Глава VII

Представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом

§ 1. Группа диффеоморфизмов окружности и алгебра Вирасоро

Этот параграф содержит простейшие определения, связанные с группой диффеоморфизмов окружности, а также краткое введение в алгебраическую теорию представлений алгебры Вирасоро со старшим весом. К сожалению, хороших понятных текстов по теории представления алгебры Вирасоро со старшим весом (если я не ошибаюсь) на сегодняшний день нет, и по-видимому, это связано с объективным состоянием дел в этой области. Несмотря на то, что в 80-е годы эта теория была одной из самых модных в математике, действительное продвижение в этой области было не слишком велико. Удалось получить ответы на ряд естественных вопросов (условия приводимости, структура подмодулей, условия унитаризуемости), однако «естественные» доказательства в большинстве случаев пока неизвестны. Неизвестны и ответы на многие разумные вопросы, которые, по всей видимости, не являются неразрешимыми.

1.1. Группа диффеоморфизмов окружности. Через S^1 мы всюду в этой главе будем обозначать окружность, которую мы будем рассматривать или как множество $|z| = 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, или как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами; координату на отрезке $[0, 2\pi]$ мы будем, как правило, обозначать через φ.

Группу C^∞-гладких диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, мы будем обозначать через Diff.

1.2. Конечномерные подгруппы. Реализуем группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ как группу комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$ таких, что $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Как известно, эта группа действует в круге $|z| \leqslant 1$ *мебиусовскими преобразованиями*

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha} \tag{1.1}$$

(конечно, это частный случай действия группы $\mathrm{U}(p,q)$ на матричном шаре (см. § V.2), $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SU}(1,1)$). При этом окружность $|z| = 1$ переходит в себя. Заметим, что матрице $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ соответствует тождественное преобразование круга (окружности), поэтому фактически мы имеем действия не самой группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, а ее факторгруппы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) / \{\pm E\}$.

Итак, группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ канонически вкладывается в Diff.

В группе Diff есть и другие трехмерные подгруппы, а именно, n-листные накрывающие группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Задача. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Рассмотрим многозначное отображение

$$z \mapsto \left(\frac{\alpha z^n + \beta}{\bar\alpha z^n + \bar\beta}\right)^{1/n}$$

окружности S^1 в себя. Покажите, что это отображение имеет n однозначных вещественно-аналитических ветвей. Пусть $\mathrm{G}_{(n)}$ — группа всех получаемых таким способом однозначных преобразований. Покажите, что центр A группы $\mathrm{G}_{(n)}$ состоит из преобразований вида $z \mapsto \lambda z$, где $\lambda^n = 1$. Покажите, что факторгруппа $\mathrm{G}_{(n)} / A$ есть $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

1.3. Алгебра Вирасоро. Алгеброй Ли группы Diff естественно считать алгебру Ли $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{R}}$ всех C^∞-гладких векторных полей на окружности (см., например, [Арнольд (1974)], 39). Для любых векторных полей $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $w(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ определен коммутатор

$$\left[v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}, w(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] = \bigl(v(\varphi)w'(\varphi) - v'(\varphi)w(\varphi)\bigr)\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{1.2}$$

Далее, для любого векторного поля $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ определена однопараметрическая группа диффеморфизмов $g_t(\varphi) : S^1 \to S^1$ из условия

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(\varphi) = v(g_t(\varphi))$$

(«поток векторного поля», см. любой учебник по дифференциальным уравнениям). В этом смысле алгебра Ли $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{R}}$ является «алгеброй Ли группы Ли» Diff. Однако здесь взаимоотношения между «группой Ли» и «алгеброй Ли» сильно отличаются от конечномерного случая. Например, оказывается, что множество диффеоморфизмов, которые могут быть включены в поток, нигде не плотно в группе Diff (см., например, [Pressley, Segal (1986)], 3.3).

Далее, через $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$ мы обозначим алгебру Ли комплексных векторных полей на окружности, т. е. выражений вида $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$, где $v(\varphi)$ — комплекснозначная C^∞-гладкая функция; коммутатор по-прежнему определяется формулой (1.2).

Выберем в $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$ базис

$$L_n = e^{in\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}, \tag{1.3}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что

$$[L_n, L_m] = (m - n)L_{n+m}. \tag{1.4}$$

Алгебра $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$ состоит из линейных комбинаций вида

$$v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} = \sum c_n L_n,$$

где коэффициенты c_n удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k |c_n| < \infty$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Обычно бывает значительно удобнее работать не со всей алгеброй $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$, а с ее подалгеброй $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, состоящей из конечных линейных комбинаций вида $\sum c_n L_n$. Введем также алгебру $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} = \overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$.

Алгебра $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ имеет хорошо известное центральное расширение — *алгебру Вирасоро* (эта алгебра построена в [Гельфанд, Фукс (1968)]). Базис в алгебре Вирасоро Vir состоит из элементов L_j, где $j \in \mathbb{Z}$, и ζ, а соотношения коммутации задаются формулами

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n,0}\zeta, \qquad (1.5)$$
$$[L_n, \zeta] = 0.$$

Тем самым, центр алгебры Vir состоит из элементов $\alpha\zeta$, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Фактор-алгебра $\mathrm{Vir}/\mathbb{C}\zeta$, очевидно, совпадает с $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$.

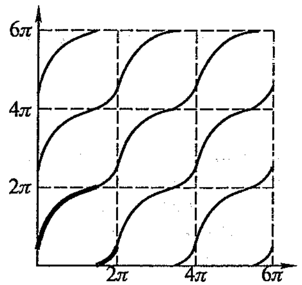

Рис. 1. Жирная линия — диффеоморфизм окружности. Тонкие линии — накрывающие его диффеоморфизмы прямой.

Задача. Пусть функция $\varphi(m,n)$ такова, что соотношения

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{n+m} + \varphi(m,n)\zeta,$$
$$[L_n, \zeta] = 0$$

задают структуру алгебры Ли (т. е. выполнено тождество Якоби). Покажите, что

$$\varphi(m,n) = (\alpha n^3 - \beta n)\delta_{m+n,0}.$$

Покажите, что при $\alpha \neq 0$ полученная алгебра Ли изоморфна алгебре Вирасоро, а при $\alpha = 0$ — алгебре $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}$, где через $\mathbb{C}$ обозначена одномерная (абелева) алгебра Ли.

Наконец, введем еще алгебру $\mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}$; это вещественная подалгебра в алгебре Vir, натянутая на векторы вида $\frac{1}{2i}(L_n + L_{-n})$, $\frac{1}{2}(L_n - L_n)$, $i\zeta$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача. Постройте алгебру $\overline{\mathrm{Vir}} \supset \mathrm{Vir}$ такую, что $\overline{\mathrm{Vir}}/\mathbb{C}\zeta = \overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$. Постройте алгебру $\overline{\mathrm{Vir}}_{\mathbb{R}} \supset \mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}$ такую, что $\overline{\mathrm{Vir}}_{\mathbb{R}}/i\mathbb{R}\zeta = \overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{R}}$.

Наша следующая цель — построить группу, соответствующую алгебре Вирасоро (а точнее, алгебре $\overline{\mathrm{Vir}}_{\mathbb{R}}$ из последней задачи). Это будет сделано в два шага.

1.4. Универсальное накрытие над Diff. Прежде всего, заметим, что группа Diff не односвязна.

Задача. Пусть $\mathbb{T}$ — подгруппа в Diff, состоящая из поворотов $R_\theta : \varphi \mapsto \varphi + \theta$ окружности. Рассмотрим отображение $\tau : \mathrm{Diff} \to \mathbb{T}$, определяемое формулой $\tau(q) = R_{q(0)}$. Покажите, что τ является гомотопической эквивалентностью, т. е. что отображения $q \mapsto q$ и $\tau(q)$ гомотопны.

Определим группу $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ как группу диффеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$q(x + 2\pi k) = q(x) + 2\pi k.$$

Ясно, что центр Z этой группы состоит из сдвигов $T_k : x \mapsto x + 2\pi k$, а факторгруппа $\mathrm{Diff}^{(\infty)}/Z$ есть Diff (см. рис. 1).

Задача. Покажите, что $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ — универсальное накрытие над Diff.

Задача. Обозначим через $\mathrm{Diff}^{(n)}$ группу диффеоморфизмов окружности таких, что $q\left(\varphi + \frac{2\pi k}{n}\right) = q(\varphi) + \frac{2\pi k}{n}$. Покажите, что $\mathrm{Diff}^{(n)}$ есть n-листное накрытие над Diff.

1.5. Расширение Ботта. Следуя традиции, мы должны построить центральное расширение Ботта $\mathrm{Diff}^{\sim}$ группы Diff; следуя той же традиции, мы нигде не будем его использовать.

Группа $\mathrm{Diff}^{\sim}$ как пространство есть $\mathrm{Diff}^{(\infty)} \times \mathbb{R}$, умножение вводится формулой

$$(p_1, a_1)(p_2, a_2) = \left(p_2 \circ p_1, a_1 + a_2 + c(p_1, p_2)\right),$$

где $p_1, p_2 \in \mathrm{Diff}^{(\infty)}$, а $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$c(p_1, p_2) = \int_0^{2\pi} \ln\left(p_2'(p_1(x))\right) d \ln p_1'(x).$$

Задача. Проверьте ассоциативность умножения.

Задача. Проверьте, что алгебра Ли группы $\mathrm{Diff}^{\sim}$ есть $\overline{\mathrm{Vir}}_{\mathbb{R}}$.

1.6. Унитаризуемость. Модуль M над Vir называется *унитаризуемым*, если в M существует положительно определенная эрмитова форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такая, что для любого $R \in \mathrm{Vir}_{\mathbb{R}}$ выполнено

$$\langle Rv, w \rangle = -\langle v, Rw \rangle$$

для всех $v, w \in M$. Легко видеть, что это условие равносильно условию

$$\langle L_k v, w \rangle = \langle v, L_{-k} w \rangle \qquad (1.6)$$

для всех k.

Эрмитова (вообще говоря, знаконеопределенная) форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется *инвариантной*, если она удовлетворяет тому же тождеству (1.6).

Наконец, симметричная билинейная форма $\{\cdot, \cdot\}$ называется *инвариантной*, если для всех $v, w \in V$ и всех k выполнено

$$\{L_k v, w\} = \{v, L_{-k} w\}.$$

Естественно думать, что унитаризуемым Vir-модулям соответствуют проективные унитарные представления группы Diff. Это действительно так (по крайней мере, во всех известных случаях), но переход от алгебры к группе не очевиден.

1.7. Простейшие представления $T_{s,\alpha}$. Пусть $s \in \mathbb{C}$. Пусть группа Diff действует в $L^2(S^1)$ по формуле

$$T_s(q) f(\varphi) = f(q(\varphi))\, q'(\varphi)^{1/2 + is} \qquad (1.7)$$

Легко видеть, что при $s \in \mathbb{R}$ эти представления унитарны. Соответствующее представление алгебры Ли $\overline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{C}}$ задается формулой

$$v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} : f(\varphi) \mapsto v(\varphi) f'(\varphi) + \left(\tfrac{1}{2} + is\right) v'(\varphi) f(\varphi). \qquad (1.8)$$

Обозначая через e_n векторы $e^{in\varphi} \in L^2(S^1)$, мы можем переписать формулу (1.8) в виде

$$L_k e_n = \left(n + \left(\tfrac{1}{2} + is\right)k\right) e_{n+k}.$$

Конструкция допускает следующее незамысловатое обобщение. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$. Рассмотрим пространство гладких функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$f(x+2\pi) = e^{2\pi i\alpha} f(x).$$

Через H_α мы обозначим пополнение этого пространства по норме, определяемой скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Легко видеть, что функции $e_{n+\alpha} \doteq e^{2\pi i(n+\alpha)x}$ образуют ортогональный базис в H_α (при $\alpha \in \mathbb{R}$ этот базис является ортнормированным).

Представление $T_{s,\alpha}$ группы $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ в H_α определяется формулой

$$T_{s,\alpha} f(x) = f(q(x))q'(x)^{1/2+is}.$$

Если $\alpha, s \in \mathbb{R}$, то представление $T_{s,\alpha}$ унитарно.

Соответствующее представление алгебры Ли Vect задается формулой

$$L_k e_{n+\alpha} = \left(n+\alpha+\left(\tfrac{1}{2}+is\right)k\right)e_{n+k+\alpha}. \tag{1.9}$$

Задача. Убедитесь, что $T_{s,\alpha} \simeq T_{s,\alpha+1}$.

Задача. Среди представлений $T_{s,\alpha}$ ровно два приводимы. Какие?

1.8. Модули со старшим весом. Пусть M — модуль над Vir. Вектор $v \in M$ мы будем называть *весовым вектором* веса (h, c), если

$$L_0 v = hv, \quad \zeta v = cv,$$

где $(h, c) \in \mathbb{C}^2$. *Весовым подпространством* $M_{h,c} \subset M$ называется множество всех векторов веса (h, c).

Задача. Пусть $v \in M_{h,c}$. Тогда $L_k v \in M_{h+k,c}$.

Замечание. Оператор ζ коммутирует со всеми L_k. Поэтому в неприводимых модулях он действует как умножение на скаляр. В частности, для всех весов (h, c) неприводимого модуля число c одно и то же.

Пусть $(h, c) \in \mathbb{C}^2$. Модуль M над Vir называется *модулем со старшим весом* (h, c), если в M существует вектор v (*вектор старшего веса*) такой, что
1. $L_n v = 0$ при $n < 0$;
2. $L_0 v = hv$, $\zeta v = cv$;
3. вектор v — циклический.

Предложение 1.1. Пусть M — модуль со старшим весом (h, c) и вектором старшего веса v. Тогда M является линейной оболочкой векторов вида

$$v_{k_1,k_2,\ldots} = L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots v, \tag{1.10}$$

где $k_j \in \mathbb{Z}_+$ и лишь конечное число из чисел k_j отлично от нуля.

Мы не будем приводить формального доказательства, но приведем вычисления, делающие утверждение очевидным.

Пример.

а)
$$\zeta L_1 L_2 v = L_1 \zeta L_2 v = L_1 L_2 \zeta v = cL_1 L_2 v.$$

б)
$$\begin{aligned} L_0 L_1 L_2 v &= [L_0, L_1]L_2 v + L_1 L_0 L_2 v = \\ &= L_1 L_2 v + L_1 [L_0, L_2] v + L_1 L_2 L_0 v = \\ &= L_1 L_2 v + 2L_1 L_2 v + hL_1 L_2 v = \\ &= (h+3)L_1 L_2 v. \end{aligned}$$

Аналогично,

в)
$$L_0 v_{k_1,k_2\ldots} = \Big(h + \sum_j jk_j\Big) v_{k_1,k_2,\ldots}. \tag{1.11}$$

г)
$$\begin{aligned} L_2(L_1 L_2 v) &= [L_2, L_1]L_2 v + L_1 L_2^2 v = \\ &= -L_3 L_2 v + L_1 L_2^2 v = \\ &= -[L_3, L_2]v - L_2 L_3 v + L_1 L_2^2 v = \\ &= L_5 v - L_2 L_3 v + L_1 L_2^2 v. \end{aligned}$$

д)
$$\begin{aligned} L_{-1}(L_1 L_2 v) &= [L_{-1}, L_1]L_2 v + L_1 L_{-1} L_2 v = \\ &= -2L_0 L_2 v + L_1 [L_{-1}, L_2] v + L_1 L_2 L_{-1} v = \\ &= -2(h+2)L_2 v + 3L_1^2 v + 0. \end{aligned}$$

Предложение 1.2. Существует единственный универсальный модуль $M(h, c)$ со старшим весом (h, c) такой, что векторы $L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots v$ образуют в нем базис.

Доказательство очевидно, см., например, [Кас (1983)]. ■

Замечание. Размерность весового подпространства $M(h, c)_{h+n,c}$ равна числу разбиений $p(n)$, т. е. числу представлений n в виде суммы положительных слагаемых

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_\alpha, \quad k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3 \geqslant \ldots.$$

Предложение 1.3. Любой модуль V со старшим весом (h, c) является фактор-модулем модуля $M(h, c)$.

Доказательство. Пусть v — вектор старшего веса в $M(h, c)$, а w — вектор старшего веса в V. Тогда сюръективный сплетающий оператор $\sigma : M(h, c) \to V$ определяется из условия

$$\sigma\big(L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots v\big) = L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots w.$$

■

Итак, вопрос об описании всех модулей со старшим весом (h, c) сводится к вопросу о перечислении подмодулей в $M(h, c)$.

1.9. Подмодули в $M(h, c)$. Модуль $L(h, c)$.

Лемма 1.4. Пусть N — подмодуль в $M(h, c)$. Тогда

$$N = \bigoplus_j N_{h+j,c}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Представим $y \in N$ в виде суммы $y = y_0 + y_1 + \ldots + y_p$, где $y_j \in M(h,c)_{h+j,c}$. Тогда
$$L_0^k y = \sum (h+j)^k y_j.$$
Выписав эти выражения для $k = 0, 1, \ldots, p$, мы получаем систему уравнений на y_j с вандермондовским определителем; она однозначно разрешима, и, тем самым, y_j выражаются линейно через y, $L_0 y, L_0^2 y, \ldots$, т.е. $y_j \in N$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 1.5. Пусть M — модуль со старшим весом (h,c). Тогда
$$M = \bigoplus_j M_{h+j,c}.$$

Напомним, что подмодуль $Q \subset M$ называется *собственным*, если $Q \neq M$. Собственный подмодуль назовем *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном подмодуле.

Предложение 1.6.

а) Подмодуль $M(h,c)$ содержит единственный максимальный собственный подмодуль.

б) Существует единственный неприводимый модуль со старшим весом (h,c).

Доказательство.

а) Пусть N — собственный подмодуль. Тогда $N = \bigoplus_{j \geqslant 0} N_{h+j,c}$. Заметим, что вектор старшего веса v не содержится в N, иначе было бы $N = M(h,c)$. Поэтому
$$N = \bigoplus_{j>0} N_{h+j,c} \subset \bigoplus_{j>0} M(h,c)_{h+j,c}.$$

Пусть теперь Q — сумма всех собственных подмодулей модуля $M(h,c)$. Тогда $Q \subset \bigoplus_{j>0} M(h,c)_{h+j,c}$ т.е. $Q \neq M(h,c)$.

б) равносильно а). Утверждение доказано. ■

Через $L(h,c)$ мы будем обозначать единственный неприводимый модуль со старшим весом (h,c). В дальнейшем нас будут интересовать главным образом модули $L(h,c)$.

1.10. Особые векторы. *Особым вектором* в Vir-модуле R мы назовем весовой вектор w такой, что $L_{-j}w = 0$ для всех $j > 0$. Пусть R — модуль со старшим весом, а w — особый вектор. Пусть $L_0 w = (h+k)w$. Число k мы назовем *степенью* особого вектора w.

Предложение 1.7. Любой собственный подмодуль N в модуле M со старшим весом содержит особый вектор.

Доказательство. Рассмотрим разложение (1.12). Рассмотрим минимальное α такое, что $N_{h+\alpha,c} \neq 0$. Тогда любой вектор из $N_{h+\alpha,c}$ является особым. ■

Задача. Покажите, что циклическая оболочка особого вектора степени k в $M(h,c)$ изоморфна $M(h+k,c)$.

Задача. Найдите особые векторы степени $\leqslant 2$ в $M(0,0)$.

1.11. Форма Шаповалова.

Предложение 1.8.

а) В любом модуле M со старшим весом (h,c) существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая инвариантная билинейная форма Λ.

б) Ядро формы Λ совпадает с максимальным собственным подмодулем в M.

Доказательство.

а) Прежде всего, заметим, что весовые пространства должны быть попарно ортогональны. Действительно, пусть $L_0 w_1 = p w_1$, $L_0 w_2 = q w_2$ причем, $q \neq p$. Тогда
$$\begin{aligned} p\Lambda(w_1, w_2) &= \Lambda(L_0 w_1, w_2) = \\ &= \Lambda(w_1, L_0 w_2) = \\ &= q\Lambda(w_1, w_2), \end{aligned}$$
и значит, $\Lambda(w_1, w_2) = 0$.

Пусть теперь v — вектор старшего веса, $w_1 = L_1^{a_1} \ldots L_n^{a_n} v$, $w_2 = L_1^{b_1} \ldots L_k^{b_k} v$, причем $\sum j a_j = \sum j b_j$. Тогда в силу инвариантности
$$\Lambda\big(L_1^{a_1} \ldots L_n^{a_n} v, L_1^{b_1} \ldots L_k^{b_k} v\big) = \Lambda\big(v, L_{-n}^{a_n} \ldots L_{-1}^{a_1} L_1^{b_1} \ldots L_k^{b_k} v\big). \qquad (1.13)$$

Но вектор $L_{-n}^{a_n} \ldots L_k^{b_k} v$ имеет вес h и поэтому имеет вид sv, где $s \in \mathbb{C}$, т.е. выражение (1.13) равно $s\Lambda(v,v)$. Итак, форма Λ однозначно определяется числом $\Lambda(v,v)$. Проверку корректности определения формы Λ мы оставляем читателю.

б) В силу инвариантности формы Λ ее ядро N является подмодулем. Допустим, что N — не максимальный подмодуль. Форма Λ индуцирует невырожденнную инвариантную билинейную форму Λ' на модуле M/N. Пусть r — особый вектор в $M\,/\,N$ степени > 0. Тогда
$$\begin{aligned} \Lambda'(L_1^{a_1} \ldots L_k^{a_k} v, r) &= \Lambda'(v, L_{-k}^{a_k} \ldots L_{-1}^{a_1} r) = \\ &= \Lambda(v, 0) = \\ &= 0, \end{aligned}$$
поэтому особый вектор лежит в ядре формы Λ'. Противоречие. ■

Форма Λ называется *билинейной формой Шаповалова*.

Предложение 1.9. Пусть M — модуль со старшим весом (h,c), причем $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда в M существует единственная ненулевая инвариантная эрмитова форма, ее ядро совпадает с максимальным подмодулем в M.

Доказательство аналогично. ■

Инвариантная эрмитова форма называется *эрмитовой формой Шаповалова*.

Важно заметить, что (в случае $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$) матрицы эрмитовой и билинейной форм Шаповалова в $M(h,c)$ в стандартном базисе $L_1^{a_1} \ldots L_p^{a_p} v$ совпадают.

1.12. Формула Каца. Пусть Λ — билинейная форма Шаповалова в $M(h,c)$. Обозначим через D_n определитель матрицы, составленной из чисел

$$\Lambda\left(L_1^{p_1}\dots L_k^{p_k}v, L_1^{s_1}\dots L_m^{s_m}v\right),$$

где v — вектор старшего веса, а $\sum jp_j = \sum js_j = n$.

Теорема 1.10.

$$D_n^2(h,c) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \prod_{\alpha\beta=j} \Phi_{\alpha,\beta}(h,c)^{p(n-j)},$$

где $p(n)$ — число разбиений, а

$$\Phi_{\alpha,\beta}(h,c) = \left(h + \tfrac{c-13}{24}(\beta^2-1) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right)\left(h + \tfrac{c-13}{24}(\alpha^2-1) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right) + \\ + \tfrac{1}{16}(\alpha^2-\beta^2)^2. \qquad (1.14)$$

Следствие. 1.11. Для существования в $M(h,c)$ особого вектора степени $\leqslant k$ необходимо и достаточно, чтобы существовали натуральные числа α,β такие, что $\alpha\beta \leqslant k$, $\Phi_{\alpha,\beta}(h,c) = 0$.

Замечания. Условия

а) существует особый вектор степени k,

б) существуют α,β такие, что $\alpha\beta = k$, $\Phi_{\alpha,\beta}(h,c) = 0$

не равносильны (пример: $h = c = 0$, $k = 5$).

Следствие 1.12. В $M(h,c)$ существует особый вектор степени k тогда и только тогда, когда существуют натуральные $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_n,\beta_n$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j = k, \qquad \Phi_{\alpha_j,\beta_j}\left(h + \sum_{s=1}^{j-1}\alpha_s\beta_s, c\right) = 0.$$

Замечание. На самом деле можно ограничиться случаями $n = 1$ и $n = 2$ (но это уже совсем не очевидно).

1.13. Условия унитаризуемости модулей $L(h,c)$.

Теорема 1.13. Модуль $L(h,c)$ унитаризуем (т. е. эрмитова форма Шаповалова на $L(h,c)$ положительно определена) тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий

а) $h \geqslant 0$, $c \geqslant 1$;

б) $c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$, $h = \frac{(\alpha p - \beta(p+1))^2 - 1}{4p(p+1)}$, где $\alpha,\beta,p \in \mathbb{Z}$, $p \geqslant 2$, $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, $1 \leqslant \beta \leqslant p-1$.

1.14. Литературные замечания. Общую теорию модулей со старшим весом (правда без алгебры Вирасоро) см. [Dixmier (1974)], глава 7, а также [Kac (1983)]. Автору неизвестно, кто ввел «форму Шаповалова» (Кириллов? Хариш-Чандра?). О формуле Каца см. [Kac (1979)], [Фейгин, Фукс (1982)], о подмодулях см. [Feigin, Fuchs (1990)]. В теореме 1.13 необходимость условий унитаризуемости была получена в [Friedan, Qiu, Shenker (1984)] и [Неретин (1983.1)], достаточность — в [Goddard, Kent, Olive (1986)].

Существует обширная литература о классах сопряженных элементов в Diff (см. [Арнольд (1978)]), связи ее с теорией представлений пока не видно.

§ 2. *Вложение* Diff *в бесконечномерную симплектическую группу*

2.1. Пространство V. Пусть H — пространство C^∞-гладких функций на S^1 с *нулевым средним*, т. е. функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0. \qquad (2.1)$$

Это условие равносильно тому, что f имеет однозначную первообразную на окружности. Введем в H скалярное произведение по формуле

$$\langle f,g\rangle = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| f(\varphi_1)\,\overline{g(\varphi_2)}\,d\varphi_1 d\varphi_2. \qquad (2.2)$$

Задача. Покажите, что

$$\ln\left|\sin\tfrac{\varphi}{2}\right| = -\ln 2 - \sum\frac{\cos nx}{n} = -\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{in\varphi}}{|n|}.$$

Вычислим

$$\left\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi}\right\rangle = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| e^{i(n\varphi_1 - m\varphi_2)}d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

($m \neq 0, n \neq 0$). Делая замену $\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi_2 = \varphi_2$, получаем

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\tfrac{\psi_1}{2}\right| e^{in\psi_1}e^{i(n-m)\psi_2}d\psi_1 d\psi_2 = \frac{\delta_{n,m}}{|n|}.$$

Таким образом, функции $e_n(\varphi) = \sqrt{n}\,e^{in\varphi}$ образуют в H ортономированный базис. Отсюда же видно, что скалярное произведение (2.2) положительно определено.

Обозначим через V пополнение H по норме, определяемой скалярным произведением (2.2). Это пространство состоит из (обобщенных) функций

$$f(\varphi) = \sum_{n\neq 0} c_n e^{in\varphi}$$

таких, что

$$\sum\frac{|c_n|^2}{|n|} < \infty.$$

Определим подпространство V_+, состоящее из функций вида $\sum_{n>0} c_n e^{in\varphi}$, и подпространство V_-, состоящее из функций вида $\sum_{n<0} c_n e^{in\varphi}$. Ясно, что $V = V_+ \oplus V_-$. Далее, если $f(\varphi) \in V_+$, то $\overline{f(\varphi)} \in V_-$; таким образом, мы имеем каноническую антилинейную изометрию $V_+ \leftrightarrow V_-$, и тем самым пространство V наделяется структурой объекта категории $\mathbf{Sp}$ (см. п. VI.2.1). Напомним, что в любом объекте категории $\mathbf{Sp}$ канонически определены 2 формы: кососимметричная форма L и эрмитова форма M.

Задача.

а) Докажите, что кососимметричная билинейная форма в объекте V категории $\overline{\mathbf{Sp}}$ задается формулой

$$L(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\int_0^{\varphi} g(\psi)d\psi d\varphi, \tag{2.3}$$

или, что то же самое,

$$L\big(e^{in\varphi},e^{im\varphi}\big)=\frac{1}{n}\,\delta_{n+m,0}. \tag{2.4}$$

б) Каноническая эрмитова форма в V задается формулой

$$M(f,g)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\int_0^{\varphi}\overline{g(\psi)}\,d\psi\,d\varphi, \tag{2.5}$$

или, что то же самое,

$$M\big(e^{in\varphi},e^{im\varphi}\big)=\frac{1}{n}\,\delta_{n,m}. \tag{2.6}$$

Замечание. Подпространство $V_+\subset V$ состоит из функций вида $\sum\limits_{n>0} c_n e^{in\varphi}$. Перейдем к комплексной координате $z=e^{i\varphi}$, тогда $f(z)=\sum\limits_{n>0} c_n z^n$. Такие функции (ввиду условия $\sum\frac{|c_n|^2}{|n|}<\infty$) голоморфны в круге $|z|<1$. Аналогично, подпространство V_- можно рассматривать как пространство функций, голоморфных в диске $|z|>1$ на сфере Римана.

2.2. Вложение Diff **в** $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$**.** Пусть группа Diff действует в V по формуле

$$T(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi). \tag{2.8}$$

Задача. Докажите, что если f — функция с нулевым средним, то и $T(q)f$ — функция с нулевым средним.

Замечание. Может быть, более естественно считать, что элементами пространства V являются не функции f, а точные 1-формы $f(\varphi)\,d\varphi$. Действительно, замена переменной $\varphi\mapsto q(\varphi)$ переводит форму $f(\varphi)\,d\varphi$ в форму

$$f\big(q(\varphi)\big)\,dq(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)\,d\varphi,$$

т. е. мы получаем в точности то же выражение, что и в формуле (2.8).

Задача. Докажите, что оператор $T(q)$ сохраняет кососимметричную форму L, т. е.

$$L\big(T(q)f,T(q)g\big)=L(f,g).$$

Теорема 2.1.

$$T(q)\in\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V).$$

Лемма 2.2. Операторы $T^*(q)T(q)-E$ являются ядерными операторами.

Доказательство леммы. Обозначим $T^*(q)T(q)-E$ через $A(q)$.

$$\big\langle f_1,A(q)f_2\big\rangle=\big\langle T(q)f_1,T(q)f_2\big\rangle-\langle f_1,f_2\rangle=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| f_1\big(q(\varphi_1)\big)\overline{f_2\big(q(\varphi_2)\big)}q'(\varphi_1)q'(\varphi_2)\,d\varphi_1\,d\varphi_2-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| f_1(\varphi_1)\overline{f_2(\varphi_2)}\,d\varphi_1\,d\varphi_2.$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменных $\psi_1=q(\varphi_1)$, $\psi_2=q(\varphi_2)$, а во втором — $\psi_1=\varphi_1$, $\psi_2=\varphi_2$. Обозначая диффеоморфизм, обратный к q, через p, получаем, что наше выражение равно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{p(\psi_1)-p(\psi_2)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)}\right| f(\psi_1)\overline{f(\psi_2)}\,d\psi_1\,d\psi_2.$$

Обозначим выражение $\ln|\ldots|$ через $K(\psi_1,\psi_2)$. Легко видеть, что функция $K(\psi_1,\psi_2)$, определенная при $\psi_1\neq\psi_2$, может быть доопределена до C^∞-гладкой функции на всем торе $S^1\times S^1$, а именно, для этого нужно положить $K(\psi,\psi)=\ln p'(\psi)$.

Разложим функцию $K(\psi_1,\psi_2)$ в ряд Фурье:

$$K(\psi_1,\psi_2)=\sum b_{m,n}e^{im\psi_1}e^{in\psi_2}.$$

Так как K является C^∞-гладкой, ее коэффициенты Фурье быстро убывают, т. е.

$$b_{m,n}=o\big((n^2+m^2)^{-N}\big),\quad n^2+m^2\to\infty$$

для любого N. Обозначим через $a_{m,n}$ матричные элементы матрицы $A(q)$ в базисе $e_j=\sqrt{|j|}\exp(ij\varphi)$. Легко видеть, что

$$a_{m,n}=\sqrt{mn}\,b_{m,n},$$

и, тем самым, числа $a_{m,n}$ быстро убывают. (В частности, $A(q)$ содержится во всех классах Шаттена $\mathscr{L}_p$ ($p>0$), а не только в $\mathscr{L}_1$.) ■

Доказательство теоремы 2.1. Теорема является легким следствием леммы. Действительно, матрица $T(q)$ как матрица оператора $V_+\oplus V_-\to V_+\oplus V_-$ имеет вид $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$. Эта матрица псевдоунитарна, т. е. сохраняет эрмитову форму (2.6), матрица которой в базисе e_j равна $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, в частности,

$$\Phi^*\Phi-\Psi^{t}\overline{\Psi}=E. \tag{2.9}$$

С другой стороны, $T^*(q)T(q)-E$ — ядерный оператор. Но $T^*(q)T(q)$ имеет вид

$$T^*(q)T(q)=\begin{pmatrix}\Phi^* & \Psi^{t}\\ \Psi^* & \Phi^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi^*\Phi+\Psi^{t}\overline{\Psi} & \ldots\\ \ldots & \ldots\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\Phi^*\Phi+\Psi^{t}\overline{\Psi}-E$ — ядерный оператор. Учитывая (2.9), получаем, что $\Psi^{t}\overline{\Psi}$ — ядерный оператор, т. е. Ψ — оператор Гильберта—Шмидта. ■

Ограничивая представление Вейля группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(V)$ на группу Diff, мы получаем унитарное проективное представление группы Diff. Мы будем обозначать его через N.

2.3. Действие алгебры Ли. Посмотрим, что означает наша конструкция на уровне алгебры Ли. Пусть $\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ — векторное поле на окружности. Действие алгебры $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ в V, соответствующее действию (2.8), задается формулой

$$\tau\Big(\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)f(\varphi) = \alpha(\varphi)f'(\varphi) + \alpha'(\varphi)f(\varphi), \tag{2.10}$$

или

$$L_n e^{ik\varphi} = (n+k)\,e^{i(n+k)\varphi}.$$

Переходя к ортонормированному базису $e_k = \sqrt{|k|}e^{ik\varphi}$, получаем

$$L_n e_k = \sqrt{|k(n+k)|}\,\mathrm{sgn}(n+k)e_{n+k}.$$

Далее, заметим, что операторы L_j лежат в алгебре $\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}$ из п. VI.5.3, поэтому к ним применима формально-алгебраическая конструкция п. VI.5.3. Это дает нам следующие квадратичные операторы в пространстве многочленов от переменных $z_1, z_2, \ldots$:

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j(k+j)}z_{k+j}\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k-1}\sqrt{p(k-p)}\,z_p z_{k-p},\\ L_0 &= \sum_{j=1}^{\infty} j z_j\frac{\partial}{\partial z_j},\\ L_{-k} &= \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j(j+k)}z_j\frac{\partial}{\partial z_{j+k}} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k-1}\sqrt{p(k-p)}\,\frac{\partial}{\partial z_p}\frac{\partial}{\partial z_{k-p}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $k > 0$.

Применение формулы (VI.5.10) дает следующие коммутационные соотношения:

$$[L_k, L_n] = (n-k)L_{n+k} + \frac{n^3-n}{12}\,\delta_{n,-k}.$$

Далее, легко видеть, что вакуумный вектор является особым вектором веса $(h,c) = (0,1)$. Его циклическая оболочка H является неприводимым (см. Предварительные сведения, лемму 5.5) унитаризуемым представлением Vir, и поэтому $H \simeq L(0,1)$.

Замечание. Весовые подпространства представления N имеют размерности $p(n)$ такие же, как и у универсального модуля $M(0,1)$. Поэтому факторы ряда Жордана—Гельдера у N и $M(0,1)$ одинаковы. Известно, что факторы ряда Жордана—Гельдера $M(0,1)$ суть $L(n^2,1)$, поэтому

$$N = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L(n^2,1).$$

2.4. Соответствие «группа Ли — алгебра Ли». Мы хотим показать, что конструкция п. 2.3 для алгебры Ли Vir в каком-нибудь точном смысле слова соответствует конструкции п. 2.2 для «группы Ли» Diff.

Пусть $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \in \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$, пусть g_t — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t(\varphi) = v(g_t(\varphi)).$$

Пусть $S(v)$ — оператор в пространстве Фока, соответствующий $v(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Мы хотим доказать, что операторы $\mathrm{we}(g_t)$ и $\exp(tS(v))$ совпадают с точностью до умножения на константу.

Учитывая теорему Березина VI.5.7, мы должны доказать следующее утверждение.

Предложение 2.3. Пусть $\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \in \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$. Тогда оператор $T = \tau\Big(\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$ как оператор из $V = V_+ \oplus V_-$ в $V = V_+ \oplus V_-$ имеет матрицу вида

$$\begin{pmatrix} iA & C \\ \overline{C} & -i\overline{A} \end{pmatrix},$$

где A — существенно самосопряженный оператор, а $C = C^t$ — оператор Гильберта—Шмидта.

Доказательство. Оператор T определен на пространстве $C^\infty(S^1)$ и переводит его в себя. Вычислим $T^* + T$:

$$\big\langle (T^*+T)f, g\big\rangle = \langle Tf, g\rangle + \langle f, Tg\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \ln\Big|\sin\Big(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\Big)\Big| \Big(\alpha(\varphi_1)f'(\varphi_1) + \alpha'(\varphi_1)f(\varphi_1)\Big)\overline{g(\varphi_2)}\,d(\varphi_1)\,d(\varphi_2) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \ln\Big|\sin\Big(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\Big)\Big|\, f(\varphi_1)\Big(\alpha(\varphi_2)\overline{g'(\varphi_2)} + \alpha'(\varphi_2)\,\overline{g(\varphi_2)}\Big)d\varphi_2\,d\varphi_1.$$

Произведя интегрирование по частям (оно требует некоторого обоснования) в обоих интегралах, получаем в итоге

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\Big[\mathrm{ctg}\Big(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\Big)\Big(\alpha(\varphi_1)-\alpha(\varphi_2)\Big)\Big]\,f(\varphi_1)\overline{g(\varphi_2)}\,d\varphi_1\,d\varphi_2.$$

Обозначим через $\Theta(\varphi_1,\varphi_2)$ выражение в квадратных скобках. Оно формально не определено при $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Однако, полагая $\Theta(\varphi,\varphi) = 2\alpha'(\varphi)$, мы получаем, что Θ является C^∞-гладкой функцией на всем торе $S^1 \times S^1$. Итак, $T^* + T$ — оператор Гильберта—Шмидта.

Далее, покажем, что оператор $R = i\big(T - \frac{1}{2}(T^*+T)\big)$ существенно самосопряжен на подпространстве $C^\infty(S^1)$. Идея доказательства самосопряженности оператора R проста. Оператор $T = \tau\Big(\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$ порождает однопараметрическую группу операторов

$$L(t)f(\varphi) = f\big(q_t(\varphi)\big)\,q_t'(\varphi),$$

где q_t — поток векторного поля $\alpha(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Оператор R является слабым возмущением оператора T, и поэтому естественно думать (см. предложение VI.5.1), что R тоже порождает однопараметрическую группу операторов. Но оператор R, очевидно, симметрический. Поэтому естественно думать, что он самосопряжен, а порождаемая им полугруппа унитарна.

Покажем сначала, что семейство операторов $L(t)$ сильно непрерывно. Пусть $t_j \to t$. Тогда

$$\left\|L(t_j)f - L(t)f\right\|^2 = \iint \ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| \times$$
$$\times \Big(f\big(q_{t_j}(\varphi_1)\big)\overline{f\big(q_{t_j}(\varphi_2)\big)}q'_{t_j}(\varphi_1)q'_{t_j}(\varphi_2) +$$
$$+ f\big(q_t(\varphi_1)\big)\overline{f\big(q_t(\varphi_2)\big)}q'_t(\varphi_1)q'_t(\varphi_2) -$$
$$- 2\operatorname{Re} f\big(q_{t_j}(\varphi_1)\big)\overline{f\big(q_t(\varphi_2)\big)}q'_{t_j}(\varphi_1)q'_t(\varphi_2)\Big)d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

Покажем, что подынтегральное выражение стремится к 0 при $t_j \to t$. Если f непрерывна, законность предельного перехода под знаком интеграла при $j \to \infty$ вытекает из теоремы Лебега о мажорированной сходимости (см., например, [Riesz, Sz.-Nagy (1979)], п. 19, или [Колмогоров, Фомин (1981)]). Пусть $g \in V$ произвольна, а f непрерывна, причем $\|f - g\| < \varepsilon$. Тогда

$$\left\|L(t_j)g - L(t)g\right\| \leqslant \left\|L(t_j)(g-f)\right\| + \left\|L(t_j)f - L(t)f\right\| + \left\|L(t)(f-g)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|L(t_j)\| + \left\|L(t_j)f - L(t)f\right\| + \varepsilon\|L(t)\|.$$

Поэтому для доказательства непрерывности $L(t)$ нам остается убедиться в том, что $\|L(t)\|$ ограничена на каждом конечном интервале. Пусть $A_t = L^*(t)L(t) - E$. Покажем, что гильберт-шмидтовская норма оператора A_t локально ограничена. Пусть $K(\psi_1, \psi_2) = K_t(\psi_1, \psi_2)$ — та же функция, что и в доказательстве теоремы 2.1. Легко видеть, что гильберт-шмидтовская норма оператора A_t в обозначениях доказательства теоремы 2.1 равна

$$\sum |a_{m,n}|^2 = \sum mn|b_{m,n}|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum m^2n^2|b_{m,n}|^2 =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial^2 K_t(\psi_1,\psi_2)}{\partial\psi_1\partial\psi_2}\right|^2 d\psi_1 d\psi_2,$$

а это число непрерывно зависит от t.

Итак, $L(t)$ — сильно непрерывная группа, и мы можем применить к ней замечание к предложению V.5.1. Следовательно, оператор $R = i\big(T - \frac{1}{2}(T^* + T)\big)$ является генератором некоторой однопараметрической группы операторов $U(t)$. Оператор $T^* + T$ имеет гладкое ядро и поэтому переводит пространство $C^\infty(S^1)$ в себя. Поэтому и R переводит $C^\infty(S^1)$ в себя. Обозначим через R_0 ограничение оператора R на $C^\infty(S^1)$. Очевидно, оператор R_0 — симметрический. В силу R-инвариантности пространства $C^\infty(S^1)$ замыкание оператора R_0 есть R (см. [Reed, Simon (1975)], теорема X.49). Поэтому R — симметрический на своей области определения. Далее, для любой f из области определения R

$$\frac{d}{dt}\big\langle U(t)f, U(t)f\big\rangle = \big\langle RU(t)f, U(t)\big\rangle + \big\langle U(t), RU(t)f\big\rangle = 0,$$

т. е. операторы $U(t)$ унитарны, поэтому R самосопряжен.

Итак, T — сумма самосопряженного оператора и оператора Гильберта—Шмидта, что и является основным утверждением предложения. Остается лишь показать, что

$$L(Tf, g) + L(f, Tg) = 0, \tag{2.12}$$

т. е. оператор T лежит в симплектической алгебре.

Задача. Проверьте тождество (2.12).

Учитывая, что в базисе $e_1(\varphi), e_2(\varphi), \ldots, e_{-1}(\varphi), e_{-2}(\varphi), \ldots$ (см. п. 2.1.) матрица формы L имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, мы получаем, что

$$T\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} T^{\mathrm{t}} = 0. \tag{2.13}$$

Пусть $T = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}$. Тогда равенство (2.13) влечет $U = -X^{\mathrm{t}}$, $Y = Y^{\mathrm{t}}$, $Z = Z^{\mathrm{t}}$. С другой стороны, оператор T сохраняет подпространство вещественных функций в V, т. е. подпространство элементов вида $(f, \bar{f}) \in V_+ \oplus V_-$, поэтому $X + \overline{U} = 0$, $Z = \overline{Y}$. Это завершает доказательство теоремы. ■

2.5. Замечания. Универсальная бозонная конструкция. Фиксируем комплексные числа α, β. Поставим в соответствие каждому $q \in \mathrm{Diff}$ аффинное преобразование $T_{\alpha,\beta}(q)$ пространства V, задаваемое формулой

$$T_{\alpha,\beta}(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))q'(\varphi) + \alpha(q'(\varphi) - 1) + \frac{\beta q''(\varphi)}{q'(\varphi)}. \tag{2.14}$$

Легко видеть, что

$$T_{\alpha,\beta}(q_1)T_{\alpha,\beta}(q_2) = T_{\alpha,\beta}(q_1q_2).$$

Таким образом, мы получили двухпараметрическую серию вложений группы Diff в группу $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V)$. В случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, группа Diff попадает в группу $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V)$. Ограничивая представление Вейля группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}}(V)$ на Diff, мы получаем серию проективных представлений Diff. Эту серию мы обозначим через $N_{\alpha,\beta}$. При этом в случае $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ представления $N_{\alpha,\beta}$ унитарны. В случае, когда хотя бы один из параметров α, β не является вещественным, операторы $N_{\alpha,\beta}(q)$, вообще говоря, не ограничены.

Применяя далее формулу (VI.5.18), мы получаем следующий набор квадратичных операторов в пространстве многочленов от переменных $z_1, z_2, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_k &= \sum_{j>0} \sqrt{k(k+j)}z_{j+k}\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{0<p<k}\sqrt{p(k-p)}\,z_{k-p}z_p + (\alpha + i\beta k)\sqrt{k}\,z_k,\\
\tilde{L}_0 &= \sum_{j>0} jz_j\frac{\partial}{\partial z_j},\\
\tilde{L}_{-k} &= \sum_{j>0}\sqrt{k(j+k)}\,z_j\frac{\partial}{\partial z_{j+k}} + \frac{1}{2}\sum_{0<p<k}\sqrt{p(k-p)}\,\frac{\partial}{\partial z_{k-p}}\frac{\partial}{\partial z_p} + (\alpha - i\beta k)\sqrt{k}\,\frac{\partial}{\partial z_k},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $k > 0$.

Вычисляя коммутаторы с помощью формулы (VI.5.21), мы получаем

$$\big[\tilde{L}_k, \tilde{L}_m\big] = (m-k)\tilde{L}_{m+k} + \left(\frac{m^3-m}{12}(1 + 12\beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)\delta_{m,-k}E.$$

Чтобы перейти к коммутационным соотношениям вида (1.5), мы должны рассмотреть новые операторы

$$L_0 := \tilde{L}_0 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad L_{\pm k} := \tilde{L}_{\pm k}.$$

Тогда

$$[L_k, L_m] = (m-k)L_{m+k} + \frac{m^3-m}{12}(1+12\beta^2)\delta_{m,-k}E.$$

Итак, мы получили представление алгебры Вирасоро с $c = 1+12\beta^2$. При этом вакуумный вектор $f(z)=1$ является особым вектором веса

$$(h,c) = \left(\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2), 1+12\beta^2\right). \tag{2.16}$$

Заметим, что любые комплексные (h,c) могут быть представлены в таком виде, поэтому в семействе модулей $N_{\alpha,\beta}$ реализуются все возможные старшие веса.

Далее, размерности весовых подпространств в $N_{\alpha,\beta}$ и $M\left(\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2), 1+12\beta^2\right)$ одинаковы, поэтому они имеют одни и те же факторы в ряде Жордана—Гельдера.

В случае $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ мы получаем унитарное представление алгебры Вирасоро (относительно обычного скалярного произведения (см. VI.1) в пространстве голоморфных функций от $z_1, z_2, \ldots$); удивительно, но эта конструкция дает не всю непрерывную серию, а лишь угол на рис. 2.

Даже в этой модели много неизвестного. В частности, неизвестны ответы на следующие вопросы.

1) Найти явную формулу для сплетающих операторов $N_{\alpha,\beta}\to N_{\alpha,-\beta}$.

2) Пусть (α,β) соответствует точке из угла NAC на рис. 2. Найти Vir-инвариантное произведение в пространстве Фока (обычное скалярное произведение в пространстве Фока не является Diff-инвариантным).

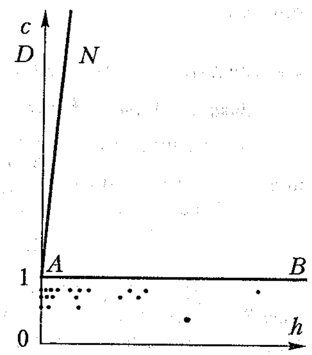

Рис. 2. Непрерывная серия унитарных представлений Vir занимает угол BAD. Дискретная серия лежит на прямых $c=0$, $c=\frac{1}{2}$, $c=\frac{7}{10}$, $c=\frac{4}{5}, \ldots$ (на k-й прямой лежит $\frac{k(k+1)}{2}$ точек). Прямая AN задается уравнением $c=1+24h$. У представлений непрерывной серии из угла NAB известны явные конструкции (см. пп. 2.5, 3.3). Кроме того, явные конструкции известны у представлений $L(0,0)$, $L\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{16},\frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (см. п. 3.5).

2.6. Литературные замечания. Формулы (2.11) и (2.15) становятся проще, если ввести операторы

$$a_k f = \sqrt{k} z_k f, \quad a_{-k} f = \sqrt{k}\,\frac{\partial}{\partial z_k} f,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$[a_k, a_l] = l\delta_{k+l,0}.$$

Тогда (2.11) меняется на

$$L_k = \frac{1}{2}\sum_{j\neq 0,k} : a_j a_{k-j} :, \tag{2.17}$$

где двоеточия обозначают виковский символ, т.е. операторы рождения (a_s при $s>0$) ставятся впереди операторов уничтожения (a_s при $s<0$). Соответственно, упрощаются и формулы (2.15).

Операторы L_0, L_{-1}, L_1 образуют вполне банальное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Если я не ошибаюсь, Вирасоро [Virasoro (1970)] выписал аналогичные формулы для произвольных операторов L_k и обнаружил, что они удовлетворяют хорошим соотношениям коммутации.

Формулы (2.15) обнаруживались независимо разными авторами, и я затрудняюсь сказать, кто был первым. Представление Diff из п. 2.2 было построено независимо в 1979–80 гг. Г. Сигалом (см. [Segal G. B (1981)]), автором (см. [Неретин (1982)]) и Исмагиловым ([Ismagilov (1983)]). Вложение Diff в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Spa}}} V$ построено в [Неретин (1983)].

§ 3. *Вложения* Diff *в бесконечномерную ортогональную группу*

3.1. Пространство H. Рассмотрим пространство $H = L^2(S^1)$. Рассмотрим в $L^2(S^1)$ подпространство H_+, состоящее из функций вида $\sum_{k\geqslant 0} c_k e^{ik\varphi}$, и подпространство H_-, состоящее из функций вида $\sum_{k<0} c_k e^{ik\varphi}$. Тем самым, мы ввели в H структуру объекта категории $\overline{\mathrm{GA}}$ (см. п. IV.3.1).

Замечание. Пространство H_+, конечно, отождествляется с пространством Харди H^2 в круге $|z|\leqslant 1$.

Рассмотрим в пространстве H следующий интегральный оператор

$$If(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\psi)\,d\psi. \tag{3.1}$$

Этот интеграл, конечно, расходится, и его следует понимать в смысле главного значения:

$$If(\varphi) := \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[0,2\pi]\setminus(\varphi-\varepsilon;\varphi+\varepsilon)} \operatorname{ctg}\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\psi)\,d\psi,$$

и тогда, по крайней мере, для функций f гладкости C^1, интеграл (3.1) определен.

Оператор I — хорошо известное в анализе *преобразование Гильберта*.

Задача. Докажите, что

$$Ie^{in\varphi} = \begin{cases} ie^{in\varphi}, & n>0,\\ 0, & n=0,\\ -ie^{in\varphi}, & n<0.\end{cases}$$

Отсюда видно, что I продолжается по непрерывности до ограниченного оператора во всем пространстве $H \simeq L^2(S^1)$.

Лемма 3.1. Пусть R — ограниченный обратимый оператор в H. Тогда следующие условия равносильны:

а) $R \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$;

б) $[R, I] = RI - IR$ — оператор Гильберта—Шмидта.

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ — матрица R как оператора $H_+\oplus H_- \to H_+\oplus H_-$. Оператор R содержится в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ тогда и только тогда, когда B, C — операторы Гильберта—Шмидта. Пусть P_0 — проектор на (одномерное) пространство констант в H. Тогда $\tilde I := I + iP_0$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} i & \\ & -i\end{pmatrix} : V_+\oplus V_- \to V_+\oplus V_-$. Поэтому

$$[R,\tilde I] = R\tilde I - \tilde I R = 2i\begin{pmatrix} 0 & B\\ C & 0\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, $[R,\tilde I] - [R, I] = [R, P_0]$ — ограниченный оператор ранга $\leqslant 2$, поэтому условия «$[R,\tilde I]$ — оператор Гильберта—Шмидта» и «$[R, I]$ — оператор Гильберта—Шмидта» равносильны. Теперь утверждение становится очевидным. ■

3.2. Вложения Diff **в** $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$. Пусть $s \in \mathbb{C}$. Рассмотрим следующее действие Diff в H:

$$P_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2+is}, \tag{3.2}$$

где $q \in \mathrm{Diff}$.

Теорема 3.2. $P_s(q) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$.

Доказательство. Итак, мы хотим проверить, что $[P_s(q), I]$ — оператор Гильберта—Шмидта, т.е. что ядро оператора $[P_s(q), I]$ является функцией с суммируемым квадратом. Действительно,

$$[P_s(q), I]f(\varphi) = P_s(q)If(\varphi) - IP_s(q)f(\varphi) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\Big(\frac{q(\varphi)-\psi}{2}\Big) f(\psi)\, d\psi\, q'(\varphi)^{1/2+is} -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\Big(\frac{\varphi-\psi}{2}\Big) f\big(q(\psi)\big)\, q'(\psi)^{1/2+is} d\psi.$$

Сделаем в первом интеграле замену $\psi = q(\theta)$, а во втором $\psi = \theta$. Получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\mathrm{ctg}\Big(\frac{q(\varphi)-q(\theta)}{2}\Big)q'(\varphi)^{1/2+is}q'(\theta) - \mathrm{ctg}\Big(\frac{\varphi-\theta}{2}\Big)q'(\theta)^{1/2+is}\Big] f\big(q(\theta)\big)\, d\theta.$$

Обозначим через $K(\varphi,\theta)$ выражение, стоящее в квадратных скобках.

Лемма 3.3. Функция $K(\varphi,\theta)$ ограничена.

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{K}(\varphi,\theta) = \sin\Big(\frac{\varphi-\theta}{2}\Big)^{-1} K(\varphi,\theta).$$

Легко видеть, что $K(\varphi,\theta)$ — гладкая функция, причем $K(\varphi,\varphi) = 0$, что и доказывает лемму. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Оператор $[P_s(q), I]$, таким образом, представлен в виде произведения YX двух операторов

$$Xf(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big),$$
$$Yg(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int K(\varphi,\psi) g(\psi)\, d\psi.$$

Оператор Y, как мы только что показали, является оператором Гильберта—Шмидта (т.к. $\iint |K(\varphi,\psi)|^2 < \infty$), а X является композицией $X = ZU$ унитарного оператора

$$U : f \mapsto f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2}$$

и ограниченного оператора

$$Z : g(\varphi) \mapsto g(\varphi)\, q'(\varphi)^{-1/2}.$$

Тем самым, оператор X ограничен, а значит, YX — оператор Гильберта—Шмидта. ■

Ограничивая спинорное представление $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ на группу Diff, мы получаем серию проективных представлений группы Diff. В случае, если $s \in \mathbb{R}$, образ Diff попадает в группу $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ и, следовательно, наши представления оказываются унитарными.

3.3. Замечания. Универсальная фермионная конструкция. Пусть группа $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$ (универсальная накрывающая группы Diff) действует на $\mathbb{R}$ так, как описано выше (п. 1.4). Пусть $\alpha, s \in \mathbb{C}$. Рассмотрим пространство H_α функций $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$f(x + 2\pi) = e^{2\pi i\alpha} f(x),$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Введем в H_α структуру объекта категории $\overline{\mathrm{GA}}$, положив, что подпространство H_α^+ натянуто на векторы $e^{i(n+\alpha)\varphi}$ при $n \geqslant 0$, а H_α^- — на векторы $e^{i(n+\alpha)\varphi}$ при $n < 0$.

Замечание. Если $\alpha = 0$, то пространство H_α является пространством 2π-периодических функций, и его естественно рассматривать как пространство функций на окружности. В итоге мы получаем пространство H из п. 3.1. Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то пространство H_α удобно рассматривать как пространство нечетных функций на окружности длины 4π, т.е. функций, удовлетворяющих условию $g(\varphi + 2\pi) = -g(\varphi)$.

Замечание. Ясно, что пространства H_α и $H_{\alpha+1}$ как гильбертовы пространства совпадают. Структуры объектов категории $\overline{\mathrm{GA}}$ в них, правда, формально различны, но тождественное отображение $H_\alpha \to H_{\alpha+1}$ является изоморфизмом категории $\overline{\mathrm{GA}}$.

Пусть группа Diff действует в H_α по формуле

$$T_{\alpha,s}(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2+is},$$

где $s \in \mathbb{C}$.

Задача. Покажите, что при $\alpha, s \in \mathbb{R}$ операторы $T_{\alpha,s}(q)$ унитарны. Покажите, что при произвольных $\alpha, s \in \mathbb{C}$ операторы $T_{\alpha,s}(q)$ ограничены.

Задача. Докажите, что

$$T_{\alpha,s}(q) \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H_\alpha).$$

Действие алгебры Ли $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, соответствующее действию $T_{\alpha,s}$ группы $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$, задается формулой

$$\tau_{\alpha,s}\Big(\varkappa(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)f(\varphi) = \Big(\varkappa(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)\varkappa'(\varphi)\Big)f(\varphi),$$

или

$$L_n e^{i(k+\alpha)\varphi} = \big(k + \alpha + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)n\big)e^{i(k+n+\alpha)\varphi}.$$

Теперь, применяя формулу (VI.5.27), мы получаем следующий набор фермионных квадратичных операторов

$$\widetilde{L}_n^{(f)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\big(k + \alpha + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)n\big){:}b_{k+n}b_k^*{:}$$

Перепишем их, не используя символа «: :»:

$$\widetilde{L}_n^{(f)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\big(k + \alpha + \big(\tfrac{1}{2} + is\big)n\big)b_{k+n}b_k^* \quad \text{при} \quad n \neq 0,$$
$$\widetilde{L}_0^{(f)} = -\sum_{k<0}(k+\alpha)b_k^*b_k + \sum_{k\geqslant 0}(k+\alpha)b_kb_k^*. \tag{3.3}$$

Формула (VI.5.28) дает

$$\big[\tilde L_n^{(f)}, \tilde L_m^{(f)}\big] = (m-n)\tilde L_{m+n}^{(f)} + \Big(\tfrac{m^3-m}{12}(1+12s^2) + m\big(\big(\alpha-\tfrac12\big)^2+s^2\big)\Big)\delta_{m,-n}\cdot E.$$

Этот набор операторов удобно чуть-чуть изменить:

$$L_0^{(f)} := \tilde L_0^{(f)} + \tfrac12\big(\big(\alpha-\tfrac12\big)^2+s^2\big)\cdot E; \quad L_n^{(f)} := \tilde L_n^{(f)}.$$

Тогда мы получаем обычные коммутационные соотношения алгебры Вирасоро

$$\big[L_n^{(f)}, L_m^{(f)}\big] = (m-n)L_{m+n}^{(f)} + \tfrac{m^3-m}{12}(1+12s^2)\delta_{m,-n}\cdot E.$$

Далее, рассмотрим подпространства $\Lambda^{(\sigma)}$, такие же, как в п. VI.5.8; эти подпространства являются Vir-инвариантными. В каждом из подпространств $\Lambda^{(\sigma)}$ легко указать по одному особому вектору $f_\sigma(\xi)$:

$$\begin{aligned} f_0(\xi) &= 1,\\ f_\sigma(\xi) &= \xi_0\ldots\xi_{\sigma-1} \quad\text{при}\quad \sigma>0,\\ f_{-\sigma}(\xi) &= \xi_{-1}\ldots\xi_{-\sigma} \quad\text{при}\quad \sigma<0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Старшие веса этих векторов равны

$$\begin{aligned} h &= \tfrac12\big(\big(\alpha+\sigma-\tfrac12\big)^2+s^2\big),\\ c &= 1+12s^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что в случае $\alpha\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$ наше представление алгебры Vir унитарно по построению, и мы получаем серию унитарных представлений Vir. Однако фермионная конструкция унитарных представлений дает в точности те же старшие веса, что и бозонная конструкция п. 2.5. Более того, формулы (2.16) и (3.5) подозрительно похожи друг на друга. В добавлении, посвященном бозон-фермионному соответствию, мы увидим, что это не случайно.

3.4. Замечания. Вырожденные фермионные конструкции. Рассмотрим сначала пространство $H_{1/2}\in \mathrm{Ob}(\mathbf{GA})$. Операция комплексного сопряжения $f(\varphi)\mapsto \overline{f(\varphi)}$ является антилинейной изометрией $H_{1/2}^+\to H_{1/2}^-$. Таким образом, $H_{1/2}$ становится объектом категории $\overline{\mathbf{GD}}$.

Симметричная билинейная форма в $H_{1/2}$ задается формулой

$$\{f,g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)g(\varphi)\,d\varphi.$$

В пространстве $H_{1/2}$ действует двулистная накрывающая $\mathrm{Diff}^{(2)}$ группы Diff (см. п. 1.4) по формуле

$$T_{1/2,0}(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2}, \tag{3.6}$$

где $q\in\mathrm{Diff}^{(2)}$. Эти операторы лежат в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{GA}}}$ и коммутируют с комплексным сопряжением. Следовательно, они сохраняют структуру объекта категории $\overline{\mathbf{GD}}$. Итак, мы получили вложение $\mathrm{Diff}^{(2)}$ в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{GD}}}(H_{1/2})$. Более того, операторы (3.6) унитарны, и поэтому образ группы $\mathrm{Diff}^{(2)}$ на самом деле содержится в $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{GD}}}(H_{1/2})$. Ограничивая спинорное представление группы $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{GD}}}(H_{1/2})$ на $\mathrm{Diff}^{(2)}$, мы получаем унитарное проективное представление группы Diff.

Запишем формулы для соответствующего действия алгебры Ли Vect в фермионном пространстве Фока. Введем антикоммутирующие переменные $\xi_{1/2},\xi_{3/2},\xi_{5/2},\ldots$. Тогда ($n>0$)

$$\begin{aligned} L_n &= \sum\big(\alpha+\tfrac n2\big)\xi_{\alpha+n}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} + \frac14\sum_{\alpha+\beta=n}(\alpha-\beta)\xi_\alpha\xi_\beta,\\ L_0 &= \sum \alpha\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha},\\ L_{-n} &= \sum\big(\alpha+\tfrac n2\big)\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha+n}} + \frac14\sum_{\alpha+\beta=n}(\alpha-\beta)\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}. \end{aligned}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \tfrac{n^3-n}{12}\cdot\tfrac12\,\delta_{m,-n}\cdot E.$$

Далее, подпространства Λ^+ и Λ^-, состоящие соответственно из четных и нечетных функций, очевидно, Vir-инвариантны. Векторы $1\in\Lambda_+$ и $\xi_{1/2}\in\Lambda_-$, как легко видеть, являются особыми векторами (их веса равны соответственно $(h,c)=\big(0,\frac12\big)$ и $\big(\frac12,\frac12\big)$). Поэтому их Vir-циклические оболочки являются модулями $L\big(0,\frac12\big)$ и $L\big(\frac12,\frac12\big)$. На самом деле $\Lambda_+\simeq L\big(0,\frac12\big)$, $\Lambda_-\simeq L\big(\frac12,\frac12\big)$, но доказательство этого требует привлечения дополнительных соображений.

Перейдем к рассмотрению другой «вырожденной конструкции». Рассмотрим пространство $H_0\simeq L^2(S^1)$ и снабдим его структурой объекта категории $\overline{\mathbf{B}}$. Для этого представим H_0 в виде $H_0 = H_0^-\oplus H_0^0\oplus H_0^+$, где H_0^- состоит из функций вида $\sum_{k<0} c_k e^{ik\varphi}$, H_0^+ — из функций $\sum_{k>0} c_k e^{ik\varphi}$, а H_0^0 — из констант. Антилинейная изометрия $H_0^+\to H_0^-$ есть обычная операция комплексного сопряжения. Симметричная билинейная форма в H_0 задается формулой

$$\{f,g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)g(\varphi)\,d\varphi.$$

Далее, группа Diff действует в H_0 преобразованиями

$$T(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{1/2}.$$

Несложно убедиться, что $T(q)\in \mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{B}}}(H_0)$. Ограничивая спинорное представление группы $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{B}}}(H_0)$ на Diff, мы получаем унитарное проективное представление Diff.

На уровне алгебры Ли оно задается формулами

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k>0}\big(k+\tfrac n2\big)\xi_{k+n}\frac{\partial}{\partial\xi_k} + \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\big(k-\tfrac n2\big)\xi_k\xi_{n-k} + \tfrac n2\xi_n,\\ L_0 &= \sum k\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_k} + \frac1{16},\\ L_{-n} &= \sum_{k>0}\big(k+\tfrac n2\big)\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_{k+n}} + \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\big(k-\tfrac n2\big)\frac{\partial}{\partial\xi_{n-k}}\frac{\partial}{\partial\xi_k} + \frac n2\frac{\partial}{\partial\xi_n}, \end{aligned}$$

где k,n — целые, $n>0$.

Легко видеть, что функция $f(\xi)=1$ является особым вектором веса $(h,c)=\big(\frac1{16},\frac12\big)$. Можно показать, что наше представление неприводимо, и, тем самым, изоморфно $L\big(\frac1{16},\frac12\big)$.

3.5. Замечания. Теорема интегрируемости. Итак, мы получили явные конструкции унитарных представлений Diff, соответствующие модулям $L(h,c)$ при

а) $1\leqslant c\leqslant 24h+1$;

б) $c=\frac12$; $h=0,\ \frac1{16},\ \frac12$;

в) $h=0$, $c=0$ (это одномерное представление).

Еще кое-что может быть получено с помощью тензорных произведений. Легко видеть, однако, что мы таким образом не получаем всех (h,c), при которых $L(h,c)$ унитаризуем.

Теорема 3.4. Любой унитаризуемый модуль $L(h,c)$ интегрируется до унитарного проективного представления группы Diff.

Такая формулировка теоремы не совсем аккуратна, и нужно поточнее сказать, что значит слово «интегрируется». Сейчас мы перечислим точно свойства соответствия между представлением $l=L(h,c)$ алгебры Vect и соответствующим представлением ρ группы Diff (см. [Goodman, Wallach (1985)]).

1. Обозначим через N пополнение модуля $L(h,c)$ по этому инвариантному скалярному произведению. Назовем вектор $v \in N$ гладким, если v содержится в области определения всех операторов L_0^k, $k > 0$. Тогда для любого гладкого векторного поля $v = \sum c_n e^{in\varphi} \frac{\partial}{i\partial\varphi}$ оператор (неограниченный) $l(v) = \sum c_n L_n$ переводит пространство гладких векторов в себя (это простое утверждение).

2. Для любого элемента $v = \sum c_n L_n \in \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$ оператор $l(v) = \sum c_n L_n$ в N существенно самосопряжен и

$$\exp\bigl(tl(v)\bigr) = \lambda(t)\rho_{h,c}\bigl(\exp(tv)\bigr),$$

где ρ — представление группы Diff, а $|\lambda(t)| = 1$.

3. Для любого $g \in \mathrm{Diff}$ и любого $v = p(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \in \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$ выполнено

$$l\bigl(\mathrm{Ad}(g)v\bigr) = \mu(g,v)\rho(g)^{-1}l(v)\rho(g),$$

где $\mu(g,v)$ — комплексное число, по модулю равное 1, а через $\mathrm{Ad}(g)v$ обозначен образ векторного поля v под действием диффеоморфизма g (т. е. $\mathrm{Ad}(g)\left(p(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = p\bigl(g(\varphi)\bigr)g'(\varphi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\varphi}$).

Доказательство этой теоремы основано на простой и красивой идее. Для тех модулей, для которых у нас есть явная конструкция, высказывание проверяется без труда. После этого достаточно доказать следующее утверждение: пусть модули $L(h_1,c_1)$ и $L(h_2,c_2)$ унитаризуемы. Тогда интегрируемость $L(h_1,c_1) \otimes L(h_2,c_2)$ и $L(h_1,c_1)$ влечет интегрируемость $L(h_2,c_2)$. Проверка этого высказывания в принципе несложна, но требует некоторого труда. ■

Теорема 3.5. Любое (не обязательно унитарное) представление $L(h,c)$ интегрируется до проективного представления Diff.

Мы не будем уточнять смысл этого утверждения, заметим лишь, что «универсальная фемионная конструкция» дает представления со всеми возможными старшими весами (h,c).

§ 4. *Полугруппа* Γ

Мы переходим к изучению категорной оболочки группы Diff. Естественно начать с полугрупповой оболочки Γ группы Diff, а уже потом перейти к категорной. При этом нам будет проще работать не с группой Diff, а с ее подгруппой Diff_a, состоящей из аналитических диффеоморфизмов окружности.

4.1. Первое определение. Элемент *полугруппы трубок* Γ — это тройка (R, r_+, r_-), где R — одномерное комплексное многообразие с краем (*риманова поверхность*), топологически эквивалентное кольцу, а r_+, $r_- : S^1 \to R$ — аналитические параметризации компонент края, при этом при обходе контура $r_+(e^{i\varphi})$ поверхность остается по правую руку, а при обходе $r_-(e^{i\varphi})$ — по левую (см. рис. 3a).

Две тройки (R, r_+, r_-) и (R', r'_+, r'_-) считаются одинаковыми, если существует билогоморфное отображение $\varkappa : R \to R'$ такое, что $r'_\pm = \varkappa \circ r_\pm$.

Напомним, что отображение называется *биголоморфным*, или *конформным*, если оно голоморфно вместе со своим обратным.

Пусть $\mathscr{R} = (R, r_+, r_-)$, $\mathscr{Q} = (Q, q_+, q_-)$ — два элемента полугруппы Γ. Определим их произведение $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-)$ по следующему правилу. Рассмотрим несвязное объединение $R \cup Q$ и склеим точки $r_-(e^{i\varphi})$ и $q_+(e^{i\varphi})$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. Таким образом мы получим кольцеобразную поверхность P, при этом края поверхности сохраняют те параметризации, которые у них уже есть (т. е. $p_+(e^{i\varphi}) := r_+(e^{i\varphi})$, $p_-(e^{i\varphi}) := q_-(e^{i\varphi})$), см. рис. 3b (линия склейки «забывается»).

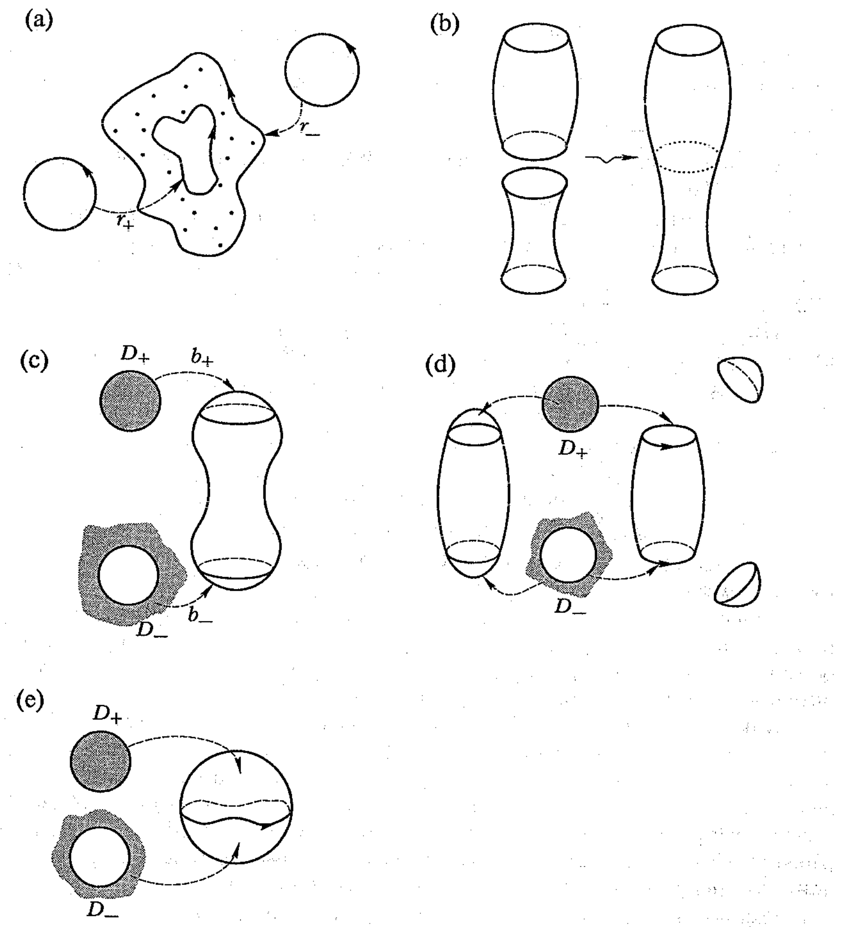

Рис. 3

4.2. Корректность определения. Здесь мы должны сделать небольшое отступление и ответить на два простых вопроса: что значит «аналитическая параметризация края» и почему P является комплексно аналитическим многообразием. Напомним сначала следующую классическую теорему комплексного анализа (см. [Hurwitz, Courant (1952)], [Голузин (1966)]).

Теорема 4.1 (об униформизации кольца).

а) Пусть Q — одномерное комплексное многообразие, топологически эквивалентное открытому кольцу. Тогда Q биголоморфно эквивалентно некоторому кольцу вида $r < |z| < R$ (где $r \geqslant 0$, $R \leqslant \infty$).

б) Кольца $0 < r < |z| < R$ и $0 < r_1 < |z| < R_1$ эквивалентны лишь в случае $\frac{r}{R} = \frac{r_1}{R_1}$ или $\frac{r}{R} = \frac{R_1}{r_1}$. Биголоморфные отображения кольца $r < |z| < R$ в себя исчерпываются поворотами $z \mapsto e^{i\varphi}z$ и отображениями $z \mapsto e^{i\varphi}rRz^{-1}$.

в) Пусть $\overline{Q}$ — замкнутая кольцеобразная область на плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная двумя замкнутыми аналитическими кривыми. Тогда каноническое биголоморфное отображение $\overline{Q}$ на кольцо $r \leqslant |z| \leqslant R$ вещественно аналитично вплоть до границы.

(Четыре разных доказательства этой теоремы можно найти в [Голузин (1966)] § V.1, V.2, V.6, VI.4.)

Из теоремы 4.1, в частности, следует, что на крае кольцеобразной римановой поверхности есть каноническая структура вещественного аналитического многообразия (потому что такая структура есть на окружностях $|z| = r$, $|z| = R$, и эту структура уважается конформными автоморфизмами кольца).

Итак, пусть $\mathscr{R} = (R, r_+, r_-)$, $\mathscr{Q} = (Q, q_+, q_-) \in \Gamma$. В силу аналитичности отображений r_-, q_+ существует окрестность $\mathscr{O}$ окружности $|z| = 1$ такая, что

1. отображение q_+ продолжается до голоморфного отображения $\tilde{q}_+$ множества $\mathscr{O}_+ := \{z \in \mathscr{O}; |z| < 1\}$ в Q;

2. отображение q_- продолжается до голоморфного отображения $\tilde{q}_-$ множества $\mathscr{O}_- := \{z \in \mathscr{O}; |z| > 1\}$ в R.

Многообразие P получается склейкой трех комплексных многообразий $R \setminus r_-(S^1)$, $Q \setminus q_+(S^1)$, $\mathscr{O}$. Многообразие $Q \setminus q_+(S^1)$ склеивается с $\mathscr{O}$ путем отождествления $z \in \mathscr{O}_+$ с $\tilde{q}_+(z) \in Q$. Многообразие $R \setminus r_-(S^1)$ склеивается с $\mathscr{O}$ путем отождествления $z \in \mathscr{O}_-$ с $\tilde{r}_-(z) \in R$.

Теперь ясно, что P — комплексное многообразие. С корректностью определения уже все понятно, но здесь нам удобно обсудить случай произвольной (не обязательно кольцеобразной) римановой поверхности. Пусть M — компактная риманова поверхность без края (топологически она представляет из себя сферу с g ручками), а $D_1, \ldots, D_p$ — замкнутые связные непересекающиеся множества на M, причем каждое из них содержит больше одной точки. Покажем, что множество $M \setminus (\bigcup D_j)$ имеет каноническую компактификацию, эта компактификация является двумерным (вещественным) многообразием с краем, а край обладает канонической структурой вещественного аналитического многообразия (см. например, [Abikoff (1980)]). Под *компактными римановыми поверхностями с краем* мы будем понимать полученные таким образом компактификации.

Рассмотрим аналитическую несамопересекающуюся кривую C_α на M, охватывающую открытую область N_α, эквивалентную кругу, при этом $N_\alpha \supset D_\alpha$, а $N_\alpha \cup C_\alpha$ не пересекается со всеми остальными областями D_j ($j \neq \alpha$). Далее, отобразим область $N_\alpha \setminus D_\alpha$ конформно на кольцо $r < |z| < R$ (важно заметить, что $N_\alpha \setminus D_\alpha$ отображается на настоящее кольцо, а не на проколотый круг; в противном случае обратное отображение по теореме об устранимой особенности продолжалось бы в круг голоморфно, а потому множество D_α состояло бы из одной точки). Пусть, например, компонента границы $|z| = R$ соответствует кривой C_α, а компонента $|z| = r$ соответствует D_α. Теперь мы можем добавить окружность $|z| = r$ к кольцу $r < |z| < R$; соответственно добавляется и замкнутая кривая к области $N_\alpha \setminus D_\alpha$. Компактификация построена.

Возникает вопрос, не зависит ли ответ от выбора кривой C_α. Возьмем другую замкнутую аналитическую кривую C'_α, охватывающую D_α. Без ограничения общности можно считать, что C'_α лежит внутри C_α. Тогда образ $N'_\alpha \setminus D_\alpha$ в кольце $r < |z| < R$ является кольцом с аналитической границей, и теперь утверждение становится очевидным.

4.3. Второе определение полугруппы Γ. Обозначим через D_+ круг $|z| \leqslant 1$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, а через D_- — диск $|z| \geqslant 1$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Через D_+^0 мы обозначим открытый круг $|z| < 1$, а через D_-^0 — открытый диск $|z| > 1$.

Напомним, что отображение f открытой области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ в риманову поверхность называется *однолистным*, если f голоморфно и $f(z_1) \neq f(z_2)$ для любых различных точек $z_1, z_2 \in D$. Функцию f, определенную в замкнутой области $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, мы будем называть *однолистной*, если f однолистно продолжается в некоторую открытую область $D \supset E$.

Элементом полугруппы Γ мы назовем тройку $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$, где

1. B — компактная риманова поверхность с краем, конформно эквивалентная сфере Римана;

2. b_+ — однолистное отображение $D_+ \to B$, а b_- — однолистное отображение $D_- \to B$, при этом области $b_+(D_+)$ и $b_-(D_-)$ не пересекаются (см. рис. 3c).

Мы используем в обозначении $[B, b_+, b_-]$ квадратные скобки, чтобы было различие с обозначениями п. 4.1.

Два элемента $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$ и $\mathscr{B}' = [B', b'_+, b'_-]$ мы считаем совпадающими, если существует конформное отображение $q : B \to B'$ такое, что $b'_\pm(z) = q\big(b_\pm(z)\big)$.

Пусть, далее, $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$, $\mathscr{C} = [C, c_+, c_-] \in \Gamma$. Определим их произведение $\mathscr{A} = [A, A_+, a_-]$ так, что

1. $\mathscr{A}$ получается склейкой $B \setminus b_-(D_-^0)$ и $C \setminus c_+(D_+^0)$ путем отождествления точек $b_-(e^{i\varphi}) \in B \setminus b_-(D_-^0)$ и $c_+(e^{i\varphi}) \in C \setminus c_+(D_+^0)$ для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$;

2. $a_+ = b_+, a_- = c_-$.

Убедимся в равносильности определений. Пусть $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$ — элемент Γ в смысле второго определения. Определим по $\mathscr{B}$ элемент $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-)$ в смысле первого определения. Для этого положим

$$P = B \setminus \big(b_+(D_+^0) \cup b_-(D_-^0)\big); \quad p_\pm(e^{i\varphi}) = b_\pm(e^{i\varphi})$$

(см. рис. 3d).

Обратно, пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-)$. Восстановим по нему элемент $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-]$. Для этого подклеим к кольцу P диск D_+, отождествляя точки $e^{i\varphi} \in D_+$ с $p_+(e^{i\varphi}) \in P$, а также подклеим диск D_-, отождествляя точки $e^{i\varphi} \in D_+$ с $p_-(e^{i\varphi}) \in P$. Таким образом, мы получим сферу B. При этом, по построению, фиксированы отображения $D_+ \to B$ и $D_- \to B$.

4.4. Диффеоморфизмы как предельные элементы полугруппы Γ. Рассмотрим полугруппу $\overline{\overline{\Gamma}}$, которая определяется так же, как и Γ в п. 4.3, только требование «$b_+(D_+)$ не пересекается $b_-(D_-)$» заменим на «$b_+(D_+^0)$ не пересекается с $b_-(D_-^0)$». Может быть, более правильным объектом является $\overline{\overline{\Gamma}}$, а не полугруппа $\overline{\Gamma}$, определенная чуть ниже, но автор не умеет доказывать для $\overline{\overline{\Gamma}}$ некоторых теорем, справедливых для $\overline{\Gamma}$, а потому предпочитает работать с $\overline{\Gamma}$.

Определим в $\overline{\overline{\Gamma}}$ подмножество Δ, состоящее из всех троек $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-] \in \overline{\overline{\Gamma}}$ таких, что $b_+(D_+) \cup b_-(D_-) = B$ (см. рис. 3e). Ясно, что множество Δ замкнуто относительно умножения.

Сейчас мы построим канонический изоморфизм $\Delta \leftrightarrow \mathrm{Diff_a}$.

Пусть $[B, b_+, b_-] \in \Delta$. Тогда элемент $q \in \mathrm{Diff_a}$ задается формулой

$$q(e^{i\varphi}) = b_+^{-1}\big(b_-(e^{i\varphi})\big).$$

Обратно, пусть $q \in \mathrm{Diff_a}$. Построим по нему элемент $[B, b_+, b_-]$. Сфера B получается склейкой дисков D_+ и D_- путем отождествления точек $e^{i\varphi} \in D_-$ и $q(e^{i\varphi}) \in D_+$. При этом сами собой фиксируются отображения $D_+ \to B$ и $D_- \to B$ (а именно, каждой точке диска ставится в соответствие она сама, но рассматриваемая уже как точка сферы B).

Через $\overline{\Gamma}$ мы обозначим подполугруппу $\Delta \cup \Gamma \subset \overline{\overline{\Gamma}}$, при этом группу $\mathrm{Diff_a}$ мы будем отождествлять с подгруппой $\Delta \subset \overline{\Gamma}$.

4.5. Каноническое разложение. Пусть теперь $\mathscr{R} = (R, r_+, r_-) \in \Gamma$. Отобразим R конформно на кольцо C вида $e^{-t} \leqslant |z| \leqslant 1$ так, чтобы контур $r_-(e^{i\varphi})$ отобразился в контур $|z| = 1$ (а $r_+(e^{i\varphi})$ — соответственно в $|z| = e^{-t}$).

Теперь следующее высказывание становится очевидным.

Теорема 4.2. Любой элемент $\mathscr{P} \in \Gamma$ допускает разложение вида

$$\mathscr{P} = q_1 \mathscr{A}_t q_2, \tag{4.2}$$

где $q_1, q_2 \in \mathrm{Diff_a} = \Delta$, а $\mathscr{A}_t = (A, a_+, a_-)$, где A — кольцо $e^{-t} \leqslant |z| \leqslant 1$,

$$a_-(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}, \quad a_+(e^{i\varphi}) = e^{-t}e^{i\varphi}.$$

При этом равенство

$$q_1 \mathscr{A}_t q_2 = q_1' \mathscr{A}_{t'} q_2'$$

возможно лишь в случае

$$t = t', \quad q_1' = q_1 R_\theta, \quad q_2' = R_\theta^{-1} q_2,$$

где R_θ — поворот на угол θ.

Разложение (4.2) мы будем называть *каноническим разложением* $\mathscr{P}$. Заметим, что его можно сделать единственным, если потребовать $q_2(1) = 1$.

4.6. Интерпретация некоторых элементов полугруппы Γ. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех аналитических отображений q окружности $|z| = 1$ в круг $|z| < 1$, удовлетворяющих условиям:

а) производная $q'(e^{i\varphi})$ не обращается в 0;

б) $q(e^{i\varphi})$ — несамопересекающаяся кривая, проходимая против часовой стрелки.

Построим по каждому $q \in \mathcal{M}$ канонически определенный элемент $\mathscr{P}_q = (P, p_+, p_-) \in \Gamma$ по следующему правилу: P есть замкнутая область на комплексной плоскости, заключенная между кривыми $|z| = 1$ и $q(e^{i\varphi})$, а

$$p_-(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}, \quad p_+(e^{i\varphi}) = q(e^{i\varphi}).$$

Важно заметить, что далеко не все элементы полугруппы Γ представимы в виде $\mathscr{P}_q$, где $q \in \mathcal{M}$. Пусть q_1 и $q_2 \in \mathcal{M}$. Пусть q_1 однолистно продолжается в замкнутую кольцевую область, ограниченную кривыми $e^{i\varphi}$ и $q_2(e^{i\varphi})$. Тогда корректно определена композиция $q_1 \circ q_2$ (точнее, композиция q_1 с голоморфным продолжением q_2), и при этом $q_1 \circ q_2 \in \mathcal{M}$. Легко видеть, что

$$\mathscr{P}_{q_1 q_2} = \mathscr{P}_{q_1} \mathscr{P}_{q_2}.$$

Рассмотрим теперь полугруппу $\mathcal{B}$, состоящую из однолистных отображений q круга $|z| \leqslant 1$ в круг $|z| < 1$. Пусть $q \in \mathcal{B}$. Тогда ограничение q на окружность $|z| = 1$ является элементом $\mathcal{M}$. Таким образом, мы видим, что $\mathcal{B}$ является подполугруппой в Γ.

Замечание. Каноническое разложение из п. 4.5 можно интерпретировать следующим образом: любой элемент $\mathscr{P} \in \Gamma$ представим в виде произведения $\mathscr{P} = q_1 R_t q_2$, где $q_1, q_2 \in \mathrm{Diff_a}$, а R_t — отображение $z \mapsto e^{-t}z$.

Задача. Пусть $\mathscr{P} = [P, p_+, p_-] \in \Gamma$. Рассмотрим отображение $p_+ \circ (p_-^{-1})$, определенное на кривой $p_-(e^{i\varphi})$ и переводящее эту кривую в кривую $p_+(e^{i\varphi})$. Покажите, что $\mathscr{P} \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $p_+ \circ (p_-^{-1})$ продолжается до однолистного отображения $P \setminus p_-(D_-^0) \to p_+(D_+)$.

Полугруппа $\mathcal{B}$ содержит подполугруппу $\mathcal{B}_0$, состоящую из отображений q таких, что $q(0) = 0$.

Задача. Покажите, что любой элемент $\mathscr{P} \in \Gamma$ представим в виде произведения $q \cdot g$, где $q \in \mathcal{B}_0$, $g \in \mathrm{Diff_a}$.

4.7. Экспоненты от векторных полей. Пусть $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}}$ — алгебра (вещественно) аналитических вещественных векторных полей на окружности, а $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{C}}$ — алгебра аналитических комплексных векторных полей на окружности. Элементы $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{C}}$ удобно записывать в виде $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$, где $v(z)$ — функция, вещественно аналитическая на окружности $|z| = 1$ (а, следовательно, голоморфно продолжимая в некоторую окрестность окружности).

Пусть $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ — голоморфное векторное поле в некоторой области U на плоскости $\mathbb{C}$. Поставим ему в соответствие вещественное векторное поле

$$I_v = v(z)\,\frac{\partial}{\partial z} + \overline{v(z)}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

в области U на плоскости $\mathbb{R}^2$; напомним, что $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, а $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Таким образом, голоморфные векторные поля $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ можно отождествлять с «настоящими» векторными полями на плоскости. Заметим, что поля $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ и $\overline{w(z)}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ коммутируют. Поэтому

$$[I_\alpha, I_\beta] = I_{[\alpha,\beta]}$$

для любых голоморфных векторных полей $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$, $\beta = w(z)\frac{\partial}{\partial z}$.

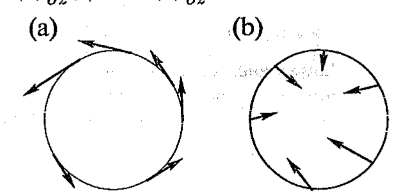

Рис. 4

Рассмотрим далее в алгебре $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}}$ конус C, состоящий из векторных полей $a(\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi}$ таких, что $a(\varphi) > 0$. С геометрической точки зрения это означает, что векторное поле во всех точках окружности направлено против часовой стрелки (см. рис. 4a). Легко увидеть, что конус C — выпуклое $\mathrm{Diff_a}$-инвариантное подмножество в вещественной алгебре Ли $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим далее в комплексной алгебре Ли $\overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{C}}$ множество $\widetilde{C} = \overline{\mathrm{Vect}}{}^{\mathrm{a}}_{\mathbb{R}} + iC$. Иными словами, $\widetilde{C}$ состоит из векторных полей

$a(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ таких, что $\operatorname{Im} a(\varphi) > 0$. С геометрической точки зрения это означает, что векторное поле $a(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ направлено строго внутрь окружности (см. рис. 4b).

Сейчас мы покажем, что любое векторное поле, лежащее в конусе $\widetilde{C}$, порождает однопараметрическую полугруппу в Γ.

Проще всего случай, когда векторное поле $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ голоморфно продолжается в круг $|z| \leqslant 1$. В этом случае векторное поле имеет вид

$$\sum_{n\geqslant -1} c_n z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{n\geqslant -1} c_n L_n.$$

Поэтому векторное поле I_α определено во всем круге $|z| \leqslant 1$, а в силу условия $\alpha \in \widetilde{C}$ мы получаем, что I_α направлено на окружности строго внутрь круга. Поэтому поток g_t векторного поля I_α корректно определен при всех $t \geqslant 0$ и представляет из себя однопараметрическую полугруппу отображений круга в себя. В силу голоморфности векторного поля $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ отображения g_t являются голоморфными, т. е. g_t лежит в полугруппе $\mathcal{B}$ (см. п. 4.6).

Пусть теперь $\alpha = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ — произвольный элемент $\widetilde{C}$. Продолжим $v(z)$ голоморфно в некоторую открытую область U, содержащую окружность $|z| = 1$. Пусть W — некоторая открытая область, замыкание которой содержится в U. Тогда поток g_t векторного поля I_α определен, вообще говоря, лишь при малых $|t|$ и отображает область W в область U. При достаточно малых $t > 0$ отображение g_t как отображение окружности $|z| = 1$ в круг $|z| < 1$ содержится в множестве $\mathcal{M}$ (см. п. 4.6). Но $\mathcal{M}$ вкладывается в Γ, поэтому мы получаем семейство $\mathscr{P}_{g_t}$ (см. п. 4.6) элементов Γ, определенное в некотором интервале $0 \leqslant t < \varepsilon$ и удовлетворящее условию

$$\mathscr{P}_{g_{t_1+t_2}} = \mathscr{P}_{g_{t_1}}\mathscr{P}_{g_{t_2}},$$

если $t_1 + t_2 < \varepsilon$. Теперь мы уже можем определить однопараметричекую полугруппу $\exp\left(tv(z)\frac{\partial}{\partial z}\right) \in \Gamma$ по правилу

$$\exp\left(tv(z)\frac{\partial}{\partial z}\right) := \mathscr{P}_{g_{t_1}}\mathscr{P}_{g_{t_2}}\ldots\mathscr{P}_{g_{t_N}}$$

для любых положительных $t_1, t_2, \ldots, t_N$ таких, что

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_N = t, \quad t_1 < \varepsilon, \quad \ldots, \quad t_N < \varepsilon.$$

Замечание. Алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}$ соответствует группа Diff. Но алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ никакой группы не соответствует (проще всего в этом убедиться, заметив, что группы $G_{(n)}$ из п. 1.2 при $n > 2$ не имеют комплексной оболочки). Однако мы только что видели, как полугруппа Γ в некотором смысле соответствует алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$. Таким образом, Γ — своего рода «существующая часть» несуществующей комплексной оболочки группы Diff.

Замечание. Рассмотрим в $\overline{\mathrm{Vect}^a_{\mathbb{C}}}$ повышающую («борелевскую») подалгебру $\mathfrak{b}_0$, состоящую из векторных полей, голоморфно продолжимых в круг, и обращающихся в 0 в точке $z = 0$. Такие поля имеют вид

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{n\geqslant 0} c_n L_n.$$

Экспоненты от векторных полей $\alpha \in \mathfrak{b}_0$ лежат в полугруппе $\mathcal{B}_0$ (см. п. 4.6). Таким образом, $\mathcal{B}_0$ оказывается своего рода «борелевской подполугруппой» в полугруппе Γ.

4.8. Замечания. А. Универсальное накрытие $\widetilde{\Gamma}$ над Γ. Рассмотрим одномерное (некомпактное) комплексное многообразие R с краем, топологически эквивалентное полосе $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b$. Рассмотрим какое-нибудь биголоморфное отображение $\theta := R \to R$, сохраняющее компоненты края.

Задача. Покажите, что любое биголоморфное отображение полосы $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b$ в себя, переводящее прямую $\operatorname{Im} z = a$ в себя (а $\operatorname{Im} z = b$ в себя) есть сдвиг $z \mapsto z + \alpha$.

Элемент полугруппы $\widetilde{\Gamma}$ есть четверка (R, θ_R, r_+, r_-), где R — комплексное одномерное многообразие с краем, топологически эквивалентное полосе, $\theta_R : R \to R$ — биголоморфное отображение без неподвижных точек, сохраняющее компоненты края, а $r_\pm : \mathbb{R} \to R$ — аналитические параметризации компонент края такие, что

$$r_\pm(x + 2\pi) = \theta_R(x). \tag{4.3}$$

При этом при прохождении контура $r_+(x)$ поверхность остается справа, а при прохождении $r_-(x)$ — слева.

Два элемента $(R, \theta_R, r_+, r_-), (Q, \theta_Q, q_+, q_-) \in \widetilde{\Gamma}$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $h : R \to Q$ такое, что

$$\theta_Q = h \circ \theta_R \circ h^{-1}, \quad q_+ = h \circ r_+, \quad q_- = h \circ r_-.$$

Произведение (R, θ_R, r_+, r_-) и (Z, θ_Z, z_+, z_-) — это тройка (Y, θ_Y, y_+, y_-), где

1. Y получается склейкой R и Z путем отождествления точек $r_-(x)$ и $z_+(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
2. $\theta_Y = \theta_R$ на R, и $\theta_Y = \theta_Z$ на Z;
3. $y_+ = r_+$, $y_- = r_-$.

Построим каноническое отображение $\pi : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$. Каждому $(R, \theta_R, r_+, r_-) \in \widetilde{\Gamma}$ ставится в соответствие тройка (R', r'_+, r'_-) такая, что

1. R' — фактор R по отношению эквивалентности $z \sim \theta_R(z)$ для всех $z \in R$;
2. $r'_\pm(e^{ix})$ есть композиция проекции $R \to R'$ и $r_\pm$.

Задача. Опишите ядро гомоморфизма π.

B. Топология в Γ. Пусть $\mathscr{B} = [B, b_+, b_-] \in \Gamma$. Без ограничения общности можно считать, что $B = \overline{\mathbb{C}}$. Группа биголоморфных автоморфизмов сферы есть $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Для любых различных $u_1, u_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ такое, что $gu_1 = 0$, $gu_2 = \infty$. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что

$$b_+(0) = 0, \quad b_-(\infty) = \infty. \tag{4.4}$$

Пусть теперь $\mathscr{B}^{(j)} = \left[\overline{\mathbb{C}}, b_+^{(j)}, b_-^{(j)}\right]$, $\mathscr{B} = \left[\overline{\mathbb{C}}, b^+, b^-\right] \in \overline{\Gamma}$. Мы положим $\mathscr{B}_j \to \mathscr{B}$, если существует последовательность $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ такая, что

а) $\lambda_j b_j^+(z) \to b^+(z)$ равномерно на любом круге $|z| < 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$,

б) $[\lambda_j b_j^-(z)]^{-1} \to [b^-(z)]^{-1}$ равномерно на любом диске $|z| > 1 + \varepsilon$ в $\overline{\mathbb{C}}$ ($\varepsilon > 0$).

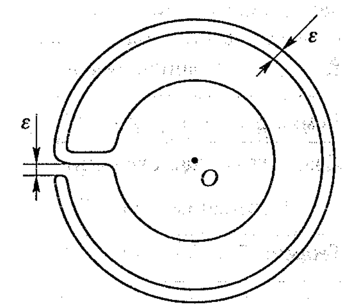

Рис. 5

Задача*. Докажите, что группа Diff_a плотна в $\overline{\Gamma}$.

Указание. Выберем $\mathscr{B}_j = \left[\overline{\mathbb{C}}, b_j^+, b_j^-\right] \in \Delta \simeq \mathrm{Diff}_a$ чтобы кривая, разделяющая $b_j^+(D^+)$ и $b_j^-(D_-)$ была такой, как на рисунке 5.

Покажите, что из $\mathscr{B}_j$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу $\mathscr{A}$ из п. 4.5. Для этого нужно воспользоваться теоремой Каратеодори о сходимости однолистных функций (см., например, [Голузин (1966)], § II.5 или [Hurwitz, Courant (1952)]). Использованный прием очень распространен в теории однолистных функций, см. [Duren (1981)].

Замечание. Я не знаю, являются ли представления полугруппы $\overline{\Gamma}$ (см. следующий параграф) непрерывными в этой топологии.

4.9. Литературные замечания. Гипотеза о существовании комплексной оболочки группы Diff была высказана Г. И. Ольшанским. Она была навеяна теорией инвариантных выпуклых конусов в алгебрах Ли и теорией полугрупп Ли (см. оригинальные работы [Винберг (1980)], [Ольшанский (1981)], [Paneitz (1981)] или монографию [Hilgert, Hoffmann, Lawson (1989)]); несмотря на тесную связь этой теории с бесконечномерными группами, мне пришлось отказаться от обсуждения ее в этой книге. Полугруппа Γ была построена в [Неретин (1987)], см. также [Неретин (1989)], [Segal G. B. (1988)].

§ 5. *Вложения полугруппы Γ в полугруппы линейных отношений*

5.1. Вложение Γ в полугруппу $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}$. Пусть V — тот же объект категории $\overline{\mathbf{Sp}}$, что и в п. 2.1. Группа $\mathrm{Diff}_{\mathrm{a}}$ вкладывается в группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$; наша цель — продолжить это вложение до вложения

$$T : \overline{\Gamma} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V).$$

Пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-) \in \Gamma$. Рассмотрим элемент $f \in V$. Построим по нему 1-форму $f\,d\varphi$ на окружности. Отображения p_+ и p_- отождествляют окружность с компонентами края поверхности P, поэтому 1-формы на окружности переносятся на кривые $p_\pm(e^{i\varphi})$. Итак, обозначим через $p_\pm^*(f\,d\varphi)$ образы 1-формы $f\,d\varphi$ на кривых $p_\pm(e^{i\varphi})$.

Построим теперь по каждому $\mathscr{P} \in \Gamma$ линейное отношение $T(\mathscr{P}) : V \rightrightarrows V$, которое на самом деле окажется элементом $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$. Пусть $(f_+, f_-) \in V \oplus V$. Положим $(f_+, f_-) \in T(\mathscr{P})$, если существует голоморфная 1-форма F на поверхности P такая, что ограничения F на кривые $p_\pm(e^{i\varphi})$ суть $p_\pm^*(f_\pm d\varphi)$.

Здесь возникает следующий вопрос: функции $f_\pm(\varphi)$, вообще говоря, являются обобщенными. Поэтому форма F, вообще говоря, не является непрерывной на краю поверхности P, а тогда не совсем ясно, что значат слова «ограничение голоморфной формы на край»?

5.2. Аккуратное изложение конструкции п. 5.1. Пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-) \in \Gamma$. Определим сначала линейное отношение $T^0(\mathscr{P}) : V \rightrightarrows V$. Положим $(f_+, f_-) \in T^0(\mathscr{P})$, если существует голоморфная 1-форма F на P, аналитическая вплоть до границы, такая, что ограничения F на компоненты края $p_\pm(e^{i\varphi})$ суть 1-формы $p_\pm^*(f\,d\varphi)$.

Лемма 5.1. $T^0(\mathscr{P}\mathscr{R}) = T^0(\mathscr{P})T^0(\mathscr{R})$.

Доказательство: очевидно. ■

Обозначим через $T(\mathscr{P})$ замыкание линейного отношения $T^0(\mathscr{P})$.

Теорема 5.2. $T(\mathscr{P}) \in \mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$.

Следствие 5.3. $\mathscr{P} \mapsto T(\mathscr{P})$ есть гомоморфизм полугруппы Γ в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$.

Доказательство следствия. Действительно, в силу леммы 5.1

$$T(\mathscr{P})T(\mathscr{R}) \supset T^0(\mathscr{P})T^0(\mathscr{R}) \supset T^0(\mathscr{P}\mathscr{R}).$$

Учитывая, что подпространство $T(\mathscr{P})T(\mathscr{R})$ замкнуто, получаем, что

$$T(\mathscr{P})T(\mathscr{R}) \supset T(\mathscr{P}\mathscr{R}).$$

Но с обеих сторон стоят морфизмы категории $\overline{\mathbf{Sp}}$, поэтому мы имеем равенство. ■

Доказательство теоремы. Пусть

$$\mathscr{P} = q_1 \mathscr{A} q_2$$

— каноническое разложение $\mathscr{P}$ (см. п. 4.5). Легко видеть. что

$$T^0(\mathscr{P}) = T(q_1)T^0(\mathscr{A})T(q_2),$$

где ограниченные операторы $T(q_j)$ те же, что в п. 2.2. Поэтому нам достаточно доказать, что $T(\mathscr{A}) \in \mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$.

Рассмотрим в V стандартный базис $\sqrt{1}\,e^{i\varphi}$, $\sqrt{2}\,e^{2i\varphi}$, $\sqrt{3}\,e^{3i\varphi}, \ldots$; $\sqrt{1}\,e^{-i\varphi}$, $\sqrt{2}\,e^{-2i\varphi}, \ldots$ и отождествим V с координатным пространством $\ell_2 \oplus \ell_2$. Тогда линейное отношение $T^0(\mathscr{A})$ состоит из всех пар $(f_+, f_-) \in V \oplus V$ вида

$$(f_+, f_-) = \Big(\big(\alpha_1 e^{-t}, \alpha_2 e^{-2t}, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots\big), \big(\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1 e^{-t}, \beta_2 e^{-2t}, \ldots\big)\Big), \tag{5.1}$$

причем в силу того, что F аналитична вплоть до границы, существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sum |\alpha_j|(1+\varepsilon)^j < \infty, \quad \sum |\beta_j|(1+\varepsilon)^j < \infty \tag{5.2}$$

(мы использовали то, что голоморфная аналитичная вплоть до границы функция продолжается в чуть большую область).

Замыкание $T(\mathscr{A})$ подпространства $T^0(\mathscr{A})$ состоит из всех векторов вида (5.1), только условие (5.2) заменяется на

$$\sum |\alpha_j|^2 < \infty, \quad \sum |\beta_j|^2 < \infty.$$

Преобразование Потапова подпространства $T(\mathscr{A})$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$, где

$$A = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{-2t} & & \\ & & e^{-3t} & \\ & & & \ldots \end{pmatrix},$$

т. е. удовлетворяет условиям п. VI.2.1. Теорема доказана. ■

Итак, мы построили вложение Γ в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$. Ранее мы определили вложение Diff в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$, тем самым мы получаем вложение $\overline{\Gamma} = \mathrm{Diff}_{\mathrm{a}} \cup \Gamma$ в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$.

Ограничивая представление Вейля $\mathrm{we}(\cdot)$ полугруппы $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Sp}}}(V)$ на $\overline{\Gamma}$, мы получаем проективное представление полугруппы $\overline{\Gamma}$.

Предложение 5.4. Операторы $\mathrm{we}(T(\mathscr{P}))$ ограничены для всех $\mathscr{P} \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{P} = q_1 \mathscr{A} q_2$ — каноническое разложение $\mathscr{P}$. Тогда

$$\mathrm{we}\big(T(\mathscr{P})\big) = \mathrm{we}\big(T(q_1)\big)\,\mathrm{we}\big(T(\mathscr{A})\big)\,\mathrm{we}\big(T(q_2)\big).$$

Крайние сомножители унитарны с точностью до умножения на константу, а ограниченность оператора $\mathrm{we}(T(\mathscr{A}))$ очевидна. ■

Задача. Докажите, что операторы $\mathrm{we}(T(\mathscr{P}))$ ядерны (и, более того, лежат в любом классе Шаттена $\mathscr{L}_p$).

5.3. Замечания. §§ 2–3 содержат несколько конструкций вложений Diff (или ее накрывающих) в группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{K}}}(\cdot)$, где $\overline{\mathbf{K}} = \overline{\mathbf{Sp}}, \overline{\mathbf{Spa}}, \overline{\mathbf{GA}}, \overline{\mathbf{GD}}, \overline{\mathbf{B}}$. В п. 5.1–5.2 вложение Diff $\to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(\cdot)$ было продолжено до вложения $\overline{\Gamma} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Sp}}}(\cdot)$. Точно так же остальные вложения $\mathrm{Diff}(\infty) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{K}}}(\cdot)$ продолжаются до вложений универсальной накрывающей $\widetilde{\Gamma}$ полугруппы Γ (см. п. 4.8) в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{K}}}(\cdot)$. Конструкции почти дословно повторяют конструкцию п. 5.1–5.2, и мы оставляем их построение читателю в качестве упражнения (см. также [Неретин (1989.1)], [Неретин (1989.2)]).

§ 6. *Категория* Shtan *Концевича—Сигала*

6.1. Первое определение. Объектами категории **Shtan** являются неотрицательные целые числа $0, 1, 2, \ldots$. Морфизм $m \to n$ — это набор

$$\mathscr{R} = (R, r_j^+, r_l^-), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

где

1. R — компактная (быть может, несвязная) риманова поверхность с аналитическим краем, причем край состоит из $m+n$ окружностей $C_1, \ldots, C_m, D_1, \ldots, D_n$ (номера окружностей фиксированы);

2. $r_\alpha^+ : S^1 \to R$ — аналитические параметризации окружностей $C_1, \ldots, C_m$, причем при проходе пути $C_\alpha = r_\alpha^+(e^{i\varphi})$ поверхность остается по правую руку. Далее, $r_l^- : S^1 \to R$ — аналитические параметризации окружностей $D_1, \ldots, D_n$. При этом при обходе контура $D_l = r_-(e^{i\varphi})$ поверхность остается по левую руку (см. рис. 6a).

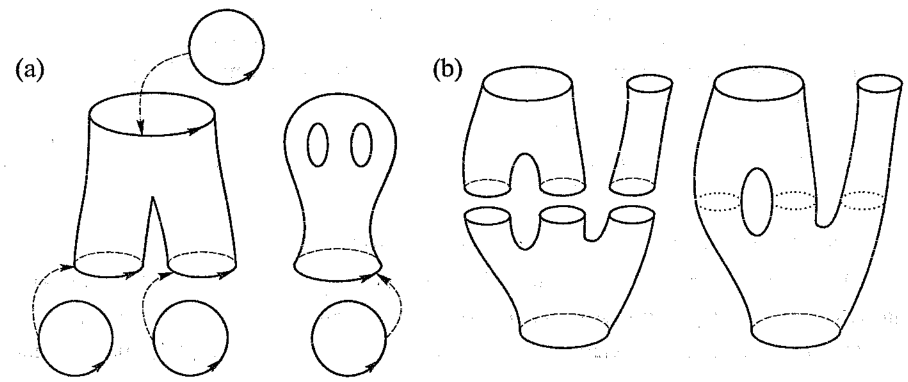

Рис. 6

Два морфизма $\mathscr{R} = (R, r_j^+, r_l^-)$, $\mathscr{P} = (P, p_j^+, p_l^-) : m \to n$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $\sigma : P \to R$ такое, что $r_j^+ = \sigma \circ p_j^+$, $r_l^- = \sigma \circ p_l^-$ для всех j, l.

Пусть, далее, $\mathscr{R} = (R, r_i^+, r_j^-) : m \to n$ и $\mathscr{S} = (S, s_j^+, s_\alpha^-) : n \to k$ — морфизмы категории **Shtan**. Определим их произведение $\mathscr{B} = (B, b_i^+, b_j^-) : m \to k$. Риманова поверхность B получается склейкой всевозможных пар точек $r_j^-(e^{i\varphi})$ с $s_j^+(e^{i\varphi})$ по всем $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $j = 1, \ldots, n$. Далее, $b_i^+(e^{i\varphi}) = r_i^+(e^{i\varphi})$, а $b_\alpha^-(e^{i\varphi}) = s_\alpha^-(e^{i\varphi})$ (см. рис. 6b).

6.2. Второе определение. Объекты категории **Shtan** — по-прежнему целые числа. Морфизмы $m \to n$ — это наборы

$$\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-]; \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

где

1. R — компактная замкнутая риманова поверхность (быть может, несвязная);
2. $r_j^+ : D_+ \to R$ — однолистные вплоть до границы отображения (области $D_\pm$, $D_\pm^0$ определены в п. 4.3);
3. $r_l^- : D_- \to R$ — однолистные вплоть до границы отображения;
4. все множества $r_\alpha^\pm(D_\pm)$ попарно не пересекаются.

Два морфизма $\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-]$, $\mathscr{P} = [P, p_j^+, p_l^-] : m \to n$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $\tau : R \to P$ такое, что $p_j^+ = \tau \circ r_j^+$ для всех j и $p_l^+ = \tau \circ r_l^+$ для всех l.

Так же, как и в п. 4.3, мы, чтобы не путать определения, используем квадратные скобки.

Пусть $\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-] : m \to n$, $\mathscr{S} = [S, s_l^+, s_\alpha^-] : n \to k$ — два морфизма. Определим их произведение $\mathscr{B} = \mathscr{S}\mathscr{R}$ как набор $\mathscr{B} = [B, b_j^+, b_\alpha^-]$, где

1. риманова поверхность B получается склейкой поверхностей

$$\widetilde{R} = R \setminus \Big(\bigcup_l r_l^-(D_-^0)\Big) \quad \text{и} \quad \widetilde{S} = S \setminus \Big(\bigcup_l s_l^+(D_+^0)\Big)$$

путем отождествления всевозможных пар точек $r_l^-(e^{i\varphi}) \in \widetilde{R}$ с $s_l^+(e^{i\varphi}) \in \widetilde{S}$;

2.
$$b_j^+(z) = r_j^+(z) \in \widetilde{R} \subset B,$$
$$b_\alpha^-(z) = s_\alpha^-(z) \in \widetilde{S} \subset B.$$

Равносильность определений устанавливается точно так же, как в п. 4.3. А именно, пусть $\mathscr{R} = [R, r_j^+, r_l^-]$ — элемент $\mathrm{Mor}(m, n)$ в смысле второго определения. Рассмотрим риманову поверхность

$$P = R \setminus \Big\{\Big(\bigcup_j r_j^-(D_+^0)\Big) \cup \Big(\bigcup_l r_l^-(D_-^0)\Big)\Big\},$$

далее положим $p_j^+(e^{i\varphi}) := r_j^+(e^{i\varphi})$, $p_l^-(e^{i\varphi}) := r_l^-(e^{i\varphi})$. Тогда (P, p_j^+, p_l^-) — элемент $\mathrm{Mor}(m, n)$ в смысле первого определения.

6.3. Вложение категории Shtan в категорию $\overline{\mathbf{GA}}$. Пусть H — тот же объект категории $\overline{\mathbf{GA}}$, что и п. 3.1. Обозначим через $H^{(n)}$ n-кратную прямую сумму $H \oplus \ldots \oplus H$. Снабдим $H^{(n)}$ структурой объекта категории $\overline{\mathbf{GA}}$, положив

$$H_\pm^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^n H_\pm.$$

Фиксируем число $\nu \in \mathbb{Z}$ и построим по каждому $\mathscr{P} = (P, p_j^+, p_l^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$ линейное отношение $T_\nu(\mathscr{P}) : H^{(m)} \rightrightarrows H^{(n)}$.

Пусть $f \in H$. Поставим в соответствие функции f плотность $f(\varphi)(d\varphi)^\nu$ на окружности. Отображения $p_\alpha^\pm$ отождествляют окружность S^1 с компонентами края P. Поэтому отображение $p_\alpha^\pm$ отождествляет плотности веса ν на окружности S^1 и плотности веса ν на кривой $p_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$. Обозначим через $(p_\alpha^\pm)^*\big(f(\varphi)(d\varphi)^\nu\big)$ образ плотности $f(\varphi)(d\varphi)^\nu$ на контуре $p_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$.

Пусть $v = \big((f_1^+, \dots, f_m^+), (f_1^-, \dots, f_n^-)\big)$ — некоторый элемент пространства $H^{(m)} \oplus H^{(n)}$. Мы положим, что $v \in T_\nu(\mathscr{P})$, если существует голоморфная плотность F веса ν на P такая, что ограничения F на контуры $p_\alpha^\pm$ суть плотности $(p_\alpha^\pm)^*\big(f_\alpha^\pm(d\varphi)^\nu\big)$.

Как и в п. 5.1, здесь возникает вопрос об аккуратном определения граничного значения формы F; этот вопрос обсуждается в следующем пункте.

Теперь положим $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{P})$, если риманова поверхность P не содержит замкнутых компонент связности (т. е. римановых поверхностей без края), и $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) =$ = null в противном случае. Как мы вскоре увидим, $\mathscr{P} \mapsto \widetilde{T}_\nu(\mathscr{P})$ является функтором из категории **Shtan** в категорию $\overline{\mathbf{GA}}$.

6.4. Граничные значения форм. Пусть C — кольцо $r \leqslant |z| \leqslant R$. Определим пространство Харди $H^2(C)$ как пространство голоморфных внутри кольца $r < |z| < R$ функций

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

таких, что

$$\sum_{k>0} \Big(\frac{|c_{-k}|}{r^k}\Big)^2 < \infty, \qquad \sum_{k>0} \big(|c_k| R^k\big)^2 < \infty. \tag{6.1}$$

Легко видеть, что в случае $f(z) \in H^2(C)$ корректно определены граничные значения функции $f(z)$ на окружностях $|z| = R$, $|z| = r$. Действительно, рассмотрим, например, окружность $|z| = R$. Функции $\big(\frac{z}{R}\big)^k$ образуют ортогональный базис в L^2 на окружности $|z| = R$. Очевидно,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k R^k \Big(\frac{z}{R}\Big)^k.$$

Мы хотим показать, что этот ряд сходится в L^2 на окружности $|z| = R$, т. е. что $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(|c_k| R^k\big)^2 < \infty$. Но это — очевидное следствие неравенств (6.1). Итак, ограничение $f \in H^2(C)$ на окружности $|z| = R$, $|z| = r$ есть корректно определенный элемент L^2 на окружности.

Лемма 6.1 (о стирании особенности). Пусть C_1 — кольцо $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$, а C_2 — кольцо $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_3$. Рассмотрим функции $f_1 \in H^2(C_1)$, а $f_2 \in H^2(C_2)$, граничные значения которых на окружности $|z| = r_2$ совпадают. Тогда функция

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f_1(z), & r_1 < |z| < r_2, \\ f_2(z), & r_2 < |z| < r_3, \end{cases}$$

продолжается до голоморфной функции в кольце $r_1 < |z| < r_3$.

Доказательство. Действительно, пусть

$$f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \qquad f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k.$$

Тогда граничные значения f_1, f_2 на окружности $|z| = r_2$ суть функции

$$\sum (a_k r_2^k) \Big(\frac{z}{r_2}\Big)^k; \qquad \sum (b_k r_2^k) \Big(\frac{z}{r_2}\Big)^k.$$

Эти функции равны как элементы L^2, а поэтому равны и их коэффициенты Фурье, т. е. $a_k r_2^k = b_k r_2^k$ для всех k. Итак, $a_k = b_k$. ■

Пусть, далее, $\mathscr{P} = (P, p_j^+, p_l^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$. Пусть F — голоморфная плотность веса ν на внутренности поверхности P. Рассмотрим, например, отображение p_i^+. Оно вещественно аналитично на окружности $|z| = 1$, поэтому оно комплексно аналитически продолжается в некоторое кольцо $1 \leqslant |z| \leqslant 1 + \varepsilon_i$. Тем самым, плотности F соответствует плотность $((p_i^+)^{-1})^* F$ на кольце $1 \leqslant |z| \leqslant 1 + \varepsilon_i$. Но пространство плотностей веса ν на кольце канонически отождествляется с пространством функций на кольце, а именно, функции $f(z)$ соответствует плотность

$$f(z) \Big(\frac{dz}{iz}\Big)^\nu = f(z) \Big(d\, \frac{1}{i} \ln z\Big)^\nu.$$

Обозначим через $\tilde{f}_i^+(z)$ голоморфную функцию в кольце, соответствующую плотности $\big((p_i^+)^{-1}\big)^* F$.

Аналогично определим функции $\tilde{f}_i^-(z)$.

Мы скажем, что голоморфная плотность F на P имеет граничные значения в смысле H^2, если все функции $\tilde{f}_i^\pm(z)$ имеют граничные значения в смысле H^2 на окружности $|z| = 1$. Обозначим эти граничные значения через $f_\alpha^\pm$.

Итак, рассмотрим голоморфную плотность F на P, имеющую граничные значения в смысле H^2. Такой плотности соответствует набор функций

$$\big(f_1^+, f_2^+, \dots, f_m^+; f_1^-, \dots, f_n^-\big) \in H^{(m)} \oplus H^{(n)}.$$

Множество таких наборов (для всевозможных F) образует подпространство в $H^{(m)} \oplus H^{(n)}$, т. е. линейное отношение $H^{(m)} \rightrightarrows H^{(n)}$. Обозначим это линейное отношение через $T_\nu(\mathscr{P})$.

Теорема 6.2.

а) Пусть $\mathscr{P} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$. Тогда $T_\nu(\mathscr{P}) \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}\big(H^{(m)}, H^{(n)}\big)$.

б) Пусть $\mathscr{P} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$, $\mathscr{R} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(n, k)$. Тогда

$$T_\nu(\mathscr{R}\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{R}) T_\nu(\mathscr{P}) \tag{6.2}$$

в смысле произведения линейных отношений.

в) Пусть $\mathscr{P} = (P, p_i^+, p_j^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m, n)$. Положим $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{P})$, если P не содержит замкнутых компонент связности. Положим $\widetilde{T}_\nu(\mathscr{P}) =$ null в противном случае. Тогда $\mathscr{P} \mapsto \widetilde{T}_\nu(\mathscr{P})$ является функтором из категории **Shtan** в категорию $\overline{\mathbf{GA}}$.

6.5. Доказательство теоремы 6.1.

Лемма 6.3. Пусть $\mathscr{P} = (P, p_i^+, p_j^-) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(m,n)$, причем P — сфера с дырками. Тогда $T_\nu(\mathscr{P}) \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{GA}}}\big(H^{(m)}, H^{(n)}\big)$.

Лемма 6.4. Рассмотрим непересекающиеся окружности $M_1 : |z-a| = \rho$ и $M_2 : |z-b| = r$ на $\mathbb{C}$ такие, что одна из них не лежит внутри другой. Через $H^2_-(M_1)$ мы обозначим подпространство в $L^2(M_1)$, состоящее из функций, голоморфно продолжимых в область $|z-a| > \rho$ на $\mathbb{C}$. Через $H^2_+(M_2)$ мы обозначим обычное пространство Харди, т. е. подпространство в $L^2(M_2)$, состоящее из функций, голоморфно продолжимых в круг $|z-b| < r$. Тогда оператор $B : H^2_-(M_1) \to H^2_+(M_2)$, ставящий в соответствие функции $f \in H^2_-(M_1)$ ее ограничение на M_2, является ядерным.

Доказательство леммы 6.4. Рассмотрим в $H^2_-(M_1)$ ортонормированный базис $\left(\frac{z-a}{\rho}\right)^{-k}$, а в $H^2_+(M_2)$ — ортонормированный базис $\left(\frac{z-b}{r}\right)^n$. Тогда матричные элементы $b_{\alpha\beta}$ матрицы B в этом базисе суть

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\rho^\alpha r^\beta}{(b-a)^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{(-\alpha)(\alpha-1)\ldots(-\alpha-\beta+1)}{\beta!}.$$

Введем обозначения

$$h_1 = \frac{\rho}{|b-a|}, \quad h_2 = \frac{r}{|b-a|}$$

(отметим, что $h_1 + h_2 \leqslant 1$). Тогда

$$|b_{\alpha\beta}| = h_1^\alpha h_2^\beta \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\beta!}$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha,\beta} |b_{\alpha\beta}| = h_1 \sum_{n=0}^{\infty} (h_1+h_2)^n = \frac{h_1}{1-h_1-h_2} < \infty.$$

■

Доказательство леммы 6.3. Известно, что риманова поверхность, топологически изоморфная сфере с дырками, может быть биголоморфно отображена на «плоскую круговую область», т. е. сферу Римана с k круговыми дырками (см., например, [Голузин (1966)]). Итак, без ограничения общности можно считать, что риманова поверхность P — это область на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, задаваемая условиями

$$|z-a_i^+| \geqslant \rho_i^+, \quad |z-a_j^-| \geqslant \rho_j^-, \quad i \leqslant m, \quad j \leqslant n,$$

причем круги $|z-a_\alpha^\pm| \leqslant \rho_\alpha^\pm$ попарно не пересекаются, окружности $|z-a_i^+| = \rho_i^+$ проходятся против часовой стрелки, а окружности $|z-a_j^-| = \rho_j^-$ — по часовой стрелке.

Далее, мы видели в § 3, что для любого гладкого диффеоморфизма окружности q операторы (3.2) лежат в группе $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GA}}}(H)$ (ν и s связаны соотношениями $\nu = \frac{1}{2} + is$). Поэтому утверждение леммы не зависит от того, какие параметризации $p_\alpha^\pm$ мы выберем: при изменении параметризаций линейное отношение $T_\nu(\mathscr{P})$ умножается слева и справа соответственно на элементы групп

$$\underbrace{\mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\ldots\times\mathrm{G}}_{n \text{ раз}} \quad \text{и} \quad \underbrace{\mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\ldots\times\mathrm{G}}_{m \text{ раз}}.$$

Поэтому мы можем считать, что

$$p_\alpha^\pm(e^{i\varphi}) = a_\alpha^\pm + \rho_\alpha^\pm e^{\pm i\varphi}. \tag{6.3}$$

Обозначим через $V_\alpha^\pm$ пространство L^2 функций на окружности $|z-a_\alpha^\pm| = \rho_\alpha^\pm$. Обозначим через $(V_\alpha^\pm)_+$ подпространство в $V_\alpha^\pm$, состоящее из функций вида $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k(z-a_\alpha^\pm)^k$, а через $(V_\alpha^\pm)_-$ — подпространство функций вида $\sum\limits_{k<0} c_k(z-a_\alpha^\pm)^k$. Легко видеть, что линейное отношение $T_\nu(\mathscr{P})$ является графиком линейного оператора

$$S : \Big(\bigoplus_i (V_i^-)_-\Big) \oplus \Big(\bigoplus_j (V_j^+)_-\Big) \to \Big(\bigoplus_i (V_i^-)_+\Big) \oplus \Big(\bigoplus_j (V_j^+)_+\Big),$$

при этом блоки матрицы S устроены следующим образом. Рассмотрим пространство функций $(V_j^\sigma)_-$, голоморфных вне круга $|z-a_j^\sigma| < \rho_j^\sigma$ (где $\sigma = +$ или $-$). Функция $f \in (V_j^\sigma)_-$, в частности, голоморфна в круге $|z-a_i^\varkappa| \leqslant \rho_i^\varkappa$, т. е. ограничение f на окружность $|z-a_i^\varkappa| = \rho_i^\varkappa$ есть элемент пространства $(V_i^\varkappa)_+$.

В силу леммы 6.4 все блоки матрицы S являются ядерными операторами. Поэтому и сама матрица S ядерна.

Матрица S не является преобразованием Потапова линейного отношения $T_\nu(\mathscr{P})$, но она очень близка к преобразованию Потапова. Действительно, параметризации (6.2) отождествляют пространство H с каждым из пространств $V_i^\pm$. А именно, функции $f(\varphi) \in H$ на окружности соответствуют функции

$$f\Big(\frac{z-a_i^+}{\rho_i^+}\Big)\left(\frac{dz}{z}\right)^\alpha \in V_i^+,$$

$$f\Big(\frac{\rho_i^-}{z-a_i^-}\Big)\left(\frac{dz}{z}\right)^\alpha \in V_i^-.$$

Таким образом, $H^{(m)}$ отождествляется с $\bigoplus\limits_i V_i^+$, а $H^{(n)}$ — с $\bigoplus\limits_j V_i^-$. Легко видеть, что $H_+^{(m)} \oplus H_-^{(n)}$ сравнимо (в смысле п. IV.3.6) с $\Big(\bigoplus\limits_i (V_i^-)_-\Big) \oplus \Big(\bigoplus\limits_j (V_j^+)_-\Big)$, а $H_-^{(m)} \oplus H_+^{(n)}$ сравнимо с $\Big(\bigoplus\limits_i (V_i^-)_-\Big) \oplus \Big(\bigoplus\limits_j (V_j^+)_+\Big)$. Это и завершает доказательство леммы. ■

Задача. Вычислите дефект размерности линейного отношения $T_\nu(\mathscr{P})$.

Доказательство утверждения б). Включение

$$T_\nu(\mathscr{R}\mathscr{P}) \subset T_\nu(\mathscr{R})T_\nu(\mathscr{P})$$

очевидно. Обратное включение следует из леммы о стирании особенностей. ■

Доказательство утверждения а). Любой морфизм $\mathscr{P}$ представим в виде

$$\mathscr{P} = \mathscr{R}_1\mathscr{R}_2\ldots\mathscr{R}_q, \quad \mathscr{R}_p = \left(R^{(p)}, r_{i_p}^{(p)+}, r_{j_p}^{(p)-}\right),$$

где $R^{(p)}$ — объединение сфер с дырками. Из леммы 6.3 вытекает, что $T_\nu(\mathscr{R}_p) \in$ $\in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{GA}}}$. Но в силу (6.2)

$$T_\nu(\mathscr{P}) = T_\nu(\mathscr{R}_1)\ldots T_\nu(\mathscr{R}_q),$$

и поэтому $T_\nu(\mathscr{P})$ есть морфизм категории $\overline{\mathbf{GA}}$. ■

Доказательство утверждения в). Пусть $\mathscr{P} : m \to n$, $\mathscr{R} : n \to k$ — морфизмы категории **Shtan**. Выяснить, верно ли

$$\operatorname{Indef} T_\nu(\mathscr{P}) \cap \operatorname{Ker} T_\nu(\mathscr{R}) \neq 0, \tag{6.4}$$

очень легко. А именно, пусть при склейке римановых поверхностей не возникает замкнутых компонент связности. Тогда (6.4) противоречило бы теореме единственности для голоморфных функций (мы имели бы плотность, у которой граничные значения равны 0).

Далее, пусть при склейке римановых поверхностей возникает замкнутая компонента связности L. Тогда в некоторых случаях можно сразу сказать, что (6.4) неверно. Действительно, пусть род L больше 0 (т. е. L — не сфера). Тогда для любого $\nu \geqslant 0$ на L есть голоморфная плотность веса ν, и, тем самым, (6.4) не выполнено. Далее, пусть L — сфера. Тогда для любого $\nu \leqslant 0$ на L есть голоморфные плотности веса ν, и, тем самым, (6.4) не выполнено.

Проверить, выполняется ли условие

$$\operatorname{Im} T_\nu(\mathscr{P}) + D\big(T_\nu(\mathscr{R})\big) = H^{(n)}, \tag{6.5}$$

чуть сложней. Эта проверка требует привлечения соображений двойственности (см. п. II.7.2.). Введем спаривание $H^{(m)} \times H^{(m)} \to \mathbb{C}$ по формуле

$$\sigma_m\big((f_1,\ldots,f_m),(g_1,\ldots,g_m)\big) = \sum \int_0^{2\pi} f_j g_j \, d\varphi.$$

Легко видеть, что линейные отношения $T_\nu(\mathscr{P})$ и $T_{1-\nu}(\mathscr{P})$ удовлетворяют условию

$$(v,w) \in T_\nu(\mathscr{P}),\ (v',w') \in T_{1-\nu}(\mathscr{P}) \Rightarrow \sigma_m(v,v') - \sigma_n(w,w') = 0. \tag{6.6}$$

Действительно, пусть F_1 и F_2 — соответственно голоморфные плотности веса ν и $1-\nu$ на P. Тогда F_1F_2 есть плотность веса 1, т. е. 1-форма. Теперь высказывание (6.6) превращается в интегральную теорему Коши (интеграл от 1-формы по границе римановой поверхности равен 0).

На самом деле, $T_\nu(\mathscr{P})$ и $T_{1-\nu}(\mathscr{P})$ являются двойственными линейными отношениями (в этом достаточно убедиться в случае выполнения условий леммы 6.3,

тогда все сводится к вычислению дефекта размерности, которое проводится без труда; мы его опускаем). Таким образом, (6.5) равносильно

$$\operatorname{Indef} T_{1-\nu}(\mathscr{P}) \cap \operatorname{Ker} T_{1-\nu}(\mathscr{R}) = 0,$$

и теперь утверждение становится очевидным. ■

6.6. Представления. Ограничивая спинорное представление категории $\overline{\mathbf{GA}}$ на категорию **Shtan**, мы получаем представление категории **Shtan**. Легко видеть, что операторы представления **Shtan** ограничены не только в топологии полинормированного пространства Фока, но и в топологии гильбертова пространства Фока (см. теорему IV.2.4 и лемму 6.4).

6.7. Замечания. А. Обобщенные борелевские подалгебры в $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$**.** Рассмотрим в $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ обычную повышающую (борелевскую) подалгебру B, натянутую на генераторы $L_0, L_{-1}, L_{-2}, \ldots$. Напомним, что

$$L_k = e^{-ik\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi} = z^{-k+1}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким образом, B состоит из векторных полей вида

$$\sum_{j\geqslant 0} c_j z^{-j+1}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{6.7}$$

Записывая (6.7) в координате $u = z^{-1}$, мы получаем

$$-\sum_{j\geqslant 0} c_j u^{j+1}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Эти векторные поля голоморфны в области $|u| < 1$ и равны 0 в точке $u = 0$.

Итак, алгебру B можно интерпретировать как алгебру векторных полей на окружности $|z| = 1$, голоморфно продолжимых в область $|z| > 1$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и равных 0 в точке $z = \infty$. В таком виде конструкция повышающей подалгебры допускает естественное обобщение.

Рассмотрим набор

$$\mathscr{R} = (R, r^-, \rho_1, \ldots, \rho_n), \tag{6.8}$$

где R — компактная риманова поверхность, край которой состоит из одной окружности; $r^- : S^1 \to R$ — фиксированная аналитическая параметризация края, при этом при обходе края поверхность остается по левую руку; наконец, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — отмеченные точки на R. Рассмотрим, далее, алгебру Ли $\mathfrak{A}_R$, состоящую из голоморфных векторных полей на R, обращающихся в 0 в точках $\rho_1, \ldots, \rho_n$ и аналитических вплоть до границы. Подалгебра $\mathfrak{B}_R \subset \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ состоит, по определению, из векторных полей на окружности S^1, являющихся прообразами полей $v(z) \in \mathfrak{A}_{\mathscr{R}}$ при отображении $r^- : S^1 \to R$.

Естественно встает вопрос об $\mathfrak{B}_R$-особых векторах в представлениях Vir и о Vir-модулях с $\mathfrak{B}_R$-старшим весом. Этот вопрос изучался в работах [Кричевер, Новиков (1987)], [Кричевер, Новиков (1989)], основная конструкция этих работ равносильна конструкции п. 6.3 для $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(1,1)$. Известны отдельные примеры $\mathfrak{B}_R$-старших векторов, но вопрос об описании всех $\mathfrak{B}_{\mathscr{R}}$-старших векторов пока не решен.

Замечание. Элементы $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Shtan}}(0,n)$ соответствуют нестандартным борелевским подалгебрам в $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}} \times \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}} \times \ldots \times \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}}$ (n раз).

В. Действия полугруппы Γ**.** Обозначим через $\Omega_{g,n}$ множество всех наборов вида (6.8) таких, что род (т. е. число ручек) поверхности R равен g. Полугруппа Γ действует на каждом из пространств $\Omega_{g,n}$ достаточно очевидным образом. Пусть $\mathscr{R} = (R, r^-, \rho_1, \ldots, \rho_n) \in \Omega_{g,n}$, а $\mathscr{P} = (P, p^+, p^-) \in \overline{\Gamma}$. Склеим поверхности $\mathscr{R}$ и $\mathscr{P}$, отождествляя точки $r^-(e^{i\varphi})$ и $p^+(e^{i\varphi})$. Тогда мы получим риманову поверхность рода g с фиксированной параметризацией края и с n отмеченными точками, т. е. элемент $\Omega_{g,n}$. Действие $\overline{\Gamma}$ на $\Omega_{g,n}$ построено.

C. Однолистные функции. Нам будет приятнее рассматривать вместо $\Omega_{0,1}$ область $\mathscr{K}$, состоящую из наборов $[R, r_+, \rho]$, где $R \simeq \overline{\mathbb{C}}$, $r_+ : D_+ \to R$ — однолистное вплоть до границы отображение, а $\rho \in R \setminus r_+(D_+)$ (понятно, что существенной разницы между $\Omega_{0,1}$ и $\mathscr{K}$ нет).

Покажем сначала, что $\mathscr{K}$ является $\mathrm{Diff_a}$-однородным пространством. Действительно, $\mathscr{K}$ можно рассматривать как множество наборов (P, p_+, π), где P — риманова поверхность, конформно эквивалентная кругу; $p_+ : S^1 \to P$ — фиксированная параметризация края, а π — внутренняя точка P. Легко видеть, что группа $\mathrm{Diff_a} \subset \Gamma$ действует на $\mathscr{K}$ заменами параметризации края. Отождествим теперь P со стандартным кругом $D_+ : |z| \leqslant 1$. Группа биголоморфных преобразований круга состоит из мебиусовых преобразований. Любая точка $\pi \in D_+$ может быть переведена мебиусовым преобразованием в 0. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\pi = 0$. Теперь $\mathrm{Diff_a}$-однородность $\mathscr{K}$ становится очевидной: любая точка из $\mathscr{K}$ может быть действием элемента $\mathrm{Diff_a}$ переведена в точку $L = (D_+, p_+, 0)$, где $p_+(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$.

Задача. Покажите, что стабилизатор точки L есть группа $\mathbb{T}$ вращений окружности.

Итак, $\mathscr{K} \simeq \mathrm{Diff_a}/\mathbb{T}$.

Рассмотрим теперь пространство $\mathscr{S}$, состоящее из функций $f : D_+ \to \mathbb{C}$, однолистных вплоть до границы, с тейлоровским разложением вида

$$p(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1}. \tag{6.9}$$

Покажем, что $\mathscr{K}$ канонически отождествляется с $\mathscr{S}$. Действительно, пусть $[R, r_+, \rho] \in \mathscr{K}$. Отождествим R со сферой Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Группа биголоморфных преобразований сферы Римана состоит из дробно-линейных отображений $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$. Любая пара точек на $\mathbb{C}$ подходящим дробно-линейным отображением может быть переведена в пару $\{0, \infty\}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $r_+(0) = 0$, $\rho = \infty$. В таком случае $p_+(z)$ имеет разложение вида $p_+(z) = \sum_{j>0} d_j z^j$. Далее, дробно-линейные преобразования, оставляющие 0 и ∞ на месте, суть преобразования $z \mapsto \lambda z$. Выбирая подходящим образом λ, мы можем сделать $d_1 = 1$. Таким образом, каждой точке $[R, r_+, \rho] \in \mathscr{K}$ мы поставили в соответствие однолистную функцию $p_+(z)$ вида (6.9).

Итак, мы видим, что пространство $\mathscr{S}$ однолистных функций канонически отождествляется с однородным пространством $\mathrm{Diff_a}/\mathbb{T}$. Удивительно, что этот факт был обнаружен лишь в [Кириллов (1986)], хотя теория однолистных функций уже давно является большой и содержательной ветвью математики (по-существу, она началась с работы [Köbe (1904)]). Таким образом, пространство $\mathscr{S}$ оказывается бесконечномерным аналогом ограниченных областей Картана (см. главу V).

Задача. Покажите, что область $\Omega_{0,0}$ как $\mathrm{Diff_a}$-однородное пространство эквивалентно $\mathrm{Diff_a}/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Мы продолжим обсуждение взаимоотношений теории однолистных функций и теории представлений в добавлении C.

D. Полугруппа $\mathrm{Mor_{Shtan}}(1,1)$**.** Известна следующая конструкция восстановления группы Ли по ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ — группа автоморфизмов G. Тогда алгебра Ли группы G есть сама алгебра $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим теперь в качестве $\mathfrak{g}$ алгебру $\overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$. Конечно, группа Diff действует на $\overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ автоморфизмами. Оказывается, однако, что алгебра $\overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ имеет больше «внутренних симметрий», чем это кажется на первый взгляд.

Пусть $\mathscr{P} = (P, p_+, p_-) \in \mathrm{Mor_{Shtan}}(1,1)$. Построим по элементу $\mathscr{P}$ линейное отношение $T_{-1}(\mathscr{P})$ в $\overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ по следующему правилу: $(v^+, v^-) \in \overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ содержится в $T_{-1}(\mathscr{P})$, если существует голоморфное гладкое вплоть до границы векторное поле V на P такое, что прообразы V при отображениях $p^\pm : S^1 \to P$ суть $v^\pm$.

Пусть $(v^+, v^-), (w^+, w^-) \in T_{-1}(\mathscr{P})$. Тогда $([v^+, v^-], [w^+, w^-]) \in T_{-1}(\mathscr{P})$. Таким образом, линейное отношение $T_{-1}(\mathscr{P})$ в алгебре $\overline{\mathrm{Vect}_\mathbb{C}}$ в некотором смысле слова сохраняет операцию коммутирования. При желании можно рассматривать линейное отношение $T_{-1}(\mathscr{P})$ как график неограниченного оператора $L(\mathscr{P}) : \mathrm{Vect}_\mathbb{C} \to \mathrm{Vect}_\mathbb{C}$, который, таким образом, оказывается «неограниченным эндоморфизмом» алгебры $\mathrm{Vect}_\mathbb{C}$. Очевидно также, что $L(\mathscr{P})L(\mathscr{R}) = L(\mathscr{R}\mathscr{P})$.

E. Конформная квантовая теория поля. Согласно конформной квантовой теории поля, частица представляет из себя не точку, а замкнутую линию в пространстве — так называемую «струну». Двигаясь в пространстве-времени, струна заметает собою цилиндрообразную поверхность. По физическим соображениям (которые я не берусь повторять) на этой поверхности канонически определена конформная структура.

Представим себе, что некоторая частица, т. е. струна, распадается на две части. Это соответствует картинке вида

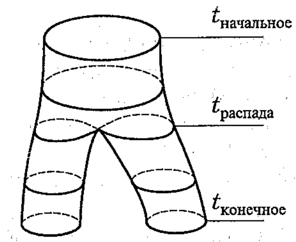

Рис. 7

Более сложным явлениям соответствуют более сложные картинки.

Если мы хотим проквантовать струну, мы должны поставить в соответствие каждой римановой поверхности с краем некоторый оператор (в этом месте в физической литературе часто говорят о континуальных интегралах, но этот язык, кажется, равносилен операторному языку). Таким образом, встает вопрос о представлениях категории.

Я не знаю, до какой степени конформная квантовая теория поля является теорией представлений категории **Shtan**, неизвестно также, имеет ли какой-либо физический смысл сама конформная квантовая теория поля. Не вызывает сомнений лишь то, что категория **Shtan** явно бедновата для описания реальных физических явлений, она является также бедноватым объектом и для теории представлений группы Diff (см. ниже § IX.6).

6.8. Литературные замечания. Категория **Shtan** введена в [Концевич (устное сообщение)], [Segal G. B (1988)]. Конструкция п. 6.3 получена в [Неретин (1989.2)], те же операторы построены в [Alvarez-Gaume, Gomez, Moore, Vafa (1988)]. Конструкций представлений полугруппы Γ плохо переносятся на категорию **Shtan** (об аналоге конструкции п. 5.1 см. [Неретин (1989.1)]). Препятствием является то, что при попытках голоморфного продолжения представлений группы Diff получаются многозначные операторнозначные функции, и они плохо ведут себя при склейках по нескольким дыркам.

Хороший учебник по однолистным функциям (написанный, правда, до доказательства гипотезы Бибербаха) — [Duren (1983)].

Глава VIII

Тяжелые группы

Вводимое нами понятие тяжелой группы является эвристическим и включает в себя следующие группы:

1. полную бесконечную симметрическую группу S_∞;

2. группу $U(\infty)$ всех унитарных операторов в комплексном гильбертовом пространстве, а также группу $O(\infty)$ всех ортогональных операторов в вещественном гильбертовом пространстве и группу $Sp(\infty)$ всех унитарных операторов в кватернионном гильбертовом пространстве;

3. группу автоморфизмов лебеговского пространства с конечной (или σ-конечной) мерой.

На первый взгляд, нет ничего такого, что могло бы выделить эти три типа бесконечномерных групп среди остальных и оправдать введение для них специального термина. В этой главе мы увидим, что все эти группы обладают одним и тем же набором удивительных свойств.

В нашей книге тяжелые группы имеют двоякое значение. С одной стороны, теория представлений этих групп довольно проста, но на них отчетливо видны некоторые общие явления. С другой стороны, многие важные бесконечномерные группы (не все!) содержат тяжелую подгруппу, что сильно упрощает их изучение.

В § 1 этой главы приводятся «образцовые» рассуждения, которые, в основном, являются общими для всех тяжелых групп.

§ 1. Симметрическая группа S_∞

1.1. Симметрическая группа S_∞. Пусть S_n — группа перестановок множества из n элементов. Пусть S_∞ — группа всех перестановок натурального ряда. Через S_∞^n обозначим подгруппу в S_∞, состоящую из перестановок, оставляющих на месте элементы $1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$. Введем на S_∞ топологию, положив, что подгруппы

$$S_\infty^1 \supset S_\infty^2 \supset S_\infty^3 \supset \dots$$

открыты и образуют фундаментальную систему окрестностей нуля.

Последовательность $\sigma_i \in S_\infty$ сходится к $\sigma \in S_\infty$, если для любого $j \in \mathbb{N}$ для достаточно больших k выполнено $\sigma_k j = \sigma j$.

Поставим в соответствие каждому $\sigma \in S_\infty$ бесконечную матрицу $R = \rho(\sigma)$, положив $r_{ij} = 1$, если $\sigma i = j$, и $r_{ij} = 0$ в противном случае. Таким образом, мы реализовали группу S_∞ как группу всех матриц из нулей и единиц, у которых в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна единица.

1.2. Категория частичных биекций. Объекты категории $\overline{\mathbf{PB}}$ частичных биекций — это множества вида $\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \dots, \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Мы их будем обозначать соответственно через $K_0, K_1, \dots, K_\infty$. Морфизм $I : K_\alpha \to K_\beta$ — это *частичная биекция*, т. е. биекция некоторого (например, пустого) подмножества $L \subset K_\alpha$ на некоторое подмножество $L' \subset K_\beta$. Множество $L = D(I)$ мы будем называть *областью определения* I (обозначение: $L = D(I)$), а L' — *образом* I (обозначение: $L' = \operatorname{Im} I$). Число элементов в $D(I)$ мы будем называть *рангом* L (обозначение: $\operatorname{rk} I$).

Умножение морфизмов — это обычная композиция частично определенных отображений. Скажем это аккуратнее: пусть $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$, $J \in \operatorname{Mor}(K_\beta, K_\gamma)$. Тогда $D(JI)$ состоит из тех $a \in D(I)$, для которых $Ia \in D(J)$. Если $a \in D(JI)$, то $(JI)a := J(Ia)$.

Через $\mathbf{PB}$ мы обозначим подкатегорию в $\overline{\mathbf{PB}}$, объектами которой являются $K_0, K_1, \dots$ (но не K_∞), а морфизмы — частичные биекции.

Назовем 0-1-*матрицей* матрицу из нулей и единиц, у которой в каждой строке и каждом столбце стоит не более одной единицы. Пусть $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$. Поставим в соответствие морфизму I некоторую 0-1-матрицу $R = \rho(I)$ размера $\alpha \times \beta$ по правилу $r_{ij} = 1$, если $ri = j$, и $r_{ij} = 0$ в противном случае. Легко видеть, что для любых $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$, $J \in \operatorname{Mor}(K_\beta, K_\gamma)$ выполнено $\rho(JI) = \rho(J)\rho(I)$, т. е. мы получаем представление категории $\overline{\mathbf{PB}}$. Мы будем отождествлять частичную биекцию и соответствующую 0-1-матрицу.

Введем в $\overline{\mathbf{PB}}$ структуру топологической категории. Пусть $I_k, I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$. Последовательность I_k сходится к I, если для любых $i \in K_\alpha, j \in K_\beta$ условие $Ii = j$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $I_m i = j$, начиная с некоторого m. Отметим, что условие $I_k \to I$ равносильно слабой сходимости 0-1-матриц $\rho(I_k) \to \rho(I)$.

Конечно, в случае $\alpha < \infty$, $\beta < \infty$ на конечном множестве $\operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$ мы получаем дискретную топологию. Легко видеть, что $\operatorname{Aut}(K_n) \simeq S_n$, $\operatorname{Aut}(K_\infty) \simeq S_\infty$.

Лемма 1.1. Группа $\operatorname{Aut}(K_\infty)$ плотна в полугруппе $\operatorname{End}(K_\infty)$.

Доказательство. Пусть $J \in \operatorname{End}(K_\infty)$. Определим частичную биекцию $J_n \in \operatorname{End}(K_\infty)$ следующим образом: $J_n i = j$ тогда и только тогда, когда выполнены три условия: $i \leqslant n$, $j \leqslant n$, $Ji = j$. Далее, легко видеть, что для любого n существует $A_n \in S_\infty$ такой, что для любых $i \leqslant n$, $j \leqslant n$ условие $J_n i = j$ равносильно $A_n i = j$ (т. е. частичная биекция J_n может быть продолжена до настоящей биекции). Ясно, что A_n сходится к J. (Эти операции очень наглядны на языке 0-1-матриц.) ∎

Введем в категории $\overline{\mathbf{PB}}$ инволюцию, положив, что для любого $I \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$, элемент $I^* \in \operatorname{Mor}(K_\beta, K_\alpha)$ есть обратная частичная биекция (т. е. $Ii = j$ равносильно $I^* j = i$).

Наконец, введем в $\overline{\mathbf{PB}}$ структуру упорядоченной категории (см. § III.4). Пусть $\alpha < \beta$. Определим $\lambda_{\alpha\beta} \in \operatorname{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$ так, что $\lambda_{\alpha\beta} i = i$ для всех $i \leqslant \alpha$. Определим также $\mu_{\beta\alpha} := \lambda_{\alpha\beta}^*$ (т. е. $\mu_{\beta\alpha} i = i$ для всех $i \leqslant \alpha$, причем $D(\mu_{\beta\alpha}) = \{1, 2, \dots, \alpha\}$). Наконец, введем так же, как в § III.4, элементы $\theta_\beta^\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}$. На уровне 0-1-матриц $\theta_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} E_\alpha & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

Наша дальнейшая программа действий следующая. Мы покажем, что любое представление группы S_∞ продолжается по непрерывности до представления полугруппы $\operatorname{End}(K_\infty)$, а любое представление полугруппы $\operatorname{End}(K_\infty)$ продолжается до представления категории $\overline{\mathbf{PB}}$. Далее показывается, что любое представление категории $\overline{\mathbf{PB}}$ однозначно определяется своим ограничением на подкатегорию $\mathbf{PB}$. После этого останется расклассифицировать все представления категории $\mathbf{PB}$.

1.3. Неподвижные векторы. Пусть τ — унитарное представление группы S_∞ в пространстве H. Обозначим через $H_n \subset H$ пространство всех векторов, неподвижных относительно любого оператора вида $\rho(g)$, где $g \in S_\infty^n$. Ясно, что $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \dots$.

Предложение 1.2. $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} H_j$ плотно в H.

Мы докажем это утверждение в следующей форме.

Предложение 1.3. Пусть ρ — унитарное представление топологической группы G в пространстве H. Пусть $\mathrm{G} \supset \mathrm{G}_1 \supset \mathrm{G}_2 \supset \dots$ — семейство подгрупп в G, причем для любой окрестности U единицы в группе G найдется подгруппа G_k такая, что $\mathrm{G}_k \subset U$. Пусть H_k — множество векторов в H, неподвижных относительно G_k. Тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k$ плотно в H.

Доказательство. Мы хотим показать, что произвольный вектор $v \in H$ можно аппроксимировать с любой точностью некоторым G_k-неподвижным вектором (где k достаточно велико). Пусть $\mathrm{U}(\infty)$ — группа всех унитарных операторов в H, снабженная слабой топологией. Рассмотрим в $\mathrm{U}(\infty)$ окрестность единицы V, состоящую из всех операторов A, удовлетворяющих условию $\|Av - v\| < \varepsilon$.

Задача. Покажите, что V — действительно окрестность единицы.

Далее, рассмотрим в G окрестность единицы W такую, что $\rho(W) \subset V$. Пусть $\mathrm{G}_k \subset W$. Пусть Q — замкнутая выпуклая оболочка множества всех векторов вида $\rho(g)v$, где g пробегает G_k.

Задача. Покажите, что в любом замкнутом выпуклом множестве в гильбертовом пространстве существует единственный вектор минимальной длины (см. [Riesz, Sz.-Nagy (1952)], 145).

Пусть $w \in Q$ — вектор минимальной длины. Множество Q очевидным образом инвариантно относительно G_k. Поэтому и вектор w является G_k-инвариантным. При этом $\|w - v\| \leqslant \varepsilon$. Утверждение доказано. ■

1.4. Двойные классы смежности $S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$. Рассмотрим двойные классы смежности $S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$. Построим каноническую биекцию

$$I : S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m \longleftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n). \tag{1.1}$$

Пусть $\gamma \in S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$, а $g_1, g_2 \in \gamma$. Тогда для любых $i \leqslant n$, $j \leqslant m$ условия $g_1 j = i$, $g_2 j = i$ равносильны. Поэтому для любого $\gamma \in S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$ определен элемент $I(\gamma) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$, а именно: $I(\gamma)i = j$ тогда и только тогда, когда $gi = j$ для некоторого $g \in \gamma$.

Задача. Проверьте, что I — действительно биекция.

Особенно наглядно соответствие (1.1) выглядит на уровне 0-1-матриц. В этом случае каждой 0-1-матрице $g \in S_\infty$ ставится в соответствие ее левый верхний угол $[g]_{mn}$ размера $m \times n$:

$$g = \begin{pmatrix} [g]_{mn} & * \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto [g]_{mn}.$$

С этого места мы отождествляем множества $S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$ и $\mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$.

Пусть, по-прежнему, τ — представление группы S_∞ в пространстве H, пусть H_j — пространство S_∞^j-неподвижных векторов. Для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$ мы определим канонический оператор

$$\tau(\gamma) : H_m \to H_n$$

по формуле

$$\tau(\gamma) := P_n \tau(g)\big|_{H_m}, \tag{1.2}$$

где $g \in \gamma \in S_\infty^n \setminus S_\infty / S_\infty^m$, а P_n — проектор на подпространстве H_n (символ $\tau(g)\big|_{H_m}$ обозначает ограничение оператора $\tau(g)$ на подпространство H_m).

Задача. Проверьте, что $\tau(\gamma)$ не зависит от выбора элемента $g \in \gamma$.

Забавно заметить, что γ мы выше интерпретировали как «уголок» $[g]_{mn}$ матрицы g, а $\tau(\gamma)$ — тоже в каком-то смысле «уголок» матрицы $\tau(g)$. Ниже мы увидим, что $\gamma \mapsto \tau(\gamma)$ является представлением категории $\mathbf{PB}$.

Введем также операторы

$$\bar\tau(\gamma) := P_n \tau(g) P_m : H \to H$$

(где по-прежнему $g \in \gamma$). Легко видеть, что матрица $\bar\tau(\gamma)$ как матрица оператора $H_m \oplus H_m^\perp \to H_n \oplus H_n^\perp$ имеет вид

$$\bar\tau(\gamma) = \begin{pmatrix} \tau(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5. Продолжение представлений группы S_∞ на полугруппу $\mathrm{End}(K_\infty)$.

Теорема 1.4. Пусть τ — унитарное представление группы S_∞. Тогда

а) τ однозначно продолжается до непрерывного $*$-представления $\bar\tau$ полугруппы $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\infty)$;

б) для любого $\gamma \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\infty)$ выполнено $\|\bar\tau(\gamma)\| \leqslant 1$;

в) $\tau(\theta_\infty^k) = P_k$, где P_k — проектор на подпространство H_k всех S_∞^k-неподвижных векторов.

Доказательство. Прежде всего, вспомним, что группа S_∞ плотна в полугруппе $\mathrm{End}(K_\infty)$, поэтому единственность продолжения и утверждение б) теоремы в доказательстве не нуждаются.

Докажем существование продолжения.

Пусть $J \in \mathrm{End}(K_\infty)$. Пусть $J_n = \theta_\infty^n J \theta_\infty^n$; на уровне 0-1-матриц это означает, что

$$J_n = \begin{pmatrix} [J]_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $[J]_{nn}$ по-прежнему обозначает левый верхний уголок матрицы J.

Далее, выберем $g_n \in \mathrm{S}_\infty$ такой, что $\theta^n_\infty g \theta^n_\infty = J_n$. Пусть $\gamma_n \in \mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^n_\infty$ — двойной класс смежности, содержащий g_n (ему соответствует морфизм $[J]_{nn} \in \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_n, K_n)$).

Заметим, что $g_{n+j} \in \gamma_n$ для всех $j \geqslant 0$ (что означает $[g_{n+j}]_{nn} = J_{nn}$). Поэтому

$$P_n\tau(g_{n+j})P_n = P_n\tau(g_n)P_n = \bar{\tau}(\gamma_n).$$

Учитывая, что $H_n \subset H_{n+j}$, получаем $P_nP_{n+j} = P_{n+j}P_n = P_n$. Поэтому

$$P_n\tau(g_{n+j})P_n = P_nP_{n+j}\tau(g_{n+j})P_{n+j}P_n = P_n\bar{\tau}(\gamma_{n+j})P_n.$$

Итак,

$$P_n\bar{\tau}(\gamma_{n+j})P_n = \bar{\tau}(\gamma_n). \tag{1.3}$$

Рассмотрим последовательность операторов $\bar{\tau}(\gamma_n)$. Тогда $\|\bar{\tau}(\gamma_n)\| \leqslant 1$, и для любого k и любых $h_1, h_2 \in H_k = \mathrm{Im}\, P_k$ последовательность $\langle h_1, \bar{\tau}(\gamma_n)h_2\rangle$ стабилизируется (см. равенство (1.3)). Поэтому $\bar{\tau}(\gamma_n)$ сходится слабо к некоторому оператору, который мы обозначим через $\bar{\tau}(J)$ (см. критерий слабой сходимости, п. I.4.1). Заметим, что $P_n\bar{\tau}(J)P_n = \tau(\gamma_n)$. Отсюда, в частности, вытекает слабая непрерывность отображения $J \mapsto \bar{\tau}(J)$, а из слабой непрерывности вытекает равенство

$$\bar{\tau}(J_1J_2) = \bar{\tau}(J_1)\bar{\tau}(J_2). \tag{1.4}$$

Действительно, пусть $g_k \to J_1$, а $q_l \to J_2$, где $g_k, q_l \in \mathrm{S}_\infty$. Тогда

$$\tau(g_kq_l) = \tau(g_k)\tau(q_l).$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, получаем $\bar{\tau}(g_kJ_2) = \tau(g_k)\bar{\tau}(J_2)$: переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем (1.4).

Осталось проверить утверждение в) теоремы.

Мы имеем $(\theta^n_\infty)^2 = \theta^n_\infty$, $(\theta^n_\infty)^* = \theta^n_\infty$, поэтому $\tau(\theta^n_\infty)$ является ортогональным проектором. Далее, для любого $g \in \mathrm{S}^n_\infty$ выполнено $g\theta^n_\infty = \theta^n_\infty$. Поэтому для любого $v \in \mathrm{Im}\,\tau(\theta^n_\infty)$ выполнено

$$\begin{aligned}\tau(g)v &= \tau(g)\tau(\theta^n_\infty)v = \\ &= \tau(\theta^n_\infty)v = \\ &= v.\end{aligned}$$

Поэтому $\mathrm{Im}\,\tau(\theta^n_\infty) \subset H_n$.

Пусть, далее, $w \in H_n = \mathrm{Im}\, P_n$. Пусть последовательность $p_j \in \mathrm{S}^n_\infty$ сходится к θ^n_∞. Тогда $\tau(p_j)w = w$, а потому и $\tau(\theta^n_\infty)w = w$. Т. е. $\mathrm{Im}\,\tau(\theta^n_\infty) \supset H_n$. ■

Следующее высказывание становится теперь тавтологией. Оно, однако, заслуживает того, чтобы быть сформулированным.

Следствие. 1.5. Пусть $g_j \in \mathrm{S}^n_\infty$ — последовательность, сходящаяся к θ^n_∞. Пусть τ — унитарное представление S_∞. Тогда $\tau(g_j) \to P_n$ слабо.

1.6. Продолжение представлений полугруппы $\mathrm{End}(K_\infty)$ на категорию $\overline{\mathbf{PB}}$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\alpha, K_\beta)$. Рассмотрим элемент

$$F(\gamma) = \lambda_{\beta\infty}\gamma\mu_{\infty\alpha} \in \mathrm{End}(K_\infty).$$

Вопрос. Что это значит на уровне 0-1-матриц?

Учитывая, что $\mu_{\infty\beta}\lambda_{\beta\infty} = 1$, мы получаем, что для любых $\gamma_1 \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\alpha, K_\beta)$, $\gamma_2 \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\beta, K_\delta)$ выполнено

$$F(\gamma_2\gamma_1) = F(\gamma_2)F(\gamma_1). \tag{1.5}$$

Итак, мы получили гомоморфизм группоида морфизмов категории $\overline{\mathbf{PB}}$ в полугруппу $\mathrm{End}(K_\infty)$.

Пусть, далее, τ — некоторое $*$-представление полугруппы $\mathrm{End}(K_\infty)$ в пространстве H. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$. Введем операторы

$$\bar{\tau}(\gamma) := \tau(F(\gamma)) : H \to H.$$

В силу (1.5) мы получаем

$$\bar{\tau}(\gamma_2\gamma_1) = \bar{\tau}(\gamma_2)\bar{\tau}(\gamma_1).$$

Учитывая, что для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{PB}}}(K_\alpha, K_\beta)$ выполнено

$$\theta^\beta_\infty F(\gamma) = F(\gamma) = F(\gamma)\theta^\alpha_\infty,$$

мы получаем, что

$$\mathrm{Im}\,\bar{\tau}(\gamma) \subset \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\beta_\infty), \qquad \mathrm{Ker}\,\bar{\tau}(\gamma)^\perp \subset \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\infty).$$

Поэтому $\bar{\tau}(\gamma)$ можно рассматривать как оператор $\mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\infty) \to \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\beta_\infty)$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1.6. Пусть τ — некоторое $*$-представление полугруппы $\mathrm{End}(K_\infty)$ в пространстве H. Положим $T(K_\alpha) = \mathrm{Im}\,\tau(\theta^\alpha_\infty)$ для всех $\alpha = 0, 1, \ldots, \infty$. Для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}(K_\alpha, K_\beta)$ определим оператор $\tau(\gamma) : T(K_\alpha) \to T(K_\beta)$ по формуле

$$\tau(\gamma) := \tau(\lambda_{\beta\infty}\gamma\mu_{\infty\alpha})\big|_{T(K_\alpha)}. \tag{1.6}$$

Тогда $\mathsf{T} = (T, \gamma)$ является $*$-представлением категории $\overline{\mathbf{PB}}$.

В качестве следствия мы получаем следующую *«теорему мультипликативности»*.

Теорема 1.7. Пусть τ — унитарное представление S_∞ в пространстве H, пусть H_n — пространство S^n_∞-неподвижных векторов, а P_n — проектор на H_n. Для любого $m < \infty$ положим $T(K_m) = H_m$, а для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$

$$\tau(\gamma) = P_n\tau(g)\big|_{H_m},$$

где $g \in \gamma \in \mathrm{S}^n_\infty \setminus \mathrm{S}_\infty / \mathrm{S}^m_\infty \simeq \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}(K_m, K_n)$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{PB}$.

1.7. Теорема аппроксимации.

Теорема 1.8. Любое $*$-представление категории **PB** единственным образом продолжается до непрерывного $*$-представления категории $\overline{\mathbf{PB}}$.

Таким образом, мы видим, что существуют канонические биекции между следующими множествами

$$\left\{\begin{matrix}\text{унитарные}\\ \text{представления}\\ \text{группы } \mathrm{S}_\infty\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}*\text{-представления}\\ \text{полугруппы}\\ \mathrm{End}(K_\infty)\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}*\text{-представления}\\ \text{категории } \overline{\mathbf{PB}}\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}*\text{-представления}\\ \text{категории } \mathbf{PB}\end{matrix}\right\}.$$

В следующем параграфе мы увидим, что описание всех представлений категории **PB** — задача несложная, а ее решение автоматически влечет описание остальных трех множеств.

Теорема 1.8 вытекает из следующей леммы и теоремы 1.10.

Лемма 1.9. Для любого $*$-представления $\mathrm{T} = (T, \gamma)$ категории **PB** и для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}$ выполнено $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$.

Доказательство. Группоид морфизмов категории **PB** порожден группами $\mathrm{S}_n \simeq \mathrm{Aut}(K_n)$ и элементами λ_{mn}, μ_{nm}. Для $g \in \mathrm{S}_n$ операторы $\tau(g)$ унитарны, а

$$\tau(\mu_{nm})\tau(\mu_{nm})^* = \tau(\mu_{nm}\mu_{nm}^*) = \tau(1) = 1.$$

Поэтому $\|\tau(\mu_{nm})\| = 1$, а $\tau(\lambda_{mn}) = \tau(\mu_{nm})^*$. ∎

1.8. Абстрактная теорема аппроксимации. Пусть $\overline{\mathbf{K}}$ — топологическая упорядоченная категория с инволюцией, пусть объекты $\overline{\mathbf{K}}$ нумеруются элементами частично упорядоченного множества $\overline{\Sigma}$. Пусть $\Sigma \subset \overline{\Sigma}$, при этом для любых $\alpha, \beta \in \Sigma$ существует $\gamma \in \Sigma$ такое, что $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$. Пусть $\mathbf{K}$ — категория, объекты которой нумеруются элементами множества Σ, причем $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(V_\alpha, V_\beta) = \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{K}}}(V_\alpha, V_\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \Sigma$. Мы скажем, что подкатегория $\mathbf{K}$ *аппроксимирует* $\overline{\mathbf{K}}$ (или *аппроксимативна* в $\overline{\mathbf{K}}$), если она удовлетворяет следующим условиям:

а) для любого $\alpha \in \overline{\Sigma}$ существует неубывающая цепь $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots$ в Σ такая, что $\alpha = \sup \alpha_j$ (т.е. $\alpha \geqslant \alpha_j$ для всех j, и для любого β, большего всех α_j, выполнено $\beta \geqslant \alpha$);

б) пусть $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots, \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \dots$ — элементы Σ, пусть $\alpha = \sup \alpha_j$, $\beta = \sup \beta_j$, тогда для любого $P \in \mathrm{Mor}(V_\alpha, V_\beta)$ выполнено

$$\theta_\alpha^{\alpha_l} P \theta_\beta^{\beta_k} \to P$$

при $k, l \to \infty$.

Пример. Категория **PB** аппроксимативна в $\overline{\mathbf{PB}}$.

Теорема 1.10. Пусть категория $\mathbf{K}$ аппроксимативна в $\overline{\mathbf{K}}$. Любое $*$-представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{K}$ такое, что $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$ для всех $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}$, единственным образом продолжается до представления категории $\overline{\mathbf{K}}$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что при $\varphi < \psi$ оператор $\tau(\lambda_{\varphi\psi})$ отождествляет пространство $T(V_\varphi)$ с подпространством в $T(V_\psi)$. Пусть $\alpha \in \overline{\Sigma} \setminus \Sigma$, а $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots$ — последовательность в Σ такая, что $\alpha = \sup \alpha_j$. Пространство $T(V_\alpha)$ мы определим как пополнение объединения пространств $T(V_{\alpha_j})$:

$$T(V_{\alpha_1}) \subset T(V_{\alpha_2}) \subset \dots.$$

Пусть, далее, $\alpha, \beta \in \overline{\Sigma}$, а $Q \in \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{K}}}(V_\alpha, V_\beta)$, пусть $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots$, $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \dots$, $\alpha = \sup \alpha_j$, $\beta = \sup \beta_j$. Пусть P_β^i — проектор на $T(V_{\beta_i})$ в $T(V_\beta)$, а P_α^i — проектор на $T(V_{\alpha_i})$ в $T(V_\alpha)$. Оператор $\tau(Q)$ мы определим из условий

$$P_\beta^i \tau(Q) P_\alpha^j = \tau\left(\mu_{\beta\beta_i} Q \lambda_{\alpha_j\alpha}\right) \tag{1.7}$$

для всех i, j. Если представить себе оператор $\tau(Q)$ как блочную матрицу

$$\tau(Q) : \bigoplus_j \left(T(V_{\alpha_j}) \ominus T(V_{\alpha_{j-1}})\right) \to \bigoplus_i \left(T(V_{\beta_i}) \ominus T(V_{\beta_{i-1}})\right),$$

то условие (1.7) просто определяет верхние левые уголки этой матрицы.

Задача. Проверьте согласованность условий (1.7).

Наконец, очевидным образом $\|\tau(Q)\| \leqslant 1$.

Задача. Покажите, что $\tau(Q_1Q_2) = \tau(Q_1)\tau(Q_2)$.

Пусть, далее, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots$, $\alpha_1' \leqslant \alpha_2' \leqslant \dots$, причем $\sup \alpha_j = \sup \alpha_j' = \alpha$. Тогда, вроде бы, мы можем построить пространство $T(V_\alpha)$ двумя разными способами. Но оператор $\tau(1_{V_\alpha})$ отождествляет эти пространства. Теорема доказана. ∎

1.9. Замечания. Категорию $\overline{\mathbf{PB}}$ можно было бы определить как категорию, объектами которой являются конечные или счетные множества, а морфизмами — частичные биекции. В некоторых отношениях (например, с точки зрения рассуждений следующего параграфа), такой взгляд был бы приятней.

Задача. Сформулируйте аналог теоремы 1.7 при таком определении категории $\overline{\mathbf{PB}}$.

§ 2. *Классификация представлений группы* S_∞

2.1. Представления полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{PB}}(K_n)$. Пусть $n < \infty$, а $\Gamma_n := \mathrm{End}_{\mathbf{PB}}(K_n)$. Пусть $A \subset K_n = \{1, 2, \dots, n\}$, пусть $\mathrm{card}(A)$ — число элементов множества A. Обозначим через θ_A частичную биекцию множества K_n на себя с областью определения A и тождественную на A. Ясно, что

$$\theta_A\theta_B = \theta_{A\cap B}, \quad \theta_A^* = \theta_A, \quad \theta_A^2 = \theta_A.$$

Пусть τ — некоторое *неприводимое* $*$-представление полугруппы Γ_n в пространстве H. Полугруппа Γ конечна, поэтому $\dim H < \infty$ (действительно, циклическая оболочка любого вектора должна быть конечномерной). Пусть $P_A := \tau(\theta_A)$, а $H_A := \mathrm{Im}\, P_A$. Ясно, что P_A — ортогональный проектор ($P_A^2 = P_A$, $P_A^* = P_A$) на H_A. При этом

$$P_A P_B = P_B P_A = P_{A\cap B}, \tag{2.1}$$

а следовательно,

$$H_A \cap H_B = H_{A\cap B}. \tag{2.2}$$

Пусть $g \in S_n = \mathrm{Aut}(K_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau(g)^{-1}P_A\tau(g) &= \tau\big(g^{-1}\theta_A g\big) = \\ &= \tau(\theta_{gA}) = \\ &= P_{gA}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. Существует число $p = p(\tau)$ такое, что $P_A = 0$ при $\operatorname{card} A < p$ и $P_A \neq 0$ при $\operatorname{card}_A \geqslant p$.

Доказательство. См. равенства (2.1), (2.3). ■

Пусть ниже $p = p(\tau)$ такое же, как в лемме 2.1.

Следствие 2.2. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Оператор $\tau(\gamma)$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk}\gamma \geqslant p(\tau)$.

Доказательство. Действительно, γ представимо в виде $\gamma = g\theta_B$, где $g \in S_n$. ■

Лемма 2.3.

$$H = \bigoplus_{A:\operatorname{card}(A)=p(\tau)} H_A. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A') = p(\tau)$, а $A \neq A'$. Тогда $\operatorname{card}(A \cap A') < p(\tau)$, поэтому $P_{A\cap A'} = 0$, а поэтому (см. (2.1)) H_A ортогонально $H_{A'}$. Кроме того, правая часть (2.4) инвариантна относительно S_n и элементов θ_B, что и завершает доказательство. ■

Задача. Как действует $\tau(\theta_B)$ в (2.4)?

Рассмотрим подмножество $K_p = \{1, \ldots, p\}$ в K_n. Обозначим через S_p подгруппу в $S_n \simeq \mathrm{Aut}(K_n)$, состоящую из элементов, оставляющих $p+1, p+2, \ldots \in K_n$ на месте. Через S^p мы обозначим подгруппу, состоящую из элементов, оставляющих на месте $1, 2, \ldots, p$.

Лемма 2.4. Подпространство H_{K_p} является S_p-инвариантным. Любой элемент подпространства H_{K_p} неподвижен под действием группы S^p.

Доказательство. Пусть $h \in H_{K_p}$, а $g \in S_p$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau(g)h &= \tau(g)\tau(\theta_{K_p})h = \\ &= \tau(\theta_{K_p})\tau(g)h = \\ &= P_{K_p}(\tau(g)h) \in H_{K_p}.\end{aligned}$$

Пусть $g \in S^p$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau(g)h &= \tau(g)\tau(\theta_{K_p})h = \\ &= \tau(g\theta_{K_p})h = \\ &= \tau(\theta_{K_p})h = \\ &= h.\end{aligned}$$

■

Итак, с каждым неприводимым представлением τ полугруппы Γ_n связано некоторое представление $\rho = \rho(\tau)$ группы $S_{p(\tau)}$ в пространстве $H_{K_{p(\tau)}}$.

Лемма 2.5. Представление $\rho(\tau)$ неприводимо.

Доказательство. Пусть V — некоторое S_p-инвариантное подпространство в H_{K_p}, пусть W — циклическая оболочка V под действием Γ_n. Нам достаточно показать, что

$$W \subset V \oplus \Big[\bigoplus_{A\neq K_p, \operatorname{card} A = p} H_A\Big]. \tag{2.5}$$

Пусть $\gamma \in \Gamma$. Представим γ в виде $\gamma = g\theta_B$, где $g \in S_n$. Заметим, что $\tau(\theta_B)|_V$ есть 0 или 1. Пусть $g \in S_n$. Тогда $\tau(g)V \subset \tau(g)H_{K_p} = H_{gK_p}$. Если $gK_p = K_p$, то $g \in S_p \times S^p$, и в силу леммы 2.4 мы имеем $\tau(g)V = V$. Если $gK_p \neq K_p$, то H_{gK_p} содержится в слагаемом $[\ldots]$. Включение (2.5) и вместе с ним лемма доказаны. ■

Теорема 2.6. Число $p = p(\tau)$ и неприводимое представление $\rho = \rho(\tau)$ группы S_p полностью определяют неприводимое представление τ полугруппы Γ_n.

Доказательство. Утверждение очевидно, и мы предоставляем читателю убедиться в этом. Мы же дадим короткое доказательство. Пусть τ и τ' — два таких представления в пространствах H и H'. Рассмотрим их прямую сумму. Пусть V — график S_p-сплетающего оператора $H_{K_p} \to H'_{K_p}$. Тогда точно так же, как в доказательстве леммы 2.5, мы получаем, что циклическая оболочка W подпространства V содержится в

$$V \oplus \Big[\bigoplus_{A\neq K_p, \operatorname{card} A = p} (H_A \oplus H'_A)\Big].$$

Итак, $W \neq H_1 \oplus H_2$. Но проекции W на H_1 и H_2 являются подпредставлениями в H_1 и H_2, в силу неприводимости τ и τ' проекции сюръективны, при этом в силу той же неприводимости $W \cap H_1 = 0$, $W \cap H_2 = 0$, а поэтому W — график обратимого сплетающего оператора $H_1 \to H_2$. Теорема доказана. ■

2.2. Явное описание представлений полугруппы Γ_n и спускающий функтор. Пусть $p = 0, 1, 2, \ldots$, а ρ — неприводимое представление группы S_p. Построим по этим данным неприводимое представление $\tau = \tau_n(p, \rho)$ полугруппы Γ_n в некотором пространстве $H_n(p, \rho)$.

Пусть Ω_n^p — множество всех p-точечных подмножеств множества $K_n = \{1, \ldots, n\}$. Пространство $H = H_n(p, \rho)$ мы определим как пространство функций на Ω_n^p со значениями в пространстве V_ρ представления ρ. Скалярное произведение в $H_n(p, \rho)$ мы определим по формуле

$$\langle f, g\rangle = \sum_{A\in\Omega_n^p} \big\langle f(A), g(A)\big\rangle_{V_\rho},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_\rho}$ — скалярное произведение в V_ρ.

Пусть $\gamma \in \Gamma$, определим оператор $\tau(\gamma)$ в H по формуле

$$\tau(\gamma)f(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \not\subset D(\gamma), \\ \rho(g)f(\gamma A), & \text{если } A \subset D(\gamma), \end{cases}$$

где $D(\gamma)$ — как и раньше область определения γ, а элемент $g = g(A,\gamma) \in S_p$ определяется из условия

$$a_i < a_j \Leftrightarrow \gamma a_{gi} < \gamma a_{gj},$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ — элементы множества A. Множество γA состоит из всех b, имеющих вид $b = \gamma a_k$, где $a_k \in A$.

Задачи.

а) Как действуют в $H_n(p,\rho)$ проекторы вида P_A?

б) Покажите, что $p(\tau_n(p,\rho)) = p$, а $\rho(\tau_n(p,\rho)) = \rho$.

Задача. Проверьте, что спускающий функтор (см. § III.4) для категории **PB** имеет вид

$$\mathrm{F}^n_{n-1}\tau_n[p,\rho] = \begin{cases} 0, & n = p, \\ \tau_{n-1}[p,\rho], & n > p. \end{cases}$$

2.3. Представления категории PB. Зная перечень неприводимых представлений полугрупп Γ_n и явный вид спускающего функтора, мы в качестве очевидного следствия получаем описание всех представлений **PB**. Сейчас мы их все построим.

Пусть $p = 0, 1, 2, \ldots$, а ρ — неприводимое унитарное представление S_p. Построим неприводимое $*$-представление $(T,\tau) = (T,\tau)(p,\rho)$ категории **PB**. Пространства $T(K_n)$ — это пространства $H_n(p,\rho)$ из предыдущего пункта. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}(K_n, K_m)$. Оператор $\tau(\gamma) : H_n(p,\rho) \to H_m(p,\rho)$ задается формулой

$$\tau(\gamma)f(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \not\subset D(\gamma), \\ \rho(g)f(\gamma A), & \text{если } A \subset D(\gamma), \end{cases}$$

где $g = g(\gamma, A) \in S_p$ определяется из условия

$$a_i < a_j \Leftrightarrow \gamma a_{gi} < \gamma a_{gj}, \tag{2.6}$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ — элементы множества A. Множество γA состоит из всех b, имеющих вид $b = \gamma a_k$, где $a_k \in A$.

2.4. Представления категории $\overline{\mathbf{PB}}$ и группы $\underline{S_\infty}$. Мы уже знаем, что любое $*$-представление категории **PB** продолжается на $\overline{\mathbf{PB}}$. Явный вид этого продолжения очевиден, оно записывается теми же формулами, только индексы m и n теперь могут принимать значение ∞.

Заодно мы построили и все унитарные представления группы S_∞. А именно, представления S_∞ нумеруются парой (p,ρ), где $p \in \mathbb{Z}_+$, а ρ — неприводимое представление S_p. Они реализуются в пространствах $H_\infty(p,\rho)$ по формуле

$$\tau(\gamma)f(A) = \rho(g)f(\gamma A),$$

где $g \in S_p$ определяется из условия (2.6).

2.5. Замечания.

Задача. Покажите, что любое унитарное представление S_∞ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений, и это разложение единственно (в том смысле, что при любом разложении набор неприводимых представлений будет один и тот же).

Задача. Покажите, что тензорные степени $\rho^{\otimes n}$ тождественного представления ρ группы S_∞ содержат (в качестве подпредставлений) все неприводимые представления S_∞.

2.6. Литературные замечания. Классификация всех унитарных представлений S_∞ была получена Либерманом [Lieberman (1972)]. Мы в §§ 1–2 в основном следуем статье [Ольшанский (1985)], см. также [Ольшанский (1980)].

§ 3. *Категорная оболочка группы* $\mathrm{O}(\infty)$

3.1. Группа $\mathrm{O}(\infty)$. Через $\mathrm{O}(\infty)$ мы обозначим группу всех ортогональных операторов в вещественном гильбертовом пространстве ℓ_2, снабженную слабой операторной топологией.

3.2. Категория $\overline{\mathbf{O}}$. Объекты категории $\overline{\mathbf{O}}$ — вещественные гильбертовы пространства (конечномерные и бесконечномерные). Морфизмы $H_1 \to H_2$ — это *сжатия*, т. е. операторы с нормой $\leqslant 1$. Множество $\mathrm{Mor}(H_1, H_2)$ мы снабдим слабой операторной топологией. Инволюция в $\overline{\mathbf{O}}$ — обычное сопряжение операторов.

Через **O** мы обозначим подкатегорию в $\overline{\mathbf{O}}$, объекты которой — вещественные евклидовы пространства, а морфизмы — те же самые, что и в $\overline{\mathbf{O}}$.

Ясно, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{O}(n)$, а $\mathrm{Aut}(\ell_2) \simeq \mathrm{O}(\infty)$.

Легко видеть, что **O** является упорядоченной категорией. В самом деле, выберем в **O** по одному объекту $\mathbb{R}^n$ каждой размерности. Тогда $\lambda_{m,n}$ и $\mu_{n,m}$ задаются формулами ($m < n$)

$$\lambda_{m,n}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mu_{n,m}(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Предложение 3.1. Группа $\mathrm{O}(\infty)$ плотна в $\mathrm{End}(\ell_2)$.

Доказательство. См. § 4 главы I. ■

3.3. Двойные классы смежности. Обозначим через $\mathrm{O}^n(\infty)$ подгруппу в $\mathrm{O}(\infty)$, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Задача. Покажите, что для любой окрестности U единицы в $\mathrm{O}(\infty)$ найдется n такое, что $\mathrm{O}^n(\infty) \subset U$.

Пусть $[A]_{mn}$, как и раньше, обозначает верхний угол размера $m \times n$ матрицы A.

Ясно, что если A_1 и A_2 лежат в одном классе смежности $\mathrm{O}^m(\infty) \backslash \mathrm{O}(\infty) / \mathrm{O}^n(\infty)$, то $[A_1]_{mn} = [A_2]_{mn}$. Кроме того, очевидно, что для $A \in \mathrm{O}(\infty)$ выполнено $\|[A]_{mn}\| \leqslant 1$, т. е. $[A]_{mn} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Теорема 3.2. Отображение

$$A \mapsto [A]_{mn}$$

осуществляет биекцию $\mathrm{O}^m(\infty) \setminus \mathrm{O}(\infty) \,/\, \mathrm{O}^n(\infty) \leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Доказательство.

а) *Сюръективность.* Пусть C — сжатие $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда $C = [A]_{mn}$, где

$$A = \begin{pmatrix} C & (1 - CC^*)^{1/2} & \\ (1 - C^*C)^{1/2} & -C^* & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

б) *Инъективность*. Пусть, например, $m < n$. Ортонормированные базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ можно выбрать так, что матрица C будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \dots \\ & \lambda_2 & 0 & \dots \\ & & \ddots \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$. Посмотрим, как можно достроить матрицу C до ортогональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \oplus V \to \mathbb{R}^m \oplus W,$$

где V и W — бесконечномерные гильбертовы пространства. При этом нас интересуют двойные классы смежности, т. е. ортонормированные базисы в V и W мы можем выбирать так, как нам захочется.

Заметим, что строки матрицы P — попарно ортогональные векторы с длинами $(1-\lambda_j^2)^{1/2}$. Выбирая базис в V, мы можем добиться, чтобы матрица P имела вид

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda_1^2} & & 0 & \dots \\ & \sqrt{1-\lambda_2^2} & 0 & \dots \\ & & \ddots \vdots & \dots \end{pmatrix}.$$

Аналогично, можно считать, что матрица Q имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1_{n-m} \\ \hline \sqrt{1-\lambda_1^2} & & & \\ & \sqrt{1-\lambda_2^2} & & \\ & & \ddots & \end{array}\right).$$

Из того, что строки матрицы $(Q \quad R)$ должны быть ортогональны строкам матрицы $(C \quad P)$, легко увидеть, что матрица R теперь выписывается однозначно и имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \\ -\lambda_1 & & \\ & -\lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\end{matrix}}\right\} n-m \\ \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

∎

Задача. Пусть V, W — вещественные (или комплексные) гильбертовы пространства одной размерности, $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$, причем $\dim W_2 \geqslant \dim V_1$, $\dim V_2 \geqslant \dim W_1$. Докажите, что любое сжатие $C : V_1 \to W_1$ достраивается до ортогонального оператора

$$A = \begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} : V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2,$$

причем матрица A единственна с точностью до эквивалентности

$$\begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & P \\ Q & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & M \end{pmatrix},$$

где $L \in O(W_2)$, $M \in O(V_2)$.

Замечание. См. также [Sz.-Nagy, Foiaş (1967)]. С несравненно более тонкими задачами этого рода мы встретимся в следующей главе.

3.4. Категорное продолжение.

Теорема 3.3. Любое унитарное представление τ группы $O(\infty)'$ в пространстве H продолжается единственным образом до $*$-представления $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\overline{\mathbf{O}}$. При этом пространства $T(\mathbb{R}^n)$ можно отождествить с пространствами H_n всех $O^n(\infty)$-неподвижных векторов в H. Если $\gamma \in O^m(\infty) \backslash O(\infty) / O^n(\infty) \simeq \mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, то оператор $\tau(\gamma)$ из $T(\mathbb{R}^n) \simeq H_n$ в $T(\mathbb{R}^m) \simeq H_m$ задается формулой

$$\tau(\gamma) = P_m \tau(g)\Big|_{H_n},$$

где P_m — проектор на H_m, а $g \in \gamma$.

Доказательство дословно повторяет рассуждения § 1. Нужно лишь заменить S_∞ на $O(\infty)$. ∎

Теорема 3.4. Любое $*$-представление $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathbf{O}$ такое, что $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$ для всех $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{O}}$, допускает единственное продолжение до $*$-представления категории $\overline{\mathbf{O}}$.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 1.10. ∎

3.5. Классификационная теорема. Пусть $\overline{\mathbf{A}}$ — категория, объектами которой являются комплексные гильбертовы пространства, а морфизмами — ограниченные операторы. Инволюция в $\mathbf{A}$ — обычное сопряжение операторов.

Напомним, как по диаграмме

$$\overset{a_1}{\circ}\!-\!\!-\!\overset{a_2}{\circ}\!-\!\!-\!\overset{a_3}{\circ}\!-\!\!-\!\overset{a_4}{\circ}\!-\!\!-\,\dots \tag{3.1}$$

($a_j \in \mathbb{Z}_+$, $a_j = 0$ для больших j) построить неприводимое голоморфное представление категории $\overline{\mathbf{A}}$. Выберем по одному объекту V каждой размерности: $V = \mathbb{C}^0, \mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2, \dots, \ell_2$, и в k-мерном объекте возьмем стандартный базис $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots$ Положим для любого объекта V

$$T(V) = \bigotimes_j (\Lambda^j V)^{\otimes a_j},$$

а для любого оператора $P : V \to W$ определим оператор

$$\tau(V) = \bigotimes_j (\Lambda^j P)^{\otimes a_j} : T(V) \to T(W)$$

(заметим, что все тензорные произведения на самом деле конечны). Далее, выберем в каждом пространстве $T(V)$ вектор

$$Z(V) = \bigotimes_j \left(e_1^{(k)} \wedge e_2^{(k)} \wedge \dots \wedge e_j^{(k)}\right)^{\otimes a_j}$$

и возьмем $\mathrm{End}(V)$-циклическую оболочку $R(V)$ вектора $Z(V)$ (для всех V). Набор подпространств $R(V)$ задает неприводимое подпредставление в $\mathsf{T} = (T, \tau)$, это подпредставление мы будем обозначать через $\mathsf{R}_{\alpha_1\alpha_2\dots} = (R_{\alpha_1\alpha_2\dots}, \rho_{\alpha_1\alpha_2\dots})$.

Корректность конструкции устанавливается буквально теми же соображениями, что и в конечномерном случае (см. п. III.4.6).

Представления $\mathrm{R}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ мы будем называть *голоморфными тензорными представлениями* категории $\overline{\mathbf{A}}$.

Теорема 3.5.

а) Ограничение $\mathrm{U}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ голоморфного тензорного представления $\mathrm{R}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ категории $\overline{\mathbf{A}}$ на категорию $\overline{\mathbf{O}}$ неприводимо.

б) Представления $\mathrm{U}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ попарно различны.

в) Неприводимые $*$-представления категории $\overline{\mathbf{O}}$ исчерпываются представлениями $\mathrm{U}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$.

Понятно, что вместе с тем мы получили и классификацию представлений группы $\mathrm{O}(\infty)$.

Задача. Докажите, что ограничения представлений $\mathrm{R}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ на категорию $\overline{\mathbf{O}}$ неприводимы и попарно различны.

Указание. Использовать теорему единственности для голоморфных функций.

Мы переходим к доказательству теоремы (приведенная только что задача тоже решится сама собой). Понятно, что классификационную теорему достаточно доказать для категории $\mathbf{O}$.

3.6. Доказательство теоремы 3.5. Чтобы расклассифицировать представления категории $\mathbf{O}$, мы сначала расклассифицируем все представления полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.6. Любое неприводимое $*$-представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$\tau(\gamma) = \det(\gamma)^s \rho(\gamma),$$

где $s \geqslant 0$, а $\mathrm{R} = (R, \rho)$ — некоторое неприводимое представление категории $\mathbf{A}$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ подполугруппу Γ_n^0, состоящую из обратимых операторов. Полугруппа Γ_n^0 является одновременно подполугруппой в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, при этом $\Gamma_n^0 \supset \mathrm{O}(n)$. Важно заметить, что Γ_n^0 имеет нетривиальный центр Z, состоящий из матриц вида $L_t = e^{-t}\cdot 1$, где $t \geqslant 0$.

Лемма 3.7. Любое неприводимое $*$-представление τ полугруппы Γ_n^0 продолжается до представления группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, удовлетворяющего условию $\tau(g) = \tau(g)^*$.

Доказательство. В силу неприводимости τ центр Z действует скалярными операторами $\tau(L_s) = a^{-s}\cdot E$, где $a > 0$. Пусть $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Выберем s так, чтобы $L_s g \in \Gamma_n^0$ и положим $\tau(g) := a^s \tau(L_s g)$. Лемма доказана. ■

Предложение 3.8. Любое неприводимое представление τ группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, удовлетворяющее условию

$$\tau(g^t) = \tau(g)^*, \tag{3.2}$$

конечномерно.

Доказательство предложения. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Выберем в $\mathfrak{g}$ базис $X_1,\ldots,X_p,Y_1,\ldots,Y_q$ так, что

$$X_j^* = -X_j, \quad Y_k^* = Y_k.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует в пространстве H представления τ операторами, которые мы тоже будем обозначать через $\tau(\cdot)$. Прежде всего, заметим, что операторы X_j образуют алгебру Ли группы $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, а эта группа действует в H унитарными операторами (в силу равенства (3.2)). Поэтому операторы $i\tau(X_j)$ существенно самосопряжены. Далее, $\tau(\exp(sY_k))$ — однопараметрическая группа ограниченных самосопряженных операторов. Поэтому $\tau(Y_k)$ — ограниченные самосопряженные операторы. Но X_j выражается линейно через коммутаторы вида $[Y_k, Y_l]$ (легко проверить, что любая кососимметричная матрица есть линейная комбинация коммутаторов симметричных матриц). Поэтому и операторы $\tau(X_j)$ ограничены.

Далее, матрицы вида

$$Z = \sum a_j X_j + i\sum b_k Y_k,$$

где $a_j, b_k \in \mathbb{R}$, образуют алгебру Ли $\mathfrak{u}(n)$ группы $\mathrm{U}(n)$. Поэтому в пространстве H мы имеем унитарное представление алгебры Ли $\mathfrak{u}(n)$, которое, в силу ограниченности операторов представления, интегрируется до представления соответствующей группы, т. е. универсальной накрывающей $\widetilde{\mathrm{U}}(n)$ группы $\mathrm{U}(n)$. Но все неприводимые представления $\widetilde{\mathrm{U}}(n)$ конечномерны. Предложение доказано. ■

Теперь доказательство теоремы превращается в упражнение по теории представлений. Мы будем кратки.

Любое неприводимое конечномерное представление группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ имеет вид

$$\tau_{s;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(g) = \det(g)^s \rho_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(g), \tag{3.3}$$

где $\rho_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ — неприводимое представление категории $\mathbf{A}$ с числовыми отметками $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,0,\ldots)$. При этом $\tau_{s+1;\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \simeq \tau_{s;\alpha_1,\ldots,\alpha_n+1}$.

Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\alpha_n = 0$. Условие (3.2) влечет $s \in \mathbb{R}$.

Итак, все $*$-представления полугруппы Γ_n^0 перечислены. Остается посмотреть, когда они продолжаются по непрерывности на всю полугруппу $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$.

Для этого рассмотрим в $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ подполугруппу M, состоящую из элементов вида

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & z \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant z \leqslant 1$. Пусть v — вектор старшего веса. Легко видеть, что $\tau(M_z)v = z^{s+\alpha_n}v$. Поэтому при $s + \alpha_n < 0$ оператор $\tau(M_0)$ не определен. Теорема 3.6 доказана. ■

Спускающий функтор имеет вид

$$\mathsf{F}_{n-1}^n \tau_{s;\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \begin{cases} 0 & \text{при } s+\alpha_n > 0, \\ \tau_{0;\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}} & \text{при } s = \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Поэтому согласованная система представлений σ_n полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{O}}(\mathbb{R}^n)$ задается некоторым набором чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,0,\ldots$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_k > 0$;

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n < k, \\ \tau_{0;\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots,0} & \text{при } n \geqslant k, \end{cases}$$

что, собственно, и требовалось доказать в теореме 3.5. ■

3.7. Замечания. Пусть $\mathrm{U}(\infty)$ — полная унитарная группа гильбертова пространства, снабженная слабой топологией.

Теорема 3.9. Любое неприводимое унитарное представление $\mathrm{U}(\infty)$ имеет вид

$$\rho_{\alpha_1\alpha_2\ldots}(g) \otimes \bar{\rho}_{b_1b_2\ldots}(g), \tag{3.4}$$

где представление ρ — то же, что и в п. 3.5, а черта означает комплексное сопряжение. Все представления вида (3.4) попарно различны.

Пусть $\mathrm{Sp}(\infty)$ — унитарная группа кватернионного гильбертова пространства, снабженная слабой топологией.

Теорема 3.10. Любое унитарное неприводимое представление группы $\mathrm{Sp}(\infty)$ имеет вид $\rho_{\alpha_1\alpha_2\ldots}(g^{\mathbb{C}})$, где $g^{\mathbb{C}}$ — матрица g, рассматриваемая как комплексная матрица. Все представления такого вида попарно различны.

Обе теоремы доказываются так же, как теорема 3.5.

Задача*. Докажите следующую теорему [Ольшанский (1978)].

Теорема 3.11. Любое унитарное представление группы $\mathrm{O}(\infty)$ (соответственно $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$) имеет тип I и раскладывается в сумму неприводимых представлений.

3.8. Литературные замечания. Первая попытка классификации представлений $\mathrm{U}(\infty)$ была сделана в [Segal I. E. (1958)], там классификация проводится при довольно сильных дополнительных ограничениях. Кириллов [Кириллов (1973)] анонсировал ответ в общем случае. Доказательство опубликовано в [Ольшанский (1978)], и мы, в основном, следуем этой статье.

§ 4. *Группа автоморфизмов пространства с мерой и марковская категория*

4.1. Лебеговские пространства. Под пространством (M, μ) с мерой μ мы будем всегда понимать лебеговское пространство с борелевской мерой. Аксиоматическое описание лебеговских пространств содержится в § 3 Предварительных сведений, и сейчас мы лишь напомним их конструктивное описание.

Лебеговское пространство — это пространство, представимое в виде объединения промежутка прямой (конечного, бесконечного или пустого), снабженного мерой Лебега, и счетного, конечного или пустого множества точек, имеющих ненулевую меру. Мы всегда считаем, что мера определена на борелевской σ-алгебре.

Пусть M_1, M_2 — пространства с мерой. *Изоморфизмом* $\varphi : M_1 \to M_2$ называется отображение, переводящее измеримые множества в измеримые, сохраняющее меру и биективное с точностью до множеств меры 0.

Известно, что большинство разумных пространств с мерой являются лебеговскими (т. е. изоморфны лебеговским). Приведем несколько примеров, убеждающих в правильности этой точки зрения.

Задача. Пусть D — множество из двух точек 0 и 1 с мерой $\frac{1}{2}$, а D^∞ — произведение счетного числа множеств D, снабженное естественной мерой на произведении. Докажите, что отображение $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto \sum x_j 2^{-j}$ из D^∞ в отрезок $[0,1]$ является изоморфизмом.

Так как $D^\infty \times D^\infty$ изоморфно D^∞, мы получаем, что квадрат $[0,1] \times [0,1]$ изоморфен отрезку $[0,1]$.

Задача. Пусть $[0,1]^\infty$ — произведение счетного числа экземпляров отрезков $[0,1]$. Покажите, что $[0,1]^\infty$ изоморфно $[0,1]$.

Задача. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ из п. VI.1.9 изоморфно $[0,1]$.

Меру подмножества A пространства (M, μ) мы обозначаем через $\mu(A)$.

4.2. Группа Ams. Пусть M — лебеговское пространство с непрерывной вероятностной мерой (т. е. $M \sim [0,1]$). Через Ams мы обозначим группу *автоморфизмов* M (автоморфизм M — это изоморфизм M в себя). Два автоморфизма считаются совпадающими, если они равны всюду, кроме множества меры 0.

Дадим три равносильных определения *слабой топологии* в Ams.

1) Последовательность $g_k \to g$, если для любых измеримых множеств $A \subset M$, $B \subset M$ имеет место сходимость

$$\mu(g_k A \cap B) \to \mu(gA \cap B).$$

2) Пусть $g \in \mathrm{Ams}$. Определим оператор $\tau(g)$ в $L^2(M)$ по формуле

$$\tau(g) f(m) = f(gm). \tag{4.1}$$

Ясно, что этот оператор унитарен. Слабая топология в унитарной группе индуцирует слабую топологию в Ams.

3) Пусть $\mathfrak{h} : M = \bigcup M_i$, $\mathfrak{n} : M = \bigcup N_j$ — два конечных разбиения M. Определим для $g \in \mathrm{Ams}$ матрицу пересечения

$$\varphi_{ij}(g) = \mu(gM_i \cap N_j).$$

Последовательность g_k сходится к g, если последовательность матриц пересечения $\varphi(g_k)$ сходится к матрице $\varphi(g)$.

Задача. Проверьте равносильность определений.

Теперь заметим, что формула (4.1) задает унитарное представление группы Ams. Это представление приводимо по тривиальной причине: функция $f = 1$ является Ams-инвариантной. Соответственно, является инвариантным и пространство $L_0^2(M)$, состоящее из функций с нулевым средним. Представление группы Ams в пространстве $L_0^2(M)$ мы обозначим через τ_0.

Задача. Покажите, что τ_0 неприводимо.

Задача. Опишите слабое замыкание множества всех операторов вида $\tau(g)$ в пространстве всех операторов в $L^2(\mathbb{R})$.

4.3. Марковская категория. Объекты *марковской категории* $\overline{\mathbf{Mar}}$ — лебеговские пространства с вероятностной мерой. Морфизмом $(M, \mu) \to (N, \nu)$ называется борелевская мера $\varkappa$ на $M \times N$ такая, что проекция $\varkappa$ на M есть μ, а проекция $\varkappa$ на N есть ν. Морфизмы категории $\overline{\mathbf{Mar}}$ мы будем называть *полиморфизмами* (в литературе используется также термин «*стохастические ядра*»).

Мера $\varkappa$ индуцирует на почти всех «слоях» вида $m \times N$, где $m \in M$, условные вероятностные меры $\varkappa_m(\cdot)$ на N. Напомним (см. Предварительные сведения, § 4), что эти меры определяются из условия: для любого измеримого подмножества $L \subset M \times N$ выполнено

$$\varkappa(L) = \int\limits_M \varkappa_m((m \times N) \cap L)\, d\mu(m).$$

Это условие равносильно следующему: для любой ограниченной измеримой функции f на $M \times N$ выполнено

$$\iint\limits_{M\times N} f(m,n)\, d\varkappa(m,n) = \int\limits_M \left(\int\limits_N f(m,n)\, d\varkappa_m(n) \right) d\mu(m).$$

Задача. Вычислите условные меры $\varkappa_m(n)$ в случае, когда $\varkappa$ имеет плотность $\varphi(m,n)$ относительно меры $\mu \times \nu$.

Полиморфизм $\varkappa$ неформально следует понимать как «отображение» M в N, которое каждую точку $m \in M$ «размазывает» по множеству N в меру $\varkappa_m$. В этом смысле полиморфизмы напоминают многозначные отображения, но образ точки в нашем случае — не множество, а мера.

Пример. Пусть $g \in \mathrm{Ams}$. Построим по g меру ξ_g на $M \times M$, сосредоточенную на графике отображения $g : M \to M$, такую, что и проекция меры ξ_g на M есть μ. Легко видеть, что ξ_g — действительно полиморфизм.

Задача. Пусть $A \subset M$, $B \subset M$. Покажите, что

$$\xi_g(A \times B) = \mu(gA \cap B).$$

Задача. Как выглядят в случае $\varkappa = \xi_g$ условные меры $\varkappa_m$?

Пример. Пусть (M,μ), (N,ν) — пространства с мерой. Тогда мера $\mu \times \nu$ является полиморфизмом $M \to N$. Этот полиморфизм тоже имеет чрезвычайно наглядный смысл: каждая точка $m \in M$ «размазывается» по N равномерно.

Пример. Пусть пространства (M,μ) и (N,ν) конечны, а $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $n_1, n_2, \ldots, n_q$ — их точки. Тогда полиморфизм $\varkappa : M \to N$ можно понимать как матрицу $\{\varkappa_{ij}\}$ размера $p \times q$, а именно, каждой точке $m_i \times n_j \in M \times N$ ставится в соответствие ее мера $\varkappa_{ij} := \varkappa(m_i \times n_j)$. При этом

$$\sum_i \varkappa_{ij} = \nu(n_j), \quad \sum_j \varkappa_{ij} = \mu(m_i), \quad \varkappa_{ij} \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Теперь мы должны определить произведение полиморфизмов, т. е. формализовать операцию «двукратного размазывания». Пусть $\varkappa : (M,\mu) \to (N,\nu)$ и $\psi : (N,\nu) \to (L,\lambda)$ — полиморфизмы. Определим их произведение в терминах условных мер $\varphi = \psi\varkappa : (M,\mu) \to (L,\lambda)$ из условия

$$\varphi_m = \int \psi_n\, d\varkappa_m(n).$$

Задача. Проверьте корректность определения и ассоциативность умножения.

Пусть теперь M, N, L конечны. Тогда, как легко видеть, матрица $\varphi = \{\varphi_{ij}\}$ вычисляется по формуле

$$\varphi = \psi \cdot \begin{pmatrix} \nu(n_1) & & \\ & \nu(n_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \cdot \varkappa. \tag{4.3}$$

Здесь стоит остановиться и объяснить, что, по существу, мы имеем дело с элементарными общеизвестными объектами теории вероятностей. Пусть (M,μ) и (N,ν) — конечные пространства с мерой, а $\varkappa : (M,\mu) \to (N,\nu)$ — полиморфизм, т. е. матрица, удовлетворяющая (4.2). Рассмотрим матрицу

$$\tilde{\varkappa} = \varkappa \cdot \begin{pmatrix} \mu(m_1) & & \\ & \mu(m_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1}.$$

Тогда

$$\sum_j \tilde{\varkappa}_{ij} = 1,$$

и мы видим, что $\tilde{\varkappa}$ — это просто марковская матрица перехода. Формула (4.3) тогда переписывается в виде

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}\tilde{\varkappa}. \tag{4.4}$$

Наконец, мы должны ввести инволюцию на категории $\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть $\varkappa \in \mathrm{Mor}\big((M,\mu),(N,\nu)\big)$. Тогда $\varkappa^*$ — это та же самая мера на $M \times N$, но рассматриваемая как морфизм $N \to M$.

Определим подкатегорию $\mathbf{Mar}$ в $\overline{\mathbf{Mar}}$. Объекты $\mathbf{Mar}$ — конечные пространства с вероятностной мерой, а $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Mar}}(M,N) = \mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Mar}}}(M,N)$.

4.4. Топология. Пусть (M,μ), (N,ν) — пространства с мерой. Пусть $\varkappa_j$, $\varkappa$ — полиморфизмы $(M,\mu) \to (N,\nu)$. Мы положим, что $\varkappa_j$ сходится к $\varkappa$, если для любых измеримых подмножеств $A \subset M$, $B \subset N$ имеет место сходимость

$$\varkappa_j(A \times B) \to \varkappa(A \times B).$$

Задача. Покажите, что множество $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathbf{Mar}}}(M,N)$ компактно.

Пусть $(M,\mu) \simeq [0,1]$.

Задача. Проверьте, что $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Mar}}}(M)$ — это группа Ams.

Теорема 4.1. Группа Ams плотна в $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Mar}}}[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots$ — последовательность конечных разбиений M такая, что $\mathfrak{h}_j$ является измельчением разбиения $\mathfrak{h}_{j-1}$. Пусть $M_1^{(j)}, M_2^{(j)}, \ldots, M_{N_j}^{(j)}$ — элементы j-го разбиения. Пусть $\max\limits_k \mu(M_k^{(j)}) \to 0$ при $j \to \infty$. Фиксируем $\varkappa \in \mathrm{End}(M)$. Рассмотрим набор матриц $A^{(j)}$ с матричными элементами

$$a_{pq}^{(j)} = \varkappa\big(M_p^{(j)} \times M_q^{(j)}\big).$$

Возьмем какой-нибудь $g_j \in \mathrm{Ams}$ такой, что

$$\mu\big(gM_p^{(j)} \cap M_q^{(j)}\big) = a_{pq}^{(j)}.$$

Легко видеть, что g_j сходится к $\varkappa$ (в топологии $\mathrm{End}(M)$). ■

4.5. Действие категории $\overline{\mathrm{Mar}}$ на пространствах L^2. Построим простейшее представление $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\overline{\mathrm{Mar}}$ (оно соответствует действию Ams в $L^2[0,1]$).

Пусть (M, μ), $(N, \nu) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathrm{Mar}})$.

Положим $T(M) = L^2(M)$. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mor}(M, N)$. Определим оператор $\tau(\varphi) : L^2(M) \to L^2(N)$ по формуле

$$\tau(\varphi)f(n) = \int_M f(m)\, d\varphi_n(m), \tag{4.5}$$

где через φ_n обозначены условные меры на слоях $n \times M$.

Теорема 4.2. Формула (4.5) задает корректно определенный оператор $L^2(M) \to L^2(N)$, при этом

а) $\|T(\varphi)\| \leqslant 1$;

б) если $f(m) \geqslant 0$ всюду на M, то $T(\varphi)f \geqslant 0$ всюду на N;

в) $\tau(\varphi)1 = 1$, $\tau^*(\varphi)1 = 1$.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь а). Пусть $\|f\|_{L_2} \leqslant 1$, $\|g\|_{L_2} \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\big|\langle \tau(\varphi)f, g\rangle\big| &= \Big| \iint_{M\times N} f(m)\,g(n)\,d\varphi(m,n) \Big| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2} \iint_{M\times N} \big(|f(m)|^2 + |g(n)|^2\big)\, d\varphi(m,n) = \\
&= \frac{1}{2} \iint_{M\times N} |f(m)|^2 d\varphi(m,n) + \frac{1}{2} \iint_{M\times N} |g(n)|^2 d\varphi(m,n) = \\
&= \frac{1}{2} \int_M |f(m)|^2 d\mu(m) + \frac{1}{2} \int_N |g(n)|^2 d\nu(n) \leqslant \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

■

Задача*. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Покажите, что формула (4.5) задает корректно определенный оператор $L^p(M) \to L^p(N)$, при этом по-прежнему $\|\tau(\varphi)\| \leqslant 1$.

Иногда важно знать, как восстановить полиморфизм φ по оператору $\tau(\varphi)$.

Лемма 4.3. Пусть $A \subset M$, $B \subset N$. Рассмотрим функции χ_A на M и χ_B на N, заданные равенствами

$$\chi_A(m) = \begin{cases} 1, & m \in A, \\ 0, & m \notin A; \end{cases} \qquad \chi_B(n) = \begin{cases} 1, & n \in B, \\ 0, & n \notin B. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi(A \times B) = \big\langle \tau(\varphi)\chi_A, \chi_B \big\rangle.$$

Доказательство очевидно. ■

Назовем ограниченный оператор $L^2(M) \to L^2(N)$ *марковским*, если он удовлетворяет утверждениям б) и в) теоремы 4.2.

Теорема 4.4.

а) Любой марковский оператор имеет вид $T(\varphi)$ для некоторого полиморфизма φ.

б) Отображение $\varphi \mapsto \tau(\varphi)$ является гомеоморфизмом множества $\mathrm{Mor}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M, N)$ на множество марковских операторов $L^2(M) \to L^2(N)$, снабженное слабой топологией.

Это утверждение нам не понадобится, и мы оставляем его в качестве задачи (см., например, [Вершик (1977)]).

Представление $\mathsf{T} = (T, \tau)$ очевидным образом приводимо, так как константы переводятся операторами $\tau(\varphi)$ в константы. Обозначим через $\mathsf{T}_0 = (T_0, \tau_0)$ подпредставление в T такое, что $T_0(M) = L^2_0(M)$ (так мы обозначали пространство функций с нулевым средним).

4.6. Структура упорядоченной категории на $\overline{\mathrm{Mar}}$. Определим сначала некоторые канонические полиморфизмы.

Пусть $(N, \nu) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathrm{Mar}})$, а $\mathfrak{h} : N = \bigcup N_i$ — его конечное разбиение. Через $n_1, n_2, \ldots$ обозначим точки пространства $N / \mathfrak{h}$, соответствующие $N_1, N_2, \ldots \subset N$.

Определим полиморфизм $\mu_\mathfrak{h} : N \to N / \mathfrak{h}$ по следующему правилу. Мера $\mu_\mathfrak{h}$ сосредоточена на множествах $N_i \times n_i$, при этом на каждом множестве $N_i \times n_i$ эта мера совпадает с мерой ν на N_i ($N_i \times n_i$ отождествляется с N_i).

Далее, положим

$$\lambda_\mathfrak{h} := \mu_\mathfrak{h}^* : N / \mathfrak{h} \to N.$$

Рассмотрим теперь в N два разбиения, $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, причем $\mathfrak{h}_2$ является измельчением разбиения $\mathfrak{h}_1$. Тогда определены два факторпространства, $N / \mathfrak{h}_1$ и $N / \mathfrak{h}_2$. При этом разбиение $\mathfrak{h}_2$ индуцирует на $N / \mathfrak{h}_1$ разбиение, которое мы обозначим через $\mathfrak{h}_2 / \mathfrak{h}_1$. Легко видеть, что

$$\mu_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1}\mu_{\mathfrak{h}_2} = \mu_{\mathfrak{h}_1}, \qquad \lambda_{\mathfrak{h}_2}\lambda_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1} = \lambda_{\mathfrak{h}_1}.$$

Кроме того,

$$\mu_\mathfrak{h}\lambda_\mathfrak{h} = 1 : N / \mathfrak{h} \to N / \mathfrak{h}.$$

Далее, определим полиморфизм

$$\theta_\mathfrak{h} := \lambda_\mathfrak{h}\mu_\mathfrak{h} : N \to N.$$

Мера $\theta_\mathfrak{h}$ сосредоточена на объединении множеств $N_i \times N_i$ и на каждом таком множестве равна $\frac{1}{\nu(N_i)}\nu \times \nu$. Легко видеть, что

$$\theta_\mathfrak{h}^2 = \theta_\mathfrak{h}, \quad \theta_\mathfrak{h}\lambda_\mathfrak{h} = \lambda_\mathfrak{h}, \quad \mu_\mathfrak{h}\theta_\mathfrak{h} = \mu_\mathfrak{h}.$$

Иногда полезно уметь обобщать морфизмы $\lambda_\mathfrak{h}$, $\mu_\mathfrak{h}$, $\theta_\mathfrak{h}$ на случай произвольных измеримых разбиений. Это достаточно сделать для $\mu_\mathfrak{h}$. Итак, пусть $N = \bigcup N_\alpha$, ν — мера на N, а $d\alpha$ — мера на $N / \mathfrak{h}$. Тогда на почти каждом множестве N_α определена условная мера ν_α так, что для любого измеримого множества $B \subset N$ выполнено

$$\nu(B) = \int_{N/\mathfrak{h}} \nu_\alpha(B \cap N_\alpha)\, d\alpha.$$

Мера $\mu_{\mathfrak{h}}$ на $N \times (N / \mathfrak{h})$ определяется формулой

$$\mu_{\mathfrak{h}}(Q) = \int\limits_{N/\mathfrak{h}} \nu_\alpha(B \cap (N_\alpha \times \alpha))\, d\alpha.$$

Легко видеть, что мера $\mu_{\mathfrak{h}}$ сосредоточена на объединении множеств $\bigcup\limits_{\alpha\in N/\mathfrak{h}} N_\alpha \times \alpha$.

Теперь мы готовы ввести на $\overline{\mathbf{Mar}}$ структуру упорядоченной категории. Для этого нужно совершить некоторое насилие (которое на самом деле присутствовало и во всех предыдущих случаях ($\overline{\mathbf{PB}}$, $\overline{\mathbf{O}}$), но менее бросалось в глаза).

Построим чисто упорядоченную категорию $\overline{\mathbf{K}}$, эквивалентную $\overline{\mathbf{Mar}}$. Точки $\overline{\mathbf{K}}$ нумеруются измеримыми разбиениями отрезка $[0,1]$. Мы пишем $\mathfrak{h}_1 \leqslant \mathfrak{h}_2$, если разбиение $\mathfrak{h}_2$ является измельчением разбиения $\mathfrak{h}_1$. Если $\mathfrak{h}_1 \leqslant \mathfrak{h}_2$, то определены операторы $\lambda_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1}$ и $\mu_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1}$, обладающие всеми необходимыми свойствами.

4.7. Двойные классы смежности. Пусть $M \simeq [0,1]$, а $\mathfrak{h} : M = \bigcup\limits_{i=1}^{p} M_i$ — конечное измеримое разбиение M, причем $\mu(M_j) > 0$. Обозначим через $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ группу всех автоморфизмов M, переводящих каждое из множеств M_j в себя. Легко видеть, что группа $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ изоморфна сумме p экземпляров группы Ams.

Пусть $\mathfrak{h}_1 : M = \bigcup\limits_{i=1}^{p} M_i$, $\mathfrak{h}_2 : M = \bigcup\limits_{j=1}^{q} M'_j$ — два конечных разбиения. Поставим в соответствие каждому $g \in \mathrm{Ams}$ матрицу $\varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g)$ размера $p \times q$ с матричными элементами

$$\varphi_{ij}^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g) = \mu\big(gM_i \cap M'_j\big).$$

Лемма 4.5. Элементы $g_1, g_2 \in \mathrm{Ams}$ содержатся в одном классе смежности

$$\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_2} \setminus \mathrm{Ams} / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_1}$$

тогда и только тогда, когда выполнено равенство матриц

$$\varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g_1) = \varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g_2).$$

Доказательство очевидно. ■

С другой стороны, матрицу $\varphi^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2}(g)$ можно рассматривать как элемент $\mathrm{Mor}\big(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\big)$. Таким образом, установлена каноническая биекция

$$\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_2} \setminus \mathrm{Ams} / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_1} \leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbf{Mar}}\big(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\big).$$

Задача. Покажите, что элемент множества $\mathrm{Mor}\big(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\big)$, соответствующий $g \in \mathrm{Ams}$, можно записать в виде

$$\mu_{\mathfrak{h}_2} g \lambda_{\mathfrak{h}_1}.$$

Задача. Пусть $N, K \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathbf{Mar}})$. Покажите, что существуют такие разбиения $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$ отрезка $[0,1]$, что $N \simeq [0,1]/\mathfrak{n}$, $K \simeq [0,1]/\mathfrak{m}$, причем любой полиморфизм $P : N \to K$ представим в виде

$$\pi = \mu_{\mathfrak{m}} g \lambda_{\mathfrak{n}},$$

где $g \in \mathrm{Ams}$.

4.8. Категорные продолжения.

Теорема 4.6. Любое непрерывное унитарное представление группы Ams допускает единственное продолжение до $*$-представления категории $\overline{\mathbf{Mar}}$.

Доказательство дословно повторяет доказательства теорем 1.4. и 1.8. ■

Так же, как в § 1, доказывается теорема мультипликативности для двойных классов смежности, дающая частичное конструктивное описание категорного продолжения.

Пусть τ — непрерывное унитарное представление группы Ams в пространстве H. Для любого конечного разбиения $\mathfrak{h}$ рассмотрим пространство $H(\mathfrak{h})$ всех $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$-неподвижных векторов и ортогональный проектор $P(\mathfrak{h})$ на $H(\mathfrak{h})$.

Следующая задача дает возможность для применения предложения 1.2.

Задача. Пусть $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \mathfrak{h}_3 < \dots$ последовательность разбиений $[0,1]$, причем мера элементов разбиения стремится к 0. Тогда для любой окрестности U единицы в Ams найдется j такое, что $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_j} \subset U$ (а следовательно, в силу предложения 1.2, подпространство $\bigcup H(\mathfrak{h}_j)$ плотно в H).

Пусть $M \simeq [0,1]$. Пусть $\mathbf{K}$ — подкатегория в категории $\overline{\mathbf{K}}$ из п. 4.6, состоящая из конечных пространств $M / \mathfrak{h}$.

Теорема 4.7. Пусть τ — непрерывное унитарное представление группы Ams в пространстве H. Положим для любого объекта $M / \mathfrak{h}$ категории $\mathbf{K}$

$$T(M / \mathfrak{h}) = H(\mathfrak{h}),$$

а для любого морфизма $\varkappa : M / \mathfrak{h}_1 \to M / \mathfrak{h}_2$

$$\tau(\varkappa) := P(\mathfrak{h}_2)\tau(g)\big|_{H(\mathfrak{h}_1)} : T(M / \mathfrak{h}_1) \to T(M / \mathfrak{h}_2)$$

для произвольного $g \in \varkappa \in \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_2} \setminus \mathrm{Ams} / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}_1} \simeq \mathrm{Mor}\big(M / \mathfrak{h}_1, M / \mathfrak{h}_2\big)$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — представление категории $\mathbf{K}$.

Эта теорема является следствием теоремы 4.6.

Теорема 4.8. Пусть $\mathsf{T} = (T, \tau)$ — $*$-представление категории $\mathbf{Mar}$, причем $\|\tau(\gamma)\| \leqslant 1$ для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Mar}}$. Тогда T допускает единственное продолжение до непрерывного $*$-представления категории $\overline{\mathbf{Mar}}$.

Доказательство. Применяем теорему аппроксимации (теорему 1.10) к категориям $\overline{\mathbf{K}}$ и $\mathbf{K}$. ■

4.9. Классификация представлений.

Теорема 4.9. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — неприводимое представление категории $\overline{\mathbf{A}}$ с числовыми отметками $(a_1, a_2, \dots)$. Тогда композиция R и простейшего представления $\mathsf{T}_0 = (T_0, \tau_0)$ категории $\overline{\mathbf{Mar}}$ неприводима, и любое неприводимое $*$-представление категории $\overline{\mathbf{Mar}}$ имеет такой вид.

Для доказательства нужно прежде всего получить описание всех представлений полугрупп $\mathrm{End}_{\mathbf{Mar}}(M)$. Итак, пусть M состоит из p точек с ненулевыми мерами $\mu_1, \dots, \mu_p$.

9 Зак. 320

Задача. Пусть Γ — множество всех матриц X размера $p \times p$, удовлетворяющих условию

$$\sum_i x_{ij} = \mu_j, \quad \sum_j x_{ij} = \mu_i, \quad x_{ij} \in \mathbb{R}$$

с законом умножения

$$X \cdot Y := X \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_p \end{pmatrix}^{-1} Y.$$

Покажите, что Γ — полугруппа, изоморфная полугруппе всех операторов в $\mathbb{R}^{p-1}$.

Обозначим через G группу всех обратимых элементов полугруппы Γ; очевидно, $G \simeq GL(p-1, \mathbb{R})$. Через Γ_0 мы обозначим полугруппу $\Gamma_0 = \mathrm{End}_{\mathrm{Mar}}(M) \cap G$.

Задача.

а) Покажите, что центр полугруппы Γ_0 состоит из матриц Z_s вида

$$z_{ij} = s\mu_i\delta_{ij} + (1-s)\mu_i\mu_j,$$

где $0 < s \leqslant 1$.

б) Пусть $X \in G$. Тогда для достаточно малых $s > 0$ выполнено $Z_s X \in \Gamma_0$.

По этой причине любое неприводимое $*$-представление τ полугруппы Γ_0 продолжается на группу $G = GL(p-1, \mathbb{R})$, при этом представление группы удовлетворяет условию $\rho(g^t) = \rho(g)^*$. Теперь мы получаем возможность применить предложение 3.8 и тем самым получить классификацию $*$-представлений Γ_0.

Задача. Какие неприводимые $*$-представления Γ_0 продолжаются на $\mathrm{End}(M)$?
Ответ такой же, как в теореме 3.6.

Вычисление спускающего функтора и описание согласованных систем совпадают с рассуждениями п. 3.6 буквально.

4.10. Замечания.

A. Группа Ams_∞. Пусть N — лебеговское пространство с непрерывной бесконечной мерой, т.е. $N \simeq \mathbb{R}$. Группу преобразований пространства N, сохраняющих меру, мы обозначим через Ams_∞.

Эта группа действует в $L^2(N)$ унитарными преобразованиями

$$\tau(g) : f(m) \mapsto f(gm), \tag{4.6}$$

и слабая операторная топология в $L^2(N)$ индуцирует топологию в Ams_∞.

Задача. Покажите, что представление τ неприводимо.

Задача. Опишите слабое замыкание группы Ams_∞ в пространстве операторов в $L^2(N)$.

Определим категорию $\overline{\mathbf{Mar}}^\circ$. Ее объекты — лебеговские пространства с мерой, конечной или бесконечной. Морфизмы $(M, \mu) \to (N, \nu)$ — это борелевские меры $\varkappa$ на $M \times N$ такие, что проекция $\varkappa$ на M мажорируется мерой μ, а проекция $\varkappa$ на N мажорируется мерой ν. Умножение морфизмов и инволюция задаются так же, как и в $\overline{\mathbf{Mar}}$.

Пусть $N \simeq \mathbb{R}$, а $\mathfrak{h} : N = N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_p$ — конечное измеримое разбиение, причем мера подмножества N_0 бесконечна, а мера всех остальных подмножеств N_i конечна. Через $\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}}$ мы обозначим группу всех сохраняющих меру преобразований, переводящих каждое множество N_j в себя ($j = 0, 1, \ldots, p$).

Задача. Опишите двойные классы смежности

$$\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}_1} \backslash \mathrm{Ams}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}_2}$$

Задача. Докажите, что любое унитарное непрерывное представление Ams_∞ продолжается единственным образом до $*$-представления категории $\overline{\mathbf{Mar}}^\circ$.

Теорема 4.10. Любое неприводимое унитарное представление группы Ams_∞ есть композиция голоморфного тензорного представления категории $\overline{\mathbf{A}}$ и представления (4.6).

(Самое сложное место доказательства — конечномерность неприводимых представлений полугрупп $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}^\circ}(M)$, где M — конечное пространство.)

B. Задача*. Группа $O(\infty)$ действует в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ (см. п. VI.1.9). Это действие в силу теоремы 3.3 продолжается до непрерывного действия полугруппы сжатий. Поэтому полугруппа сжатий вкладывается в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(\mathbb{R}^\infty)$. Напишите явные формулы для этого вложения (см. [Nelson (1973)]).

C. Джойнинги. Рассмотрим пространства с мерой $(M_1, \mu_1), \ldots, (M_k, \mu_k)$ и автоморфизмы $g_j \in \mathrm{Ams}(M_j)$. *Джойнингом* (*$k$-джойнингом*) называется мера $\varkappa$ на $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ такая, что

а) проекция $\varkappa$ на M_j есть μ_j;

б) $\varkappa$ инвариантна относительно $g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_k$.

Точно так же, как полиморфизмы являются в естественном смысле морфизмами пространств с мерой, в 2-джойнинге естественно видеть морфизм динамических систем. Что касается k-джойнингов, то это аналог инвариантных полилинейных форм.

Джойнинги дают возможность строить инварианты элемента $g \in \mathrm{Ams}(M)$ с точностью до сопряжения. Например, таким инвариантом является полугруппа всех джойнингов g с g. Рассмотрим также замыкание A_g множества $1, g, g^2, g^3, \ldots$ в группе полиморфизмов, а также выпуклую оболочку B_g множества $1, g, g^2, \ldots$. Тогда любой $q \in B_g$ является джойнингом, и структура полугрупп A_g, B_g также является инвариантом элемента g.

4.11. Литературные замечания. О лебеговских пространствах см. [Рохлин (1947)]. Группе Ams посвящена огромная литература (см., например, [Корнфельд, Синай, Фомин (1980)]), правда, наша проблематика отличается от обычной: в эргодической теории изучаются инварианты классов сопряженных элементов в Ams. Полиморфизмы (стохастические ядра) введены в [Hopf (1954)], см. также [Krengel (1985)], [Вершик (1977)]. Классификация представлений группы Ams получена в [Неретин (1992.1)]. О джойнингах см., например, [Rudolph (1979)], [Рыжиков (1993)].

§ 5. (G, K)-*пары. Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского*

Теория представлений полупростых групп Ли во многом опирается на теорию представлений компактных групп: наличие в полупростой группе G «большой» компактной подгруппы K во многом упрощает изучение представлений G.

Мы только что видели, что теория представлений тяжелых групп S_∞, $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$, Ams, Ams_∞ довольно проста, и естественно думать, что наличие в некоторой группе G тяжелой подгруппы K дало бы способ изучения представлений группы G. Как показывает оставшаяся часть книги, эвристическое понятие (G, K)-пары — группы с тяжелой подгруппой — очень важно и очень полезно. В этом параграфе мы делаем попытку дать определение (G, K)-пары. Это определение не претендует на то, чтобы выделить все «разумные» объекты этого типа из «неразумных». Скорее всего, это определение является слишком широким. У нас, однако, будет возможность убедиться в его полезности, в частности, оно избавит нас от многократного повторения одних и тех же рассуждений.

5.1. Еще о тяжелых группах. Итак, мы увидели, что внешне совсем разные группы

$$S_\infty, O(\infty), U(\infty), Sp(\infty), Ams, Ams_\infty \tag{5.1}$$

оказываются поразительно похожими. Я затрудняюсь выделить тот набор свойств, которыми обеспечивается их сходство. Сейчас же я перечислю некоторые из тех их общих свойств, которые будут важны в дальнейшем.

Итак, каждая тяжелая группа K из списка (5.1) вкладывается в качестве всюду плотного подмножества в некоторую компактную полугруппу $\overline{K}$, при этом отображение $g \mapsto g^{-1}$ продолжается до инволюции $g \mapsto g^*$ в полугруппе K ($(gh)^* = h^*g^*$). Любое унитарное представление π группы K продолжается до $*$-представления полугруппы $\overline{K}$, которое мы тоже будем обозначать через π.

Полугруппа $\overline{K}$ содержит некоторое замечательное семейство идемпотентов θ^α_∞:

$$(\theta^\alpha_\infty)^2 = \theta^\alpha_\infty, \quad (\theta^\alpha_\infty)^* = \theta^\alpha_\infty.$$

Эти идемпотенты нумеруются элементами α некоторого частично упорядоченного множества Σ, причем при $\alpha > \beta$ выполнено

$$\theta^\alpha_\infty\theta^\beta_\infty = \theta^\beta_\infty\theta^\alpha_\infty = \theta^\beta_\infty.$$

Напомним, как выглядят полугруппы $\overline{K}$ и идемпотенты θ^α_∞ для всех групп вида (5.1).

1) В случае S_∞ полугруппа $\overline{K}$ есть полугруппа частичных биекций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Множество Σ есть $\mathbb{Z}_+$, а θ^n_∞ имеет область определения $\{1, 2, \dots n\}$ и оставляет все элементы области определения на месте.

2) В случае $K = O(\infty), U(\infty), Sp(\infty)$ полугруппа $\overline{K}$ — это полугруппа сжатий (т. е. операторов с нормой $\leqslant 1$) в пространстве ℓ_2 над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.

Множество Σ есть $\mathbb{Z}_+$, а

$$\theta^n_\infty = \begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

3a) В случае группы Ams полугруппа $\overline{K}$ есть полугруппа полиморфизмов $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M)$, где $M = [0, 1]$. Множество Σ есть множество конечных измеримых разбиений, а $\theta^\mathfrak{h}_\infty$ суть $\theta_\mathfrak{h}$ из п. 4.6.

3b) В случае группы Ams_∞ полугруппа $\overline{K}$ есть полугруппа «полиморфизмов с исчезающей мерой» $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}{}^\circ$. Множество Σ есть множество конечных разбиений $\mathfrak{h} : M = \mathbb{R} = M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_k$, в которых M_0 имеет бесконечную меру, а остальные M_j — конечную. Мера $\theta^\mathfrak{h}_\infty$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ сосредоточена на объединении множеств $M_1 \times M_1, \dots, M_k \times M_k$ и на каждом $M_j \times M_j$ равна $\frac{1}{\mu(M_j)}\mu \times \mu$.

Далее, группа K содержит замечательное семейство подгрупп K^α, а именно, группа K^α состоит из всех $g \in K$ таких, что

$$\theta^\alpha_\infty g \theta^\alpha_\infty = \theta^\alpha_\infty.$$

При этом для любого унитарного представления π группы K оператор $\pi(\theta^\alpha_\infty)$ совпадает с проектором на подпространство всех K^α-неподвижных векторов.

Стоит еще добавить, что подпространство $\bigcup\limits_\alpha \mathrm{Im}\, \pi(\theta^\alpha_\infty)$ плотно в пространстве представления π.

5.2. (G, K)-пары. Итак, пусть G — топологическая группа с тяжелой подгруппой K. Рассмотрим множество $K^\alpha \setminus G / K^\beta$, снабженное естественной фактортопологией. Фактортопологии на подобных множествах могут быть устроены довольно плохо.

Задача*. Опишите топологию на множестве классов сопряженных элементов группы $U(\infty)$.

На самом деле, для наших целей почти можно ограничиться случаем, когда все пространства $K^\alpha \setminus G / K^\beta$ отделимы по Хаусдорфу, но, в действительности, бывают разумные (G, K)-пары, для которых это не так, и ничего страшного в этом нет. Рассмотрим всевозможные хаусдорфовы пространства X и всевозможные сюръективные отображения $\varphi : K^\alpha \setminus G / K^\beta \to X$. Среди таких отображений есть универсальное сюръективное отображение $\varphi : K^\alpha \setminus G / K^\beta \to Z$ такое, что любое другое отображение $\psi : K^\alpha \setminus G / K^\beta \to X$ имеет вид $\psi = \nu \circ \varphi$, где ν — непрерывное отображение $Z \to X$ (см. [Bourbaki (1942)]). Обозначим это универсальное пространство Z через $\left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right]$. Его элементы являются подмножествами в G, мы будем называть их *приведенными двойными классами смежности*. Еще раз подчеркнем, что в этой книге почти всегда $\left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right] = K^\alpha \setminus G / K^\beta$.

Мы скажем, что группа G является (G, K)-*парой*, если выполнено следующее свойство (A):

(A) *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$. Рассмотрим*

$$r \in \left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right], \quad p \in \left[K^\beta \setminus G / K^\gamma\right]$$

и $x \in r$, $y \in p$. Пусть $g_j \in K_\beta$ — последовательность, сходящаяся к θ^β_∞, а $q_j \in \left[K_\alpha \setminus G / K_\gamma\right]$ — приведенный двойной класс смежности, содержащий xg_jy. Тогда q_j имеет предел $q \in K_\alpha$, и этот предел не зависит от выбора последовательности g_j.

Свяжем теперь с (G, K)-парой некоторую категорию $\mathbf{L} = \mathbf{L}(G, K)$, которую мы назовем *шлейфом* группы G. Объекты $\mathbf{L}$ нумеруются индексами $\alpha \in \Sigma$, а

$$\mathrm{Mor}_\mathbf{L}(\beta, \alpha) := \left[K^\alpha \setminus G / K^\beta\right].$$

Пусть $r \in \mathrm{Mor}_\mathbf{L}(\beta, \alpha)$, $p \in \mathrm{Mor}_\mathbf{L}(\gamma, \beta)$. Тогда в силу свойства (A) канонически определен элемент $q \in \mathrm{Mor}_\mathbf{L}(\gamma, \alpha)$, который мы и назовем *произведением p и r*.

Здесь возникает естественный вопрос: действительно ли у нас получится категория, т. е. действительно ли умножение будет ассоциативным? Я не знаю, и сильно сомневаюсь в том, что ассоциативность может быть выведена из свойства (A). Однако вся эта деятельность имеет смысл лишь в случае, если двойные классы смежности и их умножение удастся описать явно. А в таких случаях никаких сложностей с проверкой ассоциативности не возникает.

Задача. Что дает эта конструкция, если группа G совпадает со своей подгруппой K?

Задача. Пусть $\mathrm{Isom}(\ell_2) = U(\infty) \ltimes \ell_2$ — группа изометрий гильбертова пространства (на $U(\infty)$ введена слабая топология, на ℓ_2 — сходимость по норме). Опишите умножение в полугруппе $U(\infty) \setminus \mathrm{Isom}(\ell_2) / U(\infty)$.

Задача. Пусть Gms — группа преобразований отрезка $[0,1]$, оставляющих меру Лебега квазиинвариантной. Введите на ней какую-нибудь топологию и опишите полугруппу $\mathrm{Ams}\setminus\mathrm{Gms}/\mathrm{Ams}$.

Пусть теперь ρ — унитарное представление группы G в пространстве H. Построим каноническое представление $\mathrm{R}=(R,\rho)$ категории $\mathbf{L}$. Положим, что $R(\alpha)$ есть пространство K^{α}-неподвижных векторов в H; напомним, что $R(\alpha)$ совпадает с образом проектора $\rho(\theta_{\infty}^{\alpha})$. Пусть $q\in\mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\beta,\alpha)$, тогда оператор $\rho(q):R(\beta)\to R(\alpha)$ задается формулой

$$\rho(q):=\rho(\theta_{\infty}^{\alpha})\rho(g)\big|_{R(\beta)},$$

где $g\in\mathrm{G}$ содержится в $q\in\left[\mathrm{K}^{\alpha}\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}^{\beta}\right]$.

Теорема 5.1. («теорема мультипликативности»). Если $\mathbf{L}$ — действительно категория, то $\mathrm{R}=(R,\rho)$ — ее представление.

Доказательство. Пусть все обозначения те же, что в формулировке свойства (A). Введем операторы

$$\tilde\rho(r)=\rho(\theta^{\alpha})\rho(x)\rho(\theta^{\beta}):H\to H.$$

Нам достаточно доказать тождество

$$\tilde\rho(pr)=\tilde\rho(p)\tilde\rho(r).$$

Прежде всего, заметим, что операторнозначная функция $p\mapsto\tilde\rho(p)$ слабо непрерывна на $\mathrm{Mor}_{\mathbf{L}}(\beta,\alpha)$. В частности,

$$\begin{aligned}\tilde\rho(pr)=\tilde\rho(q)&=\lim_{j\to\infty}\tilde\rho(q_j)=\\&=\lim_{j\to\infty}\rho(\theta_{\infty}^{\alpha})\rho(xg_jy)\rho(\theta_{\infty}^{\gamma})=\\&=\rho(\theta_{\infty}^{\alpha})\rho(x)\Big[\lim_{j\to\infty}\rho(g_j)\Big]\rho(y)\rho(\theta_{\infty}^{\gamma})=\\&=\rho(\theta_{\infty}^{\alpha})\rho(x)\rho(\theta_{\infty}^{\beta})\rho(y)\rho(\theta_{\infty}^{\gamma})=\\&=\Big[\rho(\theta_{\infty}^{\alpha})\rho(x)\rho(\theta_{\infty}^{\beta})\Big]\Big[\rho(\theta_{\infty}^{\beta})\rho(y)\rho(\theta_{\infty}^{\gamma})\Big]=\\&=\tilde\rho(p)\tilde\rho(r).\end{aligned}$$

■

Наконец, в категории $\mathbf{L}$ нужно ввести инволюцию. Это очень просто: инволюция $g\mapsto g^{-1}$ в группе G индуцирует инволюцию

$$\mathrm{K}^{\alpha}\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}^{\beta}\leftrightarrow\mathrm{K}^{\beta}\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}^{\alpha}.$$

Как описать все унитарные представления (G,K)-пары? Только что описанная теорема позволяет свести этот вопрос к описанию $*$-представлений категории $\mathbf{L}$. Категория $\mathbf{L}$ для (кажется) всех рассматривавшихся в литературе групп описана явно (хотя во многих ситуациях не все ясно с топологией на множестве морфизмов). Однако довести до победного конца классификацию представлений $\mathbf{L}$ удалось пока в очень немногих случаях. Правда, для очень многих (G,K)-пар описаны все K-сферические представления.

Существует 3 разных типа тяжелых групп и, соответственно, 3 разных типа (G,K)-пар. О (G,K)-парах, связанных с симметрической группой, мы немного поговорим в следующем параграфе. Случаи $\mathrm{K}=\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$ обсуждаются в следующей главе, а случай $\mathrm{K}=\mathrm{Ams},\mathrm{Ams}_{\infty}$ — в главе X.

5.3. Замечания. Как строить мантию? Мы уже говорили, что бесконечномерная группа G должна вкладываться в некоторую «невидимую невооруженным глазом» полугруппу Γ. Соображения этого параграфа дают два способа поиска Γ для (G,K)-пары, оба они на самом деле оказываются довольно тяжелыми (примерный ответ получается просто, а, например, точно описать топологию нелегко).

1-й способ. Угадываем объект категории $\mathbf{L}$ с бесконечным номером α, зная объекты с конечными номерами.

2-й способ. Рассмотрим, например, случай $\mathrm{K}=\mathrm{O}(\infty)$. Пусть $\theta\in\overline{\mathrm{K}}$ — проектор такой, что $\mathrm{rk}\,\theta=\mathrm{rk}(1-\theta)=\infty$. Пусть K^{∞} — группа матриц $g\in\mathrm{K}$, удовлетворяющих условию $\theta g\theta=\theta$. Естественно думать, что $\Gamma\simeq\mathrm{K}^{\infty}\setminus\mathrm{G}/\mathrm{K}^{\infty}$.

§ 6. *О бесконечной бисимметрической группе*

Симметрические группы S_n имеют много бесконечных аналогов. Объект, который мы выбрали в качестве примера, на первый взгляд кажется странным. На самом деле большая часть литературы по бесконечной симметрической группе посвящена именно этому объекту. Некоторые дополнительные пояснения см. в пп. 6.6, F.14.

6.1. Группа $(\mathrm{G},\mathrm{K})=(\mathrm{S}_{\infty}\times\mathrm{S}_{\infty},\mathrm{S}_{\infty})$. Рассмотрим два экземпляра $\mathbb{N}'$ и $\mathbb{N}''$ множества $\mathbb{N}$. Элементы $\mathbb{N}'$ мы будем обозначать через $1',2',3',\dots$, а элементы $\mathbb{N}''$ — через $1'',2'',3'',\dots$. Элементом группы $\mathrm{G}=(\mathrm{S}_{\infty}\times\mathrm{S}_{\infty},\mathrm{S}_{\infty})$ является пара перестановок $\sigma'\in\mathrm{S}_{\infty}$, $\sigma''\in\mathrm{S}_{\infty}$, где σ' действует на $\mathbb{N}'$, а σ'' — на $\mathbb{N}''$, при этом для достаточно больших $n\in\mathbb{N}$ выполнено

$$\sigma'n'=m'\Leftrightarrow\sigma''n''=m''.$$

Подгруппа $\mathrm{K}\simeq\mathrm{S}_{\infty}$ в G состоит из пар (σ',σ'') таких, что $\sigma'=\sigma''$, т.е. для всех $n=1,2,\dots$ выполнено

$$\sigma'n'=m'\Leftrightarrow\sigma''n''=m''.$$

Замечание. Группа G содержится в $\mathrm{S}_{\infty}\times\mathrm{S}_{\infty}$. Но сама она произведением групп не является!

Через $\mathrm{S}_{\infty}^{\mathrm{fin}}$ мы обозначим группу финитных перестановок $\mathbb{N}$, снабженную дискретной топологией.

Определим топологию на G как слабейшую топологию, относительно которой следующие три отображения непрерывны:

1. отображение $(\sigma',\sigma'')\mapsto\sigma'$ в S_{∞};
2. отображение $(\sigma',\sigma'')\mapsto\sigma''$ в S_{∞};
3. отображение $(\sigma',\sigma'')\mapsto(\sigma')^{-1}\sigma''$ в $\mathrm{S}_{\infty}^{\mathrm{fin}}$.

В частности, подгруппа $\mathrm{K}\simeq\mathrm{S}_{\infty}$ снабжена обычной топологией группы S_{∞}.

6.2. Примеры представлений группы G. Введем на дискретной группе $\mathrm{S}_{\infty}^{\mathrm{fin}}$ меру так, что мера каждой точки равна 1. Группа G действует в $\ell^2(\mathrm{S}_{\infty}^{\mathrm{fin}})$ преобразованиями вида

$$\tau(\sigma',\sigma'')f(p)=f\big((\sigma')^{-1}p\sigma''\big).$$

Следующий пример более содержателен. Пусть V и W — два гильбертовых пространства. Пусть $h\in V\otimes W$ — вектор длины 1. Рассмотрим счетное произведение $Z=(V\otimes W)^{\otimes\infty}$ с отмеченными векторами $h\in V\otimes W$ (см. Предварительные сведения, п. 4.11). Определим действие группы G в Z. Пусть $(\sigma',\sigma'')\in\mathrm{G}$. Тогда σ' переставляет сомножители вида V в Z, а σ'' переставляет сомножители вида W.

Задача. Убедитесь в корректности конструкции.

Стоит обсудить, от каких параметров в действительности зависит построенное представление.

Задача. Покажите, что единичный вектор $h \in V \otimes W$ приводится унитарной заменой координат в V и W к виду

$$\sum \alpha_j^{1/2} e_j \otimes f_j,$$

где $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\sum \alpha_j = 1$, векторы e_j образуют ортонормальную систему в V, а f_j — ортонормальная система в W.

Задача. Покажите, что в Z есть ровно один K-инвариантный вектор, а именно, $y = h^{\otimes\infty}$.

В частности (см. лемму 5.5 из Предварительных сведений), циклическая оболочка этого вектора является неприводимым представлением группы G, мы обозначим это представление через $\tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$.

Задача. Покажите, что сферическая функция

$$\langle \tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots](\sigma', \sigma'')y, y \rangle$$

представления $\tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ задается формулой

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots\right)^{m_k}, \tag{6.1}$$

где m_k — число циклов длины k в перестановке $(\sigma')^{-1}\sigma''$.

Отсюда, в частности, вытекает попарная неэквивалентность представлений $\tau[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$.

6.3. Двойные классы смежности. Рассмотрим в $\mathrm{K} = \mathrm{S}_\infty$ подгруппу $\mathrm{K}^n = \mathrm{S}_\infty^n$ (см. п. 1.1). Мы хотим описать множество $\mathrm{K}^n \setminus \mathrm{G} / \mathrm{K}^m$.

Пусть $(\sigma', \sigma'') \in \mathrm{G}$. Поставим в соответствие (σ', σ'') диаграмму вида, изображенную на рис. 1.

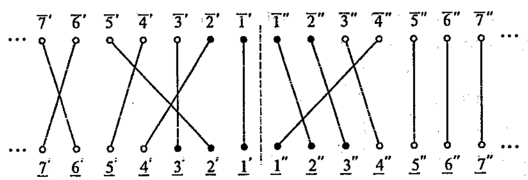

Рис. 1

А именно, кружочек $\overline{k}'$ в верхнем ряду соединен с кружочком $\underline{l}'$ в нижнем ряду, если $\sigma' k' = l'$. Аналогично, кружочек $\overline{p}''$ в верхнем ряду соединен с кружочком $\underline{q}''$ в нижнем, если $\sigma'' p'' = q''$. При этом кружочки $1', 2', \ldots, m'$; $1'', \ldots, m''$ верхнего ряда, а также кружочки $1', 2', \ldots, n'$; $1'', \ldots, n''$ нижнего ряда закрашены в черное (у нас $m = 2, n = 3$).

Вопрос. Как интерпретировать умножение в G с помощью таких диаграмм?

Теперь соединим всевозможные пары *белых* кружочков l', l'' верхнего ряда горизонтальной дугой. То же самое сделаем со всеми возможными парами s', s'' белых кружочков нижнего ряда, см. рисунок 2.

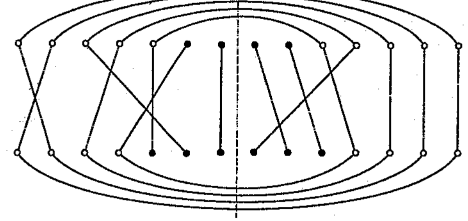

Рис. 2

На каждой дуге, ведущей сверху вниз (т. е. из верхнего ряда в нижний) мы напишем цифру 0, а на каждой горизонтальной дуге — число $\frac{1}{2}$ (так сказать, «вес» кривой).

В случае нашей картинки все распадается на следующий набор сплошных линий:

$\overline{1}'\ \underline{1}'$	0
$\overline{2}'\ \underline{4}'\ \underline{4}''\ \overline{3}''\ \overline{3}'\ \underline{3}'$	1
$\overline{1}''\ \underline{2}''$	0
$\overline{2}''\ \underline{3}''$	0
$\underline{2}'\ \overline{5}'\ \overline{5}''\ \underline{5}''\ \underline{5}'\ \overline{4}'\ \overline{4}''\ \underline{1}''$	$\frac{3}{2}$
$\overline{6}'\ \underline{7}'\ \underline{7}''\ \overline{7}''\ \overline{7}'\ \underline{6}'\ \underline{6}''\ \overline{6}''\ \overline{6}'$	2
...	

где в правом столбце записан суммарный вес участков линии (последняя линия замкнута).

Замечание. На рисунке 2 вес кривой равен половине числа ее пересечений с вертикальной пунктирной линией.

Теперь забудем о белых кружках и оставим в памяти лишь то, какие черные кружки соединены между собой и каков вес соединяющих их линий, запомним также вес замкнутых линий.

В частности, для диаграммы, изображенной на рис. 2, мы получим картину, изображенную на рисунке 3.

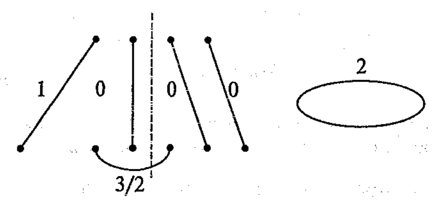

Рис. 3

Число замкнутых линий, конечно, получится бесконечным, но в силу определения G лишь конечное число из них имеет длину > 1. О циклах длины 1 мы забудем.

Правильной диаграммой типа (m, n) мы назовем картинку, изображенную на рисунке 4.

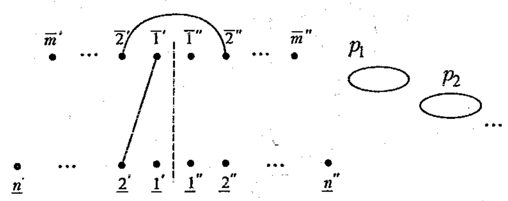

Рис. 4

Множество всех кружочков на диаграмме разбито на пары, что на картинке изображается линиями, соединяющими кружочки. При этом допустимы лишь линии следующих типов

$$\overline{k}'\underline{l}', \quad \overline{p}''\underline{q}''; \quad \overline{a}'\overline{b}''; \quad \underline{s}'\underline{t}''.$$

Проще говоря, «горизонтальные» линии должны соединять точки левой половины с точками правой половины, а «вертикальные» линии могут соединять лишь точки, лежащие в одной и той же половине. Кроме того, на диаграмме присутствует конечное число замкнутых циклов.

Далее, на каждой линии отмечено целое или полуцелое неотрицательное число («вес») по правилу

1. на «горизонтальных» линиях (т. е. линиях типа $\overline{a}'\overline{b}''$ и $\underline{s}'\underline{t}''$) — числа вида $\frac{2k+1}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$;
2. на «вертикальных» линиях (т. е. линиях типа $\overline{k}'\underline{l}'$ и $\overline{p}''\underline{q}''$) — целое число $\alpha \in \mathbb{Z}_+$;
3. на замкнутых циклах — целые числа > 1.

Замечание. Может быть, правильные диаграммы естественней представлять в форме, изображенной на рисунке 5.

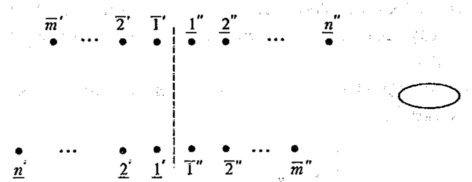

Рис. 5

Тогда все линии будут идти сверху вниз (такая перестановка похожа на преобразование Потапова, превращающее линейные отношения в операторы).

Таким образом, нами построено каноническое отображение R из группы $G = (S_\infty \times S_\infty, S_\infty)$ в множество $\Delta(m, n)$ правильных диаграмм типа (m, n).

Теорема 6.1. Отображение R постоянно на смежных классах $K^n \setminus G / K^m$, более того, оно устанавливает биекцию

$$K^n \setminus G / K^m \leftrightarrow \Delta(m, n).$$

Доказательство. Эта теорема становится очевидной после некоторого созерцания. ■

6.4. Категория SS. Объекты категории SS — неотрицательные целые числа. Множество $\mathrm{Mor}_{SS}(m, n)$ совпадает с $\Delta(m, n)$. Правило умножения мы сейчас объясним. Пусть у нас есть две диаграммы (мы не пишем весов на линиях), изображенные на рисунке 6.

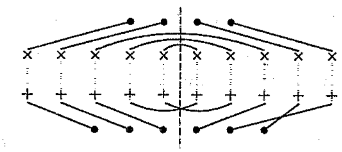

Рис. 6

Отождествим верхние крестики с нижними плюсиками и забудем о них. Тогда у нас снова получится правильная диаграмма (при этом веса на линиях складываются, а циклы длины 1 мы забываем). Мы получаем диаграмму, изображенную на рис. 7.

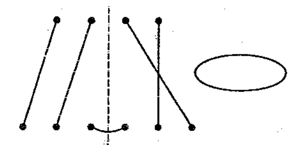

Рис. 7

(обращаем внимание, что при умножении образовался замкнутый цикл).

Задача. Покажите, что $\mathrm{Aut}_{SS}(m) = S_m \times S_m$.

Задача. Придумайте сюръективный функтор SS → **PB**.

Теорема 6.2. Группа G удовлетворяет свойству (A) из п. 5.2. При этом умножение двойных классов смежности

$$\left(K^m \setminus G / K^n\right) \times \left(K^n \setminus G / K^l\right) \to \left(K^m \setminus G / K^l\right)$$

совпадает с умножением морфизмов категории SS.

Доказательство. Эта теорема тоже очевидна. Пусть $\gamma \in K^m \setminus G / K^n$, а $\delta \in K^n \setminus G / K^l$, $(\sigma', \sigma'') \in \gamma$, $(\varkappa', \varkappa'') \in \delta$ — элементы G. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma', \sigma'', \varkappa', \varkappa'' \in S_\infty^{\mathrm{fin}}$. Обозначим через $\mathrm{mob}(\sigma)$ множество всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\sigma k \neq k$. Пусть последовательность $(\psi_j, \psi_j) \in K^n$ сходится к идемпотенту θ^n. Тогда начиная с некоторого номера j выполнено следующее свойство:

$$\psi_j\left(\mathrm{mob}(\varkappa') \setminus \{1', \dots, n'\}\right) \cap \left(\mathrm{mob}(\sigma') \setminus \{1', \dots, n'\}\right) = \varnothing,$$

$$\psi_j\left(\mathrm{mob}(\varkappa'') \setminus \{1', \dots, n'\}\right) \cap \left(\mathrm{mob}(\sigma'') \setminus \{1'', \dots, n''\}\right) = \varnothing$$

(см. рисунок 8, где изображена лишь правая половина картины).

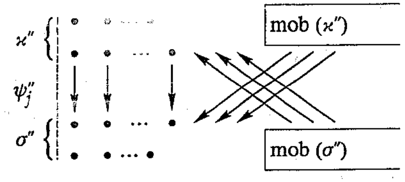

Рис. 8

Теперь утверждение становится очевидным. ■

6.5. Примеры представлений категории SS.

Пример 1. Каждому $P \in \mathrm{Mor_{SS}}(m,n)$ ставится в соответствие 0-1-матрица $m \times n$, причем в i-й строке и j-м столбце стоит единица тогда и только тогда, когда $\overline{i}'$ и $\underline{j}'$ соединены в диаграмме линией веса 0.

Пример 2. Пусть V — гильбертово пространство, конечномерное или бесконечномерное, с базисом $e_1, e_2, \dots$, а V' и V'' — два экземпляра пространства V с базисами e_j' и e_j''. Пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots > 0$ (чисел α_j столько же, сколько векторов e_j), причем $\sum \alpha_j = 1$. Построим по каждому такому набору α_j представление $\mathrm{T} = (T, \tau)$ категории SS.

Пусть $m \in \mathrm{Ob(SS)}$. Тогда $T(V) = (V' \times V'')^{\otimes m}$. Операторы $\tau(P)$ мы определим на образующих группоида морфизмов.

а) Пусть $P \in \mathrm{Aut}(m) \simeq \mathrm{S}_m \times \mathrm{S}_m$. Тогда первый экземпляр группы S_m переставляет в произведении $(V' \times V'')^{\otimes m}$ пространства V', а второй экземпляр S_m переставляет пространства V''.

б) Пусть диаграмма Q имеет вид, изображенный на рисунке 9.

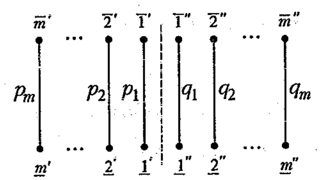

Рис. 9

Тогда

$$Q\Big(\big(e_{j_1}' \otimes e_{i_1}''\big) \otimes \ldots \otimes \big(e_{j_m}' \otimes e_{i_m}''\big)\Big) = \prod_s \big(\alpha_{j_s}^{p_s} \alpha_{i_s}^{q_s}\big)\Big(\big(e_{j_1}' \otimes e_{i_1}''\big) \otimes \ldots \otimes \big(e_{j_m}' \otimes e_{i_m}''\big)\Big).$$

в) Для диаграммы $R \in \Delta(m, m+1)$, изображенной на рисунке 10, оператор $\tau(R)$ есть оператор $(V' \otimes V'')^m \to (V' \otimes V'')^m$ умножения на вектор $z = \sum \sqrt{\alpha_j} e_j' \otimes e_j''$ справа.

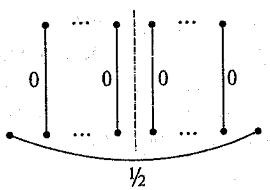

Рис. 10

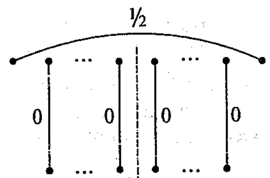

Рис. 11

г) Для диаграммы $H \in \Delta(m+1, m)$, изображенной на рисунке 11, оператор H есть оператор проектирования на подпространство $(V' \otimes V'')^{\otimes m} \otimes z$, отождествляемое с $(V' \otimes V'')^{\otimes m} = T(m)$.

Задача. Проверьте корректность конструкции. Как влияет на оператор $\tau(P)$ наличие в диаграмме P циклов?

Задача. Покажите, что представлениям категории SS из примера 2 соответствуют представления $(\mathrm{S}_\infty \times \mathrm{S}_\infty, \mathrm{S}_\infty)$ из п. 6.2. Что соответствует представлению из примера 1?

6.6. Замечания. Представления Тома и факторпредставления.

Пусть ρ — унитарное представление группы G. Оно называется *факторпредставлением*, если множество операторов $\rho(g)$ порождает фактор фон Неймана типа II_1 (см., например, [Кириллов (1972)]). Рассмотрим след $\mathrm{tr}(\cdot)$ на этом факторе, нормированный так, что $\mathrm{tr}(E) = 1$. Легко видеть, что функция $\chi(g) = \mathrm{tr}\,\rho(g)$ (*характер факторпредставления* ρ) удовлетворяет условиям:

1. $\chi(e) = 1$;
2. χ центральна ($\chi(h^{-1}gh) = \chi(g)$);
3. χ положительно определена (о положительно определенных функциях см., например, [Dixmier (1969)]).

Теорема 6.3. Функция χ на G является характером факторпредставления тогда и только тогда, когда χ является крайней точкой множества центральных положительно определенных функций.

В работе [Thoma (1964)] было получено описание всех характеров факторпредставлений группы $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$.

Теорема Тома. Все характеры факторпредставлений $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ имеют вид

$$\chi(g) = \prod_{k \geqslant 2} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k + (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k\Big)^{r_k(g)}, \tag{6.5}$$

где $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\sum \alpha_j + \sum \beta_j \leqslant 1$, а через $r_k(g)$ обозначено число циклов длины k в перестановке g.

После работы Тома́ был предпринят ряд попыток описания факторпредставлений других групп, однако интересные явления (если я не ошибаюсь) были обнаружены лишь для индуктивных пределов $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{U}(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{O}(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Sp}(n)$, см. [Voiculescu (1976)], [Stratila, Voiculescu (1982)], [Вершик, Керов (1982)].

Как заметил Г. И. Ольшанский ([Ольшанский (1983)], подробнее [Ольшанский (1989)]), факторпредставления могут быть сведены к обычным унитарным представлениям следующим образом. Пусть K — группа; рассмотрим произведение $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$ и рассмотрим диагональное вложение $\mathrm{K} \to \mathrm{K} \times \mathrm{K}$, обозначим его образ через $\tilde{\mathrm{K}}$.

Теорема 6.4. Существует каноническая биекция между факторпредставлениями K, определенными с точностью до квазиэквивалентности, и неприводимыми $\tilde{\mathrm{K}}$-сферическими представлениями $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$.

Доказательство. Сферическая функция $\varphi(g_1, g_2)$ неприводимого представления группы $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$ является крайней точкой множества положительно определенных функций, постоянных на двойных классах смежности $\tilde{\mathrm{K}} \setminus (\mathrm{K} \times \mathrm{K}) / \tilde{\mathrm{K}}$, удовлетворяющих условию $\varphi(e,e) = 1$. Теперь замечаем, что функция, постоянная на двойных классах смежности, имеет вид

$$\varphi(g_1, g_2) = \chi(g_1^{-1} g_2),$$

где χ — центральная функция. Поэтому сферические функции группы $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$ и характеры группы K — одно и то же. ■

Пусть ρ — сферическое представление $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$. Тогда соответствующее факторпредставление K есть ограничение ρ на сомножитель $\mathrm{K} \times \{e\}$.

Таким образом, факторпредставления $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ — это примерно то же самое, что сферические представления группы $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}} \times \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$. Несложно показать (см. [Ольшанский (1989)]), что сферические представления группы $\mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}} \times \mathrm{S}_\infty^{\mathrm{fin}}$ продолжаются по непрерывности на группу $(\mathrm{S}_\infty \times \mathrm{S}_\infty, \mathrm{S}_\infty)$. Часть этих сферических представлений обсуждалась выше в пп. 6.2, 6.5.

6.7. Замечания. Двойственность Брауэра. Объекты *категории Брауэра* $\mathbf{Br}$ — неотрицательные целые числа. Морфизмом $m \to n$ называется диаграмма вида, изображенного на рис. 12.

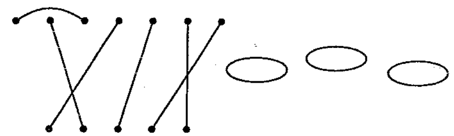

Рис. 12

В верхнем ряду диаграммы стоит m точек, в нижнем n точек (точки упорядочены). Это множество из $m+n$ точек разбито на пары (в частности, морфизмы из m в n существуют лишь в случае, когда m и n имеют одну и ту же четность), точки из одной пары соединены линиями. Кроме того, диаграмма может содержать несколько замкнутых линий.

Правило умножения достаточно ясно из рисунка 13.

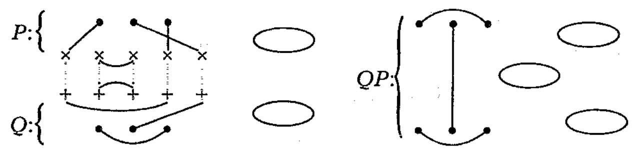

Рис. 13

Мы отождествляем плюсики с соответствующими крестиками и забываем о них. После этого некоторые пары черных кружочков оказываются соединенными линиями. Кроме того, могут добавиться дополнительные циклы (что и произошло на рисунке 13).

Пусть V — комплексное пространство (размерности > 1), снабженное невырожденной симметричной билинейной формой $\{\cdot\}$. Рассмотрим категорию $\mathbf{K}$, объекты которой суть пространства $V^{\otimes k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, а группоид морфизмов порожден следующими операторами

1. перестановка сомножителей в $V^{\otimes k}$;
2. оператор $V^{\otimes k} \to V^{\otimes (k+2)}$ умножения справа на $\mathrm{O}(V)$-инвариантный элемент $V \otimes V$;
3. оператор $V^{\otimes (k+2)} \to V^{\otimes k}$, переводящий $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_{k+2}$ в $\{v_{k+1}, v_{k+2}\} v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$.

Задача. Покажите, что категория $\mathbf{K}$ эквивалентна категории $\mathbf{Br}$.

Задача. Обобщите это высказывание на случай пространства V, снабженного кососимметричной билинейной формой.

Задача. Докажите теорему *двойственности Брауэра.* Любой $\mathrm{O}(V)$-сплетающий оператор $V^{\otimes k} \to V^{\otimes m}$ есть линейная комбинация морфизмов категории $\mathbf{K}$. Обратно, любой $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V^{\otimes k})$-сплетающий оператор в $V^{\otimes k}$ является линейной комбинацией операторов $g^{\otimes k}$, где $g \in \mathrm{O}(V)$ (см. [Brauer (1937)], там, собственно, речь идет о полугруппах $\mathrm{End}_{\mathrm{Br}}(n)$), см. также [Керов (1987)].

6.8. Замечания. Одна странная группа. Описанная нами ниже группа кажется кошмарным порождением человеческой фантазии. Она, однако, интересна по двум причинам. Во-первых, посвященная ей статья [Ольшанский (1980)] была одной из ключевых работ по бесконечномерным группам (см. также [Исмагилов (1969)]). Во-вторых, она не лишена интереса и сама по себе. Отметим также, что она появлялась в работах по «exchangeability» (см. п. F.13).

Напомним, что *деревом* называется связный граф без циклов. Рассмотрим дерево J_∞, у которого из каждой вершины выходит счетное число ребер (неформально говоря, J_∞ — «самое большое» дерево, которое содержит все другие деревья). Через $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ мы обозначим группу автоморфизмов дерева J_∞. Пусть $X \subset J_\infty$ — конечное непустое поддерево. Обозначим через $\mathrm{Aut}_X(J_\infty) \subset \mathrm{Aut}(J_\infty)$ стабилизатор поддерева X, т. е. множество всех преобразований дерева J_∞, оставляющих все вершины X на месте. На $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ вводится топология из условия: подгруппы $\mathrm{Aut}_X(J_\infty)$ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы.

Приведем примеры неприводимых представлений группы $\mathrm{Aut}_X(J_\infty)$.

1. Каспидальные представления. Пусть Y — конечное дерево. Рассмотрим в J_∞ (счетное) множество A_Y всех поддеревьев, изоморфных Y. Группа $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ действует очевидным образом сдвигами в пространстве $\ell_2(A_Y)$ (конструкция может быть чуть-чуть обобщена, см. [Ольшанский (1980)]).

2. Сферические представления. Обозначим через $l(v_1, v_2)$ расстояние между вершинами дерева v_1, v_2 (т. е. число ребер в кратчайшем пути, связывающем v_1, v_2). Пусть $0 < \lambda < 1$. Рассмотрим гильбертово пространство H_λ, порожденное векторами e_v, где v пробегает все вершины дерева, причем скалярное произведение между $e_v, e_{v'}$ определяется формулой

$$\langle e_v, e_{v'} \rangle = \lambda^{l(v,v')}.$$

Задача. Покажите, что эта формула действительно определяет положительно определенное скалярное произведение.

Группа $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ действует в H_λ преобразованиями $T_\lambda(g) : e_v \mapsto e_{gv}$.
Пусть $\mathrm{Aut}_0(J_\infty)$ — стабилизатор некоторой выделенной вершины v_0 графа J_∞.

Задача. Покажите, что представление T_λ имеет единственный $\mathrm{Aut}_0(J_\infty)$-неподвижный вектор. Покажите, что $\mathrm{Aut}_0(J)$-сферическая функция представления T_λ задается формулой

$$\psi(g) = \lambda^{l(v_0, gv_0)}.$$

Задача. Введем на каждом ребре дерева ориентацию (произвольным образом). Пусть M — пространство ℓ_2 на множестве Q ребер дерева. Для любого $g \in \mathrm{Aut}(J_\infty)$ рассмотрим путь L_g, ведущий из v_0 в gv_0. Определим функцию $\gamma_g(\vec{q})$ на Q из условия:

$$\gamma_g = \begin{cases} +1, & \text{если ребро } \vec{q} \text{ лежит на } L_g \text{ и направлено в сторону } gv_0, \\ -1, & \text{если ребро } \vec{q} \text{ лежит на } L_g \text{ и направлено к } v_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Фиксируем $s \in \mathbb{R}$ и рассмотрим отображение Z_s пространства M в себя, заданное формулой

$$Z_s(g) f(\vec{q}) = \sigma(g, \vec{q}) f(g\vec{q}) + s\gamma_g(\vec{q}),$$

где $\sigma(g, \vec{q}) = +1$, если отображение g сохраняет ориентацию ребра $\vec{q}$, и $\sigma(g, \vec{q}) = -1$ в противном случае. Отображение Z_s задает вложение $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ в $\mathrm{Isom}(M)$. Покажите, что ограничение представления Exp группы $\mathrm{Isom}(M)$ на $\mathrm{Aut}(J_\infty)$ содержит представление T_λ.

Теперь рассмотрим категорию $\mathbf{K}$, объектами которой являются конечные деревья, а морфизмы $X \to Y$ бывают двух типов:

1-й тип: частичные биекции $X \to Y$, т. е. изоморфные отображения поддерева $A \subset X$ на поддерево $B \subset Y$;

2-й тип: морфизм есть тройка (x, y, n), где $x \in X$, $y \in Y$, а $n \in \mathbb{N}$; такие морфизмы удобно изображать с помощью картинки, приведенной на рисунке 14.

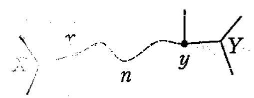

Рис. 14

Задача. Покажите, что $\mathrm{Aut}_Y(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_X(J_\infty)$ отождествляется естественным образом с $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X, Y)$.

Определим умножение морфизмов.

а) Пусть $\psi : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$ — морфизмы первого типа. Пусть ψ отображает поддерево $A \subset X$ на поддерево $B \subset Y$, а φ — поддерево $\widetilde{B} \subset Y$ на поддерево $C \subset Z$. Если $B \cap \widetilde{B}$ не пусто, то произведение $\varphi\psi$ есть обычная композиция частично определенных отображений. Пусть пересечение $B \cap \widetilde{B}$ пусто, пусть $b \in B$, $\tilde{b} \in \widetilde{B}$ — ближайшие точки множеств B и $\widetilde{B}$. Тогда $\varphi\psi$ есть тройка $\left(\psi^{-1}(b), \varphi(\tilde{b}), l(b, \tilde{b})\right)$, см. рисунок 15.

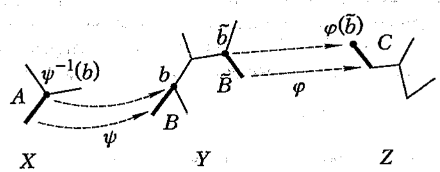

Рис. 15

б) Пусть $\psi : X \to Y$ — морфизм первого типа, отображающий поддерево A на поддерево B, а $\varphi : Y \to Z$ — морфизм второго типа, $\varphi = (y, z, n)$. Пусть q — ближайшая к y вершина поддерева B. Тогда $\varphi\psi = \left(\psi^{-1}(q),\ z,\ n + l(q, y)\right)$. Произведение морфизма второго типа на морфизм первого типа определяется дословно так же.

в) Пусть $\psi : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$ — морфизмы второго типа, $\psi = (x, y, n)$, $\varphi = (\tilde{y}, z, m)$. Элемент $\varphi\psi = \left(x, z, n + m + \rho(y, \tilde{y})\right)$ изображен на рисунке 16.

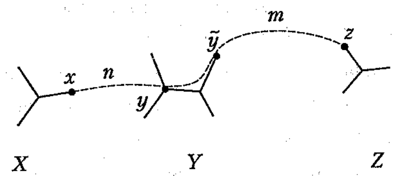

Рис. 16

Задача. Покажите, что умножение двойных классов смежности

$$\mathrm{Aut}_X(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_Y(J_\infty) \times \mathrm{Aut}_Y(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_Z(J_\infty) \to$$
$$\to \mathrm{Aut}_X(J_\infty) \setminus \mathrm{Aut}(J_\infty) / \mathrm{Aut}_Z(J_\infty)$$

корректно определено и соответствует умножению морфизмов категории $\mathbf{K}$.

Задача. Как действует категория $\mathbf{K}$ в каспидальных представлениях $\mathrm{Aut}(J_\infty)$? В сферических представлениях?

6.9. Литературные замечания. В п. 6.1–6.5 мы в основном следуем статье [Ольшанский (1989)]. В этой статье была также предпринята попытка расклассифицировать все унитарные представления $(S_\infty \times S_\infty, S_\infty)$, или, что то же самое, категории **SS**. В этой же работе рассматриваются и другие (G, K)-пары, связанные с бесконечной симметрической группой. Классификация была завершена в [Окуньков (1994)].

О реализациях представлений Тома см. [Вершик, Керов (1981)], [Ольшанский (1989)]. О других сюжетах, связанных с бесконечной симметрической группой см. [Вершик, Керов (1981a)], [Вершик, Шмидт (1977)], см. также ниже п. F.14.