в соответствие подпространство в $V \oplus V'$ — график оператора T. Таким образом, $\mathscr{K}(V)$ отождествляется с множеством $\mathscr{L}(V) := \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(0, V \oplus V')$.

Напомним, что пространство $V \oplus V'$ снабжено двумя формами, симплектической и эрмитовой, причем подпространство $R \in \mathscr{L}(V)$ является лангранжевым относительно симплектической формы L, а эрмитова форма M на нем положительно определена.

Пусть $R_1, R_2 \in \mathscr{L}(V)$, а $T_1, T_2 \in \mathscr{K}(V)$ — их угловые операторы. Выберем в R_1 и R_2 по ортонормированному относительно формы $(-M(\cdot\,,\cdot))$ базису $e_1, e_2, \ldots$ и $f_1, f_2, \ldots$ и составим матрицу Σ с матричными элементами $s_{ij} = -M(e_i, f_j)$. При замене базисов e_i и f_j матрица Σ преобразуется в некоторую другую матрицу вида $U_1 \Sigma U_2$, где U_1 и U_2 унитарны. Таким образом, сингулярные числа матрицы Σ определяются лишь подпространствами R_1 и R_2 и не зависят от выбора базисов e_i, f_j (напомним, что *сингулярные числа* матрицы A — это, по определению, собственные числа матрицы $\sqrt{A^*A} = |A|$).

Вычислим явно матрицу Σ через угловые операторы T_1 и T_2. Прежде всего, заметим, что отображения

$$a_k : v \mapsto \bigl(T_k(1 - T_k^* T_k)^{-1/2} v,\ (1 - T_k^* T_k)^{-1/2} v\bigr)$$

из V' в R_k (где $k = 1, 2$) являются унитарными относительно формы $(-M(\cdot\,,\cdot))$. Далее,

$$\begin{aligned} -M\langle a_1 v, a_2 w\rangle &= -\bigl\langle T_1(E - T_1^*T_1)^{-1/2} v, T_2(E - T_2^*T_2)^{-1/2} w\bigr\rangle + \\ &\quad + \bigl\langle (E - T_1^*T_1)^{-1/2} v, (E - T_2^*T_2)^{-1/2} w\bigr\rangle = \\ &= \bigl\langle (E - T_2^*T_2)^{-1/2}(E - T_2^*T_1)(E - T_1^*T_1)^{-1/2} v, w\bigr\rangle. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Sigma = (E - T_2^*T_2)^{-1/2}(E - T_2^*T_1)(E - T_1^*T_1)^{-1/2} \tag{3.2}$$

Кстати, матрица $\Sigma^*\Sigma - E$ является ядерной, и потому мы с полным правом можем говорить о сингулярных числах матрицы Σ.

Замечание. Если мы точно так же определим матрицу Σ для двух подпространств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, то сингулярные числа матрицы Σ — это в точности числа $\cos\varphi_i$, где φ_1, $\varphi_2, \ldots$ — *углы* (в смысле Жордана) между подпространствами R_1 и R_2.

Обозначим через arch гиперболический арккосинус:

$$\operatorname{arch} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\bigr),$$

где $x \geqslant 1$. Напомним, что $y = \operatorname{arch} x$ равносильно $x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \operatorname{ch} y$.

Сложным расстоянием между R_1 и R_2 мы назовем упорядоченный набор чисел

$$\varphi_j = \operatorname{arch} \sigma_j, \tag{3.3}$$

где $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots$ — сингулярные числа матрицы Σ.

Лемма 3.4.

а) $\varphi_j \geqslant 0$.

б) Если $g \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V \oplus V')$, то $\varphi_j(gR_1, gR_2) = \varphi_j(R_1, R_2)$.

Доказательство. Второе высказывание очевидно. Что касается первого, то нужно доказать неравенство $\sigma_j \geqslant 1$. В силу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$-инвариантности и того, что $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$ действует на $\mathscr{L}(V) \simeq \mathscr{K}(V)$ транзитивно (доказательство транзитивности см. в п. IV.2.2), мы можем без ограничения общности считать, что $T_1 = 0$, тогда $\Sigma = (E - T_2^*T_2)^{-1/2} \geqslant E$, и утверждение становится очевидным. ∎

3.4. Риманова метрика. Введем в матричном шаре $\mathscr{K}(V)$ в случае $\dim V < \infty$ более привычные геометрические структуры. Прежде всего, ведем две римановых метрики

$$\begin{aligned} (ds_1)^2 &= \operatorname{tr}(dT^* dT), \\ (ds_2)^2 &= \operatorname{tr}\bigl\{(E - T^*T)^{-1/2} dT^* (E - TT^*)^{-1} dT (E - T^*T)^{-1/2}\bigr\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Замечание. Мы считаем, что

$$dT = \begin{pmatrix} dt_{11} & dt_{12} & \dots \\ dt_{21} & dt_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, первой метрике отвечает расстояние

$$\rho_1(T_1, T_2) = \left(\operatorname{tr}(T_1 - T_2)^*(T_1 - T_2)\right)^{1/2}.$$

Задача. Проверьте, что риманова метрика $(ds_2)^2$ является $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-инвариантной.

Теорема 3.5. Расстояние, соответствующее римановой метрике $(ds_2)^2$, задается формулой

$$\rho_2(T_1, T_2) = \frac{1}{4}\left(\sum \varphi_j^2\right)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Доказательство. См. [Klingen (1956)]. ∎

Лемма 3.6. Риманова метрика ds_2^2 мажорирует риманову метрику ds_1^2.

Следствие 3.7.

$$\rho_1(T_1, T_2) \leqslant \rho_2(T_1, T_2). \tag{3.6}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ — диагональная матрица, причем $\lambda_i < 1$ (потому что обе метрики инвариантны относительно преобразований вида $T \mapsto UTU^t$, где U — унитарная матрица, а любая матрица T этими преобразованиями приводится к диагональному виду). Тогда в этой точке

$$(ds_2)^2 = \sum \frac{dt_{ij} d\bar{t}_{ij}}{(1-\lambda_i^2)(1-\lambda_j^2)} \geqslant \sum dt_{ij}\, d\bar{t}_{ij} = (ds_1)^2.$$

∎

Пусть теперь V бесконечномерно. Очевидно, что метрика ρ_1 корректно определена на $\mathscr{X}(V)$. Чуть менее очевидно, что на $\mathscr{X}(V)$ определена метрика ρ_2, причем функция $\rho_2(T_1, T_2)$ непрерывна относительно гильберт-шмидтовской топологии. Далее, из соображений непрерывности неравенство (3.6) остается в силе и в бесконечномерном случае (кстати, из тех же соображений непрерывности для метрики ρ_2 выполнено неравенство треугольника).

3.5. Полнота шара.

Предложение 3.8. Шар $\mathscr{X}(V)$ полон относительно метрики ρ_2.

Доказательство. Заметим, что

$$\rho_2(0, S) = \left(\sum \operatorname{arch}^2\left(1 - |\mu_i|^2\right)^{-1}\right)^{1/2},$$

где μ_i — сингулярные числа матрицы S. Оставляя в $\sum \operatorname{arch}^2(\dots)$ лишь самое большое слагаемое, мы получаем, что

$$\rho_2(0, S) \geqslant \operatorname{arch}\left(1 - \|S\|^2\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

Пусть $T_1, T_2, \dots$ — последовательность, фундаментальная относительно метрики ρ_2. Тогда, в силу неравенства (3.6), она фундаментальна относительно метрики ρ_1. Пусть T — ее предел относительно метрики ρ_1. Последовательность T_j фундаментальна, а следовательно, и ограничена по метрике ρ_2. В силу неравенства (3.7) для некоторого ε выполнено $\|T_j\| \leqslant 1 - \varepsilon$ для всех j. Следовательно, $\|T\| \leqslant 1 - \varepsilon$, а значит, $T \in \mathscr{X}(V)$.

Пусть, далее, $g \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V \oplus V')$ переводит T в 0, пусть $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ — матрица этого оператора. Легко видеть, что отображение

$$g : S \to (\Phi S + \Psi)(\overline{\Psi} S + \overline{\Phi})^{-1} = (\Phi S + \Psi)\overline{\Phi}^{-1}(\overline{\Psi} S \overline{\Phi}^{-1} + 1)^{-1}$$

из $\mathscr{X}(V)$ в $\mathscr{X}(V)$ непрерывно относительно гильберт-шмидтовской топологии. Поэтому $gT_i \to 0$ по гильберт-шмидтовской норме. Но тогда $\rho_2(gT_i, 0) \to 0$ в силу непрерывности функции ρ_2 относительно гильберт-шмидтовской топологии. Далее, в силу инвариантности метрики ρ_2 последовательность $g^{-1}(gT_i) = T_i$ сходится в смысле метрики ρ_2 к $g^{-1}(0) = T$, что и требовалось доказать. ∎

3.6. Теорема о сжатии.

Теорема 3.9. Пусть $r \in \mathrm{Mor}(V, W)$, а $P_1, P_2 \in \mathscr{L}(V)$. Тогда для всех j выполнено

$$\varphi_j(rP_1, rP_2) \leqslant \varphi_j(P_1, P_2).$$

Следствие 3.10. $\rho_2(rP_1, rP_2) \leqslant \rho_2(P_1, P_2)$.

Доказательство. Пусть $A : H_1 \to H_2$ — некоторый оператор, а $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$ — его сингулярные числа. Тогда

$$\lambda_j = \max_{\substack{L \subset H_1 \\ \dim L = j}} \ \min_{\substack{x \in L; \\ \|x\| = 1}} \ \max_{\substack{y \in H_2; \\ \|y\| = 1}} |\langle Ax, y\rangle|,$$

где L пробегает все j-мерные подпространства в H_1. Пусть $P_1, P_2 \in \mathscr{L}(V)$. Пусть σ_j — те же, что и выше (см. п. 3.3). Тогда

$$\sigma_j = \max_{\substack{L \subset P_2 \\ \dim L = j}} \ \min_{\substack{x \in L \\ M(x,x) = -1}} \ \max_{\substack{y \in P_1 \\ M(y,y) = -1}} |-M(x, y)| =$$

$$= \max_{\substack{L \subset P_2 \\ \dim L = j}} \ \min_{\substack{x \in L \\ x \neq 0}} \ \max_{\substack{y \in P_1 \\ y \neq 0}} \left| \frac{-M(x, y)}{\sqrt{M(x,x) M(y,y)}} \right|.$$

Нам нужно доказать, что эта величина уменьшается при действии $r \in \mathrm{Mor}(V, W)$. Учитывая, что $\sigma_j \geqslant 1$ мы можем ограничиться лишь парами x, y такими, что

$$\sigma(x, y) = \left| \frac{-M(x, y)}{\sqrt{M(x,x) M(y,y)}} \right| > 1, \tag{3.8}$$

что возможно лишь в случае, когда форма M знаконеопределена на плоскости, натянутой на векторы $x \in P_2$, $y \in P_1$. Теперь теорема следует из следующей леммы.

Лемма 3.11. Пусть $(x, x'), (y, y') \in r$, причем форма M_V знаконеопределена на плоскости Φ, натянутой на (x, y). Тогда

$$\left|\frac{-M_V(x,y)}{\sqrt{M_V(x,x)M_V(y,y)}}\right| \geqslant \left|\frac{-M_W(x',y')}{\sqrt{M_W(x',x')M_W(y',y')}}\right|$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что M_W знаконеопределена на плоскости Φ', натянутой на x', y'. Линейное отношение r, ограниченное на Φ, является графиком линейного оператора $A : \Phi \to \Phi'$, причем для любого $\varphi \in \Phi$ выполнено $-M_W(A\varphi, A\varphi) \geqslant -M_W(\varphi, \varphi)$.

Теперь мы можем отождествить пространства Φ и Φ' с формами $-M_V$ и $-M_W$ с пространством $\mathbb{C}^2$, снабженным эрмитовой формой

$$\big\langle (z_1, z_2), (z_1', z_2') \big\rangle = z_1\bar{z}_1' - z_2\bar{z}_2'.$$

Далее, рассмотрим в проективном пространстве $\mathbb{C}P^1$ (т.е. в пространстве прямых в $\mathbb{C}^2$ проходящих через 0) область D, состоящую из прямых, на которых форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ положительно определена. Такие прямые l_λ задаются уравнениями вида $z_2 = \lambda z_1$, где $|\lambda| < 1$, т.е. область D отождествляется с единичным кругом. Оператор A индуцирует дробно-линейное отображение вида

$$\lambda \mapsto \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \tag{3.9}$$

круга D в себя. Далее, выражение $\sigma(x, y)$, задаваемое формулой (3.8), зависит не от векторов x и y, а только от содержащих их прямых. Тем самым, σ определяет функцию на D

$$\sigma(\lambda, \mu) = \frac{|1 - \lambda\mu|}{\sqrt{\big(1 - |\lambda|^2\big)\big(1 - |\mu|^2\big)}},$$

а выражение $\rho(\lambda, \mu) := \operatorname{arch} \sigma(\lambda, \mu)$ — это не что иное, как $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-инвариантная метрика Пуанкаре на D.

Мы хотим доказать, что отображение (3.9) не увеличивает расстояния ρ. Из соображений непрерывности мы можем обойтись отображениями, переводящими круг $|\lambda| < 1$ в некоторый круг вида $|\lambda| < 1-\varepsilon$. Любое такое отображение представимо в виде $g_1 h g_2$, где $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, а h — отображение вида $\lambda \to \alpha\lambda$, где $0 < \alpha < 1$.

Задача. Докажите это.

Указание. См. п. V.1.7.A или [Ольшанский (1981)].

Элементы g_1 и g_2 сохраняют метрику ρ. Отображение $\lambda \mapsto \alpha\lambda$, как легко видеть, сжимает риманову метрику $\frac{d\lambda^2}{1-|\lambda|^2}$, соответствующую расстоянию ρ, а значит, сжимает и саму метрику ρ. Лемма доказана. ■

3.7. Доказательство теоремы 3.2. Итак, пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$, $\|S\| < 1$. Как и в п. V.4.9, мы сводим задачу к симметричному случаю. Теперь (см. п. V.4.10) нам достаточно доказать, что обобщенно дробно-линейное (см. § 5.2) отображение $\tau[S] : \mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(V)$ имеет неподвижную точку. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда

$$\tau\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} K & \frac{1}{1-\varepsilon}L \\ \frac{1}{1-\varepsilon}L^t & \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}M \end{pmatrix} \tau\begin{pmatrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Первый сомножитель в правой части (3.10) не увеличивает расстояние. Второй сомножитель имеет вид

$$\tau\begin{pmatrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{pmatrix} : T \mapsto (1-\varepsilon)^2 T,$$

и нам осталось доказать следующую лемму.

Лемма 3.12. Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда отображение $T \mapsto \alpha T$ из $\mathscr{X}(V)$ в $\mathscr{X}(V)$ является сжимающим в метрике ρ_2, более того,

$$\rho_2(\alpha T_1, \alpha T_2) \leqslant \alpha \rho_2(T_1, T_2).$$

Доказательство. Из соображений непрерывности нам достаточно доказать это утверждение в случае, когда матрицы T_1 и T_2 финитны. Поэтому нам достаточно доказать утверждение для случая $\dim V < \infty$, а в этом случае мы можем провести проверку на уровне римановых метрик.

Итак, пусть $T \in \mathscr{X}(V)$, а ΔT — касательный вектор в точке T. Квадрат длины ΔT равен

$$l_1^2 = \operatorname{tr}\big\{(E - T^*T)^{-1/2}(\Delta T)^*(1 - TT^*)^{-1}(\Delta T)(E - T^*T)^{-1/2}\big\}.$$

Квадрат длины вектора ΔT, перенесенного с помощью отображения $T \to \alpha T$, равен

$$l_2^2 = \operatorname{tr}\Big\{\big(E - \alpha^2 T^*T\big)^{-1/2}(\alpha\Delta T)^*\big(E - \alpha^2 TT^*\big)^{-1}(\alpha\Delta T)\big(E - \alpha^2 T^*T\big)^{-1/2}\Big\}.$$

Выражения l_1^2 и l_2^2 остаются инвариантными при преобразованиях вида $T \mapsto UTU^t$, где U — унитарная матрица. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что матрица T диагональна. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$l_1^2 = \sum \frac{|\Delta t_{ij}|^2}{(1 - \lambda_i^2)(1 - \lambda_j^2)},$$

$$l_2^2 = \alpha^2 \sum \frac{|\Delta t_{ij}|^2}{(1 - \alpha^2\lambda_i^2)(1 - \alpha^2\lambda_j^2)},$$

и теперь неравенство $l_2^2 \leqslant \alpha^2 l_1^2$ очевидно. ■

3.8. Обсуждение контрпримера из п. 3.1. Мы будем кратки и предоставим детали читателю. Наш оператор $B[S]$ разлагается в тензорное произведение операторов вида $A_j = B\begin{bmatrix} \lambda_j & 1-\lambda_j \\ 1-\lambda_j & \lambda_j \end{bmatrix}$. Поэтому $\|B[S]\| = \prod_{j=1}^{\infty} \|A_j\|$. Покажем, что

$$\|A_j\| = (1-\lambda_j)^{-1/2}.$$

Преобразование

$$z \mapsto \lambda_j + (1-\lambda_j)(1-\lambda_j z)^{-1}(1-\lambda_j)$$

единичного круга $D : |z| < 1$ в себя имеет неподвижную точку $z = 1$, которая не лежит в D. Формула (V.4.20) формально дает $\|A_j\| = (1-\lambda_j)^{-1/2}$, однако ее применение некорректно.

Пусть, далее, $x \in \mathbb{R}$ и

$$\theta_x(z) = b[1 \mid x] = \exp\left(\frac{z^2}{2} + zx\right) \notin F(\mathbb{C}^1).$$

Формальное вычисление с помощью (V.4.10) дает

$$A_j\theta_x = (1-\lambda_j)^{-1/2} e^{-(1-\lambda_j)x^2}\theta_x.$$

Далее делаем интегральное преобразование из $F(\mathbb{C}^1)$ в пространство L^2 на $\mathbb{R}$ по гауссовой мере с плотностью $e^{-x^2/2}$:

$$I : f \mapsto \int f(z) \exp\left(-\frac{\bar z^2}{2} + x\bar z\right) d\mu(z).$$

Этот оператор является унитарным, а IA_jI^{-1} — это оператор умножения на функцию $(1-\lambda_j)^{-1/2}e^{-(1-\lambda_j)x^2}$, и теперь с его нормой все ясно (см. также п. 1.9.D).

3.9. Замечания. Геометрия.

Задача. Пусть $\dim V < \infty$. Пусть $T_1, T_2, S_1, S_2 \in \mathscr{X}(V)$, причем

$$\varphi_j(T_1, T_2) = \varphi_j(S_1, S_2)$$

для всех j. Покажите, что существует $g \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V)$ такое, что

$$\tau(g)T_1 = S_1, \quad \tau(g)T_2 = S_2.$$

Задача. Покажите, что

$$\varphi_j(T_1, T_2) = \varphi_j(T_2, T_1).$$

Задача*. Докажите, что формула

$$\rho_p(T_1, T_2) = \sqrt[p]{\sum \varphi_j(T_1, T_2)^p} \tag{3.11}$$

задает метрику в $\mathscr{X}(V)$ для всех $p \geqslant 1$.

Теорема 3.13. Пусть $p(s_1, \ldots, s_n)$ — норма в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно перестановок координат и изменения направлений осей ($n = \frac{1}{2}\dim V$). Тогда формула

$$\rho(T_1, T_2) = p\big(\varphi_1(T_1, T_2), \ldots, \varphi_n(T_1, T_n)\big)$$

задает метрику в $\mathscr{X}(V)$.

Задача. Пусть $\dim V < \infty$, $T \in \mathscr{X}(V)$, а dT — касательный вектор в точке T. Пусть группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V)$ действует на парах (T, dT). Покажите, что единственным инвариантом пары (T, dT) является набор собственных чисел матрицы

$$(1 - T^*T)^{-1/2} dT^* (1 - TT^*)^{-1} dT (1 - T^*T)^{-1/2}.$$

Задача.

а) Покажите, что кривые вида

$$\begin{pmatrix} \mathrm{arth}(\lambda_1 t) & & \\ & \mathrm{arth}(\lambda_2 t) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \in Z(V) \tag{3.12}$$

(где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$) являются геодезическими относительно римановой метрики $(ds_2)^2$ (см. [Hua Loo Keng (1958)]).

б) Докажите, что для любых трех последовательных точек A_1, A_2, A_3 на кривой (3.12) выполнено

$$\varphi_j(A_1, A_2) + \varphi_j(A_2, A_3) = \varphi_j(A_1, A_3)$$

для всех j.

Целое расстояние в $\mathscr{X}(V)$ определяется формулой

$$n(T_1, T_2) = rk(T_1 - T_2).$$

Задача.

а) Покажите, что $n(\cdot, \cdot)$ действительно является метрикой.

б) Покажите, что $n(T_1, T_2)$ совпадает с числом ненулевых элементов в наборе $\varphi_j(T_1, T_2)$.

Сформулируем теорему, обратную к теореме о сжатии.

Теорема 3.14. Пусть $f : \mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(W)$ — голоморфное отображение такое, что

а) для всех T_1, T_2 выполнено

$$n(f(T_1), f(T_2)) \leqslant n(T_1, T_2);$$

б) существуют точки $T_1, T_2 \in \mathscr{X}(V)$ такие, что $n(T_1, T_2) > 1$.

Тогда f — обобщенно дробно-линейное отображение.

Задача.** Даны три точки T_1, T_2, T_3. Каким неравенствам удовлетворяют наборы чисел $\varphi_j(T_1, T_2), \varphi_j(T_2, T_3), \varphi_j(T_1, T_3)$? (решение неизвестно; вопрос близок к классической гипотезе Хорна (Horn) о спектре суммы двух эрмитовых матриц, недавно доказанной Клячко, см. [Klyachko (1996)]; по-видимому, ответ должен даваться на языке последовательностей Литтлвуда—Ричардсона, см. [Macdonald (1979)]).

§ 4. *Аффинная симплектическая категория*

4.1. Аффинные отношения. Пусть H_1 — линейное пространство. *Аффинным подпространством* $L \subset H$ мы назовем множество всех векторов в H вида $a+l$, где a — фиксированный вектор, а l пробегает некоторое линейное подпространство $R \subset H$. Подпространство R мы будем называть *направляющим подпространством* аффинного подпространства L.

Пусть V, W — линейные пространства. *Аффинным отношением* $V \rightrightarrows W$ мы назовем аффинное подпространство в $V \oplus W$. Если $P : V \rightrightarrows W$, $Q : W \rightrightarrows Y$ — аффинные отношения, то определено их произведение — аффинное отношение $QP : V \rightrightarrows Y$, а именно: $(v, y) \in QP$, если существует $w \in W$ такой, что $(v, w) \in P$, $(w, y) \in Q$.

4.2. Аффинная симплектическая категория. Объекты категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ такие же, как у $\overline{\mathbf{Sp}}$. Морфизмы категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ из V в W — это аффинные подпространства в пространстве $V \oplus W$, направляющие подпространства которых являются морфизмами категории $\overline{\mathbf{Sp}}$. Морфизмы умножаются как аффинные отношения.

Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$ а P° — его направляющее подпространство. Проекция P° на $W_- \oplus V_+$ вдоль $W_+ \oplus V_-$ есть все $W_- \oplus V_+$, поэтому P является графиком неоднородного линейного отображения $W_- \oplus V_+ \to W_+ \oplus V_-$

$$\begin{cases} w_+ = Kw_- + Lv_+ + \varkappa^t, \\ v_- = L^t w_- + Mv_+ + \lambda^t, \end{cases}$$

где $\varkappa^t \in W_+$, $\lambda^t \in V_-$, а $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ — преобразование Потапова для P°. Итак, каждому морфизму P мы можем поставить в соответствие матрицу

$$(S \mid l^t)(P) = \left(\begin{array}{cc|c} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{array}\right),$$

которую мы по-прежнему будем называть *преобразованием Потапова* морфизма P.

Предложение 4.1. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(W, Y)$, а $\left(\begin{array}{cc|c} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{cc|c} A & B & \alpha^t \\ B^t & C & \sigma^t \end{array}\right)$ — их преобразования Потапова. Тогда преобразование Потапова произведения QP равно

$$\left(S(Q^\circ P^\circ) \,\middle|\, \begin{array}{c} B(1-KC)^{-1}(K\sigma^t + \varkappa^t) + \alpha^t \\ L^t(1-CK)^{-1}(C\varkappa^t + \sigma^t) + \lambda^t \end{array}\right), \tag{4.1}$$

где $S(Q^\circ P^\circ)$ — преобразование Потапова линейного отношения $Q^\circ P^\circ$.

Доказательство. Итак,

$$\begin{cases} w_+ = Kw_- + Lv_+ + \varkappa^t, \\ v_- = L^t w_- + Mv_+ + \lambda^t \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_+ = Ay_- + Bw_+ + \alpha^t, \\ w_- = B^t y_- + Cw_+ + \sigma^t. \end{cases}$$

Исключая переменные w_+ и w_- из первого уравнения первой системы и второго уравнения второй системы, приходим к

$$w_+ = (1-KC)^{-1}\big(KB^t y_- + Lv_+ + K\sigma^t + \varkappa^t\big),$$
$$w_- = (1-CK)^{-1}\big(B^t y_- + CLv_+ + C\varkappa^t + \sigma^t\big);$$

подставляя их в два оставшихся уравнения, получаем (4.1). ■

Определим инволюцию в категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ по следующему правилу: если

$$(S \mid l^t)(P) = \left(\begin{array}{cc|c} K & L & \varkappa^t \\ L^t & M & \lambda^t \end{array}\right),$$

то

$$(S \mid l^t)(P^*) = \left(\begin{array}{cc|c} M^* & \overline{L} & \overline{\lambda} \\ L^* & K^* & \overline{\varkappa}^t \end{array}\right).$$

4.3. Группа $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$. Легко понять, что $P \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$ содержится в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$, если его направляющее подпространство P° содержится в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$. Таким образом, группа $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$ состоит из преобразований вида

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_+ \\ h_- \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$.

Группа $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$, в частности, содержит группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$, а также группу параллельных переносов в V.

Подгруппа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V) \subset \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V)$ (см. п. II.8.6) состоит из преобразований вида (4.2), удовлетворяющих условию $h_+ = \overline{h}_-$. Эта группа и ее «представление Вейля» — хорошо известные объекты (см. [Березин (1965)]).

4.4. Представление Вейля категории $\overline{\mathbf{Spa}}$. Каждому объекту V категории $\overline{\mathbf{Spa}}$ мы поставим в соответствие пространство $F(V_+)$. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$, а $\left[\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right]$ — его преобразование Потапова. Поставим элементу P в соответствие оператор

$$\widetilde{\mathrm{we}}(P) = B\left[\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right] : F_0(V_+) \to F_0(W_+)$$

с ядром

$$K(z, \overline{u}) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}(z \;\; \overline{u}) \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix} + (l \;\; m) \begin{pmatrix} z^t \\ \overline{u}^t \end{pmatrix}\right\} \tag{4.3}$$

(определение пространства $F_0(H)$ см. в п. 2.2).

Теорема 4.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(V, W)$, а $\left(\begin{array}{cc|c} K & L & l \\ L^t & M & m \end{array}\right)$ — его преобразование Потапова. Тогда

$$B\left[\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right] b[A \mid \alpha] =$$
$$= c(M, A, m, \alpha)\, b\Big[K + LA(1-MA)^{-1}L^t \;\Big|\; l^t + L(1-AM)^{-1}(\alpha^t + Am^t)\Big],$$

где

$$c(M, A, m, \alpha) = \det\big((1-MA)^{-1/2}\big) \exp\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha \;\; m) \begin{pmatrix} -A & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^t \\ m^t \end{pmatrix}\right\}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Напомним, что оператор восстанавливается по ядру с помощью формулы (1.7). Теперь все сводится к предложению 2.1. ■

Итак, операторы $\widetilde{\mathrm{we}}(P)$ корректно определены как операторы $F_0(V_+) \to F_0(W_+)$.

Теорема 4.3.

а) $\widetilde{\mathrm{we}}(\cdot)$ является представлением категории $\overline{\mathbf{Spa}}$. Более точно, пусть $P : V \to W$, $Q : W \to Y$ — морфизмы категории $\overline{\mathbf{Spa}}$, а

$$\left(\begin{array}{cc|c} A & B & \alpha^t \\ B^t & C & \beta^t \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} K & L & l^t \\ L^t & M & m^t \end{array}\right)$$

— их преобразования Потапова. Тогда для любого $f \in F_0(V_+)$ выполнено

$$\widetilde{\mathrm{we}}(Q)\,\widetilde{\mathrm{we}}(P)f = c(M, A, m, \alpha)\,\widetilde{\mathrm{we}}(QP)f,$$

где $c(\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$ задается формулой (4.4).

б) $\widetilde{\mathrm{we}}$ является $*$-представлением, т.е. для любых $f \in F_0(V_+)$, $g \in F_0(W_+)$ выполнено

$$\big\langle \widetilde{\mathrm{we}}(P)f, g\big\rangle = \big\langle f, \widetilde{\mathrm{we}}(P^*)g\big\rangle.$$

Доказательство. Докажем а). Вычисление свертки ядер по формуле (1.9) с помощью предложения 2.1 даст именно такой ответ.

К сожалению, корректность подобного вычисления может вызвать сомнения. Перейдем к аккуратному доказательству. Нам нужно проверить равенство

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\varkappa^t\\ \lambda^t\end{matrix}\right]\left(B\left[\begin{matrix} A & B \\ B^t & C\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha^t\\ \beta^t\end{matrix}\right]b[T\,|\,\tau^t]\right) = \left(B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\varkappa^t\\ \lambda^t\end{matrix}\right]B\left[\begin{matrix} A & B \\ B^t & C\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha^t\\ \beta^t\end{matrix}\right]\right)b[T\,|\,\tau^t], \tag{4.5}$$

где под произведением операторов в правой части понимается оператор с формально вычисленным ядром.

Предположим, что мы вычислили левую и правую часть. Тогда должно получаться какое-то равенство вида

$$\det(\Phi^{-1/2})\exp(f)\,b[F\,|\,\varphi^t] = \det(\Pi^{-1/2})\exp(p)\,b[P\,|\,\pi^t]. \tag{4.6}$$

Конечно, равенства

$$\det(\Phi^{-1/2}) = \det(\Pi^{-1/2}),\quad f = p,\quad F = P,\quad \varphi^t = \pi^t$$

можно проверить прямым вычислением. Однако выписывание соответствующих формул заняло бы слишком много места, поэтому мы предпочтем обходной путь.

Проверим сначала равенство $(F\,|\,\varphi^t) = (P\,|\,\pi^t)$. Для этого заметим, что матрица $(T|\tau^t)$ является преобразованием Потапова некоторого морфизма $R \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Spa}}}(0, V)$. При этом

$$\mathrm{we}(R)\cdot 1 = b[T\,|\,\tau^t].$$

Далее, легко видеть, что $(F\,|\,\varphi^t)$ есть преобразование Потапова от $Q(PR)$, а $(P\,|\,\pi^t)$ — преобразование Потапова для $(QP)R$. Но равенство $Q(PR) = (QP)R$ очевидно.

Осталось проверить совпадение числовых множителей перед $b[\cdot\,|\,\cdot]$ в (4.6). Прежде всего, заметим, что если матрицы K, L, M, A, B, C, T и векторы $\varkappa, \lambda, \alpha, \beta, \tau$ финитны, то вопрос сводится к вопросу о смене порядка интегрирования в интеграле по конечномерному пространству в (V.4.15) (см. доказательство теоремы V.4.7). Перестановку порядка интегрирования можно провести при ограничении

$$\left\|\begin{matrix} K & L \\ L^t & M\end{matrix}\right\| < 1,\quad \left\|\begin{matrix} A & B \\ B^t & C\end{matrix}\right\| < 1,$$

а соображения непрерывности позволяют снять это ограничение.

Хотелось бы так же просто провести переход от финитных матриц и векторов к произвольным. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} h(K, L, M, A, B, C, T) &:= \det(\Phi^{-1/2}) = \\ &= \det\big(1 - M(A + BT(1-CT)^{-1})B^t\big)^{-1/2}\times \\ &\qquad\times \det(1 - CT)^{-1/2}, \\ g(K, L, M, A, B, C, T) &:= \det(\Pi^{-1/2}) = \\ &= \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(K, L, M, A, B, C, T, \varkappa, \lambda, \alpha, \beta, \tau) = \exp\Big\{\tfrac12\begin{pmatrix}\tau & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-T & 1\\ 1 & -C\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tau^t\\ \beta^t\end{pmatrix}\Big\}\times \\ \times\exp\Big\{\tfrac12\Big(\big(\alpha + (\tau + \beta T)(1-CT)^{-1}B^t\big)\quad \lambda\Big)\times \\ \times\begin{pmatrix}-(A + BT(1-CT)^{-1}B^t) & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}\times \\ \times\begin{pmatrix}B(1-TC)^{-1}(\tau^t + T\beta^t) + \alpha^t\\ \lambda^t\end{pmatrix}\Big\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$p(K, L, M, A, B, C, T, \varkappa, \lambda, \alpha, \beta, \tau) = \dots\,.$$

Было бы естественно ввести на векторах $\varkappa$, λ, α, β, τ обычную топологию гильбертова пространства, на матрицах K, L, M, A, B, C, T — топологию пространства операторов Гильберта—Шмидта, а на матрицах C, B — слабую топологию. К сожалению, функции $h(\dots)$, $g(\dots)$, $f(\dots)$, $p(\dots)$ тогда не будут непрерывными, и соображения, связанные с предельным переходом, тут требуют большей аккуратности.

Обозначим через P_n проектор на подпространство, натянутое на первые n базисных векторов. Несложно проверить, что

$$h\big(P_nKP_n, P_nLP_n, P_nMP_n, P_nAP_n, P_nBP_n, P_nCP_n\big) \to h(K, L, M, A, B, C), \tag{4.8}$$

а также аналогичные сходимости для функций g, f, p. Проверка основывается на следующей лемме.

Лемма 4.4. Пусть B — ограниченный оператор, а X — оператор Гильберта—Шмидта. Тогда

$$P_nBP_nXP_n \to BX,\quad P_nXP_nBP_n \to XB$$

в топологии пространства операторов Гильберта—Шмидта.

Доказательство. Запишем B и X как блочные матрицы размера $(\alpha+\beta+\infty)\times(\alpha+\beta+\infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} &BX - P_{\alpha+\beta}BP_{\alpha+\beta}XP_{\alpha+\beta} = \\ &= \begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23}\\ B_{31} & B_{32} & B_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ X_{21} & X_{22} & B_{23}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & 0\\ B_{21} & B_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & 0\\ X_{21} & X_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} B_{13}X_{31} & B_{13}X_{32} & B_{11}X_{13}+B_{12}X_{23}+B_{13}X_{33}\\ B_{23}X_{31} & B_{23}X_{22} & B_{21}X_{13}+B_{22}X_{23}+B_{23}X_{33}\\ B_{31}X_{11}+B_{32}X_{21}+B_{33}X_{31} & B_{31}X_{12}+B_{32}X_{22}+B_{33}X_{32} & B_{31}X_{13}+B_{32}X_{23}+B_{33}X_{33}\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Выберем α так, чтобы все блоки X, кроме X_{11}, были очень малы по гильберт-шмидтовской норме. После этого мы можем выбрать β так, чтобы B_{31} и B_{13} были очень малы по равномерной норме. Теперь разность (4.9) становится очень малой по гильберт-шмидтовской норме. Лемма доказана. ■

Следствие 4.5. Пусть B — ограниченный оператор, а Q_n, Q — операторы Гильберта—Шмидта, причем $Q_n \to Q$ по гильберт-шмидтовской норме. Тогда $P_nBP_nQ_nP_n \to BQ$ по гильберт-шмидтовской норме.

Доказательство.

$$BQ - P_nBP_nQ_nP_n = (BQ - P_nBP_nQP_n) + P_nBP_n(Q - Q_n)P_n,$$

и утверждение становится очевидным. ■

Теперь достаточно посмотреть на формулы (4.7), чтобы сходимости типа (4.8) стали очевидными. Теорема доказана. ■

Задача. Проверьте равенство

$$\det\left(\Phi^{-1/2}\right) = \det\left(\Pi^{-1/2}\right)$$

прямым вычислением.

4.5. Теорема ограниченности.

Теорема 4.6. Если $\|S\| < 1$, то оператор $B[S \mid l]$ ограничен.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Разложим наш оператор в произведение

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \varkappa^t \\ \lambda^t \end{matrix}\right] = s \cdot B\left[\begin{matrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ 0 \end{matrix}\right] B\left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] B\left[\begin{matrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ \mu^t \end{matrix}\right],$$

где $s \in \mathbb{C}$. При достаточно малых ε средний сомножитель ограничен (см. теорему 3.2), а потому все сводится к вопросу об ограниченности крайних сомножителей, т. е. к следующей лемме.

Лемма 4.7. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Тогда оператор

$$A = B\left[\begin{matrix} 0 & (1-\varepsilon)E \\ (1-\varepsilon)E & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha^t \\ \beta^t \end{matrix}\right]$$

ограничен.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что наш оператор действует в $F(\ell_2)$. Далее, без ограничения общности можно считать, что наш оператор — симметрический (см п. V.4.9), т. е. $\alpha = \overline{\beta}$. Разложим $F(\ell_2)$ в тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^{\infty} F(\mathbb{C}^1)$. Тогда (см. п. 1.9) наш оператор разлагается в тензорное произведение операторов $A = \bigotimes_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_j : F(\mathbb{C}^1) \to F(\mathbb{C}^1)$ имеет ядро

$$K_j(z_j, \overline{u}_j) = \exp\left\{(1-\varepsilon)z_j\overline{u}_j + \alpha_j z_j + \overline{\alpha}_j\overline{u}_j\right\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} A_j f(z_j) &= e^{\alpha_j z_j} \int \exp\left\{\left((1-\varepsilon)z_j + \alpha_j\right)\overline{u}_j\right\} f(u_j)\, d\mu(u_j) = \\ &= e^{\alpha_j z_j}\left\langle f, \varphi_{(1-\varepsilon)z_j + \overline{\alpha}_j}\right\rangle = \\ &= e^{\alpha_j z_j} f\left((1-\varepsilon)z_j + \alpha_j\right). \end{aligned}$$

Подстановка показывает, что функции

$$g_m(z_j) = (-\varepsilon z_j + \overline{\alpha}_j)^m \exp\left\{\tfrac{1}{\varepsilon}\alpha_j z_j\right\}$$

являются собственными для оператора A_j, а соответствующие собственные числа равны

$$\sigma_m = (1-\varepsilon)^m \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}|\alpha_j|^2\right).$$

Покажем, что система функции g_m полна. Рассмотрим унитарный оператор $U = T(-\alpha_j/\varepsilon)$, задаваемый формулой (1.11). Тогда $Ug_m = \gamma_m z^m$, где $\gamma_m \in \mathbb{C}^*$, а функции $1, z, z^2 \ldots$ образуют базис в $F(\mathbb{C}^1)$. Итак,

$$\|A_j\| = \max|\sigma_m| = \sigma_0 = \exp\left\{\tfrac{1}{\varepsilon}|\alpha_j|^2\right\}.$$

Поэтому

$$\|A\| = \prod_j \|A_j\| = \exp\left\{\sum \tfrac{1}{\varepsilon}|\alpha_j|^2\right\} < \infty.$$

■

4.6. Замечания. Коммутационные соотношения.

Факт. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V, W)$, а $P^\circ \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V, W)$ — его направляющее подпространство, причем P получается сдвигом P° на вектор $(w_+^0, v_-^0) \in W_+ \oplus V_-$. Пусть L_V, L_W — канонические кососимметричные билинейные формы в V, W. Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности ненулевой оператор $A : F(V_+) \to F(W_+)$ такой, что

$$\left(\hat{a}(w) + L_W(w, w_+^0)E\right)A = A\left(\hat{a}(v) + L_V(v, v_-^0)E\right), \tag{4.10}$$

и этот оператор совпадает с $\widetilde{\mathrm{we}}(P)$.

Ввиду того, что в обеих частях равенства (4.10) стоит произведение неограниченных операторов, это высказывание не является аккуратно сформулированным. Я, однако, воздерживаюсь от более точных формулировок.

§ 5. *Соответствие «группа Ли — алгебра Ли»*

Мы подробно обсудим группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$, а потом скажем несколько слов о группах $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}}$, $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}$ и $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}$. Мы в основном следуем книге [Березин (1965)], § 6.

5.1. Что такое алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$? Группа $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$, как мы видели, состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, таких, что Ψ — оператор Гильберта—Шмидта. Обычно говорят, что «алгебра Ли» $\mathfrak{g}$ этой группы состоит из матриц вида

$$Q = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где C — существенно самосопряженный оператор, а $A = A^t$ — оператор Гильберта—Шмидта. Мы уже объясняли (см. § I.2), что слова «алгебра Ли бесконечномерной группы» не надо понимать буквально. Ясно, например, что и сумма, и коммутатор матриц вида (5.1), вообще говоря, не определены, а если они даже и определены, они не обязаны содержаться в $\mathfrak{g}$ (т. е. если мы вычислим произведение, то блок C не обязан быть самосопряженным, а блок A — гильберт-шмидтовским). Наконец, как мы сейчас увидим, однопараметрические подгруппы в G не обязательно порождаются операторами из $\mathfrak{g}$.

Контрпример. Пусть a_j — некоторая последовательность чисел. Обозначим через $\operatorname{diag}(a_j)$ диагональную матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$. Пусть

$$L = i\begin{pmatrix} \operatorname{diag}(t_j) & \operatorname{diag}(s_j) \\ -\operatorname{diag}(s_j) & -\operatorname{diag}(t_j) \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $\exp(hL)$ равна

$$\begin{pmatrix} \operatorname{diag}\left(\cos\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h + i\frac{t_j}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h\right) & \operatorname{diag}\left(\frac{is_j\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\right) \\ \operatorname{diag}\left(\frac{-is_j\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\right) & \operatorname{diag}\left(\cos\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h - \frac{it_j}{\sqrt{t_j^2-s_j^2}}\sin\sqrt{t_j^2-s_j^2}\,h\right) \end{pmatrix}.$$

Если, например, $s_j = 1$, а $t_j = j+1$, то $\exp(hL) \in G$ хотя блоки матрицы L, лежащие на побочной диагонали, не являются операторами Гильберта—Шмидта. Если, например, $s_j = (j)^{1/4}$, а $t_j = j+1$, то блоки матрицы L, лежащие на побочной диагонали, вообще не являются ограниченными операторами, однако $\exp(hL) \in G$.

5.2. Однопараметрические группы в $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Sp}}(\cdot)$.

Предложение 5.1.

а) Пусть (неограниченный) оператор A в гильбертовом пространстве имеет вид $A = S + T$, где S — самосопряженный оператор, а T — ограниченный. Тогда существует единственное слабо непрерывное семейство $U(t) = \exp(itA)$ ограниченных операторов, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{i}\frac{dU}{dt}f = UAf, \quad U(0) = E, \tag{5.2}$$

для любого f из области определения оператора A.

б) $$U(t)U(s) = U(s+t). \tag{5.3}$$

в) $$A = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t) - 1),$$

причем области определения обеих частей совпадают.

г) Операторы $U(t)$ переводят область определения A в себя, причем для всех t выполнено

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t).$$

д) Семейство $U(t)$ сильно непрерывно.

Замечание. Предложение 5.1 вытекает также из общих теорем об однопараметрических полугруппах, см. [Reed, Simon 1975]), § X.8.

Доказательство. Сделаем замену $U(t) = V(t)\exp(itS)$ в дифференциальном уравнении (5.2). Тогда на $V(t)$ мы получаем уравнение

$$\frac{1}{i}\frac{dV(t)}{dt} = V(t)T(t), \quad V(0) = E, \tag{5.4}$$

где через $T(t)$ обозначен оператор

$$T(t) = \exp(itS)\,T\exp(-itS).$$

Как обычно делается при доказательстве теорем существования и единственности, сведем дифференциальное уравнение к интегральному. Условия (5.2) равносильны вольтерровскому уравнению

$$V(t) = E + i\int_0^t V(\tau)T(\tau)\,d\tau. \tag{5.6}$$

Существование и единственность решения вольтерровского уравнения устанавливается с помощью стандартного рассуждения (см. [Колмогоров, Фомин (1981)], [Riesz, Sz.-Nagy (1965)]). При этом функция $t \mapsto V(t)$ непрерывна относительно равномерной операторной топологии (действительно, величина $\|T(\tau)\|$ ограничена, поэтому $\|V(t)\|$ локально ограничена, а поэтому интеграл непрерывен). Функция $t \mapsto \exp(itS)$ слабо непрерывна. Поэтому и функция $U(t)$ слабо непрерывна.

Далее, заметим, что функция

$$U_s(t) = U(s)^{-1}U(t+s)$$

является решением задачи Коши (5.2), и в силу уже доказанной единственности решения этой задачи мы получаем $U(s)^{-1}U(t+s) = U(t)$.

Перейдем к утверждению в). Нужно доказать, что для любого вектора h выполнено

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}\big(V(t)h - h\big) = Th.$$

Если мы это сделаем, то, дифференцируя равенство

$$U(t)h = V(t)\exp(itS)$$

по t в нуле, мы сразу получим искомое утверждение.

Покажем сначала, что функция $t \mapsto T(t)$ является сильно непрерывной. Обозначим $\exp(itS)$ через $W(t)$. Пусть $t_j \to t$. Нам нужно убедиться, что следующее выражение стремится к нулю

$$\begin{aligned} \big\|T(t_j)h - T(t)h\big\|^2 &= \big\|W(t_j)TW(-t_j)h - W(t)TW(-t)h\big\|^2 = \\ &= \big\|TW(-t_j)h\big\|^2 + \big\|TW(-t)h\big\|^2 - \\ &\quad - 2\operatorname{Re}\big\langle TW(-t_j)h, W(t-t_j)TW(-t)h\big\rangle. \end{aligned} \tag{5.6a}$$

Функции $t \mapsto W(t)$ и $t \mapsto W(-t) = W(t)^*$ сильно непрерывны. Поэтому сильно непрерывны функции $s \mapsto TW(-s)$ и $s \mapsto W(t-s)TW(-t)$. Теперь мы без труда убеждаемся, что (5.6a) стремится к 0.

Итак, функция $t \mapsto T(t)$ сильно непрерывна. Но $V(t)$ непрерывна относительно равномерной топологии, поэтому $V(t)T(t)$ сильно непрерывна, и, глядя на равенство (5.6), мы видим, что функция $t \mapsto V(t)h$ дифференцируема.

Наконец, переходя к пределу при $s \to 0$ в тождестве

$$\frac{1}{s}U(t)\big(U(s)-E\big) = \frac{1}{s}\big(U(s)-E\big)U(t),$$

мы получаем утверждение г).

д) $U(t) = V(t)\exp(itC)$, но $V(t)$ непрерывна относительно равномерной топологии, а $\exp(itC)$ сильно непрерывна. ■

Замечание. Условия этого предложения могут быть ослаблены, и один раз этот ослабленный вариант нам пригодится. А именно, условие «S — самосопряженный оператор» может быть заменено на условие «S — генератор сильно непрерывной однопараметрической группы». Иными словами, требуется, чтобы существовала однопараметрическая группа $A(t)$ ограниченных операторов такая, что

1. $S = \frac{d}{dt}A(t)$; это равенство предполагает совпадение областей определения;
2. отображение $t \mapsto A(t)$ сильно непрерывно.

Доказательство при таком усилении формулировки остается в силе.

Пусть $\mathfrak{g}$ — тот же объект, что и в предыдущем пункте.

Теорема 5.2. Пусть $iH = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C}\end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. Тогда $\exp(itH)$ содержится в G и представляется в виде

$$\exp(itH) = \begin{pmatrix} 1+K_1(t) & L_1(t) \\ \overline{L_1(t)} & 1+\overline{K_1(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(-itC) & 0 \\ 0 & \exp(it\overline{C})\end{pmatrix} = \tag{5.7a}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(-itC) & 0 \\ 0 & \exp(it\overline{C})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+K_2(t) & L_2(t) \\ \overline{L_2(t)} & 1+\overline{K_2(t)}\end{pmatrix}, \tag{5.7b}$$

где $L_1(t)$, $L_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве операторов Гильберта—Шмидта, а $K_1(t)$, $K_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве ядерных операторов.

Доказательство. Рассуждая так же, как в предыдущем доказательстве, сделаем замену

$$\exp(itH) = V(t)\exp\left\{it\begin{pmatrix} -C & \\ & \overline{C}\end{pmatrix}\right\}.$$

Переходя к вольтерровскому уравнению, получаем

$$V(t) = E + i\int_0^t V(\tau)\begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix}d\tau,$$

где $A(t) = \exp(-itC)A\exp(-it\overline{C})$.

Делая замену $\widetilde{V}(t) = V(t) - E$, мы приходим к уравнению

$$\widetilde{V}(t) = i\int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix}d\tau + i\int_0^t \widetilde{V}(\tau)\begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix}d\tau. \tag{5.8}$$

Явный вид этого уравнения позволяет получить дополнительные сведения о функции $\widetilde{V}(\tau)$. Рассмотрим банахово пространство Y, состоящее из операторов

вида $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N\end{pmatrix}$, где K и N — ядерные операторы, а M и L — операторы Гильберта—Шмидта. Норма в Y вводится по формуле

$$\left\|\begin{pmatrix} K & L \\ M & N\end{pmatrix}\right\| = \|K\|_1 + \|N\|_1 + \|L\|_2 + \|M\|_2,$$

где через $\|\cdot\|_1$ обозначена ядерная норма, а через $\|\cdot\|_2$ — гильберт-шмидтовская норма. Важно заметить, что $\begin{pmatrix} 0 & -A(\tau) \\ \overline{A(\tau)} & 0\end{pmatrix} \in Y$, а условия $Q \in Y$, $R \in Y$ влекут $QR \in Y$.

Теперь мы можем рассмотреть (5.8) как уравнение на Y-значную функцию $\widetilde{V}(t)$. Это уравнение, очевидно (см. [Колмогоров, Фомин (1981)], [Riesz, Sz.-Nagy (1965)]), имеет решение в классе непрерывных Y-значных функций. Существование разложения (5.7a) доказано.

Чтобы доказать непрерывную дифференцируемость функций K_1 и L_1, достаточно проверить непрерывность функции $\tau \mapsto A(\tau)$ относительно гильберт-шмидтовской топологии. Из этого будет следовать дифференцируемость правой части (5.8), а значит, и Y-значной функции $\widetilde{V}(t)$.

Рассмотрим функцию

$$h_{v,w}(t) = \langle v, A(t)w\rangle = \langle \exp(itC)v, A\exp(-it\overline{C})w\rangle.$$

Функция $t \mapsto \exp(itC)$ сильно непрерывна. Поэтому непрерывны функции $t \mapsto \exp(itC)v$, $t \mapsto \exp(-it\overline{C})w$. Следовательно, все функции $h_{v,w}(t)$ непрерывны. Итак, функция $t \mapsto A(t)$ слабо непрерывна.

Заметим далее, что величина $\|A(t)\|_2$ постоянна, т. е. $A(t)$ лежит на сфере $\|X\|_2 = \|A\|_2$ в пространстве операторов Гильберта—Шмидта. Легко понять, что на сфере в пространстве операторов Гильберта—Шмидта слабая топология совпадает с гильберт-шмидтовской, т. е. функция $\tau \mapsto A(\tau)$ непрерывна по гильберт-шмидтовской топологии. Итак, существование разложения (5.7a) доказано.

Докажем существование разложения (5.7b). Для этого запишем разложение (5.7a) для оператора H^* и затем выпишем сопряженные операторы для обеих частей полученного равенства.

Наконец,

$$\frac{1}{i}\frac{d}{ds}\left\{\exp(isH)^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}\exp(isH)\right\} =$$

$$= \exp(isH^{\mathrm{t}})\left[H^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}H\right]\exp(isH) = 0,$$

так как выражение в квадратных скобках равно 0 в силу условия $H \in \mathfrak{g}$. Таким образом, $\exp(isH) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(\cdot)$. ■

5.3. Квадратичные операторы. Обозначим через $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ множество блочных матриц вида $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ таких, что B, C — операторы Гильберта—Шмидта, а

$$Q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{t}} = 0$$

(что равносильно $D = A^{\mathrm{t}}$, $B = B^{\mathrm{t}}$, $C = C^{\mathrm{t}}$; оператор A, вообще говоря, не ограничен). Поставим в соответствие каждой такой матрице оператор $\mathrm{dwe}(Q)$

в пространстве Фока по формуле

$$\mathrm{dwe}(Q) = \frac{1}{2}\sum b_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum a_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum c_{ij} z_i z_j. \qquad (5.9)$$

Пусть $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -A_1^t \end{pmatrix}$, тогда формальное вычисление дает

$$\left[\mathrm{dwe}(Q), \mathrm{dwe}(P)\right] = \mathrm{dwe}([Q, P]) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(BC_1 - B_1 C)\cdot E. \qquad (5.10)$$

Таким образом, если бы $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ была алгеброй Ли, то $\mathrm{dwe}(\cdot)$ был бы ее проективным представлением. Смысл (5.9), (5.10) можно придать или с помощью крайней алгебраизации, или путем честного выяснения, что значат операторы $\mathrm{dwe}(P)$.

Начнем с первого пути. Пусть $\overset{0}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ — подмножество, состоящее из всех матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$ таких, что B и C — финитные операторы, а в каждой строке и каждом столбце матрицы A есть лишь конечное число ненулевых элементов. Множество $\overset{0}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ является настоящей алгеброй Ли. Далее, рассмотрим пространство F_0 многочленов от переменных $z_1, z_2, \ldots$. Ясно, что операторы $\mathrm{dwe}(Q)$ корректно определены на F_0 при $Q \in \overset{0}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$.

Теорема 5.3. Пусть $Q, P \in \overset{0}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$. Тогда выполнено (5.10).

Доказательство. Утверждение доказывается простым вычислением, которое мы опускаем. ∎

5.4. Самосопряженность квадратичных операторов. Пусть $iQ \in \mathfrak{g}$. Придадим смысл выражению (5.9). Разложим пространство Фока $F(H)$ в прямую сумму $F = \bigoplus F_k(H)$, где $F_k(H)$ состоит из однородных форм степени k. Назовем вектор $f \in F(H)$ *финитным*, если f представи́м в виде $f = \sum_{i=0}^{N} f_k$, где $f_k \in F_k$.

Лемма 5.4. Пусть $q = \sum c_{ij} z_i z_j$ — квадратичная форма, причем $\sigma^2 = \sum |c_{ij}|^2 < \infty$. Тогда оператор $Q_k : F_k(H) \to F_{k+2}(H)$, заданный формулой $Q_k f(z) = q(z) f(z)$, ограничен, и $\|Q_k\| \leqslant \sqrt{(k+2)(k+1)}\cdot\sigma$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $q = \sum \lambda_i z_i^2$ (ср. п. IV.2.5.). Пусть

$$f = \sum \alpha_{i_1 i_2 \ldots} e_{i_1 i_2 \ldots} \in F_k, \quad qf = \sum \beta_{j_1 j_2 \ldots} e_{j_1 j_2 \ldots},$$

где $e_{\ldots}$ — элементы канонического базиса в $F(H)$ (см. п. 1.1). Тогда

$$|\beta_{i_1 i_2 \ldots}|^2 = \left| \sum_{s: i_s \geqslant 2} \lambda_s \alpha_{i_1 \ldots i_{s-1}(i_s-2) i_{s+1} \ldots} \sqrt{i_s(i_s-1)} \right|^2 \leqslant$$

(используем неравенство Коши—Буняковского)

$$\leqslant \left(\sum_{s: i_s \geqslant 2} |\lambda_s|^2 |\alpha_{i_1 i_2 \ldots (i_s-2)\ldots}|^2 \right) \left(\sum i_s(i_s-1) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{s: i_s \geqslant 2} |\lambda_s|^2 |\alpha_{i_1 \ldots (i_s-2)\ldots}|^2 \right) \left((k+1)(k+2) \right)$$

(мы использовали очевидное неравенство $\sum(i_s^2 - i_s) = \sum i_s^2 - (k+2) \leqslant (k+2)^2 - (k+2)$).

Далее,

$$\|qf\|^2 = \sum |\beta_{j_1 j_2 \ldots}|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (k+1)(k+2) \sum |\lambda_s|^2 \sum |\alpha_{i_1 \ldots}|^2 =$$
$$= (k+1)(k+2)\sigma^2 \|f\|^2,$$

что и требовалось доказать. ∎

Следствие 5.5. Пусть $R_k = \sum c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}$ — оператор из $F_{k+2}(H)$ в $F_k(H)$, причем $\sigma^2 = \sum |c_{ij}|^2 < \infty$. Тогда оператор R_k ограничен и $\|R_k\| \leqslant \sqrt{(k+2)(k+1)}\,\sigma$.

Доказательство. Действительно, оператор R_k сопряжен оператору умножения на $q = \sum c_{ij} z_i z_j$. ∎

Пусть C — самосопряженный оператор в пространстве H', двойственном к H. Пусть $D \subset H'$ — какое-нибудь подпространство, на котором C существенно самосопряжен. Тогда симметрическая степень $\mathrm{S}^k C$ оператора C существенно самосопряжена на подпространстве $D^{(k)} \subset F^k(H)$, состоящем из всех произведений вида $f_1 \ldots f_k$, где $f_j \in D$ (см. [Reed, Simon (1972)], VIII.10). Оператор $L = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{S}^k C$ в $F(H)$, таким образом, определен на области $\widetilde{D}$, состоящей из конечных сумм $\sum_{j=1}^{N} g_j$, где $g_j \in D^{(j)}$. Очевидно, L существенно самосопряжен на D. Этот оператор мы и обозначаем через

$$L = \sum c_{ij} z_i \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Пусть теперь $i\begin{pmatrix} -\overline{C} & -\overline{A} \\ A & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. Пусть

$$Q = \mathrm{dwe}\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum c_{ij} z_i \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum \overline{a}_{ij} z_i z_j.$$

Теорема 5.6. Оператор Q существенно самосопряжен на области D.

Доказательство. Лемма 5.4 и следствие из нее позволяют воспользоваться признаком Карлемана (см. Предварительные сведения, §4). ∎

5.5. Соответствие между однопараметрическими группами.

Теорема 5.7. Пусть $Q = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{pmatrix} \Phi(s) & \Psi(s) \\ \overline{\Psi}(s) & \overline{\Phi}(s) \end{pmatrix} = \exp\left\{ is\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix} \right\}. \qquad (5.11)$$

Пусть $P(s) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$ — график оператора (5.11). Тогда

$$\exp(s\cdot\mathrm{dwe}(Q)) = \det\left(\overline{\Phi}(s)\exp(-is\overline{C})\right)^{-1/2}\mathrm{we}(P(s)) =$$
$$= \left(\det\left(\overline{\Phi}(s)\exp(-is\overline{C})\right)\right)^{-1/2} B\begin{bmatrix} \Psi(s)\overline{\Phi}(s)^{-1} & (\Phi(s)^*)^{-1} \\ \Phi(s)^{-1} & -\Phi(s)^{-1}\Psi(s) \end{bmatrix}. \qquad (5.12)$$

Замечание. Как мы видели в теореме 5.1, оператор $\overline{\Phi}(s)\exp(-is\overline{C})-E$ является ядерным, поэтому определитель в этой формуле определен корректно. Далее, он является непрерывной функцией, не обращающейся в 0 (так как $\Phi\Phi^* = 1+\Psi\Psi^*$, а $\Psi\Psi^* \geqslant 0$), поэтому мы можем выбрать однозначную ветвь корня из условия $\sqrt{\det\overline{\Phi}(0)} = 1$.

Доказательство. Я привожу единственное известное мне доказательство этой теоремы, которое удручает как своей длиной, так и отсутствием в нем каких бы то ни было идей.

Обозначим последнее выражение в равенстве (5.12) через $r(s)$. Проверим сначала, что $r(s_1+s_2) = r(s_1)r(s_2)$. С учетом того, что

$$\mathrm{we}(P(s_1))\,\mathrm{we}(P(s_2)) = \det\Big(1+\overline{\Phi}(s_1)^{-1}\overline{\Psi}(s_1)\Psi(s_2)\overline{\Phi}(s_2)^{-1}\Big)^{1/2}\mathrm{we}\Big(P(s_1+s_2)\Big),$$

нам достаточно проверить равенство предэкспоненциальных множителей:

$$\det\Big(\exp(-is_1\overline{C})\overline{\Phi}(s_1)\Big)\det\Big(1+\overline{\Phi}(s_1)^{-1}\overline{\Psi}(s_1)\Psi(s_2)\overline{\Phi}(s_2)^{-1}\Big)\det\Big(\overline{\Phi}(s_2)\exp(-is_2\overline{C})\Big) =$$
$$= \det\Big(\exp(-is_1\overline{C})\Big(\overline{\Phi}(s_1)\overline{\Phi}(s_2)+\Psi(s_1)\overline{\Psi}(s_2)\Big)\exp(-is_2C)\Big) =$$
$$= \det\Big(\overline{\Phi}(s_1+s_2)\exp\Big(-i(s_1+s_2)C\Big).$$

Таким образом, $r(s)$ — однопараметрическая подгруппа. Теперь мы хотим вычислить ее генератор

$$R = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial s}\,r(s)\Big|_{s=0}.$$

Вычисление производной ядра K_s оператора $r(s)$ по s в нуле дает выражение:

$$\frac{1}{i}\frac{dK}{ds} = \Big(\frac{1}{2}\sum\overline{a}_{ij}z_iz_j + \frac{1}{2}\sum a_{ij}\overline{u}_i\overline{u}_j + \sum c_{ij}z_i\overline{u}_j\Big)\exp\Big(\sum z_i\overline{u}_i\Big), \tag{5.13}$$

которое совпадает с формально вычисленным ядром оператора (5.9). Однако это вычисление не вполне корректно, и мы вынуждены прибегнуть к длинному обоснованию.

Пусть D — множество аналитических векторов оператора C (см. [Reed, Simon (1975)]); как известно, C существенно самосопряжен на D. Обозначим через $D^{(k)} \subset F_k(H)$ множество конечных линейных комбинаций функций вида $f_1\ldots f_k$, где $f_j \in D$.

Лемма 5.8. $D^{(k)}$ содержится в области определения оператора R.

Доказательство. Пусть $f_1,\ldots f_k \in D$. Нам нужно доказать, что $f_1\ldots f_k$ содержится в области определения R. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $g_1,\ldots,g_k$ в линейной оболочке функций $f_1,\ldots,f_k$. С помощью обычной ортогонализации Грама—Шмидта (см. [Reed, Simon (1972)]) дополним $g_1,\ldots,g_k$ до ортонормированного базиса $g_1,g_2\ldots$ в $H' = F_1(H)$ такого, что все g_j содержатся в D. Без ограничения общности можно считать, что $H=\ell_2$, а $g_j(z) = z_j$.

Теперь нам достаточно доказать, что оператор R корректно определен на всех одночленах вида $\lambda(z) = z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots$.

$$r(s)\lambda(z) = \det\Big(\overline{\Phi}\exp(-is\overline{C})\Big)^{-1/2}\times$$
$$\times\iint\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Psi\overline{\Phi}^{-1}z^t + z(\Phi^*)^{-1}\overline{u}^t - \tfrac{1}{2}\overline{u}\Phi^{-1}\Psi\overline{u}^t\Big\}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\ldots d\mu(u).$$

Это не что иное, как коэффициент при $\overline{u}_1^{k_1}\overline{u}_2^{k_2}\ldots$ в разложении ядра K_s оператора $r(s)$ в ряд Тейлора по $\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots$. Поэтому $r(s)\lambda(z)$ имеет вид

$$\det\Big(\overline{\Phi}\exp(-is\overline{C})\Big)^{-1/2}\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Psi\overline{\Phi}^{-1}z^t\Big\}\cdot Q\Big(zl_\alpha^t, r_{\beta\gamma}\Big), \tag{5.14}$$

где l_α^t — матрицы-столбцы матрицы $(\Phi^*)^{-1}$, $r_{\beta\gamma}$ — матричные элементы $\Phi^{-1}\Psi$, а Q — некоторый многочлен степени $k_1+k_2+\ldots$. Итак, мы хотим доказать, что выражение (5.14) дифференцируемо по s при $s=0$. Пусть

$$\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+K & L\\ \overline{L} & 1+\overline{K}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-isC} & \\ & e^{is\overline{C}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-isC} & \\ & e^{is\overline{C}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+K_1 & L_1\\ \overline{L}_1 & 1+\overline{K}_1\end{pmatrix}.$$

Как мы видели в теореме 5.2, функция $K(s) = \overline{\Phi}(s)e^{-is\overline{C}} - E$ дифференцируема по s относительно ядерной нормы, поэтому $\det\Big(\overline{\Phi}(s)e^{-is\overline{C}}\Big)$ — дифференцируемая по s функция. Далее, $K(0)=0$, $\frac{d}{ds}K\Big|_{s=0} = 0$ (последнее ясно из интегрального уравнения (5.8)). Поэтому производная от $\det\Big(\overline{\Phi}(s)e^{-is\overline{C}}\Big)$ в нуле равна 0, и мы больше не обращаем внимания на этот множитель.

Далее,

$$\overline{\Psi}\Phi^{-1} = \overline{L}e^{-isC}\Big((1+K)e^{-isC}\Big)^{-1} = \overline{L}(1+K)^{-1},$$

таким образом (по теореме 5.2), матрица $\overline{\Psi}(s)\Phi(s)^{-1}$ дифференцируема относительно гильберт-шмидтовской нормы. Аналогично, дифференцируема по гильберт-шмидтовской норме и матрица $\Phi^{-1}\Psi$.

Далее,

$$\Phi^{*-1}g_j = \Big((1+K)e^{-isC}\Big)^{*-1}g_j = (1+K^*)^{-1}e^{-isC}g_j.$$

Так как g_j — аналитический вектор оператора C, функция $s\mapsto e^{isC}g_j$ является аналитической. Учитывая, что функция $s\mapsto K(s)$ непрерывно дифференцируема, мы получаем, что векторы $l_\alpha(s)$ непрерывно дифференцируемы.

Итак, (5.14) является конечной линейной комбинацией с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами функций вида

$$\gamma(s) = \prod_{\alpha=1}^{n}\Big(m_\alpha(s)z^t\Big)\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Theta(s)z^t\Big\},$$

где $m_\alpha(s)$ — непрерывно дифференцируемые векторы в ℓ_2, а $\Theta(s)$ — непрерывно дифференцируемая по гильберт-шмидтовской норме операторнозначная функция. Покажем, что семейство векторов $\gamma(s)$ является непрерывно дифференцируемым. Для этого достаточно проверить, что векторнозначная функция

$$q(s,s_1,s_2,\ldots,s_n) = \prod_{\alpha=1}^{n}\Big(m_\alpha(s_\alpha)z^t\Big)\exp\Big\{\tfrac{1}{2}z\Theta(s)z^t\Big\}$$

имеет непрерывные частные производные по $s_1,\ldots,s_n$. Эту несложную проверку мы опускаем. Лемма доказана. ∎

Вернемся к доказательству теоремы. Мы доказали существование вектора $\frac{1}{i}\frac{d}{ds}r(s)\lambda(z)\Big|_{s=0}$, где $\lambda(z) = z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots$. Но этот вектор нужно еще вычислить.

Иными словами, нужно вычислить

$$\frac{d}{ds}\left\{\exp\left\{\tfrac{1}{2}z\Psi\overline{\Phi}^{-1}z^{\mathrm{t}}\right\}\cdot Q\left(zl_\alpha^{\mathrm{t}}, r_{\beta\gamma}\right)\right\}\Big|_{s=0} \tag{5.15}$$

(см. (5.14)). Множитель $Q\left(zl_\alpha^{\mathrm{t}}, r_{\beta\gamma}\right)$ может быть явно выписан через многочлены Эрмита. По счастью, как мы сейчас увидим, этого делать не нужно: в действительности интересны лишь слагаемые, не зависящие от $r_{\beta\gamma}$, и слагаемые, линейные по $r_{\beta\gamma}$. С точностью до членов высшего (по $r_{\beta\gamma}$) порядка

$$Q(zl_\alpha^{\mathrm{t}}, r_{\beta\gamma}) = \prod_\alpha\left[\frac{1}{k_\alpha!}\,(zl_\alpha^{\mathrm{t}})^{k_\alpha}\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma:k_\beta\geqslant 1,\,k_\gamma\geqslant 1} r_{\beta\gamma}\frac{1}{(k_\beta-1)!}(zl_\beta^{\mathrm{t}})^{k_\beta-1}\frac{1}{(k_\gamma-1)!}(zl_\gamma^{\mathrm{t}})^{k_\gamma-1}\prod_{j\neq\beta,\gamma}\left[\frac{1}{k_j!}\,(zl_j^{\mathrm{t}})^{k_j}\right]+\ldots$$

Теперь вычисление выражения (5.15) уже не составляет никакого труда. Прежде всего, заметим, что $r_{\beta\gamma}(0)=0$. По этой причине члены старших по $r_{\beta\gamma}$ степеней в Q дадут в производную нулевой вклад. Далее, $l_\alpha^{\mathrm{t}}(0)$ — это просто α-й базисный вектор, а $\Psi(0)\overline{\Phi}(0)^{-1}=0$. Наконец,

$$\frac{d}{ds}r_{\beta\gamma}(s)\Big|_{s=0} = a_{\beta\gamma},$$
$$\frac{d}{ds}\left(zl_\alpha^{\mathrm{t}}(s)\right)\Big|_{s=0} = \sum_\nu c_{\nu\alpha}z_\nu,$$
$$\frac{d}{ds}\left(z\Psi(s)\overline{\Phi}(s)^{-1}z^{\mathrm{t}}\right) = \sum \bar{a}_{\tau\sigma}z_\tau z_\sigma.$$

Теперь ответ явно выписывается, и мы получаем желаемое:

$$\frac{1}{i}\frac{d}{ds}\,r(s)\lambda(z)\Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{2}\sum\bar{a}_{\tau\sigma}z_\tau z_\sigma + \sum_\nu c_{\nu\alpha}z_\nu\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{1}{2}\sum a_{\beta\gamma}\frac{\partial^2}{\partial z_\beta\partial z_\gamma}\right)\lambda(z).$$

Итак, генератор R однопараметрической полугруппы $r(s)$ совпадает с оператором $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ на всех подпространствах $D^{(k)}\subset F_k(H)$, а следовательно, и на подпространстве $\widetilde{D}$, состоящем из векторов вида $\sum_{k=0}^{N}p_k$, $p_k\in D^{(k)}$. Но оператор $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ существенно самосопряжен на $\widetilde{D}$. Поэтому самосопряженные операторы $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ и R совпадают. ■

5.6. Замечания. Группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Spa}}}(\cdot)$. Напомним, что аффинная симплектическая группа $\widetilde{\mathrm{G}}=\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V'\oplus V)$ состоит из аффинных преобразований $(V'\oplus V)$ вида

$$\begin{pmatrix}v'\\ v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v'\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\ \bar{\alpha}\end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

где $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{Sp}}(V\oplus V')$. Поставим в соответствие преобразованию (5.16) матрицу

$$\begin{pmatrix}\Phi & \Psi & \alpha\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} & \bar{\alpha}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Легко видеть, что произведению аффинных преобразований (5.16) соответствует обычное умножение матриц (5.17).

Алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\widetilde{\mathrm{G}}$ естественно считать множество матриц вида

$$Q=\begin{pmatrix}-C & -A & \gamma\\ \overline{A} & \overline{C} & \bar{\gamma}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

где $\gamma\in V'$ — вектор-столбец, $A=A^{\mathrm{t}}$ — оператор Гильберта—Шмидта, а iC самосопряжен.

Наряду с «алгеброй Ли» $\tilde{\mathfrak{g}}$ естественно рассмотреть ее комплексификацию $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, состоящую из матриц вида

$$Q=\begin{pmatrix}L & M & \sigma\\ N & -L^{\mathrm{t}} & \varkappa\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

где $M=M^{\mathrm{t}}$, $N=N^{\mathrm{t}}$ — операторы Гильберта—Шмидта. Каждой такой матрице мы поставим в соответствие следующий формальный оператор в пространстве Фока:

$$\mathrm{dwe}(Q)=\frac{1}{2}\sum m_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\beta}+\sum l_{\alpha\beta}z_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\beta}+\frac{1}{2}\sum n_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta+\sum\sigma_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}+\sum\varkappa_\alpha z_\alpha. \tag{5.20}$$

Как и в случае пп. 5.3–5.4, есть два пути придать смысл этому «дифференциальному оператору».

Рассмотрим сначала (настоящую) алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^0_{\mathbb{C}}$, состоящую из матриц (5.19) таких, что M, N, σ, $\varkappa$ финитны, а в каждой строке и каждом столбце матрицы L есть лишь конечное число ненулевых элементов. Тогда (5.20) является корректно определенным оператором в пространстве многочленов. Пусть

$$Q=\begin{pmatrix}L & M & \sigma\\ N & -L^{\mathrm{t}} & \varkappa\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}L' & M' & \sigma'\\ N' & -(L')^{\mathrm{t}} & \varkappa'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда простое вычисление дает

$$[\mathrm{dwe}(Q),\mathrm{dwe}(R)]=\mathrm{dwe}([Q,R])+\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(MN'-M'N)+\sum(\sigma_j\varkappa_j'-\sigma_j'\varkappa_j)\right)E, \tag{5.21}$$

т.е. $\mathrm{dwe}(\cdot)$ — проективное представление алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}^0_{\mathbb{C}}$.

Пусть теперь $Q\in\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда мы можем определить оператор $\mathrm{dwe}(Q)$ так же, как и в п. 5.4.

Теорема 5.9. Пусть $Q\in\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда оператор $\frac{1}{i}\,\mathrm{dwe}(Q)$ существенно самосопряжен в пространстве Фока.

Теорема 5.10. Пусть Q имеет вид (5.18), а

$$\exp(sQ)=\begin{pmatrix}\Phi(s) & \Psi(s) & \alpha(s)\\ \overline{\Psi}(s) & \overline{\Phi}(s) & \bar{\alpha}(s)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\exp\left(s\,\mathrm{dwe}(Q)\right)=c(s)\,\mathrm{we}\left(\exp(sQ)\right),$$

где

$$c(s)=\left(\det\left(\Phi e^{-isC}\right)\right)^{-1/2}\exp\left\{i\int_0^s\left(\gamma^{\mathrm{t}}\Phi^{t-1}\overline{A}\Phi^{-1}\gamma-\bar{\alpha}^{\mathrm{t}}\Phi^{-1}\gamma\right)ds\right\}.$$

Доказательства этих теорем не содержат ничего нового по сравнению с теоремами 5.6 и 5.7, (см. [Березин (1965)]). ■

5.7. Замечания. Группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Здесь все тоже аналогично случаю $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$. Группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

сохраняющих симметричную билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем Ψ — оператор Гильберта—Шмидта.

«Алгебра Ли» $\mathfrak{p}$ группы $\mathrm{Aut}^*_{\mathrm{GD}}$ состоит из матриц вида

$$Q = i\begin{pmatrix} -C & -A \\ \overline{A} & \overline{C} \end{pmatrix},$$

где $A = -A^t$ — оператор Гильберта—Шмидта, а C — самосопряжен.

Комплексификация $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ «алгебры Ли» $\mathfrak{p}$ состоит из матриц вида

$$Q = \begin{pmatrix} L & M \\ N & -L^t \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

где $M = -M^t$, $N = -N^t$ — операторы Гильберта—Шмидта. Заметим, что $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как алгебру Ли группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Поставим в соответствие каждой такой матрице «дифференциальный оператор» в пространстве Фока по формуле

$$\mathrm{dspin}(Q) = \frac{1}{2}\sum m_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta} + \sum l_{\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\beta} + \frac{1}{2}\sum n_{\alpha\beta}\xi_\beta\xi_\alpha. \tag{5.24}$$

Как и раньше, определим (настоящую) алгебру Ли $\mathfrak{p}^0_{\mathbb{C}}$, состоящую из матриц вида (5.23) таких, что M, N финитны, а в каждой строке и каждом столбце L есть лишь конечное число ненулевых элементов. Легко проверить, что dspin — проективное представление алгебры $\mathfrak{p}^0_{\mathbb{C}}$, причем если

$$Q = \begin{pmatrix} L & M \\ N & -L^t \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} L' & M' \\ N' & (-L')^t \end{pmatrix},$$

то

$$[\mathrm{dspin}(Q), \mathrm{dspin}(R)] = \mathrm{dspin}([Q,R]) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(MN' - M'N). \tag{5.25}$$

Далее, для любого $Q \in \mathfrak{p}$ оператор $\frac{1}{i}\,\mathrm{dspin}(Q)$ существенно самосопряжен, остается в силе и теорема о соответствии однопараметрических подгрупп.

5.8. Замечания. Группа $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$. Спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$ строится путем вложения $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Поэтому случай спинорного представления группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$ легко сводится к случаю группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$ Мы ограничимся тем, что выпишем алгебраические формулы для спинорного представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}$ группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(\cdot)$ в удобной для нас форме.

Итак, рассмотрим пространство ℓ_2, состоящее из последовательностей вида

$$(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots).$$

Пусть пространство H_- натянуто на векторы вида $(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, 0, 0, \ldots)$, а H_+ — на векторы вида $(\ldots, 0, 0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{gl}^0$, состоящую из матриц вида

$$P = \begin{pmatrix} P^{--} & P^{+-} \\ P^{-+} & P^{++} \end{pmatrix} : H_- \oplus H_+ \to H_- \oplus H_+, \tag{5.26}$$

причем матрицы P^{+-} и P^{-+} финитны, а каждая строка и каждый столбец матриц P^{--} и P^{++} содержит лишь конечное число ненулевых элементов.

Рассмотрим, далее, пространство Λ многочленов, зависящих от антикоммутирующих переменных $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$. Введем операторы b_j и b_j^* по формулам

$$b_j f = \begin{cases} \xi_j f, & \text{если } j \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi_j} f, & \text{если } j < 0, \end{cases} \qquad b_j^* f = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\xi_j} f, & \text{если } j \geqslant 0, \\ \xi_j f, & \text{если } j < 0. \end{cases}$$

Далее, каждой матрице (5.26) поставим в соответствие оператор

$$\tau(P) = \sum p_{kl}{:}b_k b_l^*{:}, \tag{5.27}$$

где $:\ :$ обозначает так называемый нормальный порядок. В нашем случае это значит, что

$${:}b_k b_l^*{:} = b_k b_l^*$$

во всех случаях, кроме случая $k = l < 0$,

$${:}b_k b_k^*{:} = -b_k^* b_k \quad \text{при} \quad k < 0.$$

Легко видеть, что

$$[\tau(P), \tau(Q)] = \tau([P,Q]) + \mathrm{tr}(P^{+-}Q^{-+} - Q^{+-}P^{-+}). \tag{5.28}$$

Далее, определим в Λ семейство подпространств $\Lambda^{(\sigma)}$, где $\sigma \in \mathbb{Z}$; они натянуты на векторы вида

$$\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_p}\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_q},$$

где

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_p < 0 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_q; \quad q - p = \sigma.$$

Легко видеть, что $\Lambda = \bigoplus_{\sigma=-\infty}^{\infty} \Lambda^{(\sigma)}$; при этом подпространства $\Lambda^{(\sigma)}$ являются $\mathfrak{gl}^0$-инвариантными.