Глава IX

Бесконечномерные классические группы и почти инвариантные структуры

В этой главе мы обсуждаем бесконечномерные аналоги классических групп.

Пусть $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \ldots$ обозначают соответственно полную унитарную, полную ортогональную, полную линейную группу гильбертова пространства (вещественного или комплексного) и т. д. Пусть $\mathrm{G}(\infty) \supset \mathrm{K}(\infty)$ — две группы такого типа. Обозначим через $\big(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\big)$ группу операторов $A \in \mathrm{G}(\infty)$ таких, что A представим в виде $A = B(1+T)$, где $B \in \mathrm{K}(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта. Несколько групп такого типа нам уже встречалось. Мы не ставим целью полное изложение теории представлений таких групп в том виде, в котором она сейчас существует, и обсуждаем лишь два типичных образца: $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ и $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, в особенности последний. В § 5 мы делаем некоторые замечания о других группах, §§ 6–7 содержат некоторые приложения рассматриваемой теории. В §§ 1–5 мы в основном следуем статьям Г. И. Ольшанского [Ольшанский (1983)], [Olshanskii (1990)], [Olshanskii (1991)a–b].

§ 1. Группа $(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$ *и ее представления*

1.1. Группа $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ состоит из всех обратимых вещественных операторов в ℓ_2, представимых в виде $A(1+T)$, где $A \in \mathrm{O}(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Лемма 1.1. Следующие условия равносильны:

а) $X \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$;

б) $X^{\mathrm{t}}X - E$ — оператор Гильберта—Шмидта;

в) оператор X представим в виде $(1+S)B$, где $B \in \mathrm{O}(\infty)$, а S — оператор Гильберта—Шмидта.

Доказательство.

а) $\Leftrightarrow$ в): $A(1+T) = (1 + ATA^{-1})A$.

а) $\Rightarrow$ б) очевидно. Пусть выполнено б). Пусть $X = UZ$ — полярное разложение X. Тогда $Z = \sqrt{X^{\mathrm{t}}X}$, и теперь высказывание очевидно. ■

1.2. Топология. Условие «T — оператор Гильберта—Шмидта» после конструкций глав IV и VI выглядит достаточно естественно. Тем не менее, стоит его еще раз обсудить.

Рассмотрим семейство групп $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$, состоящих из всевозможных вещественных матриц, представимых в виде $A(1+T)$, где $A \in \mathrm{O}(\infty)$, а T лежит в классе Шаттена $\mathscr{L}_p$ (где $0 < p \leqslant \infty$). Введем топологию на $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$. Пусть $X_j, X \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$, пусть $X_j = U_j Z_j$, $X = UZ$ — их полярные разложения. Мы полагаем, что последовательность X_j сходится к X тогда и только тогда, когда $U_j \to U$ слабо, а $Z_j - E \to Z - E$ в топологии $\mathscr{L}_p$.

Лемма 1.2.

а) Функция $D(g) = |\det(g)|$, определенная на матрицах вида $1 + P$, где P — конечномерный оператор, имеет непрерывное продолжение на $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$.

б) Для любых $g_1, g_2 \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$ выполнено

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2). \tag{1.1}$$

Доказательство.

а) Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — сингулярные числа g. Тогда $D(g) = \prod \lambda_j$, и теперь утверждение очевидно.

б) Равенство (1.1) выполнено для финитных матриц, а финитные матрицы плотны в $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$. ■

Мы видим, что группа $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$ имеет семейство одномерных унитарных представлений $g \mapsto D^{is}(g)$, где $s \in \mathbb{R}$; эти представления не продолжаются на группы $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_{1+\varepsilon}$.

Но, по-видимому, этим и исчерпывается разница между представлениями различных групп $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ при $0 \leqslant p \leqslant 2$. При $p > 2$ группы $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$ вообще не имеют нетривиальных унитарных представлений (см. [Нессонов (1986)], [Pickrell (1990)]). Этим и вызвано то, что мы выбрали $p = 2$.

Если наша цель — построение теории представлений групп $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$, то, видимо, разумнее всего работать с самой маленькой группой $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ (при этом можно полностью перейти на язык финитных матриц, как это делается в статьях Ольшанского). С другой стороны, с точки зрения приложений важно продолжить представления $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ на как можно большую группу. Для представлений Diff со старшим весом можно было бы обойтись группой $\bigcap_{p>0} \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$ операторов с «быстро убывающими» сингулярными числами. Но в приводимых ниже примерах (§§ 6–7) такая группа недостаточна.

1.3. Простейшее представление группы $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$. Реализуем группу $\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R})$ как группу матриц вида $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}$. Ее подгруппу $(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ мы выделим условием: Ψ — оператор Гильберта—Шмидта. Подгруппа $\mathrm{U}(\infty)\subset(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & \overline{A}\end{pmatrix}$, где A унитарна.

Рассмотрим вложение $\tau_0:(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))\mapsto(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$, задаваемое формулой

$$\tau_0(g)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & \\ & (g^{t})^{-1}\end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\\ =\frac12\begin{pmatrix}g+(g^{t})^{-1} & g-(g^{t})^{-1}\\ g-(g^{t})^{-1} & g+(g^{t})^{-1}\end{pmatrix}\tag{1.2}$$

Ограничивая представление Вейля группы $(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ на подгруппу $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$, мы получим представление

$$T_0(g)=\mathrm{we}(\tau_0(g))$$

группы $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$.

Замечание. Еще более просто выглядит конструкция, если группу $(\mathrm{Sp}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ реализовать как группу вещественных матриц вида $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, таких, что $A-D$, $B+C$ — операторы Гильберта—Шмидта (подгруппа $\mathrm{U}(\infty)\subset(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ в этом случае состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix}$). Вложение τ_0 задается формулой

$$g\mapsto\begin{pmatrix}g & \\ & (g^{t})^{-1}\end{pmatrix}.\tag{1.3}$$

Оказывается, что эту конструкцию можно пошевелить.

1.4. Фундаментальные представления группы $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$. Пусть $s\in\mathbb{R}$. Рассмотрим серию вложений $\tau_s:(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))\mapsto(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$, задаваемых формулой

$$\tau_s(g)=\begin{bmatrix}1-\frac{is}{2} & \frac{is}{2}\\ -\frac{is}{2} & 1+\frac{is}{2}\end{bmatrix}\tau_0(g)\begin{bmatrix}1-\frac{is}{2} & \frac{is}{2}\\ -\frac{is}{2} & 1+\frac{is}{2}\end{bmatrix}^{-1}=\\ =\begin{pmatrix}\frac{1+is}{2}g+\frac{1-is}{2}(g^{t})^{-1} & \frac{1-is}{2}\left(g-(g^{t})^{-1}\right)\\ \frac{1-is}{2}\left(g-(g^{t})^{-1}\right) & \frac{1+is}{2}g+\frac{1+is}{2}(g^{t})^{-1}\end{pmatrix}\tag{1.4}$$

Важно заметить, что

$$\begin{bmatrix}1-\frac{is}{2} & \frac{is}{2}\\ -\frac{is}{2} & 1+\frac{is}{2}\end{bmatrix}\in\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\tag{1.5}$$

поэтому и матрица (1.4) содержится в $\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R})$. Далее, $g-(g^{t})^{-1}=(gg^{t}-1)(g^{t})^{-1}$, и теперь условие $\tau_s(g)\in(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ становится очевидным.

Ограничивая представление Вейля группы $(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ на образ вложения τ_s, мы получаем серию унитарных представлений

$$T_s(g)=\mathrm{we}(\tau_s(g))$$

группы $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$.

Замечание. Следует подчеркнуть, что матрица (1.5) не лежит в $(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$, иначе конструкция была бы тривиальной.

1.5. Линеаризация представлений T_s. По построению, представления T_s являются проективными, т. к. представление Вейля является проективным. На самом деле представления T_s линеаризуемы, но это не вполне очевидно.

Теорема 1.3. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ — сингулярные числа оператора $g\in(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$ (с учетом кратности). Пусть

$$\varphi_s(g)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac12(\lambda_j+\lambda_j^{-1})+\frac{is}{2}(\lambda_j-\lambda_j^{-1})}}{\lambda_j^{is}}.\tag{1.6}$$

Тогда формула

$$\widetilde{T}_s=\varphi_s^{-1}(s)\,\mathrm{we}(\tau_s(g))$$

задает линейное представление группы $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$.

Доказательство. Рассмотрим в $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty))$ подгруппу G_0, состоящую из финитных матриц с положительными определителями. Ее образ в $(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty))$ попадает в группу Sp_0, состоящую из финитных матриц. Пусть $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_0$. Тогда, как мы видели в п. V.4.13, формула

$$\widetilde{\mathrm{we}}(g)=\pm\det(\Phi)^{-1/2}\,\mathrm{we}(g)$$

задает проективное унитарное представление группы Sp_0, причем

$$\widetilde{\mathrm{we}}(q_1q_2)=\pm\,\widetilde{\mathrm{we}}(q_1)\,\widetilde{\mathrm{we}}(q_2).\tag{1.7}$$

В нашем случае

$$\det(\Phi)=\det\left(\tfrac{1+is}{2}g+\tfrac{1-is}{2}(g^{t})^{-1}\right).$$

Пусть $g=U_1\Lambda U_2$, где Λ — матрица с собственными числами $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ldots$ ($\lambda_j>0$), а матрицы U_1, U_2 ортогональны. Тогда

$$\det(\Phi)=\det(U_1)\prod_j\left(\tfrac12(\lambda_j+\lambda_j^{-1})+\tfrac{is}{2}(\lambda_j-\lambda_j^{-1})\right)\det(U_2).$$

При $s = 0$ мы имеем

$$\begin{aligned}\det(U_1)\det(U_2) &= \operatorname{sgn}\det(\Phi) = \\ &= \operatorname{sgn}\det(g) = \\ &= 1.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\det(\Phi) = \prod_j \left(\tfrac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_j^{-1}) + \tfrac{is}{2}(\lambda_j - \lambda_j^{-1})\right). \tag{1.8}$$

Далее, для любого фиксированного s определим непрерывную ветвь функции

$$\nu_s(\lambda) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}) + \tfrac{is}{2}(\lambda - \lambda^{-1})}$$

так, что $\nu_s(1) = 1$. Поэтому мы можем определить однозначный корень $\sqrt{\det(\Phi)}$ по формуле

$$\psi_s(g) = \prod_j \sqrt{\tfrac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_j^{-1}) + \tfrac{is}{2}(\lambda_j - \lambda_j^{-1})} := \prod_j \nu_s(\lambda_j). \tag{1.9}$$

Определим операторнозначную функцию

$$T_s'(g) = \psi_s(g)^{-1}\,\mathrm{we}(\tau_s(g)).$$

Тогда в силу (1.7) выполнено

$$T_s'(g_1 g_2) = \pm T_s'(g_1) T_s'(g_2).$$

Но из соображений непрерывности знак в правой части этого равенства всегда один и тот же (группа G_0 связна, а функция $T_s(g)$ однозначна, причем при $g_1 = g_2 = E$ мы имеем знак $+$).

Итак $T_s'(g)$ — линейное представление группы G_0. Но функция $\psi(g)$ корректно определена лишь на группе $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)_1$, т. е. продолжается по непрерывности лишь на группу $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)_1$, а не на $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)$, как нам этого бы хотелось. Рассмотрим, однако, представление

$$\widetilde{T}_s(g) = D(g)^{-is} T_s'(g) = \left[\frac{\psi_s(g)}{D(g)^{is}}\right]^{-1} \mathrm{we}(\tau_s(g))$$

группы $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)_1$. Легко видеть, что дробь в квадратных скобках (это и есть (1.6)) продолжается непрерывно на всю группу $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)_2$ (хотя ни числитель, ни знаменатель на $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)_2$ корректно не определены). ■

1.6. Неэквивалентность представлений $T_s(g)$. Прежде всего заметим, что представления $T_s(g)$ приводимы уже потому, что приводимо представление we (we сохраняет подпространства четных и нечетных функций в пространстве Фока). Обозначим через $T_s^+(g)$ и $T_s^-(g)$ подпредставления в $T_s(g)$, реализующиеся соответственно в четных и нечетных функциях.

Предложение 1.4. Представления $T_s^{\pm}$ неприводимы.

Доказательство. Мы докажем неприводимость T_s^+. Ограничим T_s^+ на подгруппу $\mathrm{O}(\infty)$. Заметим, что ограничение вложения τ_s на $\mathrm{O}(\infty)$ есть тождественное вложение $\mathrm{O}(\infty)$ в $\mathrm{U}(\infty) \subset \left(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\right)$. Поэтому ограничение T_s^+ на $\mathrm{O}(\infty)$ есть сумма симметрических степеней $\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathrm{S}^{2j}\rho$, где ρ — тождественное представление $\mathrm{O}(\infty)$ ($\mathrm{S}^{2j}\rho$ действует в многочленах степени $2j$ на ℓ_2). Но все симметрические степени $\mathrm{S}^k\rho$ неприводимы (см. ниже). Допустим, что представление T_s^+ группы $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)$ приводимо, $T_s^+ = D_1 \oplus D_2$. Тогда каждое из представлений D_1, D_2 разлагается в сумму некоторых симметрических степеней $\mathrm{S}^{2k}\rho$. Пусть, например, $\mathrm{S}^0\rho$ (т. е. вакуумный вектор $f(z) = 1$) содержится в D_1. Пусть $g \in \left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right) \setminus \mathrm{O}(\infty)$. Тогда вектор $T_s(g) \cdot 1$ имеет вид $\lambda \exp\left(\sum \alpha_{ij} z_i z_j\right)$, причем $\lambda \neq 0$, и форма $\sum \alpha_{ij} z_j z_j$ не равна 0 тождественно. Но проекции вектора $\exp\left(\sum \alpha_{ij} z_i z_j\right)$ на подпространства $\mathrm{S}^{2k}\rho$ суть векторы $\left(\sum \alpha_{ij} z_j z_j\right)^k \neq 0$, поэтому D_1 разлагается в сумму всех симметрических степеней $\mathrm{S}^{2k}\rho$, т. е. $D_1 = T_s^+$. Нам осталось доказать лишь лемму.

Лемма 1.5. Симметрические степени $\mathrm{S}^k\rho$ тождественного представления группы $\mathrm{O}(\infty)$ неприводимы.

Доказательство. Реализуем $\mathrm{S}^k\rho$ так же, как в предыдущем доказательстве, т. е. как пространство однородных форм в бозонном пространстве Фока. Продолжим наше представление на полугруппу $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$ всех сжимающих операторов по формуле $(\mathrm{S}^k\rho)(A) f(z) \mapsto f(Az)$. Это продолжение непрерывно, поэтому неприводимость представления $\mathrm{S}^k\rho$ группы $\mathrm{O}(\infty)$ и соответствующего представления $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$ равносильны ($\mathrm{O}(\infty)$ плотна в $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$). Далее, рассмотрим в $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$ подполугруппу Λ, состоящую из всех диагональных матриц. Легко видеть, что всевозможные одночлены $z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots$ являются Λ-инвариантными, причем представления Λ в различных (весовых) подпространствах $\mathbb{C}z^{i_1} z^{i_2} \ldots$ попарно неэквивалентны. Поэтому любое Λ-инвариантное (а значит, и любое $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$-инвариантное) подпространство разлагается в прямую сумму (весовых) подпространств вида $\mathbb{C}z^{i_1} z^{i_2} \ldots$. Пусть D — некоторое $\Gamma\mathrm{O}(\infty)$-инвариантное подпространство, содержащее z_1^k. Выберем $A \in \Gamma\mathrm{O}(\infty)$ так, что все матричные элементы a_{1j} отличны от 0. Тогда

$$(\mathrm{S}^k\rho)(A) z_1^k = \left(\sum a_{1j} z_j\right)^k.$$

Но проекции этого вектора на все весовые подпространства $\mathbb{C}z^{i_1} z^{i_2} \ldots$ отличны от 0. Поэтому $D = \mathrm{S}^k\rho$. Лемма доказана. ■

Предложение 1.6. Представления T_s^+ при различных s попарно не эквивалентны.

Доказательство. Каждое из представлений T_s, как мы видели при доказательстве предыдущего предложения, содержит ровно один $\mathrm{O}(\infty)$-инвариантный вектор. Допустим, $T_s \simeq T_{s'}$. Обозначим через v, v' единичные векторы, инвариантные относительно $\mathrm{O}(\infty)$ в T_s и $T_{s'}$. Тогда сферические функции $\left\langle T_s(g)v, v\right\rangle$ и $\left\langle T_{s'}(g)v', v'\right\rangle$

этих представлений должны совпадать. Но

$$\langle T_s(g)v, v\rangle = \varphi_s(g)^{-1},$$

где $\varphi_s(g)$ задается формулой (1.6), а функции $\varphi_s(g)$ при разных s явно различны. Предложение доказано. ∎

Доказательство попарной неэквивалентности представлений T_s^- мы оставляем в качестве упражнения.

1.7. Гипотеза об описании представлений $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty))$. О тензорных произведениях представлений T_s известно следующее (см. [Ольшанский (1990)]).

а) Тензорные степени $T_s^{\otimes n}$ (где $n>0$) разлагаются точно так же, как тензорные степени представления Вейля (см. добавление А), т. е. представления $\mathrm{we}^{\otimes n}$ и $T_s^{\otimes n}$ имеют одни и те же подпредставления. Подпредставления в $T_s^{\otimes n}$ мы будем называть *представлениями, сосредоточенными в точке* s.

б) Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — неприводимые представления $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$, сосредоточенные в $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Тогда представления

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_k \tag{1.10}$$

неприводимы и попарно различны (т. е. совпадение тензорных произведений вида (1.10) влечет совпадение наборов $(s_1, \ldots, s_k)$, а также всех сомножителей).

Гипотеза ([Ольшанский (1990)]). Любое неприводимое унитарное представление $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$ имеет вид (1.10).

Конструкция §4 проясняет как утверждения а), б), так и гипотезу.

1.8. Замечания.

Задача. Пусть $(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$ действует на $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ (см. п. VI.1.9) по формуле

$$T_s(g)f(x) = f(gx)\left[\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}\right]^{\frac{1+is}{2}},$$

где $\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}$ — производная Радона—Никодима. Покажите, что представления $T_s(g)$ эквивалентны представлениям $T_s(g)$ из п. 1.4.

§ 2. *Группа* $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$ *и ее представления*

Группа $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$ состоит из унитарных матриц в комплексном ℓ_2, представимых в виде $A = B(1+T)$, где B — вещественная ортогональная матрица, а T — оператор Гильберта—Шмидта. В этом параграфе мы построим три серии «фундаментальных» проективных представлений группы $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$. Вопрос о возможности их линеаризации мы обсудим в замечаниях к этому параграфу (п. 2.6).

2.1. Спинорное представление группы $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$. Рассмотрим в кватернионном пространстве ℓ_2 группу $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ всех кватернионно-унитарных матриц, представимых в виде $A(1+T)$, где A — унитарная матрица с комплексными коэффициентами, а T — оператор Гильберта—Шмидта.

Более удобно рассматривать группу $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ как группу унитарных комплексных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}$ таких, что B — оператор Гильберта—Шмидта. Подгруппа $\mathrm{U}(\infty) \subset (\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} L & \\ & \overline{L}\end{pmatrix}$, где L унитарна.

Теперь вложим группу $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ в $(\mathrm{O}(4\infty), \mathrm{U}(2\infty))$ по формуле

$$\varkappa : \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & & & B \\ & \overline{A} & -\overline{B} & \\ & \overline{B} & A & \\ -\overline{B} & & & \overline{A}\end{pmatrix}.$$

Ограничивая спинорное представление группы $(\mathrm{O}(4\infty), \mathrm{U}(2\infty))$ на подгруппу $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$, мы получаем унитарное (проективное) представление группы $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$; это (приводимое) представление мы тоже будем называть *спинорным* и обозначать через $\mathrm{spin}_{\mathbb{C}}$.

Задача. Покажите, что ограничение представления $\mathrm{spin}_{\mathbb{C}}$ на $\mathrm{U}(\infty)$ эквивалентно

$$\mathrm{spin}_{\mathbb{C}}\big|_{\mathrm{U}(\infty)} = \bigoplus_{k,l=0}^{\infty} (\Lambda^k \rho \otimes \Lambda^l \rho),$$

где ρ — тождественное представление группы $\mathrm{U}(\infty) \subset (\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ $(\rho(g) = g)$.

Замечание. С группой $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ мы уже встречались. А именно, $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ есть группа Aut^* бесконечномерного объекта категории $\overline{\mathbb{C}}$, а $\mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}$ — это не что иное, как спинорное представление Aut^*.

Замечание. Рассмотрим $\mathrm{Sp}(\infty)$ как группу кватернионно унитарных матриц. Рассмотрим кватернионное пространство ℓ_2 как вещественное гильбертово пространство, в этом вещественном гильбертовом пространстве в свою очередь введем комплексную структуру, положив, что умножение на i есть умножение на матрицу $jE \in \mathrm{Sp}$. Пусть H — полученное пространство. Тогда любая кватернионная почти унитарная матрица (т. е. элемент $(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$) оказывается ортогональной почти унитарной матрицей в H, т. е. элементом $(\mathrm{O}(4\infty), \mathrm{U}(2\infty))$, и мы еще раз описали вложение $\varkappa$.

2.2. Фермионные фундаментальные представления $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$. Рассмотрим тривиальное вложение $\tau_0 : (\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)) \mapsto (\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$, которое каждой унитарной матрице $g \in (\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$ ставит в соответствие унитарную матрицу $\begin{pmatrix} g & \\ & \overline{g}\end{pmatrix} \in (\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$. Теперь мы можем рассмотреть представление $\mathrm{spin}_{\mathbb{C}} \circ \tau_0$ группы $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$. Ничего интересного мы при этом не получим (см. задачу из предыдущего пункта). Эту тривиальную конструкцию можно, однако, чуть-чуть пошевелить и получить нетривиальный результат.

Рассмотрим серию вложений $\sigma_w : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$, определяемых формулой

$$\sigma_w(g) = \begin{pmatrix} \cos\frac{w}{2} & \sin\frac{w}{2} \\ -\sin\frac{w}{2} & \cos\frac{w}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \bar g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{w}{2} & \sin\frac{w}{2} \\ -\sin\frac{w}{2} & \cos\frac{w}{2} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (g+\bar g) + \cos w \cdot (g - \bar g) & -\sin w \cdot (g - \bar g) \\ -\sin w \cdot (g - \bar g) & (g+\bar g) - \cos w \cdot (g - \bar g) \end{pmatrix},$$

где $0 < w < \frac{\pi}{2}$. Ограничивая спинорное представление $\mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}$ группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ на $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, мы получим серию S_w унитарных представлений группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$:

$$S_w(g) = \mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}(\sigma_w(g)).$$

Замечание. Можно показать, что S_w приводимо, но его разложение на неприводимые подпредставления устроено точно так же, как у представления $\mathrm{spin}_{\overline{\mathbb{C}}}$ группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ (см. [Olshanskii (1990)]).

2.3. Бозонные фундаментальные представления группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Теперь рассмотрим серию μ_s вложений $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Снова мы начнем с тривиального вложения $\mu_0 : g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix}$, или, иначе,

$$\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \hookrightarrow \mathrm{U}(\infty) \hookrightarrow \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

Задача. Покажите, что

$$\mathrm{we} \circ \mu_0 = \bigoplus_{j=0}^{\infty} S^j \rho,$$

где ρ — тождественное представление $g \mapsto g$ группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Теперь мы снова возмутим конструкцию и рассмотрим серию вложений $\mu_s : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, задаваемых формулой

$$\mu_s(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} & \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} \\ \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} & \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} & \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} \\ \mathrm{sh}\,\frac{s}{2} & \mathrm{ch}\,\frac{s}{2} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (g+\bar g) + \mathrm{ch}\, s \cdot (g - \bar g) & -\mathrm{sh}\, s \cdot (g - \bar g) \\ \mathrm{sh}\, s \cdot (g - \bar g) & (g+\bar g) - \mathrm{ch}\, s \cdot (g - \bar g) \end{pmatrix},$$

где $s > 0$. Ограничивая представление Вейля группы $\big(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ на подгруппу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, мы получаем серию унитарных проективных представлений

$$M_s(g) = \mathrm{we}(\mu_s(g))$$

группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Задача. Покажите, что при $s \neq 0$ представление M_s есть сумма двух неприводимых представлений.

2.4. Комментарии. Итак, мы уже трижды (пп. 1.3, 2.2, 2.3) получали нетривиальную конструкцию из тривиальной путем сопряжения подходяще выбранной матрицей.

Обсудим, например, ситуацию п. 2.3. Рассмотрим тривиальное вложение $\mu_0 : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ и рассмотрим образ группы $\mathrm{O}(\infty)$. Он состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$, где L — вещественная ортогональная матрица. Централизатор C группы $\mathrm{O}(\infty)$ в $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}) \supset \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ состоит из блочно-скалярных матриц вида

$$H = \begin{pmatrix} \alpha E & \beta E \\ \bar\beta E & \bar\alpha E \end{pmatrix},$$

где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. В частности, как абстрактная группа централизатор C изоморфен группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Для любой матрицы $H \in \mathrm{C}$ определено отображение

$$\mu_H(g) = H \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} H^{-1}$$

из $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ в $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, а следовательно, и унитарное проективное представление

$$M_H(g) = \mathrm{we}(\mu_H(g))$$

группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Но не все подобные представления различны.

Действительно, обозначим через Z централизатор группы $\mathrm{U}(\infty)$ в $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$; он состоит из блочно-диагональных матриц вида

$$T = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} E & \\ & e^{-i\varphi} E \end{pmatrix}.$$

Для любого $T \in \mathrm{Z}$

$$\mu_{HT}(g) = HT \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} T^{-1} H^{-1} =$$

$$= H \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} H^{-1} =$$

$$= \mu_H(g).$$

В частности, представления M_H и M_{HT} совпадают.

Рассмотрим, далее, в $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$ подгруппу $\mathrm{K} = \mathrm{C} \cap \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Она состоит из матриц вида

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\psi} E & \\ & e^{-i\psi} E \end{pmatrix}$$

(по случайным причинам $\mathrm{K} = \mathrm{Z}$). Пусть $S \in \mathrm{K}$. Тогда

$$M_{SH}(g) = \mathrm{we}\left(SH \begin{pmatrix} g & \\ & \bar g \end{pmatrix} H^{-1} S^{-1}\right) =$$

$$= \mathrm{we}(S) M_{SH}(g)\, \mathrm{we}(S^{-1}),$$

и тем самым $M(SH)$ эквивалентно $M(H)$.

Итак, представление M_H зависит не от самого элемента $H \in \mathrm{C}$, а от двойного класса смежности $\mathrm{K} \setminus \mathrm{C} / \mathrm{Z}$. Далее остается лишь выбрать из каждого двойного класса смежности по одному представителю.

2.5. Околоединичные представления. Рассмотрим пространство H, состоящее из симметричных матриц Гильберта—Шмидта в ℓ_2 со скалярным произведением $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$. Рассмотрим аффинное действие T_ν группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ на H по формуле

$$T_\nu(g)X = g^{\mathrm t}Xg + \nu^2\big(g^{\mathrm t}g - E\big),$$

где $\nu > 0$. Таким образом мы получили серию вложений $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ в группу $\mathrm{Isom}(H)$ (см. п. VI.1.8). Ограничивая представления Exp группы $\mathrm{Isom}(H)$ на $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, мы получаем серию унитарных (проективных) представлений группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

2.6. Замечания. Линеаризация представлений (см. [Olshanskii (1990)]). Обозначим через $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$ группу унитарных операторов в ℓ_2, представимых в виде $A(1+B)$, где $A \in \mathrm{O}(\infty)$, а $B \in \mathscr{L}_p$.

Задача. Покажите, что функция $D(g) = \det^2(g)$ продолжается по непрерывности на группу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$ и не продолжается на $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_{1+\varepsilon}$.

Далее, оказывается, что все построенные выше представления $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ линеаризуются на группе $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$. Это делается точно так же, как это было сделано для $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$. Но трюк с погашением расходимости с помощью дробной степени функции $D(g)$ применить уже не удается, потому что дробные степени функции $D(g)$ не определены. Оказывается, однако, что построенные выше представления $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ могут быть линеаризованы на построенном ниже накрытии группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Пусть $\psi : S^1 \to S^1$ — монотонное (т. е. сохраняющее циклический порядок точек) взаимно однозначное гладкое отображение окружности $|z| = 1$ в себя. Пусть $\psi(1) = 1$, $\psi'(1) = 0$. Пусть $g \in \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — собственные числа $gg^{\mathrm t}$. Определим отображение $L : \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big) \to S^1$ по формуле

$$L(g) = \prod_{j=1}^{\infty} \psi(\lambda_j).$$

Далее, определим (непрерывное) отображение $M : S^1 \to \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ по формуле

$$M(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} \psi^{-1}(e^{i\varphi}) & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда $L \circ M : S^1 \to S^1$ — тождественное отображение, поэтому $M(e^{i\varphi})$ — нестягиваемая петля в $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Теперь мы можем рассмотреть накрытие, на котором эта петля разматывается.

§ 3. *Умножение двойных классов смежности для* $(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty))$

3.1. Группа $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$. С группой $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ связано семейство групп $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$, состоящих из унитарных операторов, отличающихся от ортогонального на комплексный оператор из шаттеновского класса $\mathscr{L}_p$. Мы рассмотрим самую маленькую из этих групп, $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$; a priori эта группа имеет больше всего представлений (хотя, по-видимому, серьезной разницы в запасе унитарных представлений для разных групп $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_p$ при $p \leqslant 2$ нет).

Группа $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ состоит из унитарных операторов A в ℓ_2, представимых в виде

$$A = B(1+T); \quad A \in \mathrm{O}(\infty), \quad \mathrm{rk}\, T < \infty. \tag{3.1}$$

Минимально возможный для данного A ранг оператора T мы назовем *дефектом* оператора A.

Обозначим через G_k множество элементов $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ дефекта $\leqslant k$. Введем топологию на G_k, положив, что окрестность $O(V, \varepsilon)$ точки $A = B(1+T)$ состоит из матриц $\widetilde{A} = \widetilde{B}(1+\widetilde{T})$, где $\widetilde{B} \in \mathrm{O}(\infty)$ лежит в фиксированной окрестности V точки B (в слабой = сильной топологии) на $\mathrm{O}(\infty)$, а $\|\widetilde{T} - T\| < \varepsilon$. Положим, что множества $O(V, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей.

Группу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 = \bigcup\limits_k \mathrm{G}_k$ мы снабдим топологией индуктивного предела $\varinjlim \mathrm{G}_k$ (множество $Q \subset \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ открыто, если $Q \cap \mathrm{G}_k$ открыто в G_k для любого k).

3.2. Категория Uo. Обозначим через $\mathrm{O}^{(n)}$ подгруппу в $\mathrm{O}(\infty)$, состоящую из матриц, оставляющих на месте первые n базисных векторов.

Объектами категории **Uo** являются числа $0, 1, 2, \ldots$. Морфизм из k в n — это унитарная финитная матрица, определенная с точностью до умножения на матрицу из $\mathrm{O}^{(k)}$ справа и на матрицу из $\mathrm{O}^{(n)}$ слева. Мы будем изображать морфизмы в виде матриц

$$n\{\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{k} \in \mathrm{U}(\infty),$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} E_n & \\ & U_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_k & \\ & U_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $U_1, U_2 \in \mathrm{O}(\infty)$, мы считаем эквивалентными. Пусть $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}(k, n)$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}(n, m)$. Умножение морфизмов определяется формулой

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) * \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & T \end{array}\right) := \left(\begin{array}{c|cc} AP & B & AQ \\ \hline CP & D & CD \\ \hline R & 0 & T \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & & Q \\ & 1 & \\ R & & T \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Важно заметить, что итоговая матрица имеет именно те размеры, какие нужно, а не бóльшие, как кажется на первый взгляд.

Умножение морфизмов можно задать также формулой

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} AP & AQ & B \\ CP & CQ & D \\ R & T & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

которая, как легко видеть, равносильна (3.3), но выглядит несколько симметричней.

Инволюция в категории $\mathbf{Uo}$ определяется формулой

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}$$

Покажем теперь, что множество $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n,k)$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$.

Лемма 3.1. В каждом двойном классе смежности $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$ есть финитная матрица.

Доказательство. Для (комплексного) линейного подпространства V в ℓ_2 обозначим через $\overline{V}$ множество векторов $h \in \ell_2$ таких, что $\bar{h} \in V$. Через $\ell_2^{(p)}$ мы обозначим множество векторов $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ таких, что $x_1 = \dots = x_p = 0$. Пусть $g \in \gamma \in \mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$. Представим g в виде $g = B(1+T)$, $B \in \mathrm{O}(\infty)$, $\operatorname{rk} T < \infty$. Пусть

$$L = \operatorname{Ker} T \cap \overline{\operatorname{Ker} T} \cap \ell_2^{(n)} \cap g^{-1} \ell_2^{(k)}.$$

Легко видеть, что L имеет конечную коразмерность (обозначим ее через q), причем $L = \overline{L} \subset \ell_2^{(n)}$, а $gL = \overline{gL} \subset \ell^{(k)}$. Теперь мы можем выбрать $h_1 \in \mathrm{O}^{(n)}$, $h_2 \in \mathrm{O}^{(k)}$ так, что

$$h_1 \ell_2^{(q)} = L, \quad h_2(gL) = \ell_2^{(q)}.$$

Тогда оператор $\tilde{g} = h_2 g h_1$ переводит $\ell_2^{(q)}$ в себя, и его ограничение r на $\ell_2^{(q)}$ — ортогональный оператор. Рассмотрим оператор $\tilde{r} = \begin{pmatrix} E & \\ & r \end{pmatrix}$ из $\mathbb{C}^q \oplus \ell_2^{(q)}$ в себя. Тогда $\tilde{r}^{-1}\tilde{g}$ — искомая финитная матрица. ■

3.3. Умножение двойных классов смежности. Итак, множества $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n,k)$ и $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$ естественным образом отождествляются. Покажем теперь, что умножение в категории $\mathbf{Uo}$ соответствует умножению двойных классов смежности в смысле § VIII.5.

Теорема 3.2. Пусть $\gamma_1 \in \mathrm{O}^{(n)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(k)}$, $\gamma_2 \in \mathrm{O}^{(m)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(n)}$, а $g_1 \in \gamma_1$, $g_2 \in \gamma_2$. Пусть последовательность $x_j \in \mathrm{O}^{(n)}$ слабо сходится к матрице $\begin{pmatrix} E_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим двойной класс смежности $\mu_j \in \mathrm{O}^{(m)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(k)}$, содержащий $g_2 x_j g_1$. Тогда последовательность μ_j сходится в факторгопологии $\mathrm{O}^{(m)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(k)}$ к произведению $\gamma_1\gamma_2$ в смысле категории $\mathbf{Uo}$.

Доказательство. Пусть g_2, g_1 имеют вид

$$g_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \\ & 1 \end{array}\right), \qquad g_2 = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & T \\ & 1 \end{array}\right),$$

причем матрицы D и T конечны. Пусть последовательность

$$x_j = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} \\ & \underbrace{X_{21}^{(j)}}_{N} & X_{22}^{(j)} \end{array}\right) \}N$$

слабо сходится к $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Сразу отметим, что в этом случае $X_{11}^{(j)} \to 0$ по норме. Пусть N фиксировано, и пусть N больше, чем размеры матриц D и T.

$$g_2 x_j g_1 = \begin{pmatrix} AP + BX_{11}^{(j)}R & AQ + BX_{11}^{(j)}T & BX_{12}^{(j)} \\ CP + DX_{11}^{(j)}R & CQ + DX_{11}^{(j)}T & DX_{12}^{(j)} \\ X_{21}^{(j)}R & X_{21}^{(j)}T & X_{22}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Далее (см. теорему VIII.3.2), выберем ортогональные матрицы U_1, U_2 так, чтобы произведение

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & U_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} \\ & X_{21}^{(j)} & X_{22}^{(j)} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & U_2 \end{array}\right)$$

имело вид

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & & & \\ \hline & X_{11}^{(j)} & \sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} & 0 \\ \hline & \sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}} & -(X_{11}^{(j)})^* & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Тогда

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \\ & U_1 \end{array}\right) g_2 x_j g_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \\ & U_2 \end{array}\right)$$

имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} AP + BX_{11}^{(j)}R & AQ + BX_{11}^{(j)}T & B\sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} & 0 \\ \hline CP + DX_{11}^{(j)}R & CQ + DX_{11}^{(j)}T & D\sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} & 0 \\ \hline \sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}}R & \sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}}T & -(X_{11}^{(j)})^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Теперь $X_{11}^{(j)} \to 0$, $\sqrt{1 - (X_{11}^{(j)})^* X_{11}^{(j)}} \to 1$, $\sqrt{1 - X_{11}^{(j)}(X_{11}^{(j)})^*} \to 1$, и в пределе мы получаем матрицу (3.4). Теорема доказана. ■

Замечание. Мы сейчас не утверждаем, что $\gamma_1\gamma_2$ является единственным пределом последовательности μ_j, т. е. мы не утверждаем, что топология на $\mathrm{O}^{(k)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 / \mathrm{O}^{(m)}$ отделима.

Пусть теперь ρ — унитарное представление группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0$ в пространстве H, пусть H_n — пространство $\mathrm{O}^{(n)}$-неподвижных векторов, а P_n — проектор на H_n. Поставим в соответствие каждому $k \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Uo})$ пространство $R(k) := H_k$. Тогда (см. § VIII.5) мы можем сопоставить каждому $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k,n)$ оператор

$\rho(\gamma) : H_k \to H_n$ по формуле

$$\rho(\gamma) = P_n \rho(g)\Big|_{H_k},$$

где $g \in \gamma \in \mathrm{O}^{(n)} \setminus \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)_0 \,/\, \mathrm{O}^{(k)} \simeq \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$.

Теорема 3.3. $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — представление категории **Uo**.

Доказательство. Это очевидное следствие теоремы 3.2. ∎

§ 4. *Характеристические функции*

4.1. Характеристическая функция. Сейчас мы построим функтор, который каждому морфизму категории **Uo** ставит в соответствие голоморфную функцию на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ со значениями в пространстве линейных отношений.

Каждому объекту $n = 0, 1, 2, \ldots$ категории **Uo** мы поставим в соответствие линейное пространство $V_{2n} = V_{2n}^+ \oplus V_{2n}^- := \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, снабженное двумя формами: эрмитовой формой

$$M\big((v_+, v_-); (w_+, w_-)\big) = \sum \big(v_+^j \overline{w}_+^j - v_-^j \overline{w}_-^j\big)$$

и кососимметричной билинейной формой

$$L\big((v_+, v_-); (w_+, w_-)\big) = \sum \big(v_+^j w_-^j - v_-^j w_+^j\big).$$

Таким образом, V_{2n} является объектом категории **Sp** (и, что тоже будет для нас существенно, объектом категории **C**).

Теперь каждому морфизму $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$ и каждому $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ мы поставим в соответствие линейное отношение $\chi_P(\lambda) : V_{2k} \rightrightarrows V_{2n}$ по следующему правилу. Элемент $\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in V_{2k} \oplus V_{2n}$ содержится в $\chi_P(\lambda) = \chi(\lambda)$, если существуют векторы x_-, y_+ такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

или, что то же самое,

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Замечание. При $\lambda = \infty$ мы должны вместо (4.1) писать

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ x_+ \\ p_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ 0 \\ q_- \\ y_- \end{pmatrix}.$$

Мы получили функцию $\chi_P(\lambda)$ на $\overline{\mathbb{C}}$ со значениями в пространстве линейных отношений. Ее мы будем называть *характеристической функцией*.

Легко видеть, что при замене матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} A & BU_2 \\ U_1 C & U_1 D U_2 \end{pmatrix}$, где $U_1, U_2 \in \mathrm{O}(\infty)$, характеристическая функция не меняется. Иными словами, характеристическая функция определяется морфизмом категории **Uo**, а не матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Теорема 4.1.

а) $\chi(\lambda) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(V_{2k}, V_{2n})$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$.

б) Функция $\chi(\lambda)$ голоморфна на $\overline{\mathbb{C}}$.

в) Пусть $(q, p) \in \chi(\lambda) \subset V_{2k} \oplus V_{2n}$. Тогда при $|\lambda| < 1$ выполнено $M(q, q) \geqslant M(p, p)$, при $|\lambda| = 1$ выполнено $M(q, q) = M(p, p)$, а при $|\lambda| > 1$ выполнено $M(q, q) \leqslant M(p, p)$. Более того, при $|\lambda| < 1$ линейное отношение $\chi(\lambda)$ является морфизмом категории **Sp** (а при $|\lambda| > 1$ линейное отношение $\chi(\lambda)^{\square}$ является морфизмом категории **Sp**).

г) (симметрия относительно нуля)

$$\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in \chi(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(q_+, -q_-; p_+ - p_-\big) \in \chi(-\lambda).$$

д) (симметрия относительно окружности)

$$\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in \chi(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\overline{p}_+, \overline{p}_-; \overline{q}_+, \overline{q}_-\big) \in \chi(\overline{\lambda}^{-1}).$$

Замечание. Пусть $k = n$. Тогда для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме конечного числа, линейное отношение $\chi_P(\lambda)$ является графиком оператора $\mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$. Таким образом, мы можем рассматривать $\chi_P(\lambda)$ как мероморфную функцию $\overline{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C})$, которая на окружности $|\lambda| = 1$ принимает значения в $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R}) = \mathrm{U}(k, k) \cap \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C})$, а в круге $|\lambda| < 1$ — в M-сжатиях. Мы получаем матричнозначный аналог того, что в комплексном анализе называется *внутренней функцией* (см. [Потапов (1955)]).

Теорема 4.2. Пусть $P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$, $Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n, m)$. Тогда для любого $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ выполнено равенство

$$\chi_{QP}(\lambda) = \chi_Q(\lambda) \chi_P(\lambda) \tag{4.3}$$

в смысле произведения линейных отношений.

Замечание. Еще раз подчеркнем, что в (4.3) стоит произведение линейных отношений, а не морфизмов категории **C**!

Теорема 4.3. $\chi_{P^*}(\lambda) = \chi_P(\lambda^{-1})^{\square}$. Иными словами, $(q, p) \in \chi_{P^*}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $(p, q) \in \chi_P(\lambda^{-1})$.

4.2. Доказательство теоремы 4.1. Проверка симметричности. Докажем утверждения г) и д).

г) Пусть $\big(q_+, q_-; p_+, p_-\big) \in \chi(\lambda)$. Тогда существуют x_-, y_+ такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ -p_- \\ -x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ -q_- \\ -\lambda y_+ \end{pmatrix},$$

что, в свою очередь, равносильно $(q_+, -q_-; p_+, -p_-) \in \chi(-\lambda)$.

д) Пусть $(q_+, q_-; p_+, p_-) \in \chi(\lambda)$, т. е. (в силу (4.1))

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & \\ C & D & & \\ & & \overline{A} & \overline{B} \\ & & \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} p_- \\ x_- \\ p_+ \\ \lambda x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} & & \\ \overline{C} & \overline{D} & & \\ & & A & B \\ & & C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_- \\ \lambda y_+ \\ q_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \bar{p}_- \\ \bar{x}_- \\ \bar{p}_+ \\ \lambda \bar{x}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & \\ C & D & & \\ & & \overline{A} & \overline{B} \\ & & \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_- \\ \lambda \bar{y}_+ \\ \bar{q}_+ \\ \bar{y}_+ \end{pmatrix},$$

что и означает $(\bar{p}_-, \bar{p}_+ ; \bar{q}_-, \bar{q}_+) \in \chi(\overline{\lambda}^{-1})$.

4.3. Доказательство теоремы 4.1. Свойства форм L и M. Пусть p_+, p_-; q_+, q_-, y_+, x_- удовлетворяют системе (4.1). Тогда в силу унитарности матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$\|p_+\|^2 + \|\lambda x_-\|^2 = \|q_+\|^2 + \|y_+\|^2, \quad \|p_-\|^2 + \|x_-\|^2 = \|q_-\|^2 + \|\lambda y_+\|^2.$$

Вычитая эти равенства, получаем, что

$$\big(\|p_-\|^2 - \|p_+\|^2\big) - \big(\|q_-\|^2 - \|q_+\|^2\big) = \big(|\lambda|^2 - 1\big)\big(\|y_+\|^2 + \|x_-\|^2\big).$$

При $|\lambda| < 1$ мы получаем $M(q,q) \leqslant M(p,p)$. При $|\lambda| = 1$ мы получаем $M(q,q) = M(p,p)$, а при $|\lambda| > 1$ — соответственно $M(q,q) \geqslant M(p,p)$.

Допустим, что $|\lambda| \leqslant 1$, а $M(q,q) = M(p,p)$. Тогда должно быть выполнено $x_- = 0$, $y_+ = 0$. Отсюда вытекает (см. (4.1)), что $p = 0$ влечет $q = 0$, а $q = 0$ влечет $p = 0$.

Итак, мы доказали все неравенства, необходимые для проверки утверждения в), но само утверждение в) пока еще не доказано.

Далее, любая матрица вида $\begin{pmatrix} R & \\ & (R^t)^{-1} \end{pmatrix}$ сохраняет симплектическую форму $\{\cdot,\cdot\}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Пусть p_+, p_-, q_+, q_-, y_+, x_-, а также $\tilde{p}_+$, $\tilde{p}_-$, $\tilde{q}_+$, $\tilde{q}_-$, $\tilde{y}_+$, $\tilde{x}_-$ удовлетворяют системе (4.1). Тогда условие сохранения формы $\{\cdot,\cdot\}$ влечет

$$\sum\big(p_j^+\tilde{p}_j^- - p_j^-\tilde{p}_j^+\big) + \sum\big(\lambda x_j^-\tilde{x}_j^- - \lambda x_j^-\tilde{x}_j^-\big) = \sum\big(q_j^+\tilde{q}_j^- - q_j^-\tilde{q}_j^+\big) + \sum\big(\lambda y_j^+\tilde{y}_j^+ - \lambda y_j^+\tilde{y}_j^+\big).$$

Вторые слагаемые в обеих частях равенства равны 0, что и означает

$$L\big((p_+, p_-); (\tilde{p}_+, \tilde{p}_-)\big) = L\big((q_+, q_-); (\tilde{q}_+, \tilde{q}_-)\big).$$

Итак, $\chi(\lambda)$ является изотропным подпространством в $V_{2k} \oplus V_{2n}$ (но мы еще не доказали, что $\chi(\lambda)$ — максимальное изотропное подпространство).

4.4. Доказательство теоремы 4.1. Голоморфность. Перепишем равенство (4.2) в виде

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ q_- \\ \lambda x_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & B \\ A^t & 0 & C^t & 0 \\ 0 & C & 0 & D \\ B^t & 0 & D^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- \\ q_+ \\ x_- \\ y_+ \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Матрицу, стоящую в правой части, мы обозначим через S. Из этого равенства легко выписывается уравнение, которому должен удовлетворять вектор $(q_+, q_- ; p_+, p_-) \in \chi(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ q_- \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^t & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^t & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & C \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} p_- \\ q_+ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda B(\lambda^2 - D^tD)^{-1}B^t & A + B(\lambda^2 - D^tD)^{-1}D^tC \\ A^t + C^t(\lambda^2 - DD^t)^{-1}DB^t & \lambda C^t(\lambda^2 - DD^t)^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- \\ q_+ \end{pmatrix}. \tag{4.4'}$$

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ является конечномерным возмущением матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, а та, в свою очередь, является конечномерным возмущением ортогональной матрицы. Поэтому матрица D^tD имеет лишь конечное число собственных значений. Обозначим их через λ_j^2. Таким образом, везде, кроме точек $\pm\lambda_j$, линейное отношение задается формулой (4.4'). В частности, везде, кроме, быть может, точек $\pm\lambda_j$, линейное отношение $\chi(\lambda)$ имеет половинную размерность и голоморфно зависит от λ.

Далее, заметим, что $\|D\| \leqslant 1$. Поэтому в области $|\lambda| > 1$ функция $\chi(\lambda)$ голоморфна. Из соображений симметрии (см. утверждение д) теоремы) функция $\chi(\lambda)$ голоморфна и в круге $|\lambda| < 1$. Осталось убедиться в том, что $\chi(\lambda)$ голоморфна в точках $\pm\lambda_j$, лежащих на окружности $|\lambda| = 1$. Пусть v — собственный вектор матрицы D^tD, соответствующий собственному значению λ_j^2. Тогда $v' = (\lambda_j^{-1}Dv, v)$ является собственным вектором матрицы $\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^t & 0 \end{pmatrix}$ с собственным значением λ_j. Учитывая, что матрица S унитарна, а $|\lambda_j| = 1$, мы получаем, что v' является собственным вектором матрицы S. Покажем, что и комплексно-сопряженный вектор $\overline{v}'$ является собственным для S. Действительно, учитывая, что матрица $S = S^t$ унитарна, получаем

$$S\overline{v}' = \overline{(\overline{S}v')} = \overline{(S^{-1}v')} = \overline{\lambda_j^{-1}v'} = \lambda_j\overline{v}'.$$

Поэтому в пространстве $\operatorname{Ker}(\lambda_j^2 - D^tD)$ мы можем выбрать базис $v_1, v_2, \ldots$, целиком состоящий из вещественных векторов. Далее, заметим, что S — унитарная матрица, определенная с точностью до сопряжения с помощью ортогональной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & U & \\ & & & V \end{pmatrix}.$$

Векторы $(\lambda_j^{-1}Dv_\alpha, v_\alpha)$ — собственные для блока $\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^t & 0 \end{pmatrix}$ матрицы S. Так как $|\lambda_j| = 1$, а матрица S унитарна, мы получаем, что векторы $v_\alpha^* = (0, 0, \lambda_j^{-1}Dv_\alpha, v_\alpha)$

являются собственными векторами для S (иначе было бы $\|Sv_\alpha^*\| \geqslant \|v_\alpha^*\|$). Выбирая векторы v_α^* в качестве базисных, мы можем привести матрицу S к виду

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & A & 0 & B' & 0 & 0 \\ A^t & 0 & (B')^t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & C' & 0 & D' & 0 & 0 \\ (B')^t & 0 & (D')^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H^t & 0 \end{array}\right),$$

где собственные числа D' отличны от λ_j. Повторяя эту процедуру, мы получаем, что любой морфизм категорий $\mathbf{Uo}$ при подходящем выборе координат принимает вид

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} A & \widetilde{B} & \\ \hline \widetilde{C} & \widetilde{D} & \\ & & \Lambda \end{array}\right),$$

где $\begin{pmatrix} A & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{pmatrix}$ — квадратная матрица, Λ — унитарная матрица, а $\widetilde{D}$ не имеет собственных значений, лежащих на окружности $|\lambda| = 1$. Легко видеть, что характеристическая функция морфизма P задается формулой (4.4′), и теперь формула (4.4′) уже не имеет особенностей на окружности.

Итак, голоморфность доказана. Кроме того, мы убедились, что линейное отношение $\chi(\lambda)$ имеет половинную размерность при всех λ, а значит, доказали утверждения а) и в).

4.5. Доказательство теоремы 4.2.

Пусть $P = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(k, n)$, $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Uo}}(n, m)$. Пусть $(q_+, q_-; p_+, p_-) \in \chi_Q(\lambda)$; $(r_+, r_-; q_+, q_-) \in \chi_P(\lambda)$. Тогда существуют x_-, y_+, u_-, v_+ такие, что

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} q_+ \\ \lambda u_- \\ q_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} K & L \\ M & N \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+ \\ v_+ \\ r_- \\ \lambda v_+ \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ \lambda u_- \\ p_- \\ x_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ \lambda u_- \\ q_- \\ \lambda y_+ \\ u_- \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} K & & L \\ & 1 & \\ M & & N \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} K & & L \\ & 1 & \\ M & & N \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+ \\ y_+ \\ v_+ \\ r_- \\ \lambda y_+ \\ \lambda v_+ \end{pmatrix},$$

откуда (см. (3.3)) следует, что $(r_+, r_-; p_+, p_-) \in \chi_{QP}(\lambda)$, т. е.

$$\chi_{QP}(\lambda) \supset \chi_Q(\lambda)\chi_P(\lambda).$$

Обратно, пусть $(r_+, r_-; p_+, p_-) \in \chi_{QP}(\lambda)$. Тогда существуют x_-, y_+, u_-, v_+ такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ \lambda u_- \\ p_- \\ x_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} K & & L \\ & 1 & \\ M & & N \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} K & & L \\ & 1 & \\ M & & N \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+ \\ y_+ \\ v_+ \\ r_- \\ \lambda y_+ \\ \lambda v_+ \end{pmatrix}.$$

Положив $q_+ = Kr_+ + \lambda L v_+$, $q_- = \overline{K} r_+ + \lambda \overline{L} v_-$ (напомним, что $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}^{t-1} = \begin{pmatrix} \overline{K} & \overline{L} \\ \overline{M} & \overline{N} \end{pmatrix}$), мы получаем равенства (4.5).

4.6. Доказательство теоремы 4.3. Пусть $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, тогда $P^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$. Пусть $(q_+, q_-; p_+, p_-) \in P^*$. Тогда существуют x_-, y_+, такие, что

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x_- \\ p_- \\ x_+ \end{pmatrix},$$

таким образом, $(p_+, p_-; q_+, q_-) \in \chi(\lambda^{-1})$.

4.7. «Центральное расширение». Морфизм категории $\mathbf{Uo}$ не восстанавливается однозначно по своей характеристической функции. Действительно, пусть

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & 1 \end{array}\right), \quad P' = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline C & D & \\ & & F \end{array}\right)$$

(отметим, что матрица F в этом случае должна быть унитарной). Тогда $\chi_P(\lambda) = \chi_{P'}(\lambda)$ (проще всего в этом убедиться, взглянув на формулу (4.4′)).

Введем на $\overline{\mathbb{C}}$ еще одну функцию — функцию $n_P(\lambda)$, принимающую значения $0, 1, 2, \ldots, \infty$, — по следующему правилу: $n_P(\lambda)$ есть размерность пространства всех (x_-, y_+), удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \\ 0 \\ \lambda y_+ \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Лемма 4.4.

а) Функция $n(\lambda)$ равна нулю всюду, кроме конечного числа точек, лежащих на окружности $|\lambda| = 1$.

б) $n(\pm 1) = \infty$, в остальных точках значения функции конечны.

в) $n(\lambda) = n(-\lambda)$.

Доказательство. Перепишем (4.7) в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ \lambda y_+ \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \\ \hline \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ x_- \\ 0 \\ y_+ \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \end{pmatrix}$ является собственным для оператора

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

с собственным значением λ^2. Теперь высказывания а), б) становятся очевидными.

Далее, (4.7) равносильно

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ -x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \\ 0 \\ -\lambda y_+ \end{pmatrix},$$

откуда сразу следует в). Лемма доказана. ■

Теорема 4.5.

$$n_{QP}(\lambda) = n_Q(\lambda) + n_P(\lambda) + c(Q, P; \lambda), \tag{4.9}$$

где

$$c(Q, P; \lambda) = \dim\bigl(\operatorname{Ker} \chi_Q(\lambda) \cap \operatorname{Indef} \chi_P(\lambda)\bigr).$$

Доказательство. Величина $n_{QP}(\lambda)$ равна размерности пространства решений системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ \lambda u_- \\ 0 \\ x_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & & & \\ C & D & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \overline{A} & \overline{B} & \\ & & & \overline{C} & \overline{D} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & & L & & & \\ & 1 & & & & \\ M & & N & & & \\ & & & \overline{K} & & \overline{L} \\ & & & & 1 & \\ & & & \overline{M} & & \overline{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_+ \\ v_+ \\ 0 \\ \lambda y_+ \\ \lambda v_+ \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Введем дополнительные переменные

$$q_+ = Lv_+, \quad q_- = \lambda \overline{L} v_-.$$

Тогда система уравнений переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_- \\ 0 \\ -x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & \\ C & D & & \\ & & \overline{A} & \overline{B} \\ & & \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y_+ \\ q_- \\ \lambda y_+ \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$\begin{pmatrix} q_+ \\ \lambda y_- \\ q_- \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L & & \\ M & N & & \\ & & \overline{K} & \overline{L} \\ & & \overline{M} & \overline{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_+ \\ 0 \\ \lambda v_+ \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

(это система уравнений на x_-, y_+, v_+, u_-, q_+, q_-). Чтобы существовали x_-, y_+, удовлетворяющие первому равенству, необходимо, чтобы $\bigl(q_+, q_-; 0, 0\bigr) \in \chi_Q(\lambda)$, т. е. $(q_+, q_-) \in \operatorname{Ker} Q$. Аналогично, должно быть выполнено условие $(q_+, q_-) \in \operatorname{Indef} \chi_P(\lambda)$. Далее, фиксируем $(q_+, q_-) \in \operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Indef} P$. Тогда система (4.10) распадается на две независимые системы: система (4.11) на переменные x_-, y_+ и система (4.12) на u_-, v_+. Размерность пространства решений системы (4.11) равна $n_Q(\lambda)$, а размерность пространства решений системы (4.12) равна $n_P(\lambda)$. Теперь утверждение очевидно. ■

4.8. Замечания. Используя общие теоремы об операторных узлах и их характеристических функциях (см. добавление Е), можно показать, что для любой пары функций $\bigl(\chi(\lambda), n(\lambda)\bigr)$, удовлетворяющих утверждениям теорем 4.1 и 4.4, существует единственный морфизм P категории **Uo** такой, что $\chi(\lambda) = \chi_P(\lambda)$, $n_\lambda(\lambda) = n_P(\lambda)$.

§ 5. *Иерархия вложений Ольшанского*

Группы $\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$ и $\bigl(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$ являются частными случаями (G, K)-пар Г. И. Ольшанского.

5.1. Список. Пусть, как обычно, $\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$, ... обозначает соответственно полную ортогональную, полную унитарную, полную линейную и т. д. группы гильбертова пространства. Пусть $\mathrm{G}(\infty) \supset \mathrm{K}(\infty)$ — две группы подобного типа. Пусть $\bigl(\mathrm{G}(\infty) \supset \mathrm{K}(\infty)\bigr)$ — группа операторов $A \in \mathrm{G}(\infty)$, представимых в виде $A = B(1 + T)$, где $B \in \mathrm{K}(\infty)$, а T — оператор Гильберта—Шмидта. Г. И. Ольшанский [Ольшанский (1983)], [Olshanskii (1990)] предложил следующий список естественных пар $\bigl(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\bigr)$:

I.1.	$\bigl(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.1.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.2.	$\bigl(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.2.	$\bigl(\mathrm{U}(2\infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.3.	$\bigl(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.3.	$\bigl(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.4.	$\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$	II.4.	$\bigl(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$
I.5.	$\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$	II.5.	$\bigl(\mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\bigr)$
I.6.	$\bigl(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{H}), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$	II.6.	$\bigl(\mathrm{U}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$
I.7.	$\bigl(\mathrm{O}(\infty, \infty), \mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty)\bigr)$	II.7.	$\bigl(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty)\bigr)$
I.8.	$\bigl(\mathrm{O}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$	II.8.	$\bigl(\mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\bigr)$
I.9.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$	II.9.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$
I.10.	$\bigl(\mathrm{Sp}(\infty, \infty), \mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$	II.10.	$\bigl(\mathrm{Sp}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty)\bigr)$

5.2. Явный вид вложений $\mathrm{K}(\infty) \to \mathrm{G}(\infty)$ почти во всех случаях не вызывает сомнений, однако, чтобы избежать двусмысленностей, мы должны их перечислить.

Пары I.4, I.5, I.6. Группа $\mathrm{G}(\infty)$ есть группа линейных операторов в пространстве ℓ_2 над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (ниже $\ell_2(\mathbb{K}) = \ell_2(\mathbb{R})$, $\ell_2(\mathbb{C})$, $\ell_2(\mathbb{H})$), а группа $\mathrm{K}(\infty)$ — группа унитарных операторов в $\ell_2(\mathbb{K})$).

Пары I.2, I.7, I.10. Рассмотрим в пространстве $\ell_2(\mathbb{K}) \oplus \ell_2(\mathbb{K})$ эрмитову форму с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из ограниченных операторов, сохраняющих эту форму, а подгруппа $\mathrm{K}(\infty)$ — из операторов, оставляющих инвариантными подпространства $\ell_2(\mathbb{K}) \oplus 0$ и $0 \oplus \ell_2(\mathbb{K})$.

Пары II.2, II.7, II.10 определяются точно так же, только группа $\mathrm{G}(\infty)$ сохраняет эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пары II.5, II.8, II.9. Группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ в $\ell_2(\mathbb{K}) \oplus \ell_2(\mathbb{K})$, причем A и B унитарны, а подгруппа $\mathrm{K}(\infty)$ — из матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Пары II.1, II.4. В случае II.1 группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из унитарных операторов в $\ell_2(\mathbb{H})$, а подгруппа $\mathrm{K}(\infty)$ — из операторов, сохраняющих подпространство $\ell_2(\mathbb{C}) \subset \ell_2(\mathbb{H})$. Случай II.2 аналогичен ($\ell_2(\mathbb{C}) \supset \ell_2(\mathbb{R})$).

Пары II.3, II.6. В случае II.3 группа $\mathrm{G}(\infty)$ состоит из вещественно-линейных ортогональных операторов в $\ell_2(\mathbb{C})$, а $\mathrm{K}(\infty)$ — из унитарных (комплексно-линейных) операторов. Случай II.6 аналогичен.

Пара I.8. Группа $\mathrm{O}(\infty, \mathbb{C})$ состоит из ограниченных операторов в $\ell_2(\mathbb{C})$, сохраняющих форму $\sum x_i^2$, а $\mathrm{O}(\infty)$ — из операторов, сохраняющих вещественное подпространство $\ell_2(\mathbb{R})$.

Пара I.9. Группа $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{C})$ состоит из ограниченных операторов в $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus \ell_2(\mathbb{C})$, сохраняющих билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а ее подгруппа $\mathrm{Sp}(\infty)$ — из унитарных операторов, сохраняющих ту же форму.

Пара I.1. См. выше, п. 1.2.

Пара I.3. Группа $\mathrm{SO}^*(2\infty)$ состоит из ограниченных матриц в $\ell_2(\mathbb{H})$, сохраняющих антиэрмитову форму $\sum_\alpha x_\alpha i \overline{y_\alpha}$, а ее подгруппа $\mathrm{U}(\infty)$ — из комплексных матриц, сохраняющих ту же форму.

Безусловно, встает вопрос о том, почему список содержит ровно эти 20 групп, а не больше и не меньше. Мы воздержимся от обсуждения этого вопроса. Заметим лишь, что, как мы видели в главе VI, группа $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ является группой движений бесконечномерного симметрического пространства. Группы списка Г. И. Ольшанского являются в точности группами движений бесконечномерных симметрических пространств, к ним, правда, нужно добавить еще три группы «конечного ранга»:

$$\mathrm{O}(p, \infty), \quad \mathrm{U}(p, \infty), \quad \mathrm{Sp}(p, \infty).$$

Хотя перечисленные 20 групп обладают некоторой индивидуальностью, степень этой индивидуальности очень невелика, все «некомпактные» пары (т. е. группы **I.1–I.10**) очень похожи на $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$, а «компактные» пары (т. е. группы **II.1–II.10**) — на $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$. По этой причине мы будем очень кратки. По-существу, ниже обсуждаются лишь вложения (G, K)-пар в группы $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{O}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$, $\mathrm{Isom}(\cdot)$; имея такие вложения, мы автоматически имеем и представления (G, K)-пар.

5.3. Иерархия вложений: «некомпактный случай». Существует много вложений «некомпактных» (G, K)-пар Ольшанского **I.1–I.10** в группу $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$. Общая картина вложений изображена в таблице на странице 297.

В этой таблице жирные стрелки соответствуют вложениям, зависящим от (одного) параметра. Надпись «удв» (удвоение) на стрелке означает, что вложение проводится не в группу $\big(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\big)$, а в группу $\big(\mathrm{G}(2\infty), \mathrm{K}(2\infty)\big)$.

Большинство стрелок в этой таблице достаточно очевидны. Все «основные» вложения, ведущие из первого столбца во второй, соответствуют «забыванию» структуры. Не нуждаются в пояснениях и вложения $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2\infty, \mathbb{R})$ и $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{H}) \to \mathrm{GL}(2\infty, \mathbb{C})$.

ОСНОВНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{O}(\infty,\infty), \mathrm{O}(\infty)\times\mathrm{O}(\infty)) \arrow[r, "\text{удв}"] & (\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)) \arrow[r, thick] & (\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)) \\
(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)) \arrow[ur, "\text{удв}"'] & & \\
(\mathrm{O}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)) \arrow[dr] & & \\
(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{C}), \mathrm{Sp}(\infty)) \arrow[r, "\text{удв}"] & (\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)) \arrow[r, thick] \arrow[uuu, "\text{удв}"] & (\mathrm{U}(\infty,\infty), \mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)) \arrow[uuu, "\text{удв}"] \\
(\mathrm{U}(\infty,\infty), \mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)) \arrow[ur, "\text{удв}"'] & & \\
(\mathrm{Sp}(\infty,\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\times\mathrm{Sp}(\infty)) \arrow[dr, "\text{удв}"] & & \\
(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)) \arrow[r] & (\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{H}), \mathrm{Sp}(\infty)) \arrow[r, thick, "\text{удв}"] \arrow[uuu, "\text{удв}"] & (\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)) \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

$$\big(\mathrm{O}(\infty,\infty), \mathrm{O}(\infty)\times\mathrm{O}(\infty)\big) \longrightarrow \big(\mathrm{U}(\infty,\infty), \mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)\big) \xleftarrow{\text{удв}} \big(\mathrm{Sp}(\infty,\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\times\mathrm{Sp}(\infty)\big)$$

$$\big(\mathrm{O}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)\big) \longrightarrow \big(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$$

$$\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{C}), \mathrm{Sp}(\infty)\big) \longrightarrow \big(\mathrm{Sp}(4\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$$

Объясним остальные вложения.

а) $\big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(4\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(2\infty)\big)$.

Группа $\big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$ действует в $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus \ell_2(\mathbb{C})$, сохраняя эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. Мнимая часть эрмитовой формы является кососимметричной формой в овеществленном $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus \ell_2(\mathbb{C})$. Вложение построено.

б) $\big(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Группа $\mathrm{SO}^*(2\infty)$ состоит из операторов в $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus \ell_2(\mathbb{C})$, сохраняющих ортогональную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. В частности, они сохраняют эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вложение построено.

Построим по одному вложению, отвечающему жирным стрелкам.

в) $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Тогда на $H \oplus H$ определена эрмитова форма

$$\big\langle (h, \tilde{h}), (p, \tilde{p}) \big\rangle = \tfrac{1}{i}\big(\langle h, \tilde{p}\rangle - \langle \tilde{h}, p\rangle\big).$$

г) $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$.

Аналогично, см. § 1.

д) $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{H}), \mathrm{Sp}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{SO}^*(4\infty), \mathrm{U}(2\infty)\big)$.

Пусть H — кватернионное гильбертово пространство. Тогда на $H \oplus H$ определена антиэрмитова форма

$$\big\langle (h, \tilde{h}), (p, \tilde{p}) \big\rangle = \langle h, \tilde{p} \rangle - \langle \tilde{h}, p \rangle.$$

Вложения, зависящие от параметра, получаются после применения процедуры с централизатором, описанной в п. 2.4.

Наконец, особое вложение $\big(\mathrm{O}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ получается ограничением с вложения $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{U}(\infty, \infty), \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)\big)$.

5.4. Иерархия вложений: «компактный случай». Существует много вложений «компактных» (G, K)-пар **II.1–II.10** в группу $\big(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$, группу $\big(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ и группу $\mathrm{Isom}\, H$ изометрий гильбертова пространства. Общая картина вложений изображена на странице 299.

Вертикальные пунктирные стрелки уже описаны, вертикальные стрелки, состоящие из точек, достаточно очевидны (забывание структуры).

Перейдем к описанию вложений

$$\big(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty)\big) \to \big(\widetilde{\mathrm{G}}(\infty), \widetilde{\mathrm{K}}(\infty)\big),$$

зависящих от параметра (жирные стрелки). Заметим, что во всех 6 случаях $\mathrm{G}(\infty) = \widetilde{\mathrm{K}}(\infty)$, поэтому одно вложение определено тривиальным образом. Вложение, зависящее от параметра, получается, если применить прием с централизатором из п. 2.4.

Опишем аффинные действия, зависящие от параметра. Случай $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ уже разобран (п. 2.5). Группа $\big(\mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty), \mathrm{U}(\infty)\big)$ действует на пространстве гильберт-шмидтовских матриц по формуле

$$(g_1, g_2) : h \to g_1^{-1} h g_2 + \lambda\big(g_1^{-1} g_2 - E\big).$$

Реализуем, далее, группу $\mathrm{U}(2\infty)$ как группу унитарных блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, ее подгруппа $\mathrm{Sp}(\infty)$ состоит из матриц, удовлетворяющих условию

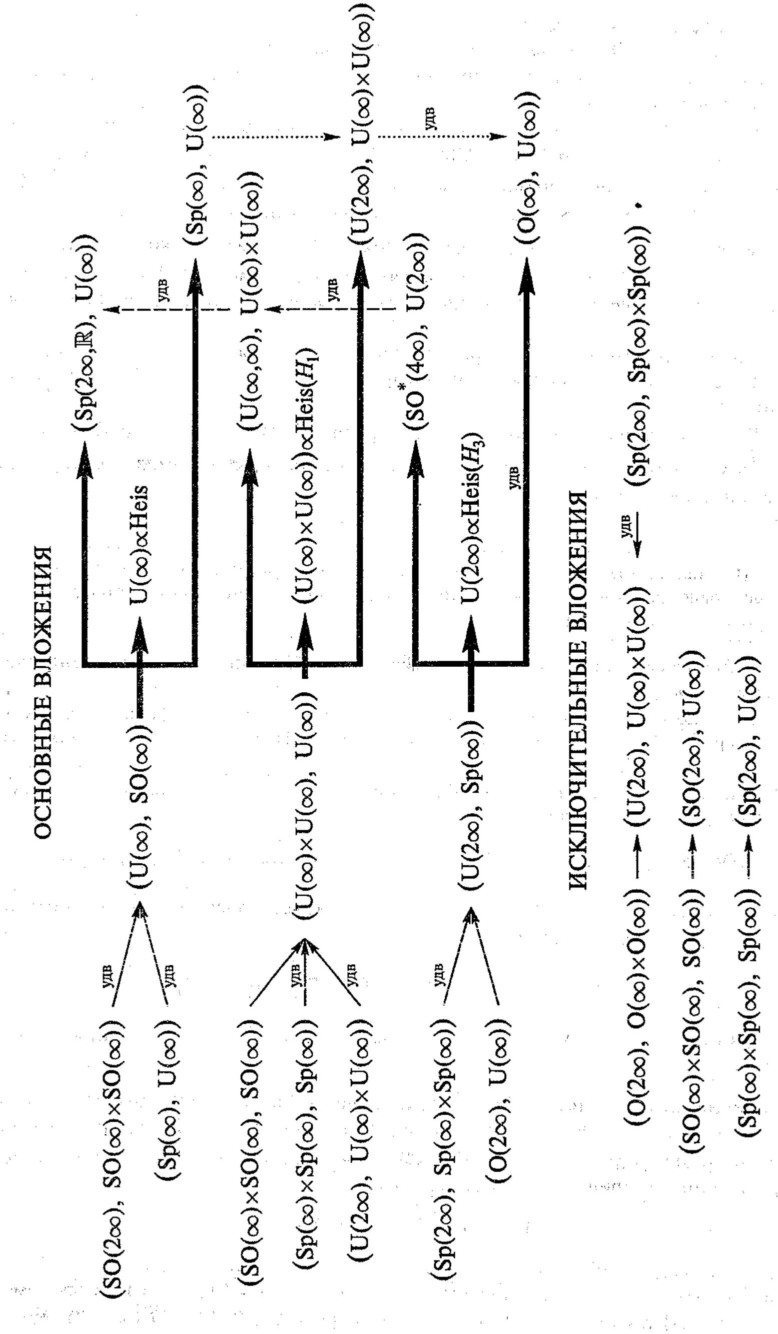
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть H — пространство гильберт-шмидтовских матриц X, удовлетворяющих условию

$$X^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа $\big(\mathrm{U}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\big)$ действует на гильбертовом пространстве H преобразованиями

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - E \right).$$



5.5. Замечания. а) Как мы отмечали, все (G, K)-пары вида **I.1–I.10** и **II.1–II.10** очень похожи друг на друга. Однако некоторая разница между ними все-таки есть.

Прежде всего, отметим наличие трех «этажей» (или трех столбцов) в иерархии вложений; эти три столбца явно играют разную роль.

Группы третьего столбца тесно связаны с «классическими категориями», а именно, «некомпактные» группы $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{U}(\infty,\infty),\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{SO}^*(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ являются группами автоморфизмов бесконечномерных объектов категорий $\overline{\mathbf{Sp}}$, $\overline{\mathbf{U}}$, $\overline{\mathbf{SO}}^*$. Группы $\big(\mathrm{O}(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ и $\big(\mathrm{Sp}(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ являются группами Aut^* для бесконечномерных объектов категорий $\overline{\mathbf{GD}}$ и $\overline{\mathbf{C}}$, а группа $\big(\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty)\big)$ является компонентой связности единицы в группе Aut^* одного из объектов категории $\overline{\mathbf{GA}}$ (см. п. IV.3.4). Эти шесть (и, по-видимому, лишь эти шесть) групп имеют проективные представления, не линеаризующиеся на накрытии.

Почти все группы второго и третьего столбцов появляются в теории представлений группы диффеоморфизмов окружности и групп петель, см. ниже §§ 6–7 и, подробнее, [Неретин (1988)].

б) Теория K-сферических представлений групп $\big(\mathrm{G}(\infty),\mathrm{K}(\infty)\big)=\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{O}(\infty)\times\mathrm{O}(\infty),\mathrm{O}(\infty)\big)$, $\big(\mathrm{Sp}(\infty)\times\mathrm{Sp}(\infty),\mathrm{Sp}(\infty)\big)$ может быть истолкована как теория фактор-представлений, см. п. VIII.6.6.

в)

Гипотеза (Ольшанский). Все (G, K)-пары Ольшанского имеют тип I. Все неприводимые унитарные представления (G, K)-пар входят в разложения тензорных произведений только что построенных представлений.

Для сферических представлений некомпактных (G, K)-пар это утверждение доказано (см. [Pickrell (1990)]).

г) Для некоторых (G, K)-пар получена классификация всех K-сферических представлений (см. [Вершик, Керов (1982)], [Ольшанский (1986)], [Нессонов (1986)], см. также [Pickrell (1990)]).

д) Есть еще несколько (G, K)-пар, которые, по-видимому, близки по свойствам к только что перечисленным, в частности:

$$\big(\mathrm{O}(2\infty+1),\mathrm{U}(\infty)\big),\quad \big(\mathrm{U}(2\infty+1),\mathrm{Sp}(\infty)\big),\quad \big(\mathrm{U}(p,\infty)\times\mathrm{U}(q,\infty),\mathrm{U}(\infty)\big).$$

Например, группа $\big(\mathrm{O}(2\infty+1),\mathrm{U}(\infty)\big)=\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathbf{B}}}$ состоит из вещественно-линейных операторов A в $\ell_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{R}$, представимых в виде

$$A=\begin{pmatrix} B & \\ & 1\end{pmatrix}(1+T):\ell_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{R}\to\ell_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{R},$$

где B — унитарный оператор в $\ell_2(\mathbb{C})$, а T — вещественно-линейный оператор Гильберта—Шмидта.

5.6. Замечания. (G, K)-**пары Нессонова.** Являются ли объекты следующего типа разумными, не совсем ясно. Во всяком случае, они резко не похожи на (G, K)-пары Ольшанского.

Рассмотрим группу $\mathrm{G}=\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$. Она состоит из пар вещественных ограниченных матриц (A,B), представимых в виде

$$A=P(1+T),\quad B=P(1+S),$$

где $P\in\mathrm{O}(\infty)$ (матрица P — одна и та же для A и B!), а T и S — операторы Гильберта—Шмидта. Умножение определяется формулой $(A,B)(A',B')=(AA',BB')$. Реализуем группу $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$ так же, как в конце п. 1.3. Фиксируем $k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$ $(l+k>0)$. Рассмотрим

вложение G в $\big(\mathrm{Sp}(2(k+l)\infty,\mathbb{R}),\mathrm{U}(\infty)\big)$, задаваемое формулой

$$\sigma:(A,B)\mapsto\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} A &&&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&&& \\ && A &&&&&&&&& \\ &&& B &&&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&&& \\ &&&&& B &&&&&& \\ \hline &&&&&& A^{t-1} &&&&& \\ &&&&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&&&& A^{t-1} &&& \\ &&&&&&&&& B^{t-1} && \\ &&&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&&& B^{t-1}\end{array}\right),$$

где A и A^{t-1} встречаются по k раз, а B и B^{t-1} — по l раз. Образ $\sigma\big(\mathrm{O}(\infty)\big)$ группы $\mathrm{O}(\infty)\subset\mathrm{G}$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} P &&& \\ & \ddots && \\ \hline && \ddots & \\ &&& P\end{array}\right),$$

где P ортогональна. Централизатор Z подгруппы $\sigma\big(\mathrm{O}(\infty)\big)$ состоит из блочно-скалярных симплектических матриц и изоморфен $\mathrm{Sp}(2(k+l),\mathbb{R})$. Пусть $Q\in Z$. Тогда мы можем рассмотреть вложение

$$\sigma_Q(A,B):=Q^{-1}\sigma(A,B)Q$$

группы G в $\mathrm{Sp}(2(k+l)\infty,\mathbb{R})$ и ограничить представление Вейля на образ группы G.

Задача.

а) От скольких параметров зависит полученное представление?

б) Что случится, если мы применим ту же конструкцию для группы $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$?

§ 6. *Конструкции представлений группы диффеоморфизмов окружности*

6.1. Вложения Diff **в** $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$. Рассмотрим в пространстве гладких функций на окружности скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)\overline{g(\psi)}\,d\varphi d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}},\tag{6.1}$$

где $0<s<1$.

Это хорошо известное в теории представлений скалярное произведение для дополнительной серии унитарных представлений $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (см. [Bargmann (1948)]).

Лемма 6.1.
а) При $0 < s < 1$ скалярное произведение (6.1) положительно определено.
б) Векторы

$$e_n = \sqrt{c_n^{-1}}e^{in\varphi}, \tag{6.2}$$

где

$$c_n = \frac{\pi^2 2^{1-s}}{(s+1)B\left(\frac{s+1}{2} - n, \frac{s+1}{2} + n\right)} = c_0 \prod_{k=1}^{|n|} \frac{k - \frac{1}{2} - \frac{s}{2}}{k - \frac{1}{2} + \frac{s}{2}}, \tag{6.3}$$

образуют полную ортонормированную систему.

Доказательство. Вычислим

$$\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi}\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\varphi}e^{-im\psi}d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{in(\varphi-\psi)}e^{i(n-m)\psi}\, d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}.$$

Делая замену $\theta = \varphi - \psi$, $\varkappa = \psi$, мы приходим к выражению

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\left|\sin\tfrac{\theta}{2}\right|^{s-1} e^{i(n-m)\varkappa} d\theta\, d\varkappa.$$

При $n \neq m$ мы очевидным образом получаем 0. При $n = m$ мы получаем

$$2\pi \int_0^{2\pi} \left|\sin\tfrac{\theta}{2}\right|^{s-1} e^{in\theta} d\theta = c_n.$$

Этот интеграл можно найти в любых таблицах (см. также [Лобачевский (1834)]), и мы получаем (6.3); в частности, мы видим, что $c_n > 0$. Наконец, нужно еще проверить, что $\langle f, e^{ik\varphi}\rangle = 0$ для всех k влечет $f = 0$. Пусть $f = \sum \alpha_n e^{in\varphi}$, ряд сходится равномерно (напомним, что f — гладкая), поэтому интеграл $\langle f, e^{ik\varphi}\rangle$ можно разложить в ряд, и мы мгновенно получаем $\langle f, e^{ik\varphi}\rangle = \alpha_k c_k$. Лемма доказана. ■

Замечание. Пусть $n \to \infty$. Тогда формула Стирлинга для Γ-функции дает асимптотику

$$c_n \sim a \cdot n^{-s}. \tag{6.4}$$

Обозначим через H_s пополнение пространства гладких функций по скалярному произведению (6.1). Пусть группа Diff гладких диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, действует в H_s по формуле

$$T_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}}. \tag{6.5}$$

Отметим, что эти операторы переводят пространство вещественных функций в себя.

Предложение 6.2. Пусть q — мебиусовское преобразование окружности. Тогда оператор $T(q)$ унитарен относительно скалярного произведения (6.1).

Доказательство

$$\big\langle T_s(q)f, T_s(q)g\big\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\big(q(\varphi)\big)\overline{g\big(q(\psi)\big)}q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}}q'(\psi)^{\frac{1+s}{2}}\, d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}.$$

Пусть p — преобразование, обратное к q. Тогда интеграл переписывается в виде

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{g(\psi)}\left(\frac{p'(\varphi)p'(\psi)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\,(p(\varphi) - p(\psi))\right)}\right)^{(1-s)/2} d\varphi\, d\psi.$$

Необходимо проверить, что выражение

$$\frac{d\varphi\, d\psi}{\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^2}$$

является инвариантным относительно мебиусовских преобразований. В координатах $z = e^{i\varphi}$, $u = e^{i\psi}$ это выражение переписывается в виде

$$\frac{dz\, du}{(z-u)^2}.$$

Прямое вычисление показывает, что это выражение инвариантно относительно всех дробно-линейных преобразований сферы Римана. Лемма доказана. ■

Унитарное представление T_s группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ в H_s называется *представлением дополнительной серии*.

Задача. Докажите, что оператор $T_s(q)$ унитарен тогда и только тогда, когда q — мебиусовское преобразование.

Теорема 6.3. Оператор $T_s(q)$ содержится в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ для любого $q \in \mathrm{Diff}$.

6.2. Доказательство теоремы 6.3.

Доказательство. Нам достаточно проверить, что оператор $H(q) = T_s(q)^*T_s(q) - E$ является оператором Гильберта—Шмидта в скалярном произведении (6.1).

$$\big\langle (T_s(q)^*T_s(q) - E)f_1, f_2\big\rangle = \big\langle (T_s(q)f_1, T_s(q)f_2)\big\rangle - \langle f_1, f_2\rangle =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1\big(q(\theta)\big)\overline{f_2\big(q(\varkappa)\big)}q'(\theta)^{(1+s)/2}q'(\varkappa)^{(1+s)/2}\, d\theta\, d\varkappa}{\left|\sin\left(\frac{\theta-\varkappa}{2}\right)\right|^{1-s}} - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}\, d\varphi\, d\psi.$$

Пусть p — диффеоморфизм, обратный к q. Сделаем в первом интеграле замену переменных $\theta' = q(\varphi)$, $\varkappa' = q(\psi)$. Тогда наше выражение превращается в

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{p'(\varphi)^{\frac{1-s}{2}}p'(\psi)^{\frac{1-s}{2}}}{\left|\sin\left(\frac{p(\varphi)-p(\psi)}{2}\right)\right|^{1-s}} - \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}\right] f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}\,d\varphi\,d\psi. \tag{6.6}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $K(\varphi,\psi)$. Тогда

$$K(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s-1}\left(\left(\frac{\left|\sin^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right| p'(\varphi)p'(\psi)}{\left|\sin^2\left(\frac{p(\varphi)-p(\psi)}{2}\right)\right|}\right)^{\frac{1-s}{2}} - 1\right).$$

Доопределим выражение

$$\alpha(\varphi,\psi) := \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)p'(\varphi)p'(\psi)}{\sin^2\left(\frac{p(\varphi)-p(\psi)}{2}\right)}$$

при $\varphi=\psi$, положив $\alpha(\varphi,\psi)=1$. Тогда $\alpha(\varphi,\psi)$ становится гладкой функцией. Поэтому гладкой является и функция

$$\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1,$$

эта функция обращается в 0 при $\varphi=\psi$. Следовательно в окрестности прямой $\varphi=\psi$ функция

$$\frac{\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1}{\varphi-\psi}$$

является гладкой. Но $\alpha(\varphi,\psi)=\alpha(\psi,\varphi)$, поэтому гладкой вблизи $\varphi=\psi$ является и

$$\frac{\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1}{(\varphi-\psi)^2},$$

а функция

$$z(\varphi,\psi) = \frac{\alpha(\varphi,\psi)^{\frac{1-s}{2}} - 1}{\sin^2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}$$

является гладкой на торе. Итак,

$$K(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1+s} z(\varphi,\psi). \tag{6.7}$$

Доказательство завершается ссылкой на следующую лемму.

Лемма 6.4. Пусть оператор A в H_s определяется равенством

$$\langle Af_1, f_2\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\varphi,\psi)f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}\,d\varphi\,d\psi,$$

причем функция $K(\varphi,\psi)$ представима в виде

$$K(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s}\mu(\varphi,\psi), \tag{6.8}$$

где $\mu(\varphi,\psi)$ — бесконечно гладкая функция. Тогда A — оператор Гильберта—Шмидта.

Замечание 1. Эта лемма чуть-чуть сильней, чем нам сейчас необходимо (ср. (6.7) и (6.8)).

Замечание 2. Читатель, знакомый с псевдодифференциальными операторами, легко убедится, что утверждение леммы очевидно.

Доказательство леммы. Представим функцию $K(\varphi,\psi)$ в виде

$$K = K_0 + K_1 + K_2,$$

где

$$K_0(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s} l_0(\psi),$$

$$K_1(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s+1} l_1(\psi),$$

$$K_2(\varphi,\psi) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s+2} l_2(\varphi,\psi),$$

где $l_0(\psi)$, $l_1(\psi)$, $l_2(\varphi,\psi)$ — бесконечно гладкие функции. Определим операторы A_j из равенства

$$\langle A_jf_1, f_2\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_j(\varphi,\psi)f_1(\varphi)\overline{f_2(\psi)}\,d\varphi\,d\psi.$$

Нам достаточно доказать, что A_0, A_1, A_2 — операторы Гильберта—Шмидта.

Рассмотрим базисные векторы e_n, задаваемые формулой (6.2). Нам нужно доказать, что сходится ряд из квадратов матричных элементов

$$\langle A_je_n, e_m\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{c_nc_m}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_j(\varphi,\psi)e^{in\varphi}e^{-im\psi}\,d\varphi\,d\psi.$$

Пусть

$$K_j(\varphi,\psi) = \sum_{m,n} h_{mn}^{(j)}e^{-in\varphi}e^{im\psi}.$$

Итак, нам нужно доказать, что

$$\sum_{m,n}\frac{\left|h_{mn}^{(j)}\right|^2}{c_nc_m} < \infty. \tag{6.9}$$

Начнем с оператора A_0. Сделаем корректную на торе замену переменных

$$\theta = \varphi-\psi, \quad \nu = \psi.$$

Тогда в новых координатах

$$K_0(\theta,\nu) = \left|\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right|^{s} l_0(\nu).$$

Пусть

$$\left|\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right|^{s} = \sum \sigma_ke^{ik\theta}, \qquad l_0(\varphi) = \sum \tau_\alpha e^{i\alpha\varphi}.$$

Напомним, что $\sigma_k \sim |k|^{-1-s}$ при $k\to\infty$ (см. (6.4)), а коэффициенты τ_α быстро убывают. Тогда условие (6.9) для слагаемого K_0 переписывается в виде

$$\sum_{k,\alpha}\frac{|\sigma_k\tau_\alpha|^2}{c_kc_{\alpha-k}} < \infty.$$

Далее, вспоминаем, что $c_k \sim |k|^{-s}$ при $k \to \infty$, и, следовательно, для достаточно большой константы B мы имеем $c_k^{-1} \leqslant B|k|^s$. Поэтому наша сумма оценивается сверху величиной

$$B^2 \sum_{k,\alpha} |k|^s |\alpha - k|^s |\sigma_k|^2 |\tau_\alpha|^2 \leqslant B^2 \cdot 2^s \sum |k|^s \big(|\alpha|^s + |k|^s\big) |\sigma_k|^2 |\tau_\alpha|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \sum |k|^s \big(|\alpha|^s + |k|^s\big) k^{-2-2s} |\tau_\alpha|^\alpha,$$

а эта величина явно конечна.

Те же доводы показывают, что оператор A_1 является оператором Гильберта—Шмидта. Действительно, коэффициенты Фурье функции $\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|^{1+s}$ убывают со скоростью $|k|^{-2-s}$. Замечая, что $|k|^{-2-s} < |k|^{-1-s}$, мы можем сослаться на только что проведенные оценки.

Наконец, функция $K_2(\varphi, \psi)$ является дважды непрерывно дифференцируемой. Обычные доводы (с интегрированием по частям) дают

$$\sum \big(n^2 + m^2\big) |h^{(2)}_{n,m}|^2 < \infty,$$

а это уже явно влечет (6.9). Лемма доказана. ■

Задача. Покажите, что $T_s(q) \in \big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)_1$.

6.3. Вложения Diff **в** $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$**.** Пусть $s \in \mathbb{R}$. Пусть теперь группа Diff действует в комплексном L^2 на окружности по формуле

$$T_{is}(q) f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big) q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}}. \tag{6.10}$$

Рассмотрим в L^2 антилинейный оператор I_s, определяемый формулой

$$I_s f(\varphi) = \frac{1}{c_0} \int \frac{\overline{f(\psi)}\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right|^{1+is}}, \tag{6.11}$$

где

$$c_0 = \frac{\pi^2 2^{1-s}}{sB\left(\frac{s+1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)}.$$

Теорема 6.5. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда I_s — ортогональный оператор в овеществленном пространстве L^2, причем $I_s^2 = 1$.

В силу этой теоремы пространство L^2 раскладывается в прямую сумму $L^2 = H_+ \oplus H_-$ вещественных (!) подпространств, где $H_\pm$ состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$I_s f(\varphi) = \pm f(\varphi).$$

Далее, в силу антилинейности оператора I_s умножение на i переводит $H_\pm$ в $H_\mp$, поэтому пространство L^2 является комплексификацией вещественного подпространства H_+ (и, в равной степени, H_-), см. Предварительные сведения, § 2.

Рассмотрим теперь группу $\mathrm{O}(\infty)$, состоящую из унитарных комплексно-линейных операторов в $L^2(S^1)$, сохраняющих подпространства $H_\pm$. Рассмотрим,

далее, группу $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$, состоящую из унитарных операторов, отличающихся от элементов $\mathrm{O}(\infty)$ на оператор Гильберта—Шмидта.

Теорема 6.6. $T_{is}(q) \in \big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

Ограничивая фундаментальные представления группы $\big(\mathrm{U}(\infty), \mathrm{O}(\infty)\big)$ на Diff, мы получаем представления Diff.

Задача. Пусть q — мебиусовское преобразование окружности. Покажите, что оператор $T_{is}(q)$ коммутирует с (антилинейным) оператором I_s. В частности, $T_{is}(q) \in \mathrm{O}(\infty)$.

6.4. Доказательство теоремы 6.5. Прежде всего, заметим, что оператор I_s определен нами не вполне корректно: при $s \in \mathbb{R}$ интеграл расходится. Однако если $\mathrm{Im}\, s > 0$, то интеграл (6.11) сходится.

Теорема 6.7.

а) Операторнозначная функция I_s голоморфна в открытой полуплоскости $\mathrm{Im}\, s > 0$ и продолжается до слабо непрерывной функции в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\, s \geqslant 0$.

б)

$$I_s e^{in\varphi} = a_k e^{-in\varphi}, \tag{6.12}$$

где

$$a_k = \prod_{k=1}^{|n|} \frac{k - \frac{1}{2} + \frac{is}{2}}{k - \frac{1}{2} - \frac{is}{2}}. \tag{6.13}$$

в) При $s \in \mathbb{R}$ оператор I_s ортогонален в овеществленном L^2 и $I_s^2 = 1$.

Доказательство. Докажем б).

$$I_s e^{in\varphi} = \frac{1}{c_0} \left(\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right|^{-is-1} e^{-in\psi} d\psi \right) e^{-in\varphi},$$

а интеграл в скобках, с точностью до переобозначений, встречался нам в доказательстве леммы 6.1. Это дает нам утверждение б).

Утверждения а) и в) теперь вытекают из формул (6.12)–(6.13). ■

6.5. Доказательство теоремы 6.6.

$$\big(T_{is}(q) I_s - I_s T_{is}(q)\big) c_0 f(\varphi) =$$

$$= \int \overline{f(\psi)} \left|\sin\left(\frac{\psi - q(\varphi)}{2}\right)\right|^{-1-is} d\psi \cdot q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}} - \int \left|\sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right|^{-1-is} \overline{f(\psi) q'(\psi)^{\frac{1-is}{2}}}\, d\varphi =$$

Положив в первом интеграле $\psi = q(\theta)$, а во втором $\psi = \theta$, получаем

$$= \int q'(\theta)^{\frac{1-is}{2}} \left[\left|\sin\left(\frac{q(\theta) - q(\varphi)}{2}\right)\right|^{-is-1} q'(\theta)^{\frac{1+is}{2}} q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}} - \left|\sin\left(\frac{\varphi - \theta}{2}\right)\right|^{-is-1} \right] \overline{f(\theta)}\, d\theta =$$

$$= \int K(\varphi, \theta) \overline{f(\theta)}\, d\theta,$$

где

$$K(\varphi,\theta)=\frac{q'(\theta)^{\frac{1-is}{2}}}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right|^{1+is}}\left[\left(\frac{q'(\theta)\,q'(\varphi)\sin^2\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{q(\varphi)-q(\theta)}{2}\right)}\right)^{\frac{1+is}{2}}-1\right].$$

Функция в квадратных скобках является бесконечно гладкой на торе и имеет 0 на диагонали $\varphi=\theta$. Поэтому ядро $K(\varphi,\theta)$ ограничено на торе, а поэтому задаваемый этим ядром оператор является оператором Гильберта—Шмидта.

6.6. Представления Diff. Ограничивая фундаментальные представления групп $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ и $\big(\mathrm{U}(\infty),\mathrm{O}(\infty)\big)$ на Diff, мы получаем несколько двухпараметрических серий унитарных представлений. Об этих представлениях известно очень мало.

Теорема 6.8. Пусть ρ — одно из полученных таким образом представлений Diff. Тогда циклическая оболочка вакуумного вектора является неприводимым подпредставлением.

Доказательство. Покажем это, например, для конструкции п. 6.1. Образ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\subset\mathrm{Diff}$ в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}),\mathrm{O}(\infty)\big)$ содержится в $\mathrm{O}(\infty)$. Поэтому ограничение наших представлений на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ является суммой симметричных степеней $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathrm{S}^k\tau_s$, где τ_s — представление $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ в H_s (см. предложение 6.2). Далее, как вытекает из доказанной ниже леммы, наше представление имеет ровно один $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-инвариантный вектор, а именно, вакуум. Тогда теорема вытекает из леммы 5.5 Предварительных сведений.

Лемма 6.9. Пусть T_1, T_2 — неприводимые бесконечномерные унитарные представления группы G. Тогда $T_1\otimes T_2$ не может содержать G-инвариантного вектора.

Доказательство. Пусть v — ненулевой G-инвариантный вектор в $T_1\otimes T_2$. Пространство $T_1\otimes T_2$ канонически отождествляется с пространством операторов Гильберта—Шмидта $T_1\to T_2'$ (см. Предварительные сведения, п. 4.5). Вектору v (в силу его G-инвариантности) соответствует G-сплетающий оператор $T_1\to T_2'$. Но в силу неприводимости T_1, T_2 такой оператор унитарен и не может быть оператором Гильберта—Шмидта. Противоречие. ∎

6.7. Замечания. Почти инвариантные структуры.

А) «Основная серия». Рассмотрим пространство H_α из п. VII.1.7. Пусть $\alpha,s\in\mathbb{R}$. Рассмотрим два действия группы Diff в H_α:

$$\mathrm{T}_{is}(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+is}{2}},$$

$$\mathrm{T}_{-is}(q)f(\varphi)=f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1-is}{2}}.$$

Рассмотрим функцию

$$F_{\nu,\alpha}(\psi)=\exp\Big(2\pi\alpha\Big(1+\Big[\frac{\psi}{2\pi}\Big]\Big)\Big)\Big|\sin\frac{\psi}{2}\Big|^{\nu-1}\tag{6.14}$$

на $\mathbb{R}$, знак [ ] обозначает здесь целую часть числа, а α, ν — фиксированные комплексные числа.

Рассмотрим в H_α интегральный оператор

$$I_sf(\varphi)=\sigma\int_{-\pi}^{\pi}F_{is,\alpha}(\varphi,\psi)f(\psi)\,d\psi,$$

где нормировочный множитель σ определяется из условия $I_s(e^{i\alpha\varphi})=e^{i\alpha\varphi}$.

Заметим, что группа $\mathrm{Diff}^\sim$ содержит универсальную накрывающую $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (прообраз $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ при накрытии $\mathrm{Diff}^\sim\to\mathrm{Diff}$).

Предложение 6.10. Оператор I_s является $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$-сплетающим, т. е. для любого $q\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$ выполнено

$$T_{is}(q)I_s=I_sT_{-is}(q).$$

Оказывается, что для группы $\mathrm{Diff}^\sim$ оператор I_s является «почти сплетающим» в следующем смысле слова:

Теорема 6.11. Для любого $q\in\mathrm{Diff}$ оператор

$$T_{is}(q)I_s-I_sT_{-is}(q)$$

является оператором Гильберта—Шмидта.

Рассмотрим теперь группу $\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$, состоящую из пар унитарных операторов (A,B) в H_α таких, что $(AB^{-1}-E)$ — оператор Гильберта—Шмидта. В силу теоремы 6.11 формула

$$q\mapsto\big(T_{is}(q),T_{-is}(q)\big)$$

задает вложение

$$\mathrm{Diff}^\sim\to\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big).$$

Ограничивая унитарные представления группы $\big(\mathrm{U}(\infty)\times\mathrm{U}(\infty),\mathrm{U}(\infty)\big)$ на $\mathrm{Diff}^\sim$, мы получаем унитарные представления $\mathrm{Diff}^\sim$.

Заметим, далее, что оператор комплексного сопряжения $f\mapsto\bar f$ переводит действие T_{is} в T_{-is}. Однако он переводит пространство H_α в $H_{1-\alpha}$. В двух случаях, $\alpha=0$ и $\alpha=\frac12$, пространства H_α и $H_{1-\alpha}$ совпадают (напомним, что $H_\alpha\simeq H_{\alpha+1}$). Пусть $\alpha=0$ или $\frac12$. Рассмотрим оператор $\bar I_sf:=I_s\bar f$ в H_α. В силу теоремы 6.11

$$\bar I_sT_{is}(q)-T_{is}(q)\bar I_s$$

— оператор Гильберта—Шмидта. В случае $\alpha=0$ оператор $\bar I_s$, как легко видеть, совпадает с оператором I_s из п. 6.3, и мы получаем уже знакомое нам вложение

$$\mathrm{Diff}\to\big(\mathrm{U}(\infty),\mathrm{O}(\infty)\big).$$

Пусть теперь $\alpha=\frac12$.

Задача. Покажите, что $(\bar I_s)^2=-1$.

Учитывая, что оператор $\bar I_s$ антилинеен, мы получаем в $H_{1/2}$ структуру кватернионного гильбертова пространства (а именно, кватернионные мнимые единицы i, j, k суть операторы $f\mapsto if$, $f\mapsto\bar I_sf$, $f\mapsto i\bar I_sf$; см. Предварительные сведения, п. 2.9). Так как $\bar I_sT_{is}(q)-T_{is}(q)\bar I_s$ — оператор Гильберта—Шмидта, то $T_{is}(q)$ лежит в группе $\big(\mathrm{U}(2\infty),\mathrm{Sp}(\infty)\big)$ пространства $H_{1/2}$. Итак, мы получили гомоморфизм

$$\mathrm{Diff}^\sim\to\big(\mathrm{U}(2\infty),\mathrm{Sp}(\infty)\big).$$

Пусть, по-прежнему, $\alpha=\frac12$, пусть $s=0$. Тогда операторы $T_{is}(q)=T_0(q)$ сохраняют пространство вещественных функций, а оператор $I_s=I_0$ становится преобразованием Гильберта. Это приводит к вырожденной фермионной конструкции п. VII.3.5 для $L\big(0,\frac12\big)\oplus L\big(\frac12,\frac12\big)$. Итак, мы получили вложение

$$\mathrm{Diff}^\sim\to\big(\mathrm{O}(2\infty),\mathrm{U}(\infty)\big).$$

B) «Дополнительная серия». Фиксируем $\alpha, s \in \mathbb{R}$, рассмотрим действие группы Diff в пространстве H_α, заданное формулой

$$T_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}}.$$

Пусть $0 < s < 1 - 2|\alpha|$. Рассмотрим функцию $F_{s,\alpha}$, заданную формулой (6.14). Введем в H_α скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{s,\alpha}(\varphi - \psi)f(\varphi)\overline{g(\psi)}\,d\varphi\,d\psi.$$

Это скалярное произведение положительно определено (и $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^\sim$-инвариантно).

Теорема 6.12. Операторы $T_s(q)$ лежат в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ пространства H_α.

Итак, мы получили вложение

$$\mathrm{Diff}^\sim \to \big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

Вложение

$$\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$$

из п. 6.1, естественно, является частным случаем этой конструкции при $\alpha = 0$.

Пусть, далее, $\alpha = 0$, $s = 1$. Скалярное произведение (VII.2.2) из п. VII.2.1 является правильно понятым пределом скалярных произведений (6.1) при $s \to 1$. Таким образом, и при $s = 1$ мы имеем вложение $\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$. В действительности же, как мы видели в п. VII.2.2, образ Diff содержится в меньшей группе $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big) \subset \big(\mathrm{GL}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(2\infty)\big)$ за счет наличия инвариантной симплектической структуры. Таким образом, при $\alpha = 0$, $s = 1$ мы получаем вложение

$$\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

Случай $\alpha = 0$, $s = -1$ двойственен к случаю $\alpha = 0$, $s = 1$ (и по существу между этими двумя случаями нет разницы). Предел гильбертовых пространств H_s при $s \to -1$ — это пространство функций на окружности, определенных с точностью до прибавления константы, со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi^2}\int \mathrm{ctg}\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\varphi)\overline{g'(\psi)}\,d\varphi\,d\psi. \tag{6.14'}$$

Это скалярное произведение может быть задано формулой

$$\left\langle \sum c_k e^{ik\varphi}, \sum b_k e^{ik\varphi}\right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k \overline{b_k}.$$

Инвариантная кососимметричная билинейная форма в H_s задается формулой

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)g'(\varphi)\,d\varphi.$$

В итоге мы получаем вложение

$$\mathrm{Diff} \to \big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big).$$

C. Индефинитная дополнительная серия. Мы ограничимся случаем $\alpha = 0$. Рассмотрим семейство полуторалинейных форм

$$\langle f, g\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)\overline{g(\psi)}\,d\varphi\,d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}$$

в пространстве $C^\infty(S^1)$ гладких функций на окружности. Легко видеть, что этот интеграл сходится при $\mathrm{Re}\, s > 0$, и функция $s \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_s$ голоморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 0$. Далее, формула (6.3) показывает, что функция $s \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_s$ продолжается до функции, мероморфной на всей плоскости $\mathbb{C}$ с полюсами в точках $s = 0, -1, -2, \ldots$. Заметим также, что форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ невырождена при любом $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, и один из индексов инерции формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ конечен (подробнее о свойствах этой формы см. [Гельфанд, Граев, Виленкин (1962)]).

Определим теперь при любом $s \in \mathbb{R}$ некоторое скалярное произведение в $C^\infty(S^1)$.

а) $s \notin \mathbb{Z}$. Тогда существует тригонометрический многочлен

$$L(\varphi, \psi) = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k e^{ik(\varphi-\psi)}$$

такой, что (при подходящем выборе знака перед интегралом) формула

$$(f, g)_s = \pm \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\left|\sin\left(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{s-1} + L(\varphi,\psi)\right) f(\varphi)\overline{g(\psi)}\,d\varphi\,d\psi$$

задает положительно определенное скалярное произведение в $C^\infty(S^1)$.

б) При $s \in \mathbb{Z}$ положим

$$\left(\sum c_k e^{ik\varphi}, \sum b_k e^{ik\varphi}\right)_s = c_0\bar b_0 + \sum_{k\neq 0} |k|^{-s} c_k \bar b_k. \tag{6.15}$$

При желании можно записать эти скалярные произведения в интегральной форме, но мы не будем этого делать.

Обозначим через H_s пополнение вещественного пространства $C^\infty(S^1)$ по скалярному произведению $(\cdot,\cdot)_s$. По запасу функций пространство H_s (во всех случаях) является *соболевским пространством* $W^{-s/2}$, оно состоит из функций

$$f(\varphi) = \sum c_k e^{ik\varphi}$$

таких, что

$$\sum |c_k|^2 k^{-s} < \infty. \tag{6.16}$$

Пусть $q \in \mathrm{Diff}$. Определим в H_s оператор

$$T_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}}. \tag{6.17}$$

Теорема 6.13. Операторы $T_s(q)$ содержатся в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s.

(Доказательство не содержит ничего нового по сравнению с уже доказанными теоремами этого типа).

6.8. Замечания. Квазиинвариантные действия Diff. Сохраним обозначения п. 6.7.C. Группа Diff вкладывается в группу $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s и, следовательно, действует на каноническом расширении $\widehat{H}_s$ пространства H_s (см. п. VI.1.10). Естественно встает вопрос о природе расширения $\widehat{H}_s$.

Легко видеть, что тождественное вложение $f \mapsto f$ из H_s в H_t является оператором Гильберта—Шмидта при $t - s > 1$. Поэтому в качестве $\widehat{H}_s$ можно выбрать любое из пространств $H_{s+1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$. Обозначим каноническую меру на $\widehat{H}_s$ через μ_s.

Теорема 6.14 (см. [Kahane (1965)]). Пусть $-1 > s > -3$. Тогда для почти всех $f \in \widehat{H}_s$ существует C такое, что

$$\big|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\big| \leqslant C \cdot |\varphi_1 - \varphi_2|^{(-s-1)/2}\Big(\big|\ln|\varphi_1 - \varphi_2|\big|^{1/2} + 1\Big). \tag{6.18}$$

Рассмотрим линейный оператор $A : H_s \to H_{s-2}$, заданный формулой

$$A\left(\sum c_k e^{ik\varphi}\right) = \sum k c_k e^{ik\varphi} + c_0.$$

Легко проверить, что A переводит меру μ_s на H_s в меру на H_{s-2}, эквивалентную μ_{s-2}. Это замечание позволяет применить теорему 6.14 к пространствам H_s, не обязательно удовлетворяющим условию $-1 > s > -3$. Например, при условии $-3 > s > -5$ для почти всех функций $f(\varphi)$ их производная $f'(\varphi)$ удовлетворяет гельдеровскому условию (6.18). В случае $-5 > s > -7$ вторая производная $f''(\varphi)$ удовлетворяет условию (6.18).

Замечание. Случай $s = -2$ соответствует обычному *броуновскому движению* (*мера Винера*).

Итак, группа Diff действует преобразованиями вида (6.17) на пространстве $H_{s+1+\varepsilon}$, непрерывными в топологии $H_{s+1+\varepsilon}$ и лежащими в группе $\left(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)$ пространства H_s. Оказывается, что свойства этого действия сильно зависят от значения s.

а) $0 < s < 1$.

Предложение 6.15. При $0 < s < 1$ действие $T_s(q)$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в $\widehat{H}_s$ эргодично.

Доказательство. Скалярное произведение (6.14) в этом случае $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантно (предложение 6.1), поэтому достаточно показать, что в $L^2(\widehat{H}_s)$ есть единственная $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантная функция. Но это уже показано нами в доказательстве теоремы 6.8. ■

б) $s = 0$.

В этом случае $H_s = H_0 = L^2(\mathrm{S}^1)$, операторы $T_s(\cdot)$ унитарны и поэтому сохраняют меру в $\widehat{L^2(\mathrm{S}^1)}$. Представление группы Diff в $L^2\left(\widehat{L^2(\mathrm{S}^1)}\right)$ есть сумма симметричных степеней представления T_0.

в) $-1 < s < 0$.

Здесь все аналогично случаю $0 < s < 1$.

г) $s = -1$.

Эта точка во многих отношениях является особой. Группа Diff действует в H_{-1} преобразованиями

$$T(q)f(\varphi) = f(q(\varphi)), \tag{6.18}$$

оставляющими на месте подпространство констант. Поэтому естественно рассматривать операторы $T(q)$ как операторы в факторпространстве $H_{-1} / \mathbb{R}$ пространства H_{-1} по подпространству констант.

Скалярное произведение в $H_{-1} / \mathbb{R}$ задается формулой (6.14′). Легко проверить, что оно $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантно. Поэтому те же доводы, что и выше, показывают, что действие $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в $L^2\left(\widehat{H_{-1} / \mathbb{R}}\right)$ эргодично.

Как мы уже отмечали выше в п. 6.7.В, в пространстве $H_{-1} / \mathbb{R}$ есть Diff-инвариантная кососимметричная билинейная форма

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) g'(\varphi)\, d\varphi. \tag{6.19}$$

Поэтому операторы $T(q)$ лежат не только в группе $\left(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\right)$, которую в нашем случае удобно обозначить через $\left(\mathrm{GL}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(2\infty)\right)$, но и в ее подгруппе $\left(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(2\infty)\right)$. Ограничение представления Вейля группы $\left(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(2\infty)\right)$ на Diff дает представление Diff со старшим весом, и эта конструкция равносильна конструкции из § VIII.2. Связь представления группы Diff в $L^2\left(\widehat{H_{-1} / \mathbb{R}}\right)$ с представлениями со старшим весом мы обсудим в следующем пункте.

Другое любопытное явление, связанное с $s = -1$, — это то, что линейное действие (6.18) может быть включено в двупараметрическое семейство действий Diff на $H_{-1} / \mathbb{R}$ аффинными преобразованиями

$$T^{(\alpha,\beta)}(q)f(\varphi) = f(q(\varphi)) + \alpha(q(\varphi) - \varphi) + \beta \cdot \ln q'(\varphi),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Соображения из п. VI.1.9.В обеспечивают квазиинвариантность меры в $\widehat{H_{-1} / \mathbb{R}}$ относительно преобразований $T^{(\alpha,\beta)}(q)$.

Последнее любопытное явление, связанное с точкой $s = -1$, — это то, что в ней происходит радикальная перестройка пространства H_s и действия группы Diff в нем.

д) $-1 > s > -3$.

В силу теоремы 6.14 пространство H_s в этом случае состоит из непрерывных функций. Таким образом, группа Diff действует на пространстве непрерывных функций, снабженном мерой μ_s, преобразованиями

$$T(q)f(\varphi) = f\left(q(\varphi)\right) q'(\varphi)^{(1+s)/2},$$

оставляющими меру μ_s квазиинвариантной.

Сразу бросаются в глаза 3 инвариантных множества:

Ω_+ — множество положительных функций;

Ω_- — множество отрицательных функций;

Ω_0 — множество функций, обращающихся в 0.

Далее, рассмотрим на Ω_+ функционал

$$I_s(f) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)^{2/(1+s)}\, d\varphi. \tag{6.20}$$

Легко видеть, что

$$I_s\left(T(q)f\right) = I_s(f).$$

Итак, поверхности уровня функционала $I_s(f)$, т. е. поверхности $I_s(f) = \mathrm{const}$, являются Diff-инвариантными.

При желании можно отождествить «поверхность» $I_s(f) = \alpha$ с однородным пространством $\mathrm{Diff}_1 / \mathbb{T}$, где Diff_1 — группа диффеоморфизмов гладкости C^1, а $\mathbb{T}$ — группа вращений окружности. А именно, каждому диффеоморфизму $q \in \mathrm{Diff}_1$ ставится в соответствие функция

$$f(\varphi) = \left(\alpha q'(\varphi)\right)^{(1+s)/2}.$$

Обратное отображение задается формулой

$$q(\varphi) = \alpha \int_0^{\varphi} f(\psi)^{2/(1+s)} d\psi.$$

Обсудим теперь множество Ω_0. Известно, что если функция $f \in \widehat{H}_s$ обращается в 0 хотя бы в одной точке, то с вероятностью 1 множество ее нулей есть замкнутое нигде не плотное множество меры 0 без изолированных точек (см. [Kahane (1965)]). Мы будем называть такие множества *канторовскими*.

Рассмотрим теперь пространство $\mathscr{L}$ всех канторовских подмножеств окружности. Введем на нем меру ν по следующему правилу. Пусть $A \in \mathscr{L}$. Пусть $X(A)$ — множество всех функций $f(\varphi)$ таких, что множество нулей функции f есть множество A. Положим, что A измеримо, если $X(A)$ измеримо; мера $\nu(A)$, по определению, равна $\mu_t(X(A))$.

Теперь заметим, что группа Diff действует на пространстве $\mathscr{L}$.

Предложение 6.16. Мера ν на пространстве $\mathscr{L}$ всех канторовских подмножеств отрезка Diff-квазиинвариантна.

Доказательство. Пусть $q \in \mathrm{Diff}$. Пусть $\nu(A) \neq 0$. Тогда $\mu_t(X(A)) \neq 0$. Но тогда мера $\mu_t\left(g(X(A))\right)$ в силу квазиинвариантности меры μ_t тоже отлична от 0. Но $\mu_t\left(g(X(A))\right) = \mu_t(X(gA)) = \nu(gA)$. Итак, $\nu(gA) \neq 0$ и, следовательно, g переводит множества меры 0 в множества меры 0. ■

Хотя идея построения мер на пространстве канторовских множеств на первый взгляд кажется пугающей, обсуждаемая конструкция, по-видимому, является ручной. Случай броуновского движения подробно рассматривался в замечательной книге [Levy (1965)], §§ 44–49; в этом случае известно много явных формул. Выражение для производной Радона—Никодима и продолжение обсуждаемого сюжета см. [Неретин (1996)].

е) $s = -3$.

Это значение параметра, без сомнения, является выделенным и, по-видимому, очень интересным, однако о свойствах действия Diff в этом случае автору почти ничего не известно.

ж) $s < -3$.

Как мы уже отмечали выше, в этом случае пространство $\widehat{H}_s$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому мы по-прежнему можем рассматривать множества Ω_+, Ω_-, Ω_0 (состоящие соответственно из положительных, отрицательных функций и функций, обращающихся в 0). На Ω_+ той же формулой (6.20) определен инвариантный функционал $I_s(f)$. Его линии уровня по-прежнему отождествляются с пространством $\mathrm{Diff}_1/\mathbb{T}$.

Несложно показать, что «общая» функция из H_s имеет конечное множество нулей, а производные в нулях отличны от 0. По этой причине конструкция с Ω_0, которую мы рассматривали при $-1 > s > -3$, становится неинтересной. Однако у функций из Ω_0 появляются дополнительные инварианты. А именно, пусть $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2k}$ — нули функции f. Тогда набор чисел

$$\beta_j(f) = \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} |f(\varphi)|^{\frac{2}{s+1}}\, d\varphi$$

является инвариантом функции f, т. е. набор чисел $\{\beta_j(T_s(q)f)\}$ совпадает (с точностью до циклической перестановки) с набором $\beta_j(f)$.

6.9. Задача о слабом замыкании.

А. Представления со старшим весом. Рассмотрим унитарное представление $L(h,c)$ группы Diff со старшим весом (h,c). Продолжим это представление до голоморфного представления полугруппы $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \mathrm{Diff}$ (см. § VII.4). В п. VII.4.8 на полугруппе $\overline{\Gamma}$ была введена топология. *Допустим*, что представления $L(h,c)$ непрерывны относительно этой топологии. Но группа Diff плотна в $\overline{\Gamma}$, и отсюда вытекало бы следующее утверждение.

Гипотеза 6.17. Пусть Ξ — слабое замыкание группы Diff в пространстве операторов в пространстве $L(h,c)$, определенных с точностью до множителя. Тогда полугруппа Ξ содержит полугруппу Γ.

Следствие из гипотезы. Пусть $L(h_1,c_1)$ и $L(h_2,c_2)$ — унитарные представления Diff. Пусть $L(h_2,c_2)^*$ — представление, контрагредиентное к $L(h_2,c_2)$. Тогда представление

$$L(h_1,c_1) \otimes L(h_2,c_2)^*$$

группы Diff неприводимо.

Вывод следствия. Так как полугруппа Γ содержится в слабом замыкании Diff, нам достаточно показать, что представление $L(h_1,c_1) \otimes L(h_2,c_2)^*$ является неприводимым представлением полугруппы Γ.

Задача. Пусть v — вектор старшего веса в $L(h_1,c_1)$, а w — вектор младшего веса в $L(h_2,c_2)$. Докажите, что вектор $v \otimes w$ является Vir-циклическим вектором в $L(h_1,c_1) \otimes L(h_2,c_2)^*$.

Указание. Примените к вектору $v \otimes w$ сначала всевозможные произведения генераторов $L_1, L_2, \dots \in \mathrm{Vir}$. Затем примените всевозможные произведения генераторов $L_{-1}, L_{-2}, \dots \in \mathrm{Vir}$.

Рассмотрим в Γ однопараметрическую подполугруппу D, состоящую из элементов $\mathscr{A}_t$, определенных в п. VII.4.5. Собственные числа оператора $\mathscr{A}_t = \exp(itL_0)$ в $L(h,c)$ суть $\exp(-(h+j)t)$, где $j = 0, 1, 2, \dots$, причем собственное число $\exp(-ht)$ встречается однократно и отвечает вектору старшего веса. Поэтому спектр оператора $\mathscr{A}_t$ в $L(h_1,c_1) \otimes L(h_2,c_2)^*$ состоит из чисел $\exp(-(h_1+h_2+j)t)$, причем собственное число $\exp(-(h_1+h_2)t)$ встречается однократно и соответствует (циклическому!) вектору $v \otimes w$. Ссылка на лемму 5.5 Предварительных сведений завершает вывод следствия. ■

Предложение 6.18. Пусть $L(0,c_1)$ и $L(0,c_2)$ — унитарные представления Diff. Тогда представление

$$L(0,c_1) \otimes L(0,c_2)^*$$

группы Diff неприводимо.

Доказательство Легко убедиться в том, что представление $L(0,c_1)$ содержит ровно один $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантный вектор, а именно, вектор старшего веса. В силу леммы 6.9 представление $L(0,c_1) \otimes L(0,c_2)$ содержит ровно один $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантный вектор, а именно, $v \otimes w$. Но, как мы видели, этот вектор — циклический, и мы можем сослаться на лемму 5.5 Предварительных сведений. ■

В. Представление Diff в $L^2\big(\widehat{H_{-1}/\mathbb{R}}\big)$. Рассмотрим группу $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$, которую нам будет удобнее обозначать как $\big(\mathrm{GL}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(2\infty)\big)$, и ее представление в $L^2(\mathbb{R}^\infty) \simeq L^2(\mathbb{R}^{2\infty})$, заданное формулой

$$Q(g)f(x) = f(gx)\left(\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}\right)^{1/2}.$$

Как мы уже отмечали (п. 1.8), это представление эквивалентно фундаментальному представлению T_0 (см. пп. 1.3–1.4).

Рассмотрим тождественное вложение

$$I : \big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big) \to \big(\mathrm{GL}(2\infty), \mathrm{O}(2\infty)\big).$$

Предложение 6.19. Ограничение представления T_0 на $\big(\mathrm{Sp}(2\infty,\mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big)$ эквивалентно

$$T_0 \circ I = \mathrm{we} \otimes \mathrm{we}^*.$$

Доказательство. Напомним, что $T_0 = \mathrm{we} \circ \tau_0$ (см. пп. 1.2–1.3), поэтому $T_0 = \mathrm{we} \circ (\tau_0 \circ I)$. Но композиция $\tau \circ I$ на уровне матриц задается формулой

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi & & \Psi & \\ & \overline{\Phi} & & \overline{\Psi} \\ \overline{\Psi} & & \overline{\Phi} & \\ & \Psi & & \Phi \end{pmatrix},$$

и теперь утверждение очевидно (см. п. 1.8). ■

Отсюда следует (см. п. VII:2.3), что представление $Q(T(q))$ группы Diff в $L^2\big(\widehat{H_{-1}/\mathbb{R}}\big)$ эквивалентно

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty} L(j^2,1)\right) \otimes \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} L(k^2,1)\right).$$

Поэтому, если верна гипотеза 6.17, то слабое замыкание группы Diff в пространстве операторов в $L^2\big(\widehat{H_{-1}/\mathbb{R}}\big)$ содержит полугруппу Γ.

С. Представления в $L^2(\widehat{H}_s)$. Следующий вопрос, на мой (субъективный) взгляд, является одной из наиболее любопытных нерешенных задач в теории представлений бесконечномерных групп.

Проблема 6.20. Описать слабое замыкание группы Diff в пространстве операторов в $L^2(\widehat{H_s})$.

Предшествующие замечания заставляют думать, что это замыкание имеет что-то общее с полугруппой Г.

6.10. Литературные замечания. Конструкция п. 6.1 обнаружена в [Неретин (1982)], индефинитная дополнительная серия — в [Неретин (1983.1)], остальные почти инвариантные структуры — в [Неретин (1983.2)], [Неретин (1987б)].

Первая попытка построения Diff-квазиинвариантных мер на множестве замкнутых подмножеств окружности сделана в [Исмагилов (1971)], там построены примеры мер на пространстве сходящихся последовательностей. Шавгулидзе [Шавгулидзе (1978)], [Шавгулидзе (1988)] построил два примера Diff-квазиинвариантных мер на группе диффеоморфизмов гладкости C^2. В п. 6.8 мы следуем [Неретин (1993)].

§ 7. *Конструкции представлений групп петель*

7.1. Группы петель. Пусть G — группа Ли. Через $\mathbb{L}(G)$ мы обозначим группу C^∞-гладких функций $S^1 \to G$; эти группы обычно называются *группами петель*.

Заметим, что группа Diff действует на $\mathbb{L}(G)$ автоморфизмами

$$q : g(\varphi) \to g\big(q(\varphi)\big),$$

где $q \in \mathrm{Diff}$, $g \in \mathbb{L}(G)$. Поэтому можно рассмотреть полупрямое произведение $\mathbb{D}(G) = \mathrm{Diff} \ltimes \mathbb{L}(G)$. Элементы $\mathbb{D}(G)$ суть пары (q, g), где $q \in \mathrm{Diff}$, а $g \in \mathbb{L}(G)$, а умножение задается формулой

$$(q_1, g_1)(q_2, g_2) = \big(q_1 \circ q_2,\ g_1(q_2(\varphi))\, g_2(\varphi)\big).$$

Группа Diff является частным случаем групп $\mathbb{D}(G)$, а именно, она соответствует случаю, когда G состоит из одного элемента.

В теории представлений интересны случаи, когда G — компактная группа, а также когда G — комплексная редуктивная группа (понятно, что эти два случая тесно связаны между собой).

Конструкции представлений группы Diff, связанные с почти инвариантными структурами (§ 6), в основном переносятся на группы $\mathbb{D}(G)$, хотя в некоторых деталях случай групп $\mathbb{D}(G)$ отличен от Diff. Мы лишь приведем некоторые примеры.

7.2. Вложения $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\big)$ в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$. Пусть $0 < s < 1$. Введем в пространстве гладких $\mathbb{R}^n$-значных функций на окружности скалярное произведение

$$\langle F, G\rangle_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\big(F(\varphi), G(\psi)\big)\, d\varphi\, d\psi}{\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{1-s}}, \tag{7.1}$$

где (F, G) обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$:

$$(F, G) = \big((f_1, \ldots, f_n),\ (g_1, \ldots, g_n)\big) = \sum f_j\, g_j.$$

Обозначим через H_s^n пополнение пространства гладких функций по этому скалярному произведению. Пусть теперь Diff действует в H_s^n преобразованиями

$$T_s(q)F(\varphi) = q'(\varphi)^{\frac{1+s}{2}} F(q(\varphi)), \tag{7.2}$$

а $\mathbb{L}(G)$ — преобразованиями

$$A(g)F(\varphi) \mapsto g(\varphi)F(\varphi), \tag{7.3}$$

где $q \in \mathrm{Diff}$, $g(\cdot) \in \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n)\big)$.

Таким образом, мы получили действие группы $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n)\big)$ в H_s^n.

Теорема 7.1. Преобразования (7.2), (7.3) содержатся в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s^n.

Итак, мы получили вложение группы $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n)\big)$ в $\big(\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$.

7.3. Доказательство теоремы 7.1. Утверждение, касающееся операторов (7.2), является достаточно простым следствием теоремы 6.3. Новым для нас является лишь утверждение об операторах (7.3).

Итак, вычислим

$$\begin{aligned}\Big\langle\big(A(g)^*A(g) - E\big)F_1, F_2\Big\rangle_s &= \big\langle A(g)F_1, A(g)F_2\big\rangle_s - \langle F_1, F_2\rangle_s = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1}\big(g(\varphi_1)F(\varphi_1), g(\varphi_2)F(\varphi_2)\big)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 - \\ &\quad - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1}\big(F(\varphi_1), F(\varphi_2)\big)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(R(\varphi_1,\varphi_2)F(\varphi_1), F(\varphi_2)\big)\, d\varphi_1\, d\varphi_2,\end{aligned}$$

где

$$R(\varphi_1, \varphi_2) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1}\big(g(\varphi_2)^t g(\varphi_1) - E\big).$$

Учитывая, что $A(\varphi) \in \mathrm{SO}(n)$, получаем

$$R(\varphi_1, \varphi_2) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s-1} g(\varphi_2)^{-1}\big(g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\big).$$

Таким образом, ядро $R(\varphi_1, \varphi_2)$ представимо в виде

$$R(\varphi_1, \varphi_2) = \left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{s} L(\varphi_1, \varphi_2),$$

где $L(\varphi_1, \varphi_2)$ — гладкая операторнозначная функция. Мы видим, что падение порядка особенности здесь меньше, чем в доказательстве теоремы 6.3. Однако мы можем применить лемму 6.4, что и завершает доказательство.

7.4. Вложение $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})\big)$ в $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{GD}}}(\cdot)$. Рассмотрим пространство V гладких $\mathbb{C}^n$-значных функций $F = \big(f_1(\varphi), \ldots, f_n(\varphi)\big)$ на окружности, удовлетворяющих условию

$$F(\varphi + \pi) = -F(\varphi),$$

со скалярным произведением

$$\langle F^{(1)}, F^{(2)}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_j^{(1)}(\varphi)\overline{f_j^{(2)}}(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.4}$$

Рассмотрим в V подпространство V_+, состоящее из функций вида

$$F(\varphi) = \Big(\sum_{k\geqslant 0} c_k^{(1)} e^{i(2k+1)\varphi}, \dots, \sum_{k\geqslant 0} c_k^{(n)}\, e^{i(2k+1)\varphi}\Big),$$

а также подпространство V_-, состоящее из функций вида

$$F(\varphi) = \Big(\sum_{k<0} c_k^{(1)}\, e^{i(2k+1)\varphi}, \dots, \sum_{k<0} c_k^{(n)}\, e^{i(2k+1)\varphi}\Big).$$

Ясно, что $V = V_+ \oplus V_-$. Далее, оператор комплексного сопряжения $F \mapsto \overline{F}$ переставляет V_+ и V_-. Таким образом, V становится объектом категории $\overline{\mathrm{CD}}$.

Каноническая билинейная форма в V задается формулой

$$\Lambda\big(F^{(1)}, F^{(2)}\big) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_j^{(1)}(\varphi) f_j^{(2)}(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.5}$$

Рассмотрим теперь группу H, состоящую из функций $g : S^1 \to \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$g(\varphi + \pi) = g(\varphi).$$

Ясно, что группа H изоморфна группе $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$.

Рассмотрим, далее, группу $\mathrm{Diff}^{(2)}$ диффеоморфизмов q окружности, удовлетворяющих условию

$$g(\varphi + \pi) = g(\varphi) + \pi.$$

Ясно, что группа $\mathrm{Diff}^{(2)}$ есть двулистное накрытие над Diff. Наконец, рассмотрим полупрямое произведение $\mathrm{G} = \mathrm{Diff}^{(2)} \ltimes \mathrm{H}$, его элементами являются пары (q, g) такие, что $q \in \mathrm{Diff}^{(2)}$, $g \in \mathrm{H}$, а умножение задается формулой

$$(q_1, g_1)(q_2, g_2) = \big(q_1 \circ q_2,\ g_1(q_2(\varphi)) g_2(\varphi)\big).$$

Определим теперь действие группы G в пространстве V. Пусть $\mathrm{Diff}^{(2)}$ действует операторами

$$T(q)F(\varphi) = q'(\varphi)^{1/2} F(q(\varphi)). \tag{7.6}$$

Группа H действует преобразованиями

$$A(g(\varphi))F(\varphi) = g(\varphi)F(\varphi). \tag{7.7}$$

Теорема 7.2. Мы получили вложение G в группу $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{CD}}}(V)$.

Доказательство. Очевидно, что как операторы (7.6), так и операторы (7.7) сохраняют билинейную форму (7.5). Очевидно также, что эти операторы ограничены относительно скалярного произведения (7.4).

Заметим, далее, что преобразование Гильберта

$$I \cdot F(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big) F(\psi)\, d\psi$$

действует в V_+ как умножение на i, а в V_- — как умножение на $-i$ (см. п. VII.2.1). Поэтому нам достаточно доказать, что $\big[T(q), I\big]$ и $\big[A\big(g(\varphi)\big), I\big]$ — операторы Гильберта—Шмидта. По поводу операторов $\big[T(q), I\big]$ см. п. VII.3.2. Вычислим

$$\big[A\big(g(\varphi)\big), I\big]F(\varphi) = g(\varphi) \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big) F(\psi)\, d\psi - \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big) g(\psi) F(\psi)\, d\psi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\big(\tfrac{\varphi-\psi}{2}\big)\big(g(\varphi) - g(\psi)\big) F(\psi)\, d\psi,$$

и мы получаем оператор с гладким ядром. Теорема доказана. ■

Ограничивая спинорное представление группы $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathrm{CD}}}(V)$ на G, мы получаем (проективное) представление группы G, которое мы обозначим через ρ.

Рассмотрим, далее, в G подгруппу $\mathrm{Diff}^{(2)} \ltimes \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$. В этом случае операторы (7.7) будут унитарны в скалярном произведении (7.4), а поэтому образ группы G содержится в $\mathrm{Aut}^*_{\overline{\mathrm{CD}}}(V)$. Поэтому ограничение представления ρ на $\mathrm{Diff}^{(2)} \ltimes \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$ унитарно.

7.5. Старший вес. Обсудим, как устроено ограничение нашего представления ρ на группу $\mathrm{H} \simeq \mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$. Рассмотрим в $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$ подгруппу $\widetilde{\mathbb{L}}_+$, состоящую из функций $S^1 \to \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, голоморфно продолжимых в диск $|z| \geqslant 1$ (напомним, что окружность S^1 мы отождествляем с кривой $|z| = 1$ на $\mathbb{C}$).

Теорема 7.3. Вакуумный вектор (т. е. функция $f(\xi) = 1$) является собственным вектором для всех операторов $\rho(g(\varphi))$, где $g(\varphi) \in \widetilde{\mathbb{L}}_+$.

Доказательство. Пусть $g(\varphi) \in \widetilde{\mathbb{L}}_+$. Тогда оператор $A(\varphi)$ как оператор из $V = V_+ \oplus V_-$ в $V = V_+ \oplus V_-$ имеет блочное строение вида $\begin{pmatrix} Y & C \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix}$. Преобразование Потапова этой матрицы равно

$$\begin{pmatrix} 0 & Y^t \\ Y & -YC \end{pmatrix},$$

поэтому оператор $\rho(g(\varphi))$ имеет ядро

$$\lambda \exp\Big\{\tfrac{1}{2}(\xi \ \ \overline{\eta}) \begin{pmatrix} 0 & -Y^t \\ Y & -YC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \overline{\eta}^t \end{pmatrix}\Big\},$$

и тем самым

$$\rho(g(\varphi)) \cdot 1 = \lambda \cdot 1.$$

Теорема доказана. ■

На самом деле, в качестве повышающей (борелевской) подгруппы естественно рассматривать подгруппу чуть меньшую, чем $\mathbb{L}_+$.

Пусть G — комплексная простая группа Ли. Фиксируем в G какую-нибудь повышающую (борелевскую) подгруппу B_+. Обозначим через $\mathbb{L}_+$ группу функций $f : S^1 \to G$, голоморфно продолжимых в диск $|z| \geqslant 1$, таких, что $f(\infty) \in B_+$. Неприводимое представление группы G, имеющее $\mathbb{L}_+$-неподвижный вектор, называется представлением *со старшим весом*.

Теории представлений групп петель со старшим весом посвящена огромная литература, см. например книги [Kac (1983)], [Pressley, Segal (1986)] и статьи [Segal G. B. (1981)], [Lepowsky, Wilson (1978)], [Frenkel (1981)], [Frenkel, Kac (1981)].

7.6. Замечания. Индефинитная дополнительная серия. Так же, как и для группы Diff (см. пп. 6.7–6.8), конструкция п. 7.2 имеет смысл при всех $s \in \mathbb{R}$. А именно, рассмотрим в пространстве $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^n)$ гладких функций $S^1 \to \mathbb{R}^n$ скалярное произведение

$$Q_s\left(\left(\sum_k c_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \dots, \sum_k c_k^{(n)} e^{ik\varphi}\right), \left(\sum_k b_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \dots, \sum_k b_k^{(n)} e^{ik\varphi}\right)\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^n c_0^{(j)} \overline{b_0^{(j)}} + \sum_{k \neq 0} |k|^s \left(\sum_{j=1}^n c_k^{(j)} \overline{b_k^{(j)}}\right)$$

для любого $s \in \mathbb{R}$. Обозначим через H_s^n пополнение $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^n)$ по норме, задаваемой этим скалярным произведением. Скалярное произведение $Q_s(\cdot\,,\cdot)$ при $0 < s < 1$ отлично от скалярного произведения $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_s$, задаваемого формулой (7.1). Однако легко проверить (нужно найти асимптотику чисел c_n, задаваемых формулой (6.3), см. (6.4)), что существует оператор Гильберта—Шмидта T и константа C (зависящие лишь от s) такие, что

$$Q_s(F_1, F_2) = C\big\langle (1+T)F_1, F_2 \big\rangle_s.$$

По этой причине группы $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s^n относительно скалярных произведений $Q_s(\cdot\,,\cdot)$ и $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_s$ одинаковы.

Теорема 7.4. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Рассмотрим представление группы $\mathbb{D}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$ в H_s^n, задаваемое формулами (7.2), (7.3). Тогда операторы представления лежат в группе $\big(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty)\big)$ пространства H_s^n.

7.7. Замечания. Конструкции с мерой Винера. Пусть M — многообразие с римановой метрикой. Тогда на пространстве $C(S^1, M)$ непрерывных функций $S^1 \to M$ определена мера Винера.

Пусть теперь K — компактная группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа. На пространстве K / H существует единственная с точностью до пропорциональности риманова метрика. Рассмотрим пространство $C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})$. Группа $\mathbb{L}(\mathrm{K})$ действует на $C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})$ очевидным образом:

$$g(\varphi) : l(\varphi) \mapsto g(\varphi)l(\varphi),$$

где $l(\varphi) \in C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})$. Известно (см., например, [Malliavin M. P., Malliavin P. (1990)]), что мера Винера квазиинвариантна относительно этого действия. Поэтому мы автоматически получаем унитарное представление $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ в пространстве $L^2\big(C(S^1, \mathrm{K}/\mathrm{H})\big)$.

На самом деле, здесь можно получить не одно представление, а много, так как наличие квазиинвариантной меры позволяет строить индуцированные представления (см., например, [Albeverio, Testard, Høegh-Krohn, Vershik (1983)]).

О конструкциях такого рода известно очень немного. Известно, в частности, что представление группы $\mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)\big) = \mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2)\big) \times \mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2)\big)$ в $L^2\big(C(S^1, \mathrm{SU}(2))\big)$ неприводимо. С другой стороны, ограничение этого представления на один из сомножителей (т. е. на группу $\mathbb{L}\big(\mathrm{SU}(2)\big)$) приводимо и является факторпредставлением типа III (см. только что цитированную статью).

Замечание. В конструкциях этого типа нужна не сама мера Винера, а просто квазиинвариантная мера на пространстве путей. Таких мер существует довольно много, см. [Неретин (1993)].

7.8. Замечания. Конструкция с коциклом Картана—Маурера. Пусть G — компактная группа Ли (мы будем считать, что G реализована как группа вещественных матриц). Пусть $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли (которая, тем самым, тоже реализована как алгебра матриц). Рассмотрим гильбертово пространство V вещественных функций $S^1 \to \mathfrak{g}$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = -\int_0^{2\pi} \mathrm{tr}\big(f_1(\varphi) f_2(\varphi)\big)\, d\varphi.$$

Пусть группа $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ действует в V преобразованиями

$$f(\varphi) \mapsto g(\varphi)^{-1} f(\varphi) g(\varphi).$$

Понятно, что эти преобразования унитарны, однако ничего интересного мы пока не получили. Определим теперь так называемый *коцикл Картана—Маурера* $\gamma(g(\varphi))$ на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$. А именно, пусть $g(\varphi) \in \mathbb{L}(\mathrm{G})$. Тогда

$$\gamma(g(\varphi)) = g(\varphi)^{-1} g'(\varphi).$$

Рассмотрим, далее, для любого $g(\varphi) \in \mathbb{L}(\mathrm{G})$ следующее аффинное преобразование пространства V:

$$Q(g(\varphi)) f(\varphi) = g^{-1}(\varphi) f(\varphi) g(\varphi) + g^{-1}(\varphi) g'(\varphi).$$

Простое вычисление показывает, что

$$Q(g_1 g_2) = Q(g_1) Q(g_2).$$

Таким образом, мы получили вложение группы $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ в группу $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V)$ (см. п. VI.1.8). Ограничивая представление Exp группы $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V)$ на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, мы получаем унитарное (линейное) представление R группы $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ в бозонном пространстве Фока.

Обозначим теперь вакуумный вектор через v. Обозначим $\mathbb{L}(\mathrm{G})$-циклическую оболочку вектора v через Y. Рассмотрим отображение I из Y в пространство функций на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, задаваемое формулой

$$Iw(g) = \big\langle w, R(g)v \big\rangle.$$

Таким образом, пространство Фока отображается в некоторое пространство Z функций на $\mathbb{L}(\mathrm{G})$. Оказывается, что Z отождествляется с L^2 на $C(S^1, \mathrm{G})$ по мере Винера, а группа $\mathbb{L}(\mathrm{G})$ действует в $L^2\big(C(S^1, \mathrm{G})\big)$ левыми сдвигами, см. [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard (1981)].

7.9. Литературные замечания. Конструкция п. 7.2 получена в [Неретин (1988)]. Конструкция п. 7.3 на уровне алгебры Ли получена в [Frenkel (1988)], на уровне группы $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\big)$ — в [Исмагилов (1983)], на уровне $\mathbb{L}\big(\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})\big)$ — в [Неретин (1986)]. В п. 7.6 мы следуем [Неретин (1993)].

Конструкция с коциклом Картана—Маурера применима не только для групп петель $\mathbb{L}(\mathrm{G})$, но и для групп G-значных функций на произвольном компактном многообразии; многомерный случай, однако, совсем не похож на одномерный. По поводу пп. 7.7—7.8 см. [Исмагилов (1976)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1978)], [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard (1978)], [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard (1981)], [Albeverio, Høegh-Krohn, Testard, Vershik (1983)], [Frenkel (1984)].

Об аналоге категории **Shtan** для групп петель см. [Неретин (1989.2)].

Продолжение сюжета п. 7.6 см. [Неретин (1997)].

Глава X

Некоторые алгебраические конструкции теории меры

§ 1. Мультипликативный интеграл Араки

1.1. Группа $\mathrm{Isom}(H)$. Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Напомним (см. п. VI.1.8), что через $\mathrm{Isom}(H)$ мы обозначили группу *аффинных изометрий* H, т. е. преобразований H вида

$$(T,\gamma): h \mapsto Th+\gamma,$$

где T — унитарный оператор, а $\gamma \in H$. Напомним, что группа $\mathrm{Isom}(H)$ действует в бозонном пространстве Фока $F(H)$ унитарными операторами

$$\mathrm{Exp}(T,\gamma)f(z) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\gamma,\gamma)\right\}\exp\left\{-(z,T^{-1}\gamma)\right\}f(Tz+\gamma), \tag{1.1}$$

при этом

$$\mathrm{Exp}(T,\gamma)\,\mathrm{Exp}(T',\gamma') = \exp\left\{-i\,\mathrm{Im}\left\langle\gamma,(T')^{-1}\gamma'\right\rangle\right\}\mathrm{Exp}(T'',\gamma''), \tag{1.2}$$

где (T'',γ'') — произведение афинных преобразований (T,γ) и (T',γ'). Таким образом, мы получаем проективное представление группы $\mathrm{Isom}(H)$.

Пусть K — вещественное гильбертово пространство. Пусть $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(K)$ — группа аффинных изометрий K. Тогда $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(K)$ действует в пространстве Фока $F(K_{\mathbb{C}})$ по формуле (1.1). При этом в силу (1.2) полученное действие линейно.

Пусть G — группа. Если нам удастся построить действие группы G аффинными преобразованиями гильбертова пространства H, то мы автоматически получаем унитарное представление G в $F(H)$. Это одна из самых старых идей в теории представлений бесконечномерных групп (см. [Araki (1968)]).

1.2. Аффинные действия групп. Пусть группа G действует на гильбертовом пространстве H аффинными преобразованиями

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g), \tag{1.3}$$

где $T(g)$ — унитарный оператор, а $\gamma(g) \in H$.

Равенство

$$S(g_1g_2)h = S(g_1)S(g_2)h$$

влечет

$$T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2),$$

т. е. $T(g)$ должно быть линейным унитарным представлением группы G. Далее, легко видеть, что $\gamma(g)$ удовлетворяет тождеству

$$\gamma(g_1g_2) = T(g_1)\gamma(g_2)+\gamma(g_1). \tag{1.4}$$

Учитывая, что $\gamma(e)=0$, мы получаем

$$\gamma(g^{-1}) = -T(g^{-1})\gamma(g). \tag{1.5}$$

Первый вопрос, который тут возникает, следующий: пусть T — унитарное представление G в пространстве H; существует ли функция $\gamma(g): \mathrm{G} \to H$ такая, что (1.3) — аффинное действие, т. е. функция, удовлетворяющая условиям (1.4), (1.5)?

Задача. Пусть $v \in H$. Покажите, что функция

$$\gamma(g) = T(g)v - v \tag{1.6}$$

удовлетворяет условиям (1.4), (1.5).

Однако аффинное действие, соответствующее функции γ, задаваемой формулой (1.6), неинтересно: оно становится линейным после сдвига начала координат в точку v. Поэтому правильная постановка вопроса следующая: существует ли для данного унитарного представления T группы G функция $\gamma(g)$, удовлетворяющая (1.4)–(1.5) и не представимая в виде (1.6)? Ответ на этот вопрос редко оказывается положительным (см. ниже п. 1.6).

Замечание. Переведем наш вопрос на язык когомологий групп (см. [Guichardet (1980)], мы этим языком пользоваться не будем). Уравнение (1.5) означает, что функция $\gamma(\cdot)$ есть элемент группы $Z^1(\mathrm{G},H)$ одномерных коциклов на G со значениями в пространстве H. Коциклы вида (1.6) суть одномерные кограницы. Поэтому наш вопрос принимает следующий вид: для каких представлений H группы G группа $\mathscr{H}^1(\mathrm{G},H)$ первых когомологий G со значениями в H нетривиальна?

1.3. Как строить аффинные действия групп? Все конструкции здесь устроены по следующей схеме. Пусть группа G действует (не унитарно!) в пространстве V. Допустим, что существует инвариантное подпространство в V_0 коразмерности 1, причем представление G в V/V_0 тривиально, а V_0 не имеет G-инвариантного дополнения в V. Рассмотрим вектор $v \in V$, не содержащийся в V_0. Тогда формула

$$S(g)h = T(g)h + \bigl(T(g)v - v\bigr).$$

задает аффинное действие группы G в подпространстве (!) V_0.

Задача. Проверьте, что $T(g)v - v \in V_0$.

Задача. Пусть (1.3) — аффинное (не обязательно изометричное) действие группы G в пространстве H. Тогда формула

$$\widetilde{T}(g) = \begin{pmatrix} T(g) & \gamma(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6a}$$

задает линейное действие G в $H \oplus \mathbb{C}$.

Сейчас мы приведем пример аффинного действия, который в дальнейшем все время будем иметь в виду.

1.4. Пример: аффинное действие группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Пусть группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ действует на окружности $z = e^{i\varphi}$ мебиусовскими преобразованиями

$$z \mapsto (\alpha z + \beta)(\bar\beta z + \bar\alpha)^{-1},$$

где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Рассмотрим следующее линейное действие $T(q)$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в пространстве функций на окружности

$$T(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi),$$

где q — мебиусовское преобразование.

Пусть H — пространство функций с нулевым средним на окружности, т.е. пространство функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Легко видеть, что пространство H является $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-инвариантным. Поэтому мы можем применить конструкцию предыдущего пункта.

Выберем $t \in \mathbb{R}$. Группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ действует в H аффинными преобразованиями вида

$$S_t(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi) + t\big(q'(\varphi) - 1\big).$$

В дальнейшем нам будет удобнее работать с координатой $z = e^{i\varphi}$, а не с координатой φ. Действие $T(q)$ в этом случае записывается в виде:

$$T\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} f(z) = f\left(\tfrac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\right)\left|\bar\beta z + \bar\alpha\right|^{-2}, \tag{1.7}$$

а действие $S_t(q)$ — в виде

$$S_t(q)f(z) = T(q)f(z) + t\left(\left|\bar\beta z + \bar\alpha\right|^{-2} - 1\right).$$

Отметим, что при $|z| = 1$ выполнено

$$\begin{aligned}\left|\bar\beta z + \bar\alpha\right|^{-2} &= \left(\bar\beta z + \bar\alpha\right)^{-1}\left(\beta\bar z + \alpha\right)^{-1} =\\ &= \left(\bar\beta z + \bar\alpha\right)^{-1}\left(\beta z^{-1} + \alpha\right)^{-1} =\\ &= \frac{z}{\left(\bar\beta z + \bar\alpha\right)\left(\beta + \alpha z\right)}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Рассмотрим в H уже знакомое нам (по § VII.2) скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\left(\tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right| f(\varphi_1)\overline{g(\varphi_2)}\,d\varphi_1\,d\varphi_2,$$

или, что равносильно

$$\left\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi}\right\rangle = \frac{1}{|n|}\,\delta_{n,m}.$$

Задача. Покажите, что операторы $T(q)$, где $q \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ унитарны в этом скалярном произведении.

Итак, мы получили действие группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ изометрическими аффинными преобразованиями на H. Заметим, что $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ при этом сохраняет (вещественное) подпространство $H_{\mathbb{R}} \subset H$, состоящее из вещественнозначных функций. Поэтому $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ вкладывается в группу $\mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(H_{\mathbb{R}})$.

Сейчас мы построим еще два аффинных действия $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, отличие которых от только что рассмотренного исчезающе мало.

Обозначим через H_+ (соответственно H_-) подпространство в H, состоящее из функций вида $\sum\limits_{k>0} c_k z^k$ (соответственно $\sum\limits_{k<0} c_k z^k$).

Лемма 1.1. Пространства $H_\pm$ являются инвариантными относительно унитарных операторов $T(q)$, где $q \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть, например, $k > 0$. Оператор $T\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$ переводит z^k в функцию

$$\psi_k(z) = \left(\frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\right)^k \frac{z}{(\alpha z+\beta)(\bar\beta z+\bar\alpha)} = \frac{(\alpha z+\beta)^{k-1}}{(\bar\beta z+\bar\alpha)^{k+1}}\cdot z.$$

Легко видеть, что $\psi_k(z)$ голоморфно продолжается в круг $|z| \leqslant 1$ и $\psi_k(0) = 0$, т.е. $\psi_k(z) \in H_+$. ■

Как мы видели, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ действует в H преобразованиями

$$S_t(g)f = T(g)f + t\gamma(g),$$

где $g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$, унитарные операторы T задаются формулой (1.7), а

$$\gamma(g) = \frac{z}{(\bar\beta z+\bar\alpha)(\beta+\alpha z)} - 1.$$

Представим $\gamma(g)$ в виде

$$\gamma(g) = \gamma^+(g) + \gamma^-(g),$$

где

$$\gamma^+(g) = \frac{-\bar\beta z}{\bar\beta z+\bar\alpha} \in H_+,$$

$$\gamma^-(g) = \frac{-\beta}{\alpha z+\beta} \in H_-.$$

Таким образом, мы получаем аффинные действия

$$S_t^\pm(g)f = T(g)f + t\gamma^\pm(g)$$

группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в H_+ и H_-.

Задача. Покажите, что действие $S_t^{\pm}$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ в овеществленном пространстве $H_{\pm}$ эквивалентно действию S_t в $H_{\mathbb{R}}$.

1.5. Мультипликативный интеграл Араки. Пусть G — группа Ли. Пусть M — пространство с непрерывной вероятностной мерой μ. Назовем измеримую функцию $g : M \to \mathrm{G}$ ограниченной, если существует компакт $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ такой, что $\mu\big(g^{-1}(\mathrm{K})\big) = 1$. Обозначим через $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ группу всех измеримых ограниченных функций $M \to \mathrm{G}$.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть группа G действует на H аффинными изометриями

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g). \tag{1.9}$$

Обозначим через $L^2(M, H)$ пространство L^2 измеримых функций $M \to H$. Тогда группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ действует в $L^2(M, H)$ аффинными преобразованиями

$$S(g(m))f(m) = T(g(m))f(m) + \gamma(g(m)).$$

Тем самым, группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ вкладывается в группу $\mathrm{Isom}\big(L^2(M, H)\big)$. Ограничивая представление Exp группы $\mathrm{Isom}\big(L^2(M, H)\big)$ на подгруппу $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$, мы получаем унитарное проективное представление группы $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ в $F\big(L^2(M, H)\big)$. Это представление мы обозначим через Ar.

Если группа $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ действует преобразованиями (1.9) на *вещественном* гильбертовом пространстве H, то мы получаем *линейное* представление группы $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ в $F\big(L^2(M, H_{\mathbb{C}})\big)$.

Если же пространство H комплексно, формула (1.2) дает

$$\mathrm{Ar}\big(g_1(m)\big)\,\mathrm{Ar}\big(g_2(m)\big) = c(g_1, g_2)\,\mathrm{Ar}\big(g_1(m)g_2(m)\big),$$

где

$$c(g_1, g_2) = \exp\Big\{-i\,\mathrm{Im}\int_M \Big\langle \gamma\big(g_1(m)\big), T\big(g_2(m)\big)^{-1}\gamma\big(g_2(m)\big)\Big\rangle\, d\mu\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{i\,\mathrm{Im}\int_M \Big\langle \gamma\big(g_1(m)\big), \gamma\big(g_2(m)^{-1}\big)\Big\rangle\, d\mu\Big\}$$

(мы использовали формулу (1.5)).

Теорема 1.2. Пусть G — связная односвязная простая группа Ли. Тогда представление Ar линеаризуемо.

Доказательство. Рассмотрим представление

$$\rho(g) = \mathrm{Exp}\big(T(g), \gamma(g)\big)$$

группы G в пространстве Фока $F(H)$. В силу (1.2)

$$\rho(g)\rho(h) = \exp\Big(i\,\mathrm{Im}\big\langle \gamma(g), \gamma(h^{-1})\big\rangle\Big)\rho(gh).$$

Любое проективное представление односвязной полупростой группы Ли линеаризуемо (см. [Bargmann (1954)]), поэтому линеаризуемо и ρ. Таким образом, существует функция $\lambda(g)$ такая, что $|\lambda(g)| = 1$ и

$$\widetilde{\rho}(g) = \lambda(g)\rho(g)$$

является линейным представлением группы G. Поэтому

$$\lambda(g)\lambda(h) = \lambda(gh)\exp\Big(i\,\mathrm{Im}\big\langle \gamma(g), \gamma(h^{-1})\big\rangle\Big). \tag{1.10}$$

Далее, заметим, что функция $\lambda(g)$ непрерывна (так как операторнозначные функции $\rho(g)$ и $\widetilde{\rho}(g)$ непрерывны). Выберем какую-нибудь ветвь логарифма $\psi(g) = \ln\lambda(g)$ на G (группа G односвязна, поэтому функция $\psi(g)$ однозначна и определена с точностью до прибавления $2\pi i$). Тогда (1.10) переписывается в виде

$$\psi(g) + \psi(h) = \psi(gh) + i\,\mathrm{Im}\big\langle \gamma(g), \gamma(h^{-1})\big\rangle + 2\pi i n, \tag{1.11}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь g и h — функции на M. Проинтегрируем обе части равенства по M (напомним, что $\mu(M) = 1$) и потом возьмем экспоненту от обеих частей равенства. Получаем

$$\exp\Big(\int_M \psi(g(m))\,d\mu(m)\Big)\exp\Big(\int_M \psi(h(m))\,d\mu(m)\Big) =$$

$$= \exp\Big(\int_M \psi\big(g(m)h(m)\big)\,d\mu(m)\Big)\exp\Big(i\,\mathrm{Im}\int_M \Big\langle\gamma\big(g(m)\big), \gamma\big(h(m)^{-1}\big)\Big\rangle\,d\mu(m)\Big),$$

а это, в свою очередь, означает, что

$$\widetilde{\mathrm{Ar}}(g(m)) = \exp\Big(\int_M \psi(g(m))\,d\mu(m)\Big)\,\mathrm{Ar}(g(m))$$

— линейное представление группы $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$. ■

Замечание. Обозначим представления группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\big)$, соответствующие действиям S, S_t^+, S_t^- из п. 1.4, через R, R^+, R^-. Итак, R является линейным представлением, а R^+ и R^- — проективными (они действительно не линеаризуемы при $t \notin \mathbb{Z}$). Однако действия $S_t^{\pm}$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ одновременно являются действиями универсальной накрывающей $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^{\sim}$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. В силу только что доказанной теоремы R^+ и R^- являются линейными представлениями группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^{\sim}\big)$. Иными словами, представления $R^{\pm}$ группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\big)$ линеаризуются на «центральном расширении» $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^{\sim}\big)$ группы $\mathscr{F}\big(M, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\big)$.

Задача. Покажите, что $R = R_+ \otimes R_-$.

1.6. Замечания. К каким группам может быть применена конструкция Араки? Рассмотрим нетривиальное аффинное изометричное действие (1.3) группы G в пространстве H. Тогда в силу задачи из п. 1.3 мы видим, что существует (неунитарное) представление $\widetilde{T}(q)$ группы G в пространстве $H \oplus \mathbb{C}$, задаваемое формулой (1.6а), причем H не имеет $\widetilde{T}$-инвариантного дополнения в $H \oplus \mathbb{C}$. Иными словами, унитарное представление T может быть зацеплено с единичным представлением. В частности, в случае полупростой группы G представление T имеет тот же центральный характер, что и единичное представление.

С другой стороны, наличие у группы G нетривиальных аффинных изометрических действий влечет существование неограниченных условно положительных определенных функций на группе G (таковой является $\|\gamma(g)\|^2$). Вопрос о существовании неограниченных условно положительных определенных функций хорошо исследован, см., например, [Margulis (1991)], III.

Нетривиальные аффинные действия у простых групп Ли существуют лишь для серий групп $\mathrm{SO}(n,1)$ и $\mathrm{SU}(n,1)$ (см. [Каждан (1967)], [Guichardet (1980)], [Margulis (1991)], III.5.6).

Они использовались для построения мультипликативного интеграла в [Вершик, Гельфанд, Граев (1973)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1985)] и [Березин (1976)]; см. также [Guichardet (1973)], [Parthasarathy, Schmidt (1972)]. Для разрешимых групп Ли существование аффинных действий — дело обычное (в частности, Араки [Araki (1968)] рассматривал двумерную разрешимую группу аффинных преобразований прямой). Аффинные действия также имеют группа PSL(2) над p-адическим полем (оно связано с «особым» (special) представлением PSL(2), в терминологии книги [Гельфанд, Граев, Пятецкий-Шапиро (1966)]), группы автоморфизмов деревьев Брюа—Титса, «компактные» (G, K)-пары Ольшанского (см. п. IX.2.5 и IX.5.4). Аффинные изометричные действия есть также у некоторых дискретных групп. Такое действие может быть построено по любому действию группы G на дереве (конструкцию см. выше в п. VIII.6.8), а также по любому действию на $\mathbb{R}$-дереве (см. [Neretin (1997b)]).

Пусть $G = PSL(2,\mathbb{R}), SO(1,n), SU(1,n), SL(2,\mathbb{Q}_p)$, а $\Gamma \subset G$ — кокомпактная решетка (т. е. факторпространство G/Γ компактно). Следующее высказывание (см. [Neretin (1997b)]) является очень простым представителем так называемых «теорем жесткости»:

Предложение 1.3. Пусть S — аффинно неприводимое (т. е. не имеющее нетривиальных инвариантных аффинных подпространств) действие группы G. Тогда ограничение действия S группы G на подгруппу Γ аффинно неприводимо.

§ 2. *Фоковское представление полугруппы вероятностных мер на группе*

2.1. Полугруппа вероятностных мер на группе. Пусть G — группа Ли. Пусть μ, ν — конечные борелевские меры на G. *Сверткой* $\mu * \nu$ называется мера на G, определяемая из условия

$$\int_G f(g)\, d(\mu*\nu)(g) = \int_G\int_G f(g_1g_2)\, d\mu(g_1)\, d\nu(g_2)$$

для любой ограниченной измеримой функции f.

Определение свертки можно также переписать в виде

$$(\mu*\nu)(g) = \int_G \mu(gh^{-1})\, d\nu(h),$$

где $\mu(gh^{-1})$ обозначает образ меры μ при преобразовании $R_h : g \mapsto gh^{-1}$.

Обозначим через $\mathscr{M}(G)$ пространство всех борелевских вероятностных мер на G. Ясно, что свертка $\mu*\nu$ вероятностных мер — снова вероятностная мера. Легко видеть, что свертка ассоциативна, поэтому $\mathscr{M}(G)$ с операцией свертки является полугруппой. Образ меры μ при отображении $g \mapsto g^{-1}$ мы обозначим через μ^*. Легко видеть, что

$$(\mu*\nu)^* = \nu^* * \mu^*.$$

Группа G канонически вкладывается в полугруппу $\mathscr{M}(G)$, а именно: каждому элементу G ставится в соответствие единичная мера, сосредоточенная в точке g.

Через $\mathscr{M}_0(G)$ мы обозначим подполугруппу в $\mathscr{M}(G)$, состоящую из мер с компактным носителем.

Введем на $\mathscr{M}(G)$ *слабую сходимость*, положив, что $\mu_j \to \mu$, если для любой непрерывной функции на G с компактным носителем

$$\int_G f(g)\, d\mu_j \to \int_G f(g)\, d\mu. \tag{2.1}$$

Сходимость на полугруппе $\mathscr{M}_0(G)$ вводится из условия: μ_j сходится к μ, если (2.1) выполнено для любой непрерывной функции.

Задача. Покажите, что сходимость $\mu_j \to \mu$ в смысле $\mathscr{M}_0(G)$ влечет существование компактного подмножества $K \subset G$ такого, что $\mu_j(G \setminus K) = 0$ для всех j.

2.2. Простейшие представления. Пусть τ — унитарное представление группы G. Тогда оно канонически продолжается на полугруппу $\mathscr{M}(G)$ по формуле

$$\tau(\mu) = \int_G T(g)\, d\mu(g).$$

Легко видеть, что $\tau(\mu)$ — $*$-представление, т. е. $\tau(\mu^*) = \tau(\mu)^*$.

Цель этого параграфа — показать, что полугруппа $\mathscr{M}_0(G)$ имеет представления, которые не сводятся к только что построенным.

2.3. Фоковское представление полугруппы $\mathscr{M}_0(G)$. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$. Пусть группа G действует в H аффинными изометриями:

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g).$$

Поставим в соответствие каждой мере $\mu \in \mathscr{M}_0(G)$ следующий оператор $L(\mu)$ в бозонном пространстве Фока $F(H)$:

$$L(\mu)f(u) = f(Au + b)\exp(u, c),$$

где

$$A = A(\mu) = \int_G T(g)\, d\mu(g),$$

$$b = b(\mu) = \int_G \gamma(g)\, d\mu(g),$$

$$c = c(\mu) = \int_G \gamma(g^{-1})\, d\mu(g).$$

Теорема 2.1.

а)
$$L(\mu)L(\nu) = \exp\bigl(b(\mu), c(\nu)\bigr)L(\mu*\nu). \tag{2.2}$$

б) Пусть

$$\sigma(\mu) = \exp\Bigl\{-\tfrac{1}{2}\int \|\gamma(g)\|^2 d\mu\Bigr\}.$$

Тогда операторы

$$\widetilde{L}(\mu) = \sigma(\mu)L(\mu)$$

удовлетворяют равенству

$$\widetilde{L}(\mu)\widetilde{L}(\nu) = \exp\bigl(i\,\mathrm{Im}\langle b(\nu), c(\mu)\rangle\bigr)\widetilde{L}(\mu*\nu). \tag{2.3}$$

в) $\|\widetilde{L}(\mu)\| \leqslant 1$.

Замечание. Функция $g \mapsto \|\gamma(g)\|$ не ограничена. Следовательно, для $\mu \in \mathscr{M}(G)$ векторы $b(\mu)$ и $c(\mu)$, вообще говоря, не определены. Поэтому условие $\mu \in \mathscr{M}_0(G)$ для нас существенно.

Доказательство.

а) Равенство (2.2) равносильно системе из трех равенств

$$A(\mu*\nu)=A(\mu)A(\nu),\quad b(\mu*\nu)=A(\mu)b(\nu)+b(\mu),\quad c(\mu*\nu)=c(\nu)+A^*(\nu)c(\mu),$$

которые проверяются без всякого труда.

б) тоже проверяется прямым вычислением. Нужно проверить равенство

$$\int_G \|\gamma(g)\|^2\,d(\mu*\nu)(g)=$$
$$=\int_G \|\gamma(g)\|^2\,d\mu(g)+\int_G \|\gamma(g)\|^2\,d\nu(g)-2\,\mathrm{Re}\Big\langle\int_G \gamma(g)\,d\mu(g),\int_G \gamma(g^{-1})\,d\nu(g)\Big\rangle. \tag{2.4}$$

Преобразуем левую часть равенства с помощью (1.4):

$$\int_G \|\gamma(g)\|^2\,d(\mu*\nu)(g)=\int_G\int_G \|\gamma(gh)\|^2\,d\mu(g)\,d\nu(h)=$$
$$=\int_G\int_G \big\langle T(g)\gamma(h)+\gamma(g),T(g)\gamma(h)+\gamma(g)\big\rangle\,d\mu(g)\,d\nu(h)=$$
$$=\int_G\int_G \|\gamma(h)\|^2\,d\mu(g)\,d\nu(h)+\int_G\int_G \|\gamma(g)\|^2\,d\mu(g)\,d\nu(h)+$$
$$+2\int_G\int_G \mathrm{Re}\big\langle T(g)\gamma(h),\gamma(g)\big\rangle\,d\mu(g)\,d\nu(g)=$$
$$=\int_G \|\gamma(h)\|^2\,d\nu(h)+\int_G \|\gamma(g)\|^2\,d\mu(g)+$$
$$+2\int_G\int_G \mathrm{Re}\big\langle \gamma(h),T(g^{-1})\gamma(g)\big\rangle\,d\mu(g)\,d\nu(h).$$

Учитывая (1.5), мы получаем искомое выражение.

Утверждение в) не столь очевидно и вытекает из леммы об уголке, обсуждаемой в следующем пункте. ■

2.4. Лемма об уголке. Пусть $(K,\varkappa)$ — пространство с непрерывной вероятностной мерой. Отождествим пространство H с подпространством постоянных функций в $L^2(K,H)$. Обозначим через r оператор вложения $H\to L^2(K,H)$, а через p — ортогональный проектор $L^2(K,H)\to H$, т. е. оператор

$$f\mapsto\int_K f(k)\,d\varkappa(k).$$

Обозначим через R естественное вложение $F(H)\to F\big(L^2(K,H)\big)$, а через $P:F\big(L^2(K,H)\big)\to F(H)$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство $F(H)$.

Тогда, в обозначениях § VI.4, мы имеем

$$R=B\left[\begin{matrix}0&r\\r&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right],\quad P=B\left[\begin{matrix}0&p\\p&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right].$$

Далее, пусть операторы $\mathrm{Ar}(\cdot)$ — те же, что в п. 1.5. Легко видеть, что

$$\mathrm{Ar}(g(m))=\exp\Big\{-\tfrac12\int_M \|\gamma(g(m))\|^2\,d\mu(m)\Big\}B\left[\begin{matrix}0&T(g(m))\\T^{\mathrm t}(g(m))&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma(g(m))\\\gamma(g(m)^{-1})\end{matrix}\right]. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2.

$$P\,\mathrm{Ar}(g(m))R=\widetilde L(\mu), \tag{2.6}$$

где μ — образ меры $\varkappa$ при отображении $f:K\to G$.

Доказательство: перемножаем операторы с помощью теоремы (VI.4.3). ■

2.5. Линеаризация. Пусть группа G действует аффинными изометриями на вещественном гильбертовом пространстве K. Тогда в силу формулы (2.3) представление $\widetilde L(\cdot)$ полугруппы $\mathscr M(\mathrm G_0)$ в $F(K_{\mathbb C})$ линейно.

Обсудим теперь случай аффинного действия на комплексном пространстве.

Теорема 2.3. Пусть G — односвязная простая группа Ли. Тогда представление $\widetilde L(\mu)$ полугруппы $\mathscr M_0(\mathrm G)$ линеаризуемо.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1.2, только равенство (1.11) нужно интегрировать по $d\mu(g)d\nu(h)$. ■

Замечание. Применение нашей конструкции к действию S_t^+ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb R)$ дает проективное представление $\mathscr M_0\big(\mathrm{PSL}(2,\mathbb R)\big)$. Но если мы рассмотрим действие S_t^+ как действие универсальной накрывающей $\mathrm{SL}(2,\mathbb R)^\sim$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb R)$, то наша конструкция уже даст линеаризуемое действие полугруппы $\mathscr M_0\big(\mathrm{SL}(2,\mathbb R)^\sim\big)$. Стоит заметить, что отображение накрытия $\mathrm{SL}(2,\mathbb R)^\sim\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb R)$ индуцирует отображение $\mathscr M_0\big(\mathrm{SL}(2,\mathbb R)^\sim\big)\to\mathscr M_0\big(\mathrm{PSL}(2,\mathbb R)\big)$. Я, однако, не решился бы назвать полугруппу $\mathscr M_0\big(\mathrm{SL}(2,\mathbb R)^\sim\big)$ центральным расширением полугруппы $\mathscr M_0\big(\mathrm{PSL}(2,\mathbb R)\big)$.

2.6. Неприводимость. Пусть группа G действует на гильбертовом пространстве H аффинными изометрическими преобразованиями

$$S(g)h=T(g)h+\gamma(g).$$

Действие $S(g)$ мы назовем ***аффинно неприводимым***, если в H не существует G-инвариантных аффинных подпространств, отличных от всего H.

Теорема 2.4. Пусть G — полупростая группа, а действие S удовлетворяет условиям

а) S аффинно неприводимо;

б) T есть сумма конечного числа неприводимых представлений.

Тогда представление $\widetilde L(\cdot)$ полугруппы $\mathscr M(\mathrm G)$ неприводимо.

Замечание. В качестве следствия мы получаем, что представления полугруппы $\mathscr M_0\big(\mathrm{SL}(2,\mathbb R)^\sim\big)$, соответствующие действиям S, S_+, S_- из п. 1.4, неприводимы.

Доказательство. Заметим сначала, что полупростая группа не имеет нетривиальных аффинных действий на одномерном пространстве. Поэтому среди подпредставлений представления T нет одномерных подпредставлений.

Пусть операторы $A(\mu)$ — те же, что и выше (см. п. 2.3). Заметим, что $\|A(\mu)\| \leqslant 1$.

Лемма 2.5. Существует $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ такая, что $\|A(\mu)\| < 1$.

Доказательство. Пусть $\nu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ — мера с гладкой плотностью относительно меры Хаара. Хорошо известно (см., например, [Кириллов (1972)], § 11), что оператор $A(\nu)$ — ядерный. Поэтому $A(\nu * \nu^*)$ — ядерный положительный оператор. Пусть H_ν — множество всех векторов h, удовлетворяющих условию $A(\nu * \nu^*)h = h$. Тогда $\bigcap_\nu H_\nu$ состоит в точности из всех T-неподвижных векторов, и в силу сделанного выше замечания $\bigcap_\nu H_\nu = 0$. В силу конечномерности пространств H_ν найдутся такие $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, что $H_{\nu_1} \cap \ldots \cap H_{\nu_k} = 0$. Тогда $\mu = (\nu_1 * \nu_1) * \ldots * (\nu_k * \nu_k^*)$ удовлетворяет желаемому свойству. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Без ограничения общности можно считать, что $\mu = \mu^*$ (иначе мы рассмотрим меру $\tilde{\mu} = \mu * \mu^*$). Тогда $L(\mu)^* = L(\mu)$.

Лемма 2.6. Пусть $\mu = \mu^*$ и $\|A(\mu)\| < 1$. Тогда существует единственный вектор v вида $v = \exp(z, h)$, собственный относительно $L(\mu)$, и этот вектор является единственным максимальным вектором для $L(\mu)$ (т. е. равенство $\|L(\mu)w\| = \|L(\mu)\| \cdot \|w\|$ выполнено тогда и только тогда, когда w пропорционально v).

Доказательство.

$$L(\mu)v = \exp\big(A(\mu)z + b(\mu), h\big) \exp\big(z, c(\mu)\big) = \exp\big(b(\mu), h\big) \exp\big(z, A(\mu)h + c(\mu)\big).$$

Отображение $h \mapsto A(\mu)h + c(\mu)$ является сжимающим отображением гильбертова пространства H в себя. Без ограничения общности можно считать, что его неподвижная точка есть 0 (иначе мы просто сдвинем начало координат). В этом случае v будет вакуумным вектором. Очевидно, тогда $c(\mu) = 0$, а поэтому в силу самосопряженности $L(\mu)$ выполнено $b(\mu) = 0$. Итак, $L(\mu)$ оказывается оператором замены переменных $L(\mu)f(z) = f\big(A(\mu)z\big)$. Теперь лемма становится очевидной. ■

Продолжим доказательство теоремы. Пусть μ и v — такие же, как в лемме 2.6. Без ограничения общности можно считать, что v — вакуумный вектор. В силу леммы 2.6 v является выделенным вектором (т. е. любой $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$-сплетающий оператор переводит v в себя). Остается проверить, что циклическая оболочка вектора v совпадает со всем пространством Фока.

Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — произвольные элементы группы G. Пусть $\nu(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — мера на G такая, что мера точки g_j^{-1} есть ε_j, а мера единицы есть $1 - \sum \varepsilon_j$. Тогда вектор

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} L\big(\nu(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\big)v\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=0}$$

с точностью до пропорциональности равен

$$\prod_{j=1}^{n} \big(z, \gamma(g_j)\big). \tag{2.7}$$

Учитывая, что линейные комбинации векторов $\gamma(g_j)$ плотны в H (так как H аффинно неприводимо), мы получаем, что линейные комбинации векторов вида (2.7) плотны в пространстве Фока. ■

Пусть T — унитарное представление локально компактной группы G в пространстве H. Говорят, что T *слабо содержит единичное представление*, если существует последовательность $h_j \in H$ такая, что последовательность функций

$$\varphi_j(g) = \langle T(g)h_j, h_j \rangle$$

сходится к единице равномерно на компактных подмножествах в G.

Если T не содержит слабо единичное представление, то существует вероятностная мера $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ такая, что $\|T(\mu)\| < 1$ (см. [Margulis (1991)], III.1.3). Это соображение позволяет доказать следующее утверждение, более сильное, чем теорема 2.4:

Теорема 2.7. Пусть G — локально компактная группа, пусть T — ее унитарное представление, не содержащее слабо единичное представление. Пусть $S(g)v = T(g)v + \gamma(g)$ — аффинно неприводимое изометрическое действие группы G. Тогда соответствующее представление $\tilde{L}(\cdot)$ полугруппы $\mathscr{M}_0(\mathrm{G})$ неприводимо.

2.7. Литературные замечания. Полугруппа вероятностных мер на группе G (но не ее представления) — старый математический объект. В частности, полугруппа $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ — классический объект теории вероятности. Известно, в частности, описание генераторов однопараметрических полугрупп в $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ (теорема Леви—Колмогорова—Хинчина об условно положительно определенных функциях, см., например, [Ширяев (1980)], III.5), изучались и вопросы делимости в $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, см. [Линник (1960)], [Lukacs (1970)]. Существует литература, посвященная обобщениям результатов для $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ на другие группы, см. [Heyer (1977)].

Теорема о неприводимости $\tilde{L}(\mu)$ равносильна утверждению о неприводимости мультипликативного интеграла Араки. Исчерпывающий результат о неприводимости интеграла Араки содержится в [Delorme (1978)]. Приведенное в п. 2.6 рассуждение сообщил мне Р. С. Исмагилов.

§ 3. G-*стохастические ядра*

3.1. Группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть G — группа Ли, пусть M — пространство с непрерывной вероятностной мерой μ. Пусть $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ — та же группа, что и в п. 1.5, а $\mathrm{Ams}(M)$ — группа автоморфизмов пространства μ (см. § VIII.4). Группа Ams действует на $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$ автоморфизмами

$$g(m) \mapsto g(q(m)),$$

где $g(m) \in \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$, а $q \in \mathrm{Ams}$. Поэтому определено полупрямое произведение

$$\mathfrak{B}(\mathrm{G}) := \mathrm{Ams}(M) \ltimes \mathscr{F}(M, \mathrm{G}),$$

его элементы — это пары (q, g), где $q \in \mathrm{Ams}$, $g \in \mathscr{F}(M, \mathrm{G})$, а умножение определяется формулой

$$\big(q_1, g_1(m)\big) \cdot \big(q_2, g_2(m)\big) = \big(q_1 q_2, g_1\,(q_2(m))\, g_2(m)\big).$$

По-видимому, с точки зрения теории представлений группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ — объект более разумный, чем $\mathscr{F}(M, \mathrm{G})$.

Введем топологию на группе $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. На группе Ams мы введем обычную слабую топологию (см. п. VIII.4.3). С группой $\mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ дело обстоит чуть сложней. Представим группу G в виде объединения возрастающей последовательности компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$. Пусть $\mathscr{F}_j \subset \mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ — множество функций, принимающих значения в K_j. Тогда $\mathscr{F} = \bigcup_j \mathscr{F}_j$. Введем сначала топологию в $\mathscr{F}_j$. А именно, положим, что последовательность $g_1(m), g_2(m), \ldots \in \mathscr{F}_j$ сходится к $g(m)$, если она сходится по мере, т. е. для любой окрестности U единицы в G мера множества A_j всех $m \in M$ таких, что $g_j(m)^{-1}g(m) \notin U$, стремится к 0 при $j \to \infty$. (Легко видеть, что сходимость в $\mathscr{F}_j$ метризуема.) Наконец, последовательность $g_1(m), g_2(m), \ldots \in \mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ сходится, если все члены последовательности лежат в некотором $\mathscr{F}_j$ и при этом последовательность сходится в $\mathscr{F}_j$ (т.е. $\mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ снабжена топологией индуктивного предела $\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}_j$).

Наконец, сама группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ как множество есть произведение $\mathrm{Ams} \times \mathscr{F}(M,\mathrm{G})$, топология на $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, по определению, есть произведение топологий на Ams и $\mathscr{F}(M,\mathrm{G})$.

Замечание. На $\mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ мы выбрали, по-видимому, самую сильную из разумных топологий (так, чтобы представлений было бы побольше). Существует топология существенной равномерной сходимости, которая еще сильней, но она уже не очень естественна.

3.2. Простейшие представления группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть $\tau(g)$ — унитарное представление группы G в пространстве H. Тогда группа $\mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ действует в $L^2(M,H)$ унитарными преобразованиями

$$f(m) \mapsto \tau(g(m))f(m).$$

Группа Ams действует преобразованиями

$$f(m) \mapsto f(q(m)).$$

Таким образом, мы получили унитарное представление группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в пространстве $L^2(M,H)$.

Задача. Покажите, что если τ неприводимо и $\tau(g)$ не равно тождественно E, то и представление Q_τ неприводимо.

3.3. Фоковское представление группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть теперь группа G действует в гильбертовом пространстве H аффинными изометриями

$$S(g)h = \tau(g)h + \gamma(g).$$

Тогда группа $\mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ действует в $L^2(M,H)$ изометрическими аффинными преобразованиями

$$S(g(m))h(m) = \tau(g(m))h(m) + \gamma(g(m)),$$

а группа $\mathrm{Ams}(M)$ действует в $L^2(M,H)$ унитарными преобразованиями

$$h(m) \mapsto h(g(m)),$$

где $q \in \mathrm{Ams}(M)$.

Таким образом, мы получаем вложение группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в $\mathrm{Isom}\big(L^2(M,H)\big)$, а следовательно, и унитарное проективное представление группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в пространстве $F\big(L^2(M,H)\big)$. Итак, представление Араки группы $\mathscr{F}(M,\mathrm{G})$ продолжается до представления группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

Перейдем к описанию категорий, связанных с группами $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

3.4. G-стохастические ядра. Пусть G — группа Ли. Пусть (M,μ), (N,ν) — пространства с вероятностной мерой. G-*стохастическим ядром* (или G-*полиморфизмом*) $(M,\mu) \to (N,\nu)$ мы назовем борелевскую вероятностную меру $\varkappa$ на $M \times N \times \mathrm{G}$ такую, что

а) проекция меры $\varkappa$ на M есть μ;

б) проекция меры $\varkappa$ на N есть ν.

Если проекция меры $\varkappa$ на G имеет компактный носитель, мы будем говорить, что $\varkappa$ есть G-*стохастическое ядро с компактным носителем*.

Заметим, что проекция $\tilde{\varkappa}$ меры $\varkappa$ на $M \times N$ является обычным стохастическим ядром, или полиморфизмом (см. § VIII.4.). Так же, как в п. VIII.4, введем условные вероятностные меры $\tilde{\varkappa}_n$ на слоях $n \times M$ и $\tilde{\varkappa}_m$ на слоях $N \times m$.

Заметим, далее, что для данного $\varkappa$ для почти всех $(m,n) \in M \times N$ (в смысле меры $\varkappa$) определена условная вероятностная мера $\varkappa_{m,n}(g)$ на группе G так, что для любого измеримого подмножества $A \subset M \times N \times \mathrm{G}$ выполнено

$$\varkappa(A) = \int\limits_{M\times N} \varkappa_{m,n}\big(A \cap (m \times n \times \mathrm{G})\big)\, d\tilde{\varkappa}.$$

Пусть, далее, $\varkappa$ и ρ — соответственно G-стохастические ядра $(M,\mu) \to (N,\nu)$ и $(N,\nu) \to (S,\sigma)$. Их произведение $\pi = \rho \cdot \varkappa$ есть G-стохастическое ядро $(M,\mu) \to (S,\sigma)$, определяемое условиями

$$\tilde{\pi} = \tilde{\rho}\tilde{\varkappa} \text{ в категории } \mathbf{Mar}; \qquad \pi_{m,s}(g) = \int\limits_N \big(\rho_{n,s} * \varkappa_{m,n}(g)\big)\, d\tilde{\nu}_n.$$

Мы опускаем проверку корректности определения.

Эта формула особенно наглядна, когда все пространства M, N, S конечны. Пусть $m_1, m_2, \ldots$ — точки пространства M, а $n_1, n_2, \ldots$ — точки пространства N. Ограничивая меру $\varkappa$ на множество $m_i \times n_j \times \mathrm{G}$ (это множество отождествляется с группой G), мы получаем некоторую меру на G, которую мы обозначим через $\varkappa_{ij}$. Итак, полиморфизму $\varkappa$ соответствует матрица $\{\varkappa_{ij}\}$, составленная из мер на группе G, причем эта матрица удовлетворяет уравнениям

$$\sum_i \varkappa_{ij}(\mathrm{G}) = \nu(n_j), \qquad \sum_j \varkappa_{ij}(\mathrm{G}) = \nu(m_i). \tag{3.1}$$

Матрицы $K = \{\varkappa_{ij}\}$, $R = \{\rho_{si}\}$, $P = \{\pi_{sj}\}$, соответствующие морфизмам $\varkappa$, ρ, π, связаны соотношением

$$\pi_{sj} = \sum_i \frac{1}{\nu(n_i)} \rho_{si} * \nu_{ij}.$$

Удобнее записывать это равенство в матричной форме:

$$P = R \begin{pmatrix} \nu(n_1)^{-1} & & \\ & \nu(n_2)^{-1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} K.$$

Пример. Пусть M состоит из одной точки. Тогда полугруппа G-стохастических ядер на M совпадает с полугруппой $\mathscr{M}(\mathrm{G})$ из предыдущего параграфа.

3.5. Категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}$ и G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$. Через **G-$\overline{\mathbf{Mar}}$** (соответственно, **G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$**) мы обозначим категорию, объектами которой являются вероятностные пространства с мерой, а морфизмами — G-стохастические ядра (соответственно, G-стохастические ядра с компактным носителем).

Через **G-$\mathbf{Mar}_0$** мы обозначим подкатегорию в **G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$**, объектами которой являются конечные пространства с мерой, а морфизмы — те же, что и в **G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$**.

Введем в этих категориях инволюцию. Пусть $\varkappa \in \mathrm{Mor}(M, N)$. Тогда $\varkappa^* \in \mathrm{Mor}(N, M)$ есть образ меры $\varkappa$ при отображении $(m, n, g) \mapsto (n, m, g^{-1})$ из $M \times N \times \mathrm{G}$ в $N \times M \times \mathrm{G}$.

Введем, далее, топологию на этих категориях. Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa$ — элементы множества $\mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M, N)$. Последовательность $\varkappa_i$ сходится к $\varkappa$, если для любых измеримых множеств $A \subset M$, $B \subset N$ и любой финитной непрерывной функции f на G выполнено

$$\iiint\limits_{A\times B\times \mathrm{G}} f(g)\, d\varkappa_i(m, n, g) \to \iiint\limits_{A\times B\times \mathrm{G}} f(g)\, d\varkappa(m, n, g).$$

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M, N)$. Последовательность $\varkappa_i$ сходится к $\varkappa$, если она сходится в $\mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}$ и, кроме того, существует компактное множество $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ такое, что $\varkappa_i\big(M \times N \times (\mathrm{G} \setminus \mathrm{K})\big) = 0$ для всех i.

Покажем теперь, что все эти категории являются упорядоченными. Пусть N — пространство с мерой, а $\mathfrak{h}$ — его разбиение. В п. VIII.4.6 мы определили канонические морфизмы $\lambda^{\mathfrak{h}} : N / \mathfrak{h} \to N$ и $\mu^{\mathfrak{h}} : N \to N / \mathfrak{h}$ категории $\overline{\mathbf{Mar}}$. Но категория $\overline{\mathbf{Mar}}$ канонически вкладывается в **G-$\overline{\mathbf{Mar}}$**. А именно, морфизмы $\overline{\mathbf{Mar}}$ из M в N являются мерами на $M \times N$, а $M \times N$ канонически вкладывается в $M \times N \times \mathrm{G}$ по формуле $(m, n) \mapsto (m, n, e)$, где e — единица группы G. Поэтому меры на $M \times N$ можно рассматривать как меры на $M \times N \times \mathrm{G}$. Итак, морфизмы $\lambda^{\mathfrak{h}}$ и $\mu^{\mathfrak{h}}$ категории $\overline{\mathbf{Mar}}$ можно рассматривать как морфизмы категории **G-$\overline{\mathbf{Mar}}$**. Эти морфизмы и определяют на **G-$\overline{\mathbf{Mar}}$** структуру упорядоченной категории.

3.6. Группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}$. Пусть M — пространство с непрерывной вероятностной мерой. Построим канонический гомоморфизм группы $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в $\mathrm{Aut}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M)$. Пусть $r = (q, g) \in \mathfrak{B}(\mathrm{G})$ (см. обозначения п. 3.1). Рассмотрим вложение $M \to M \times M \times \mathrm{G}$, задаваемое формулой

$$m \mapsto \big(m, q(m), g(m)\big).$$

Пусть $\varkappa_r$ — образ меры μ при этом отображении. Легко видеть, что $\varkappa_r \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M)$, а $\varkappa_{r_1 r_2} = \varkappa_{r_1}\varkappa_{r_2}$ в категории **G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$**.

Задача. Покажите, что $\mathrm{Aut}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M)$ совпадает с $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

Задача. Покажите, что группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ плотна в $\mathrm{End}_{\mathrm{G}\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M)$.

3.7. Двойные классы смежности. Заметим, что группа $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ содержит тяжелую подгруппу Ams, и естественно посмотреть, не является ли наша группа (G, K)-парой.

Пусть $\mathfrak{h} : M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$ — конечное разбиение пространства M. Обозначим через $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ подгруппу в Ams, состоящую из отображений, переводящих каждое множество M_j в себя.

Пусть $\mathfrak{h} : M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$, $\mathfrak{h}' : M = M_1' \cup \ldots \cup M_{k'}$ — два конечных разбиения. Пусть $M / \mathfrak{h}$ и $M / \mathfrak{h}'$ — соответствующие факторпространства. Рассмотрим двойные классы смежности $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$. Покажем, что существует каноническая биекция

$$I : \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}} \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\mathrm{Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big). \tag{3.2}$$

Пусть $r = (q, g) \in \mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Пусть $A_{ij} = M_i \cap q^{-1}(M_j')$. Пусть $\varkappa_{ij}$ — образ меры μ при отображении $g : A_{ij} \to \mathrm{G}$. Составим матрицу, состоящую из мер $\varkappa_{ij}$ на G. Легко видеть, что $\varkappa$ удовлетворяет уравнениям (3.1), т. е. $\varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\mathrm{Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$.

Итак, мы построили отображение $g \mapsto \varkappa$ из $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ в $\mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\mathrm{Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$. Очевидно, что это отображение постоянно на двойных классах смежности. Легко видеть также, что оно сюръективно и разделяет двойные классы смежности. Биекция (3.2) построена.

С этого места мы будем отождествлять множества $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ и $\mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\mathrm{Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$.

Лемма 3.1. Биекция I является непрерывным отображением $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(\mathrm{G}) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$ на $\mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\mathrm{Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$.

Доказательство. Пусть $r_j = (q_j, g_j)$ — последовательность в $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, сходящаяся к $r = (q, g)$. Пусть $\varkappa^j, \varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{G}\text{-}\mathrm{Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big)$ — соответствующие G-стохастические ядра. Покажем, что $\varkappa^j$ сходится к $\varkappa$. Пусть $\varkappa^j_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — соответствующие матрицы, составленные из мер на G (см. п. 3.4). Нам нужно показать, что для каждой непрерывной функции f на G и любых α, β

$$\int\limits_{\mathrm{G}} f(h)\, d\varkappa^j_{\alpha\beta}(h) \to \int\limits_{\mathrm{G}} f(h)\, d\varkappa_{\alpha\beta}(h).$$

Заметим, что

$$\int f(h)\, d\varkappa^j_{\alpha\beta}(h) = \int\limits_{M_\beta \cap q_j^{-1} M_\alpha'} f(g_j(m))\, d\mu(m),$$

$$\int f(h)\, d\varkappa_{\alpha\beta}(h) = \int\limits_{M_\beta \cap g^{-1} M_\alpha'} f(g(m))\, d\mu(m).$$

Теперь заметим, что в силу сходимости $q_j \to q$ в Ams мы имеем

$$\mu\Big[\big(M_\beta \cap (q_j^{-1}) M_\alpha'\big) \triangle \big(M_\beta \cap (q^{-1}) M_\alpha'\big)\Big] \to 0. \tag{3.3}$$

при $j \to \infty$. Далее, заметим, что $f(g_j(m)) \to f(g(m))$ по мере. Учитывая, что функции $g_j(m)$ равномерно ограничены, мы получаем, что $f(g_j(m))$ тоже равномерно ограничены, поэтому мы имеем

$$\int\limits_{M_\beta \cap (q_j^{-1}) M_\alpha'} f(g_j(m))\, d\mu(m) \to \int\limits_{M_\beta \cap (q^{-1}) M_\alpha'} f(g(m))\, d\mu(m). \qquad \blacksquare$$

Замечание. На самом деле I является гомеоморфизмом, но это нам не понадобится.

3.8. Теорема мультипликативности. Пусть ρ — унитарное представление группы $\mathfrak{B}(G)$ в пространстве H. Пусть $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$ — конечные разбиения M. Обозначим через $H(\mathfrak{h})$ множество всех $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$-неподвижных векторов в H, а через $P(\mathfrak{h})$ — проектор на $H(\mathfrak{h})$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(G) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$. Определим оператор $\rho(\gamma) : H(\mathfrak{h}) \to H(\mathfrak{h}')$ по формуле

$$\rho(\gamma)h = P(\mathfrak{h}')\rho(g)\big|_{H(\mathfrak{h})},$$

где $g \in \gamma$.

Теорема 3.2.
а) Для любых

$$\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}, M / \mathfrak{h}'\big) \simeq \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'} \backslash \mathfrak{B}(G) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}},$$
$$\varkappa \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar}_0}\big(M / \mathfrak{h}', M / \mathfrak{h}''\big) \simeq \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}''} \backslash \mathfrak{B}(G) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'}$$

выполнено

$$\rho(\varkappa\gamma) = \rho(\varkappa)\rho(\gamma),$$

где $\varkappa$ и γ перемножаются как морфизмы в категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$.

б) $\rho(\gamma)^* = \rho(\gamma^*)$.

Иными словами, $M / \mathfrak{h} \mapsto H(\mathfrak{h})$, $\gamma \mapsto \rho(\gamma)$ есть представление категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$.

Доказательство этого утверждения содержится в следующем пункте.

Теорема 3.3. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — некоторое $*$-представление категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$, причем для любого $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{G\text{-}Mar}_0}$ выполнено $\|\rho(\gamma)\| \leqslant 1$. Тогда R однозначно продолжается до представления категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$.

Это очевидное следствие теоремы аппроксимации VIII.1.10.

Итак, рассмотрим три множества:

$\mathscr{X}$ — множество унитарных представлений группы $\mathfrak{B}(G)$;

$\mathscr{Y}$ — множество $*$-представлений категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$ сжимающими операторами;

$\mathscr{Z}$ — множество $*$-представлений категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$.

Мы построили в теоремах 3.2–3.3 канонические отображения $\mathscr{X} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{Y}$ и $\mathscr{Y} \xrightarrow{\beta} \mathscr{Z}$. Кроме того, существует очевидное отображение $\mathscr{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathscr{X}$, а именно, мы ограничиваем представление категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$ на группу $\mathfrak{B}(G) = \mathrm{Aut}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$.

Теорема 3.4. Канонические отображение α, β, γ являются биекциями.

Доказательство. «Прослеживание» конструкции показывает, что $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ есть тождественное отображение. В частности, γ сюръективно.

Лемма 3.5. γ инъективно.

Доказательство. Группа $\mathfrak{B}(G) = \mathrm{Aut}^*_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}}(M)$ плотна в $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}}(M)$. Поэтому представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ полностью определяется своим ограничением на $\mathfrak{B}(G)$. Покажем, что $*$-представление $\mathsf{R} = (R, \rho)$ категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$ полностью определяется своим ограничением на $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$. Для этого заметим, что группоид морфизмов категории $\mathbf{G\text{-}Mar}_0$ порожден полугруппой $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ и каноническими морфизмами $\lambda^{\mathfrak{h}}$, $\mu^{\mathfrak{h}} = (\lambda^{\mathfrak{h}})^*$. Но оператор $\rho(\lambda^{\mathfrak{h}})$ отождествляет пространство $R(M / \mathfrak{h})$ с $\mathrm{Im}\,\theta^{\mathfrak{h}}$ (напомним, что $\theta^{\mathfrak{h}}$ — канонические идемпотенты в $\mathrm{End}(M)$, см. VIII.4.6). Таким образом, можно считать, что $R(M / \mathfrak{h})$ есть $\mathrm{Im}\,\theta^{\mathfrak{h}}$, и, тем самым, если мы знаем представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$, то операторы $\rho(\lambda^{\mathfrak{h}})$ однозначно определены (это операторы тождественного вложения подпространства в пространство). Лемма доказана. ■

Лемма 3.6. Пусть $\mathsf{R} = (R, \rho)$ — $*$-представление категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$. Тогда $\|\rho(\gamma)\| \leqslant 1$ для любого морфизма γ.

Доказательство. Действительно, группа $\mathfrak{B}(G) = \mathrm{Aut}^*_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ плотна в полугруппе $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$; если $q \in \mathfrak{B}(G)$, то оператор $\rho(q)$ унитарен, в частности, $\|\rho(q)\| = 1$. Поэтому для любого $\gamma \in \mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ выполнено $\|\rho(\gamma)\| \leqslant 1$. Далее, $\|\rho(\lambda^{\mathfrak{h}})\| = 1$ (см. доказательство предыдущей леммы), а группоид морфизмов категории $\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0$ порожден полугруппой $\mathrm{End}_{\mathbf{G\text{-}\overline{Mar}}_0}(M)$ и морфизмами $\lambda^{\mathfrak{h}}$ и $\mu^{\mathfrak{h}} = (\lambda^{\mathfrak{h}})^*$. Лемма доказана. ■

В частности, лемма 3.6 (вместе с теоремой 3.3) показывает, что β — биекция. Теорема 3.4 доказана. ■

3.9. Доказательство теоремы 3.2. В силу теоремы VIII.5.1, мы должны доказать следующую лемму.

Лемма 3.7. Пусть $p_1 \in \gamma$, $p_2 \in \varkappa$ — элементы $\mathfrak{B}(G)$. Пусть $h_j \in \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}'}$ сходится к $\theta^{\mathfrak{h}'}$. Пусть σ_j — двойной класс смежности $\mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}''} \backslash \mathfrak{B}(G) / \mathrm{Ams}^{\mathfrak{h}}$, содержащий $p_2 h_j p_1$. Тогда σ_j сходится к γ.

Доказательство. Мы проведем доказательство в случае, когда все разбиения $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$ состоят из одного элемента; тем самым мы рассматриваем двойные классы смежности $\mathrm{Ams} \backslash \mathfrak{B}(G) / \mathrm{Ams}$. По небольшом размышлении ясно, что общий случай не отличается существенно от этого.

Далее, ясно, что истинность высказывания не изменится, если мы домножим p_1 на какой-нибудь элемент Ams слева, а p_2 — справа. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $p_1, p_2 \in \mathscr{F}(M, G)$. Пусть $p_1 = (e, g_1(m))$, $p_2 = (e, g_2(m))$, где e — единица Ams.

Теперь меры γ, $\varkappa$, σ_j на G суть образы меры μ на M при отображениях g_1, g_2, $g_2 h_j g_1$ соответственно. Нам нужно доказать, что последовательность мер σ_j сходится в полугруппе $\mathscr{M}_0(G)$ к свертке $\varkappa * \gamma$.

Пусть $K \subset G$ — произвольный компакт, содержащий носители мер γ и $\varkappa$. Разобьем K на n очень малых (в смысле равномерной структуры на G) подмножеств $K_1, \dots, K_n$. Выберем в каждом K_j точку x_j. Пусть, далее, A_j (соответственно, B_j) — прообраз K_j при отображении $p_2 : M \to G$ (соответственно, $p_1 : M \to G$).

Обозначим через δ_y меру на G, сосредоточенную в точке $y \in G$. Мера

$$\pi := \sum_{i,j} \mu(A_i)\mu(B_j)\delta_{x_i x_j} \tag{3.4}$$

близка к свертке $\varkappa * \nu$. Слово «близка» означает, что для любого заранее фиксированного набора непрерывных функций $f_1, \dots, f_s$ на G все разности

$$\int_G f_\alpha \, d(\varkappa * \nu) - \int_G f_\alpha \, d\pi$$

малы при достаточно малом разбиении $K = \bigcup_j K_j$. С другой стороны, последовательность $h_l \in \mathrm{Ams}$ сходится к $\theta = \mu \times \mu$. Поэтому при фиксированном разбиении $K = \bigcup K_j$ и больших l разности $\mu(A_i \cap h_l B_j) - \mu(A_i)\mu(B_j)$ малы, и по этой причине мера σ_l очень близка к (3.4). ■

3.10. Тривиальные представления категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть T — неприводимое унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Построим по нему $*$-представление $\mathrm{A}_T = (A_T, \alpha_T)$ категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть (N, ν) — объект G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Тогда пространство $A_T(N)$ есть пространство $L^2(N, V)$, состоящее из V-значных функций на N со скалярным произведением

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_N \bigl(v_1(n), v_2(n)\bigr)\, d\nu(n).$$

Пусть, далее, (N, ν), $(K, \varkappa)$ — объекты категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Mor}_{G\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M, N)$. Тогда оператор $\alpha_T(\gamma) : L^2(M, V) \to L^2(N, V)$ задается формулой

$$\alpha_T(\gamma)v(n) = \iint_{M\times G} T(g)v(m)\, d\gamma_n(m, g),$$

где $\gamma_n(m, g)$ — условная мера на $n \times M \times G \subset N \times M \times G$, соответствующая мере γ.

Понятно, что ограничение представлений $\mathrm{A}_T = (A_T, \alpha_T)$ на группу $\mathfrak{B}(G)$ суть представления п. 3.2.

3.11. Фоковское представление категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$. Пусть группа G действует в гильбертовом пространстве V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ аффинными изометриями

$$S(g)h = T(g)h + \gamma(g).$$

Построим по этому действию некоторое представление $\mathrm{Q} = (Q, \varkappa)$ категории G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$. Пусть (M, μ) — объект G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$. Тогда $Q(M)$ есть бозонное пространство Фока $F(L^2(M, V))$. Пусть (M, μ), (N, ν) — объекты G-$\overline{\mathbf{Mar}}_0$, а π — морфизм $M \to N$. Тогда оператор $\varkappa(\pi) : F\bigl(L^2(M, V)\bigr) \to F\bigl(L^2(N, V)\bigr)$ задается формулой

$$\varkappa(\pi)f(z) = \exp\{d(\pi)\}\exp\{z, c(\pi)\} f\,(A(\pi)z + b(\pi)),$$

где

$$A(\pi)v(n) = \iint_{M\times G} T(g)f(m)\, d\pi_n(m, g),$$

$$b(\pi) = \iint_{M\times G} \gamma(g)\, d\pi_n(m, g),$$

$$c(\pi) = \iint_{M\times G} \gamma(g^{-1})\, d\pi_m(n, g),$$

$$d(\pi) = -\frac{1}{2} \iiint_{M\times N\times G} \|\gamma(g)\|^2\, d\pi(m, n, g).$$

Через $\pi_m(n, g)$ обозначены условные меры на слоях $m \times N \times G$, а через $\pi_n(m, g)$ — условные меры на слоях $M \times n \times G$.

Прямое вычисление (мы его опускаем) показывает, что

$$\varkappa(\pi)\varkappa(\psi) = \exp\bigl\{i\,\mathrm{Im}\langle c(\psi), b(\pi)\rangle\bigr\}\varkappa(\pi\psi).$$

Легко видеть, что

1. ограничение представления $\mathrm{Q} = (Q, \varkappa)$ на группу $\mathfrak{B}(G)$ есть представление п. 3.3 (а ограничение на $\mathscr{F}(M, G)$ — соответственно мультипликативный интеграл Араки);

2. если P — одноточечное пространство с мерой, то $\mathrm{End}_{G\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(P) = \mathscr{M}_0(G)$, и ограничение представления Q на $\mathscr{M}_0(G)$ есть представление п. 2.3.

Задача. Покажите, что $\|\varkappa(\pi)\| \leqslant 1$ для всех π.

Задача. Найдите замыкание группы $\mathscr{F}(M, G) \subset \mathfrak{B}(G)$ в полугруппе $\mathrm{End}_{G\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M)$.

Задача. Покажите, что при выполнении условий теоремы 2.4 представление Араки группы $\mathscr{F}(M, G)$ неприводимо.

3.12. Замечания. Плотные вложения групп диффеоморфизмов в полугруппы G-стохастических ядер. Пусть $n > 1$. Рассмотрим n-мерное многообразие M^n, снабженное формой объема ω. Пусть μ — соответствующая мера Лебега. Обозначим через D группу диффеоморфизмов многообразия M^n, сохраняющих форму объема. Сейчас мы построим несколько вложений группы D в полугруппы $\mathrm{Mor}_{G\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$ для различных групп G.

А. Конструкция с группой струй (см. [Неретин (1992)]).

Задача. Пусть группа D действует в $L^2(M^n)$ заменами переменной

$$T(q)f(m) = f(q(m)).$$

Покажите, что множество операторов вида $T(q)$ плотно в $\mathrm{End}_{\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$.

Выкинем из M^n конечное число подмногообразий $A_1, \dots, A_N$ так, что $M^n \setminus \bigl(\bigcup A_j\bigr)$ можно отобразить диффеоморфно с сохранением формы объема на некоторую (быть может, несвязную) область $U \subset \mathbb{R}^n$. Отождествим $M^n \setminus \bigl(\bigcup A_j\bigr)$ с U. Пусть q — диффеоморфизм многообразия M^n, отождествляемый с определенным почти всюду отображением $U \to U$. Обозначим через $J_q(x)$ матрицу Якоби отображения $q : U \to U$ точке x. Поставим в соответствие диффеоморфизму q выражение $r(q) = \bigl(q(x), J_q(x)\bigr)$. Легко видеть, что $q \mapsto r(q)$ есть вложение группы D в группу

$$\mathfrak{B}\bigl(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})\bigr) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n).$$

Оказывается, что образ группы D плотен в группе $\mathfrak{B}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}))$, а следовательно, и в полугруппе $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$. Последнее высказывание, в сущности, очевидно, но его аккуратное доказательство занимает довольно много места.

Конструкция допускает следующее незамысловатое обобщение. Пусть Jet_n^k — группа k-струй сохраняющих объем отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Обозначим через $J_q^k(x)$ k-струю отображения q в точке x. Далее, поставим в соответствие элементу $q \in \mathrm{D}$ пару $r^k(q) = (q(x), J_q^k(x)) \in \mathfrak{B}(\mathrm{Jet}_n^k)$. Это дает плотное вложение $\pi : \mathrm{D} \to \mathrm{End}_{\mathrm{Jet}_n^k\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$.

Может показаться, что эти вложения зависят от выбора «карты» U и отображения $\sigma : U \to M^n$. Однако замена отображения σ на какое-либо другое приводит к замене вложения π на вложение вида $s^{-1}\pi s$, где s — некоторый элемент $\mathfrak{B}(\mathrm{Jet}_n^k)$.

При $n = 2$ можно ограничить фоковское представление полугруппы $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}(M^2)$ на D и получить (неприводимое) представление D в бозонном пространстве Фока (здесь для доказательства неприводимости нужна еще аккуратная проверка сходимости, потому что группа D плотна в $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}$, но не в $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}_0}$).

По-видимому, другие группы Jet_n^k не имеют нетривиальных аффинных действий, и здесь для построения представлений можно применять лишь тривиальные конструкции типа п. 3.10, что, конечно, малоинтересно.

B. Конструкция с фундаментальной группой [Исмагилов (1980)]; см. также [Исмагилов (1997), [Неретин (1997б)]. Пусть M^n не односвязно, пусть $\pi(M^n)$ — фундаментальная группа многообразия M^n, а Z — ее центр. Пусть D_0 — компонента связности единицы группы D.

Обозначим через $\widetilde{M}^n$ универсальное накрытие над M^n, а $\sigma : \widetilde{M}^n \to M^n$ — отображение накрытия. Группа $\pi_1(M^n)$ действует на $\widetilde{M}^n$ преобразованиями монодромии $\theta_g : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$, при этом для любого $g \in \pi_1(M^n)$ выполнено $\sigma \circ \theta_g = \sigma$. Далее, любой диффеоморфизм $q \in \mathrm{D}_0$ можно поднять до диффеоморфизма $\tilde{q}$ многообразия $\widetilde{M}^n$ так, что $\sigma \circ \tilde{q} = q\sigma$. При этом $\tilde{q}$ коммутирует со всеми преобразованиями θ_g. Заметим, далее, что $\tilde{q}$ определяется диффеоморфизмом q не однозначно, а лишь с точностью до умножения на преобразования θ_g, где $g \in Z$.

Рассмотрим теперь в $\widetilde{M}^n$ открытую ограниченную («фундаментальную») область U такую, что множества $\theta_g U$ попарно не пересекаются, а $\widetilde{M}^n \setminus \left(\bigcup_g \theta_g U\right)$ есть множество нулевой меры. Пусть $q \in \mathrm{D}_0$, а $\tilde{q}$ — накрывающий диффеоморфизм. Построим по $\tilde{q}$ элемент $r = r(q)$ группы $\mathfrak{B}(\pi_1(\widetilde{M}^n)) = \mathrm{Aut}_{\pi_1(M^n)\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n)$. А именно, пусть $m \in M^n$, а $\tilde{m} \in U$ таков, что $\sigma\tilde{m} = m$. Определим (измеримую) функцию $g : M^n \to \pi_1(\mathrm{G})$ из условия

$$\tilde{q}\tilde{m} \in g(m)U.$$

Функция $g(m)$ определена не однозначно, а лишь с точностью до умножения на постоянную функцию, принимающую значения в центре Z группы $\pi_1(M^n)$ (потому что неоднозначно определен диффеоморфизм $\tilde{q}$). Теперь полагаем

$$r(q) = (q(m), g(m)) \in \mathfrak{B}(\pi_1(M^n)).$$

Так как $r(q)$ определен неоднозначно, мы фактически получаем вложение

$$\mathrm{D}_0 \to \mathfrak{B}(\pi_1(M^n)) / \mathrm{Z},$$

где Z — группа постоянных функций на M^n со значениями в центре группы $\pi_1(M^n)$. Оказывается, что образ группы D_0 плотен в $\mathfrak{B}(\pi_1(M^n)) / \mathrm{Z}$, а значит, и в $\mathrm{End}_{\pi_1(M^n)\text{-}\overline{\mathrm{Mar}}}(M^n) / \mathrm{Z}$.

Теперь, имея неприводимое унитарное представление группы $\pi_1(M^n)$, мы можем применить тривиальную конструкцию п. 3.10 и получить неприводимое унитарное представление группы D_0. Аналогично, имея неприводимое аффинное изометрическое действие группы $\pi_1(M^n)$, мы получаем унитарное (вообще говоря, проективное) представление группы D_0 в пространстве Фока.

Замечание. На первый взгляд кажется, что разрезание многообразия на фундаментальные области содержит элемент насилия. В действительности неинвариантной является не сама конструкция, а использованный нами язык. Рассмотрим аффинное изометрическое действие S группы $\pi_1(M^n)$ на гильбертовом пространстве V. Рассмотрим косое произведение (см., например, [Кириллов (1972)], 13.4)

$$Q = \widetilde{M} \underset{\pi_1(M^n)}{\times} V.$$

Тогда Q проектируется на M^n со слоем V, т. е. мы получаем расслоение над M^n, слоем которого является аффинное гильбертово пространство V. Группа D_0 действует изометриями на пространстве $\mathscr{L}$ сечений этого расслоения, поэтому D_0 вкладывается в группу $\mathrm{Isom}(\mathscr{L})$, и в итоге мы получаем ту же самую конструкцию.

Встает вопрос о том, имеет ли группа $\pi_1(M^n)$ аффинные действия. Это заведомо так, если группа $\pi_1(M)$ имеет гомоморфизмы в $\mathbb{Z}$, отличные от единичного (действительно, $\mathbb{Z}$ действует на прямой $\mathbb{R}$ сдвигами), что в свою очередь равносильно нетривиальности группы $\mathrm{H}^1(M^n, \mathbb{R})$ первых когомологий $M^n(\mathbb{R})$ с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим, далее, двумерную компактную риманову поверхность M^2. Она получается факторизацией плоскости Лобачевского по некоторой дискретной счетной подгруппе $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Теперь предложение 1.3 дает неприводимое аффинное изометрическое действие Diff.

3.13. Литературные замечания. Параграф основан в основном на [Неретин (1992)]. Группы диффеоморфизмов многомерных многообразий изучались по разным поводам (гидродинамика, топология, дифференциальная геометрия). Мы приведем несколько ссылок, касающихся этих страшных групп: [Arnold, Khesin (1992)] (экзотические эргодические инварианты), [Kervaire, Milnor (1963)] (компоненты связности группы диффеоморфизмов n-мерной сферы), [Brenier (1994)] (гидродинамика), [Hofer, Zehnder (1994)], [McDuff, Salamon (1995)] (симплектоморфизмы и симплектическая топология), [Ismagilov (1997)] (представления).

§ 4. Группа преобразований, оставляющих σ-конечную меру квазиинвариантной, и меры Пуассона

Этот параграф посвящен одной интересной группе, незаслуженно обойденной вниманием.

4.1. Группа Gms_∞. Пусть M — лебеговское пространство с бесконечной непрерывной мерой μ. Без ограничения общности можно считать, что M — это прямая $\mathbb{R}$, снабженная обычной мерой Лебега. Обозначим через Gms_∞ группу биективных (с точностью до множества нулевой меры) преобразований $g : M \to M$, оставляющих меру μ квазиинвариантной, причем производная Радона—Никодима $g'(m)$ удовлетворяет условию

$$\int_M \left|g'(m) - 1\right| \, d\mu(m) < \infty.$$

Задача. Покажите, что Gms_∞ является группой.

Определим, далее, на группе Gms_∞ функционал $\chi(g) : \mathrm{Gms}_\infty \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\chi(g) = \int_M \left(g'(m) - 1\right) \, d\mu(m).$$

Задача.

а) Покажите, что
$$\chi(g_1g_2) = \chi(g_1) + \chi(g_2).$$

б) Пусть $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ — последовательность подмножеств в M, имеющих конечную меру, причем $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j = M$. Покажите, что
$$\chi(g) = \lim_{j\to\infty} \big(\mu(gM_j) - \mu(M_j)\big)$$

Мы видим, что группа Gms_∞ содержит нормальную подгруппу, выделяемую условием $\chi(g) = 0$.

4.2. Меры Пуассона. Пусть M — пространство с бесконечной непрерывной мерой μ. Обозначим через $\Omega(M)$ пространство неупорядоченных счетных подмножеств в M. Мы будем называть точки пространства $\Omega(M)$ *конфигурациями*. Сейчас мы введем на $\Omega(M)$ вероятностную меру $\nu_t = \nu_t^M$, называемую *мерой Пуассона*.

Фиксируем число $t > 0$. Пусть $A \subset M$ — измеримое подмножество конечной ненулевой меры. Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $S(A, j)$ подмножество в $\Omega(M)$, состоящее из всех конфигураций $\omega = (m_1, m_2, \ldots) \in \Omega(M)$ таких, что пересечение $\omega \cap A$ содержит ровно j точек. Мера ν_t будет определена на борелевской σ-алгебре, порожденной множествами вида $S(A, j)$. Положим
$$\nu_t\,(S(A,j)) = \frac{(t\mu(A))^j}{j!}\, e^{-t\mu(A)}.$$

Легко видеть, что
$$\sum_{j=0}^{\infty} \nu_t\,(S(A,j)) = 1,$$
тем самым вероятность того, что в множество A конечной меры попадает бесконечное число точек из $\omega \in \Omega(M)$, равна 0.

Пусть, далее, измеримые множества $A_1, \ldots, A_p$ попарно не пересекаются. Тогда положим
$$\nu_t\Big(\bigcap_{k=1}^{p} (S(A_k, n_k))\Big) = \prod_{k=1}^{p} \nu_t\,(S(A_k, n_k)).$$
На теоретико-вероятностном языке это означает, что *события* $S(A_k, n_k)$ *независимы*.

Мера ν_t определена. Корректность определения вытекает из теоремы Колмогорова о проективных системах мер (см., например, [Ширяев (1980)]).

Задача. Пусть $B \subset M$ — бесконечное подмножество. Тогда с вероятностью 1 в B содержится бесконечно много точек $\omega \in \Omega(M)$.

Задача. Покажите, что среднее число точек из конфигурации $\omega \in \Omega(M)$, попадающих в подмножество $A \subset M$ конечной меры, равно $t\mu(A)$.

Чуть ниже мы увидим, что меры ν_t являются Gms_∞-квазиинвариантными. Сейчас же мы сделаем одно простое, но полезное замечание.

Пусть M — множество с конечной непрерывной мерой. Обозначим через $\Omega(M)$ множество *конечных* подмножеств M (включая пустое множество). Повторяя дословно определение меры $\nu_t = \nu_t^M$ для этого случая, мы получаем вероятностную меру на $\Omega(M)$.

Пусть теперь пространство с бесконечной мерой M представлено в виде объединения $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$ измеримых подмножеств ненулевой меры. Построим канонический изоморфизм
$$\Omega(M) \leftrightarrow \Omega(M_1) \times \Omega(M_2) \times \ldots \times \Omega(M_k).$$
А именно, пусть $\omega \in \Omega(M)$. Тогда $\omega^{(j)} = \omega \cap M_j$ есть элемент $\Omega(M_j)$. Таким образом, конфигурации $\omega \in \Omega(M)$ мы поставили в соответствие набор конфигураций $\omega^{(j)} \in \Omega(M_j)$. Легко видеть, что
$$\nu_t^M = \nu_t^{M_1} \times \nu_t^{M_2} \times \ldots \times \nu_t^{M_k}. \tag{4.1}$$

4.3. Каноническая изометрия пространства $L^2(\Omega(M))$ с бозонным пространством Фока $F(L^2(M))$. Назовем измеримую функцию ψ на M *ступенчатой*, если она принимает лишь конечное число значений и отлична от 0 лишь на множестве конечной меры.

Пусть ψ — ступенчатая функция на M. Определим функцию E_ψ на $\Omega(M)$ с помощью равенства
$$E_\psi(\omega) = \exp\Big(-t \int_M \psi(m)\,d\mu(m)\Big) \prod_{m_j\in\omega} \big(1 + \psi(m_j)\big). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1.

а) (*формула Кэмпбелла*) $\displaystyle\int_{\Omega(M)} E_\psi(\omega)\,d\nu_t(\omega) = 1;$

б) $$\int_{\Omega(M)} E_\psi(\omega)\overline{E_\theta(\omega)}\,d\nu_t(\omega) = \exp\Big(\int_M \psi(m)\bar\theta(m)\,d\mu(m)\Big). \tag{4.3}$$

Доказательство.

а) Пусть функция ψ принимает значение λ_k на множестве $A_k \subset M$ ($k = 1, \ldots, l$). Заметим, что функция E_ψ постоянна на множестве $\bigcap\limits_{k=1}^{l} S(A_k, n_k)$ и равна на нем
$$\exp\Big(-t\sum \lambda_k\mu(A_k)\Big) \prod_{k=1}^{l} (1 + \lambda_k)^{n_k}.$$
Поэтому
$$\int_{\Omega(M)} E_\psi(\omega)\,d\omega = \sum_{n_1,\ldots,n_k} \exp\Big(-t\sum_k \lambda_k\mu(A_k)\Big) \prod_{k=1}^{l} (1+\lambda_k)^{n_k} \prod_{k=1}^{l} \Big[\frac{(t\mu(A_k))^{n_k}}{n_k!}\, e^{-t\mu(A_k)}\Big],$$
а это, с очевидностью, равно 1.

б) Легко видеть, что

$$E_\psi(\omega)E_{\bar\theta}(\omega) = \exp\left(t\int_M \psi(m)\bar\theta(m)\,dm\right)E_{(1+\psi)(1+\bar\theta)-1}.$$

Теперь применяем утверждение а). Теорема доказана. ∎

Следствие 4.2. Пусть последовательность $\psi_j(m)$ ступенчатых функций сходится к $\psi(m)$ в $L^2(M)$. Тогда последовательность $E_{\psi_j}(\omega)$ фундаментальна в $L^2(\Omega(M))$.

Доказательство.

$$\left\|E_{\psi_j}(\omega) - E_{\psi_i}(\omega)\right\|^2_{L^2} = \int_{\Omega(M)} \left(E_{\psi_j}\overline{E}_{\psi_j} - E_{\psi_j}\overline{E}_{\psi_i} - E_{\psi_i}\overline{E}_{\psi_j} + E_{\psi_i}\overline{E}_{\psi_i}\right) d\nu_t.$$

Формула (4.3) делает стремление этой величины к 0 очевидным. ∎

В силу этого следствия отображение

$$\psi \mapsto E_\psi$$

продолжается до непрерывного отображения

$$L^2(M) \to L^2(\Omega(M)).$$

Мы сохраним за этим отображением то же обозначение $\psi \mapsto E_\psi$.

Предложение 4.3. Линейные комбинации функций E_ψ плотны в $L^2(\Omega(M))$.

Доказательство. Пусть $A_1, \dots, A_l$ — попарно непересекающиеся подмножества конечной меры в M. Пусть ψ принимает значения $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ на множествах $A_1, \dots, A_l$ и равна 0 вне $\bigcup A_j$. Рассмотрим функцию

$$\chi(\omega) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^{n_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_l}\right)^{n_l} E_\psi(\omega)\Big|_{\lambda_1=\dots=\lambda_l=-1}.$$

Легко видеть, что функция $\chi(\omega)$ равна ненулевой постоянной на множестве $\bigcap_j S(A_j, n_j)$ и равна 0 вне этого множества. Теперь утверждение становится очевидным. ∎

Напомним теперь (см. § VI.1), что в бозонном пространстве Фока $F(H)$ мы определяли систему функций φ_h такую, что

$$\langle \varphi_h, \varphi_{h'}\rangle = \exp(h', h).$$

Рассмотрим в качестве H пространство $L^2(M)$. Тогда

$$\langle \varphi_h, \varphi_{h'}\rangle = \exp\left(\int_M \overline{h(m)}h'(m)\,d\mu(m)\right).$$

Мы видим, что

$$\langle \varphi_h, \varphi_{h'}\rangle_{F(L^2(M))} = \langle E_{\bar h}, E_{\bar h}'\rangle_{L^2(\Omega(M))}.$$

Таким образом, мы можем отождествить $F(L^2(M))$ с $L^2(\Omega(M))$, отождествляя функции $\varphi_h \in F(L^2(M))$ и $E_{\bar h} \in L^2(\Omega(M))$. Учитывая, что в пространстве Фока

$$\langle f, \varphi_h\rangle = f(h),$$

мы получаем явную формулу для унитарного оператора $I : L^2(\Omega(M)) \to F(L^2(M))$:

$$Ig(h) = \int_{\Omega(M)} g(\omega)E_h(\omega)\,d\nu_t(\omega).$$

4.4. Некоторые вспомогательные свойства функций E_ψ. Нам понадобятся функции E_ψ для некоторых $\psi \notin L^2(M)$. Пусть $\psi \in L_1(M)$ вещественна и неотрицательна. Пусть $\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \dots$ — последовательность неотрицательных ступенчатых функций, сходящихся к ψ поточечно. Тогда последовательность функций

$$\widetilde{E}_{\psi_j}(\omega) = \prod_{m_\alpha \in \omega} \left(1 + \psi_j(m_\alpha)\right)$$

монотонно возрастает, а интегралы от них

$$\int_{\Omega(M)} \widetilde{E}_{\psi_j}(\omega)\,d\omega = \exp\left(t\int_M \psi_j(m)\,d\mu(m)\right)$$

ограничены. По теореме о монотонной сходимости последовательность $\widetilde{E}_{\psi_j}$ сходится поточечно (а также в $L^1(\Omega(M))$) к некоторой функции $\widetilde{E}_\psi$. Теперь мы можем положить

$$E_\psi(\omega) = \exp\left(-t\int_M \psi(m)\,d\mu(m)\right)\widetilde{E}_\psi(\omega).$$

Лемма 4.4. Пусть $\psi \in L^1(M)$ и $\psi \geqslant 0$ или $\psi \in L^2(M)$. Пусть множества $A_1, \dots, A_l$ конечной меры попарно не пересекаются. Тогда

$$\int_{\bigcap_j S(A_j,n_j)} E_\psi(\omega)\,d\omega = \exp\left(-t\int_{A_1\cup\dots\cup A_l} (\psi(m)+1)\,d\mu(m)\right)\prod_{j=1}^{l}\frac{1}{n_j!}\left(t\int_{A_j}(\psi(m)+1)\,d\mu(m)\right)^{n_j}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $A_{l+1} = M \setminus \left(\bigcup A_j\right)$. Определим функции $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{l+1}$ так, что $\varkappa_j = \psi$ на A_j и $\varkappa_j$ равна 0 вне A_j. Легко видеть, что

$$E_\psi = E_{\varkappa_1}E_{\varkappa_2}\dots E_{\varkappa_l}E_{\varkappa_{l+1}}. \tag{4.5}$$

При этом функция $E_{\varkappa_\alpha}(\omega)$ зависит лишь от $\omega \cap A_j$, а не от самого ω. Учитывая (4.1), получаем

$$\int_{\bigcap_j S(A_j,n_j)} E_\psi(\omega)\,d\nu_t^M(\omega) = \prod_{j=1}^{l}\int_{S(A_j,n_j)} E_{\varkappa_j}(\omega)\,d\nu_t^{A_j}(\omega).$$

Итак, нам достаточно проверить формулу

$$\int_{S(A,k)} E_\varkappa(\omega)\,d\nu_t(\omega) = \exp\left(-t\int_A (\varkappa(m)+1)\,d\mu(m)\right)\frac{1}{k!}\left(t\int_A(\varkappa(m)+1)\,d\mu(m)\right)^k, \tag{4.6}$$

где $\varkappa$ равно 0 вне A. Обозначим через $\chi(A,k\,|\,\omega)$ функцию, равную 1 на $S(A,k)$ и равную 0 на $S(A,j)$ при $j\neq k$. Рассмотрим производящую функцию

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \int\limits_{S(A,k)} E_\varkappa(\omega)\,d\nu_t(\omega) = \int\limits_{\Omega(M)} E_\varkappa(\omega)\Big(\sum z^k\chi(A,k\,|\,\omega)\Big)\,d\nu_t(\omega). \tag{4.7}$$

Далее, заметим, что выражение

$$\sum z^k\chi(A,k\,|\,w)$$

само является функцией вида $\lambda\cdot E_{\theta_z}$, где

$$\theta_z(m)=\begin{cases}(z-1), & m\in A,\\ 0, & m\notin A,\end{cases}$$

а

$$\lambda=\exp\big((z-1)\mu(A)\big).$$

Поэтому (4.7) равно

$$\lambda\int\limits_{\Omega(M)} E_\varkappa(\omega)E_{\theta_z}(\omega)d\nu_t(\omega)=\exp\big(t(z-1)\mu(A)\big)\exp\Big(t(z-1)\int\limits_A \varkappa(m)\,d\mu(m)\Big)=$$

$$=\exp\Big(-t\int\limits_A(\varkappa(m)+1)\,d\mu(m)\Big)\exp\Big(tz\int\limits_A(\varkappa(m)+1)\,d\mu(m)\Big).$$

Коэффициент при z^k дает правую часть формулы (4.6). Корректность этого вычисления нуждается в некотором обосновании. Проведем его сначала в случае положительной функции $\psi\in L^1(M)$ (именно это мы будем использовать ниже). Понятно, что для ступенчатой функции ψ формула (4.4) верна. Далее, снова берем последовательность $\psi_1\leqslant\psi_2\leqslant\ldots$ ступенчатых функций, сходящуюся почти всюду к ψ, а затем по теореме о монотонной сходимости мы можем перейти к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_{\bigcap_j S(A_j,n_j)} \widetilde{E}_{\psi_p}\,d\nu.$$

Чтобы провести обоснование в случае $\psi(m)\in L^2$, заметим, что формула (4.4) верна для ступенчатых функций, а так как обе части непрерывно зависят от $\psi\in L^2$, формула верна всегда. ■

4.5. Действие группы Gms_∞ **в** $L^2(\Omega(M))$. Группа Gms_∞ действует на множестве $\Omega(M)$ очевидным образом, а именно, если $g\in\mathrm{Gms}_\infty$, а $\omega=(m_1,m_2,\ldots)\in\Omega(M)$, то $g\omega:=(gm_1,gm_2,\ldots)$.

Теорема 4.5. Мера ν_t квазиинвариантна относительно действия группы Gms_∞, при этом производная Радона—Никодима преобразования $g:\omega\mapsto g\omega$ равна $E_{g'-1}$, где $g'(m)$ — производная Радона—Никодима преобразования $g:M\to M$.

Доказательство. Итак, нужно проверить, что для любого измеримого множества $B\subset\Omega(M)$ выполнено

$$\mu(gB)=\int\limits_B E_{g'-1}(\omega)\,d\nu_t(\omega).$$

Это достаточно сделать в случае, когда $B=\bigcap_{j=1}^k S(A_j,n_j)$. В силу леммы 4.4

$$\int\limits_{\bigcap_{j=1}^k S(A_j,n_j)} E_{g'-1}(\omega)\,d\nu_t(\omega)=\prod_{j=1}^k\Big[\exp\Big(-t\int\limits_{A_j}g'(m)\,d\mu(m)\Big)\frac{1}{n_j!}\Big(t\int\limits_{A_j}g'(m)\,d\mu(m)\Big)^{n_j}\Big].$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{A_j} g'(m)\,d\mu(m)=\mu(gA_j),$$

мы получаем искомое утверждение. ■

Наличие Gms_∞-квазиинвариантной меры автоматически дает серию унитарных представлений группы Gms_∞. А именно, Gms_∞ действует в $L^2\big(\Omega(M),\nu_t\big)$ по формуле

$$T_{s,t}(g)f(\omega)=f(g\omega)(E_{g'-1}(\omega))^{(1/2)+is},$$

где $s\in\mathbb{R}$, $g\in\mathrm{Gms}_\infty$, $\omega\in\Omega(M)$.

4.6. Действие группы Gms_∞ **в пространстве Фока** $L^2(M)$. В п. 4.3 мы отождествили пространства $L^2\big(\Omega(M,\nu_t)\big)$ и $F(L^2(M))$. Поэтому Gms_∞ действует в $F(L^2(M))$. Построить это действие очень просто.

Пусть Gms_∞ действует $L^2(M)$ аффинными преобразованиями $A_{s,t}(g)$ по формуле

$$A_s(g)f(m)=f(g(m))g'(m)^{(1/2)+is}+\sqrt{t}\big(g'(m)^{(1/2)+is}-1\big),$$

где $t>0$, $s\in\mathbb{R}$. Важно заметить, что $1\notin L^2(M)$, но $\big(g'(m)^{(1/2)+is}-1\big)\in L^2(M)$. Таким образом, мы получили вложение группы Gms_∞ в группу $\mathrm{Isom}(L^2(M))$. Ограничивая представление Exp группы Isom на подгруппу Gms_∞, мы получаем некоторое унитарное проективное представление $P_{s,t}$ группы Gms_∞ в $F(L^2(M))$. По построению, представление $P_{s,t}$ является проективным. На самом деле оно линеаризуемо. Для того, чтобы сделать $P_{s,t}$ линейным, нужно скалярный множитель

$$\exp\big\{-\tfrac12\langle b,b\rangle\big\}=\exp\Big\{-\frac{t}{2}\int\limits_M\big|(p'(m))^{(1/2)+is}-1\big|^2\,d\mu(m)\Big\}$$

в формуле (1.1) заменить на

$$\exp\Big(-\frac{t}{2}\int\limits_M\big((p'(m))^{(1/2)+is}-1\big)^2\,d\mu(m)\Big).$$

Задача. Покажите, что каноническая изометрия $L^2\big(\Omega(M),\nu_t\big)\leftrightarrow F(L^2(M))$ отождествляет представления $T_{s,t}$ и $P_{s,t}$ группы Gms_∞.

Задача. Докажите, что представления $T_{s,t}$ неприводимы и попарно неэквивалентны.

4.7. Конструкции представлений группы Gms_∞. Группа Gms_∞ имеет довольно много унитарных представлений. Сейчас мы построим серию действий Gms_∞ в бозонном пространстве Фока.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_k$, $t > 0$. Определим аффинное действие $A_{s_1,\ldots,s_k;t}$ группы Gms_∞ в пространстве L^2 на k-кратном произведении $M^{(k)} = M \times \ldots \times M$:

$$A_{s_1,\ldots,s_k;t}(g)f(m_1,\ldots,m_k) = f(gm_1,\ldots,gm_k)\prod_{j=1}^{k}(g'(m_j))^{(1/2)+is_j} + \sqrt{t}\Big(\prod_{j=1}^{k}(g'(m_j))^{(1/2)+is_j} - 1\Big).$$

Таким образом, мы получаем серию вложений

$$\mathrm{Gms}_\infty \to \mathrm{Isom}\Big(L^2(M \times M \times \ldots \times M)\Big)$$

и, следовательно, серию унитарных представлений Gms_∞. Можно показать, что все полученные таким образом представления попарно неэквивалентны, а при $s_1 > s_2 > \ldots > s_k$ — неприводимы.

Замечание. Эти же представления можно построить с помощью пуассоновских мер применением стандартной процедуры индуцирования, см. [Исмагилов (1975)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1975)].

4.8. Двойные классы смежности. Рассмотрим теперь в Gms_∞ подгруппу Ams_∞, состоящую из преобразований, сохраняющих меру. Напомним, что Ams_∞ является тяжелой группой.

Рассмотрим, далее, разбиение $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_\infty$ пространства M, причем множества $M_1, M_2, \ldots, M_k$ имеют конечную меру, а мера множества M_∞ — бесконечна. Обозначим через $\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}}$ подгруппу в Ams_∞, состоящую из преобразований, переводящих каждое множество M_j в себя.

Пусть

$$\mathfrak{h} : M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_\infty, \quad \mathfrak{h}' : M = M_1' \cup M_2' \cup \ldots \cup M_{k'} \cup M_\infty'$$

— два разбиения пространства M. Рассмотрим двойные классы смежности

$$\mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}'}.$$

Каждому такому двойному классу смежности γ мы сейчас поставим в соответствие матрицу $r_{\alpha\beta}$ размера $(k+1)\times(k'+1)$, матричные элементы которой суть меры на группе $\mathbb{R}^*$ всех положительных чисел по умножению ($\alpha = 1, 2, \ldots, k, \infty$; $\beta = 1, 2, \ldots, k', \infty$). Пусть $g \in \gamma$. Рассмотрим множество $g^{-1}(M_\alpha) \cap M_\beta$. Производная Радона—Никодима $g'(m)$ является функцией $M \to \mathbb{R}^*$. Пусть, по определению, $r_{\alpha\beta}$ есть образ меры μ на $g^{-1}(M_\alpha) \cap M_\beta$ при отображении $g' : g^{-1}(M_\alpha) \cap M_\beta \to \mathbb{R}$. Заметим, что все меры $r_{\alpha\beta}$ конечны, кроме меры $r_{\infty\infty}$, которая бесконечна. Может оказаться, что точка $1 \in \mathbb{R}^*$ имеет бесконечную меру (в случае, когда $g'(m)$ равна 1 на множестве бесконечной меры). Однако на множестве $\mathbb{R}^* \setminus 1$ мера $r_{\infty\infty}$ является настоящей σ-конечной мерой.

Легко видеть, что матрица $r_{\alpha\beta}$ зависит не от самого элемента $g \in \mathrm{Gms}_\infty$, а лишь от двойного класса смежности $\gamma \in \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Gms}_\infty^{\mathfrak{h}'}$, его содержащего; при этом разным классам смежности соответствуют разные матрицы.

Далее, матрица $R = \{r_{\alpha\beta}\}$, как легко видеть, удовлетворяет условиям

1. $\displaystyle\sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^*} dr_{\alpha\beta}(x) = \mu(M_\beta)$,
2. $\displaystyle\sum_\beta \int_{\mathbb{R}^*} x\, dr_{\alpha\beta}(x) = \mu(M_\alpha)$,
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} (x-1)\, dr_{\infty\infty}(x) < \infty$.

Рассмотрим, далее, три разбиения $\mathfrak{h} : M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_\infty$, $\mathfrak{h}' : M = M_1' \cup \ldots \cup M_{k'} \cup M_\infty'$ и $\mathfrak{h}'' = M_1'' \cup \ldots \cup M_{k''} \cup M_\infty''$; рассмотрим два двойных класса смежности $\gamma_1 \in \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}'}$, $\gamma_2 \in \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}'} \setminus \mathrm{Gms}_\infty / \mathrm{Ams}_\infty^{\mathfrak{h}''}$.

Пусть R и Q — соответствующие матрицы. Запишем их в виде

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}k' \\ \}1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k} & \underbrace{}_{1} \end{array} \end{array} \qquad Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} X & y \\ z & u \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}k'' \\ \}1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k'} & \underbrace{}_{1} \end{array} \end{array}$$

Легко понять, что произведению двойных классов смежности отвечает матрица

$$R \circ Q = \begin{pmatrix} A\Lambda^{-1}X & A\Lambda^{-1}y + b \\ c\Lambda^{-1}X + z & d + u + c\Lambda^{-1}y \end{pmatrix},$$

где Λ — диагональная матрица с собственными числами $\mu(M_1'), \ldots, \mu(M_{k'}')$, а умножение матриц понимается в обычном смысле слова (меры на $\mathbb{R}^*$ образуют кольцо относительно сложения и свертки), см. также п. 3.4. Мы не будем формулировать по этому поводу точной теоремы.

4.9. Литературные замечания. О мерах Пуассона см. [Kingman (1993)]. В этом параграфе мы следуем работам [Исмагилов (1975)], [Вершик, Гельфанд, Граев (1975)]; в этих статьях, правда, речь шла не о группе Gms_∞, а о группе диффеоморфизмов с компактным носителем. В [Исмагилов (1975)] получено описание всех Ams_∞-сферических представлений группы Gms_∞. Образы гауссовских векторов из $F(L^2(M))$ в $L^2(\Omega(M))$ и отчасти образы гауссовских операторов вычислены в [Неретин (1997a)].