

Ю. А. Неретин

**Категории
симметрий
и
бесконечномерные
группы**

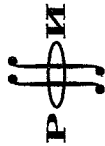


**Эдиториал УРСС
Москва
1998**

Оглавление

Предисловие	3
Обозначения	5
Глава I. Видимые и невидимые структуры на бесконечномерных группах	7
§ 1. Топология	8
§ 2. Алгебры Ли	10
§ 3. Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского	11
§ 4. Предельные элементы групп	15
§ 5. Голоморфные продолжения	20
Глава II. Спириное представление	24
§ 1. Анализ по внешней алгебре	24
§ 2. Спириные функции	33
§ 3. Спириное представление группы $O(2n, \mathbb{C})$	41
§ 4. Операторы Березина	48
§ 5. Категории, функторы, представления категорий	50
§ 6. Категория GD и функтор Spn	53
§ 7. Категория GA	62
§ 8. Представления категорий: терминология	66
Глава III. Представления комплексных классических категорий	70
§ 1. Представления комплексных классических групп: введение	70
§ 2. Фундаментальные представления классических групп	81
§ 3. Категории A, B, C, D и их представления	85
§ 4. Упорядоченные категории	90
Глава IV. Фермионное пространство Фока	99
§ 1. Фермионное пространство Фока	99
§ 2. Операторы Березина: теоремы ограниченности	102
§ 3. Категория GA	111
§ 4. Категория \overline{GD} и спириное представление	119
Глава V. Представление Вейля: конечномерный случай	124
§ 1. Классические эрмитовы категории U, Sp, SO^*	124
§ 2. Функтор Крейна—Шмюльена	132
§ 3. Бозонное пространство Фока с конечным числом степеней свободы	135
§ 4. Представление Вейля симплектической категории	141
Глава VI. Представление Вейля: бесконечномерный случай	151
§ 1. Бозонное пространство Фока с бесконечным числом степеней свободы	151
§ 2. Представление Вейля	160
§ 3. Геометрия симметрических пространств Sp/U	165
§ 4. Аффинная симплектическая категория	173
§ 5. Соответствие «группа Ли — алгебра Ли»	179

Глава VII. Представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом	192
§ 1. Группа диффеоморфизмов окружности и алгебра Вирасоро	192
§ 2. Вложение Diff в бесконечномерную симплектическую группу	201
§ 3. Вложения Diff в бесконечномерную ортогональную группу	209
§ 4. Полу группа Γ	214
§ 5. Вложения подгруппы Γ в подгруппы линейных отношений	222
§ 6. Категория $Shtan$ Концевича—Сигала	224
Глава VIII. Тяжелые группы	234
§ 1. Симметрическая группа S_∞	234
§ 2. Классификация представлений группы S_∞	241
§ 3. Категория оболочка группы $O(\infty)$	245
§ 4. Группа автоморфизмов пространства с мерой и марковская категория	250
§ 5. (G, K) -пары. Мультипликативность Исмагилова—Ольшанского	259
§ 6. О бесконечной бисимметрической группе	263
Глава IX. Бесконечномерные классические группы и почти инвариантные структуры	274
§ 1. Группа $(GL(\infty, \mathbb{R}), O(\infty))$ и ее представления	274
§ 2. Группа $(U(\infty), O(\infty))$ и ее представления	280
§ 3. Умножение двойных классов смежности для $(U(\infty), O(\infty))$	284
§ 4. Характеристические функции	288
§ 5. Иерархия вложений Ольшанского	295
§ 6. Конструкции представлений группы диффеоморфизмов окружности	301
§ 7. Конструкции представлений группы петель	316
Глава X. Некоторые алгебраические конструкции теории меры	322
§ 1. Мультипликативный интеграл Араки	322
§ 2. Фоковское представление подгруппы вероятностных мер на группе	328
§ 3. G-стохастические ядра	333
§ 4. Группа преобразований, оставляющих σ -конечную меру квазиинвариантной, и меры Пуассона	343
Добавление А. Вещественные классические категории и двойственность Хау	352
Добавление В. Шарпирь, комплекссы Сэмилы и границы симметрических пространств	357
Добавление С. Бозон-фермионное соответствие	361
Добавление Д. Однолистные функции и оператор Грукского	365
Добавление Е. Характеристическая функция Лифшица	368
Добавление Ф. Примеры, контриимеры, замечания	371
Добавление Г. Предварительные сведения	382
§ 1. Классические группы	388
§ 2. Структуры линейной алгебры	394
§ 3. Пространства с мерой	398
§ 4. Линейные операторы	407
§ 5. Терминология теории представлений	414
Литература	426
Предметный указатель	426



Неретин Юрий Александрович
Категории симметрий и бесконечномерные группы
М.: Эдиториал УРСС, 1998. — 432 с.

*Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 96-01-14034)*

Книга содержит систематическое изложение теории бесконечномерных групп, их представлений, а также полугрупповых и категориальных оболочек. Подробно рассматриваются группа диффеоморфизмов-окружности, бесконечномерные аналоги классических групп, группы преобразований пространств с мерой и некоторые группы токов. Обсуждаются также бесконечные аналоги симметрических групп и группы петель. Ряд разделов книги посвящен связанным с конечномерными группами Ли явлениям, которые стали известны лишь благодаря появлению теории бесконечномерных групп.

Изложение основано на категорной версии метода второго квантования.

Для математиков и математических физиков, так или иначе имеющих дело с бесконечномерными группами, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Группа подготовки издания:

Директор *Доминго Марин Рикои*
Заместители директора *Наталья Финогорова, Ирина Макева*
Компьютерный дизайн *Василий Подобед, Виктор Романов*
Верстка *Василий Подобед*

Подготовка текста *Наталья Бекетова, Дмитрий Соколов, Анна Торина*
Технические редакторы *Наталья Аринчева, Елена Логвинова*

Издательство «Эдиториал УРСС»

113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к. пр.

Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Подписано к печати 12.09.98 г.
Формат 70 × 100/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 27. Заказ № 320.

Отпечатано в АОСГ «Политех-4»
129110, г. Москва, Б. Переяславская, 46

ISBN 5-901006-71-2

© Ю. А. Неретин, 1998
© Эдиториал УРСС, 1998

Предисловие

Термин «бесконечномерная группа» не имеет строгого определения и, к тому же, не слишком точен. Он означает примерно «очень большая группа». К таким группам относятся, например, следующие классы групп:

- (1) группы диффеоморфизмов многообразий;
- (2) группы, связанные с алгеброй Витасоро и алгебрами Каца—Мули;
- (3) бесконечные аналоги симметрической группы;
- (4) различные группы операторов в гильбертовом пространстве (например группы автоморфизмов канонических коммутационных и антикоммутиационных соотношений);
- (5) группы токов (т. е. группы каких-нибудь функций на чем-нибудь со значениями в какой-нибудь группе);
- (6) группы автоморфизмов пространств с мерой;

Представления различных групп перечисленных типов стали изучаться в разное время, начиная примерно с 1950 г. Долгое время эти теории развивались независимо и по расходящимся направлениям, и с течением времени становилось все меньше надежды на построение какой-либо связанной картины. Однако с начала 80-х годов эта картина начала составляться (что очень трудно понять по существующей литературе), и сейчас, наконец, выявилась возможность эту картину описать. Это — одна из целей нашей книги.

Другая цель, тесно связанная с первой, — явное построение «скрытых структур» (мантей и шлейфов), связанных с бесконечномерными группами. Оказывается, что (по крайней мере, с точки зрения теории представлений) «главными действующими лицами» являются не группы (из списка (1)–(6)), а значительно большие объекты, включающие в себя эти группы. Это немного похоже на взаимоотношения вещественная алгебра и комплексных чисел; вещественные числа есть и сами по себе, но вещественная алгебра и вещественный анализ становятся понятными лишь после выхода в комплексную область.

Эти «скрытые» структуры тоже имеют довольно долгую историю (начиная с 60-х годов), многие занимались ими явно, а многие — не создавая, по-видимому, что они занимают «скрытыми структурами». В течение сравнительно продолжительного времени описать эти структуры в удобных терминах не удавалось, положение стало проясняться лишь с конца 1987 года, и, как мне кажется, сейчас в основном прояснилось.

«Скрытые» структуры дали новую неожиданную точку зрения на ряд старых областей теории представлений. Например, оказалось, что серии классических

комплексных групп $A_n \simeq SL(n, \mathbb{C})$, $B_n \simeq SO(2n + 1, \mathbb{C})$, $C_n \simeq Sp(2n, \mathbb{C})$, $D_n \simeq SO(2n, \mathbb{C})$ естественным образом объединяются в четыре категории GA , B , C , D , и теория конечномерных представлений классических групп в каком-то смысле оказывается теорией представлений 4-х «классических» категорий A , B , C , D . Подобные явления происходят и с бесконечномерными представлениями групп $U(p, q)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ со старшим весом, и с некоторыми сериями конечных групп. Мы ограничиваемся рассмотрением категорий, связанных с комплексными классическими группами (глава II).

Наконец, еще одна цель книги (которой я добиваюсь лишь в меру возможности) — явное описание конструкций неприводимых представлений для бесконечномерных групп; мне кажется, что в существующей (мало-мальски доступной для чтения) литературе в этом месте серьезные пробои.

С другой стороны, рассмотрение большого числа разных групп вынудило меня быть крайне жестким в отборе материала. В книге почти отсутствует целый ряд естественных сюжетов, таких как классификация представлений (исключение составляют главы III и VIII), комбинаторное строение представлений, асимптотическая теория, теория сферических функций, гармонический анализ. Не рассматриваются и аффинные алгебры.

Все это, конечно, обедняет содержание, но имеет и положительную сторону, так как резко снижает требования к подготовке читателя — специальных познаний по теории представлений для чтения книги не требуется. Ряд вспомогательных вопросов и технически сложных рассуждений представлены в виде задач. Звездочка у задачи ставилась в том случае, когда я не был уверен в том, что задача достаточно проста. Как правило, такие задачи снабжены ссылками на литературу.

Две ключевые конструкции с точки зрения излагаемой теории — спинорное представление ортогональной категории (главы II, IV) и «представление Вейля» симплектической категории (главы V, VI). В этих главах сосредоточены основные технические сложности, изложение в них довольно полно в том смысле, что мне удалось сказать в них большую часть из того, что, на мой взгляд, заслуживает быть сказанным. Для обеих конструкций мы сначала рассматриваем их «конечномерную часть» (главы II и V), отчасти потому, что это представляет самостоятельный интерес, отчасти потому, что переход к бесконечномерному случаю связан со значительными аналитическими сложностями, и изложение будет более понятным, если сначала отделить «алгебраическую часть».

В заключение я должен поблагодарить всех людей, с которыми мне пришлось обсуждать конечномерные группы в Москве 80-х годов: Г. И. Ольшевского, Р. С. Исмагилова, А. А. Кириллова, А. М. Вершика, А. В. Карабетова, М. Л. Концевича, Д. Б. Фукса, В. Ф. Молчанова, М. Л. Назарова, А. Г. Реймана, Е. Т. Шавгулидзе, Д. В. Юрьева. Все они в большей или в меньшей степени оказали влияние на меня, а следовательно, и на эту книгу. В особенности я благодарю Г. И. Ольшевского за многолетнее сотрудничество.

Русское издание книги отличается от английского (выпущенного издательством Oxford University Press в 1996 г.) в основном редакционными изменениями. Кроме того, включены предварительные сведения (добавление G), а также несколько новых пунктов в добавлении F и в § IX.6.

Я благодарю Российский фонд фундаментальных исследований и издательство Эдиториал УРСС за русское издание книги.

Москва, 1998

Обозначения

Пространства

$L^2(M)$	(гильбертово) пространство функций f на пространстве M , удовлетворяющих условию $\int_M f(m) ^2 dm < \infty$
	со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_M f(m)\overline{g(m)} dm$
\mathbb{R}^2	(гильбертово) пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum x_j ^2 < \infty$
	со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \sum x_j \overline{y_j}$
L^1, L^∞, C^∞	стандартные функциональные пространства, см. [Reed, Simon (1972)]
Λ_n	грасманова алгебра; с. 24
$\Lambda, \tilde{\Lambda}$	фермионное пространство Фока; с. 99–100
$F, F(\cdot)$	бозонное пространство Фока; с. 136, 151
V'	обычно пространство, двойственное к V
Gr	грасмарианы; с. 387

Векторы и операторы

A^*, A'	сопряженный оператор, транспонированный оператор; с. 390–391, 399, 403
-----------	--

Символы

$\delta_{k,l}$	символ Кронекера; $\delta_{k,k} = 1$, $\delta_{k,l} = 0$ при $k \neq l$
$A \leftrightarrow B$	высказывание « A » равносильно высказыванию « B »
$x \mapsto y$	x отображается в y
$\psi : A \rightarrow B$	ψ отображает A в B или ψ — морфизм $A \rightarrow B$
$x_j \rightarrow x$	последовательность x_j сходится к x
$P : A \Rightarrow B$	линейное отношение; с. 51
$\varphi := \psi$	правая часть есть определение левой
\oplus, \otimes	прямая сумма, тензорное произведение
A^k, S^k	внешние и симметрические степени; с. 25, 68, 405–406, 410
$A \setminus B$	множество всех $a \in A$ таких, что $a \notin B$
$A \Delta B$	симметрическая разность множеств A и B : $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$H_1 \setminus G / H_2$	двойные классы смежности; с. 12
G / H	однородное пространство
\dim	размерность

Множества

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$	натуральные, целые, вещественные, комплексные числа и кватернионы
\mathbb{Z}^+	неотрицательные целые числа
\mathbb{C}	сфера Римана; $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$
\mathbb{C}^*	группа комплексных чисел по умножению; $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$

6 • Обозначения

- $|A| = \sqrt{A^*A}$ с. 400
- $b[\cdot]$ с. 144, 162
- $B[\cdot]$ с. 141, 162, 175
- $\text{spr}(\cdot)$ с. 35, 55, 120
- \mathcal{L}_p классы Шаттена; с. 401
- $\hat{\alpha}(\cdot)$ операторы рождения-уничтожения; с. 30, 101, 140, 154
- tr след оператора
- I, E, E_n единичный оператор

Линейные отношения

- $P: A \Rightarrow B, \text{Ker } P, \text{Im } P, \text{Dom } P, \text{Indef } P,$
 P_{\square} см. § II.4, с. 51–52
- null с. 54

Группы и полугруппы

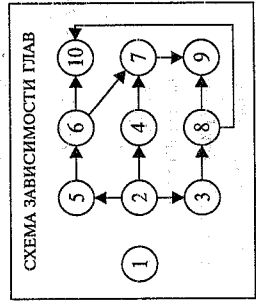
- $\text{GL}(n, \mathbb{R}), \text{GL}(n, \mathbb{C}), \text{GL}(n, \mathbb{H}), U(p, q),$
 $O(p, q), \text{Sp}(p, q), U(p), O(p),$
 $\text{Sp}(p), \text{Sp}(2n, \mathbb{R}), \text{Sp}(2n, \mathbb{C}),$
 $O(n, \mathbb{C}), \text{SO}^*(2n)$ и др. классические группы; с. 365–386
- Diff группа диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию; с. 192, 214
- $\text{Isom}(H)$ группа аффинных изометрий гильбертова пространства; с. 155
- $\text{End}, \text{Aut}(\cdot), \text{Aut}^*(\cdot)$ с. 51, 68
- Γ полугруппа трубок; с. 214
- $M(G)$ с. 328
- $O(\infty), U(\infty), \text{Sp}(\infty)$ с. 245, 274
- $S_n, S_{\infty}, S_{\infty}^{\text{fin}}$ симметрические группы; с. 234, 263
- $(G(\infty), K(\infty))$ (G, K) -пары Ольшанского; с. 274
- $\text{Ams}, \text{Ams}_{\infty}$ с. 251, 258

Категории

- $\text{Mor}(\cdot, \cdot), \text{End}(\cdot), \text{Aut}(\cdot), \text{Ob}(\cdot)$ с. 50–51
- Aut^* с. 68
- Категории обозначаются жирными буквами, в т. ч.
 - A, B, C, D с. 85–86
 - $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ с. 122, 247
 - $\overline{CA}, \overline{CA}$ с. 62, 111
 - $\overline{GD}, \overline{GD}$ с. 53, 119
- $\text{Sp}, \overline{\text{Sp}}, \overline{\text{Spa}}$ с. 127–128, 161, 174
- U с. 124
- SO^* с. 129
- Shtan с. 224
- $\overline{\text{Mar}}, \overline{\text{Mar}}$ с. 250
- $\overline{G\text{-Mar}}, \overline{G\text{-Mar}}$ с. 335–336
- U_0 с. 285
- $\overline{PB}, \overline{PB}$ с. 235

Представления

- spin спинорное представление; с. 55, 120
- w представление Вейля; с. 42, 163
- \bar{w} с. 175
- Exp с. 155
- $M(h, c), L(h, c)$ модули со старшим весом над алгеброй Вирасоро; с. 197–198
- Представления категорий (а также функции) обозначаются рублеными буквами $(A, S, T, \text{ и т. п.})$, пространства представления — большими латинскими буквами, операторы представления — греческими строчными буквами; см. с. 52



Видимые и невидимые
 структуры
 на бесконечномерных
 группах

Эта глава представляет из себя что-то вроде введения, и ниже на нее нет формальных ссылок. Читателю, совсем не знакомому с предметом, эту главу лучше пропустить: глава является комментарием к теории, который без некоторого знакомства с самой теорией не слишком интересен.

Точка зрения на бесконечномерные группы, излагаемая в книге, а также техника работы с ними, по-видимому, покажется странной даже части специалистов. Она, возможно, покажется странной и людям, знакомым с теорией представлений групп Ли. Цель этой главы — на простых примерах объяснить, почему с бесконечномерными группами происходят явления, не знакомые нам по обычной теории групп Ли, излагаемой в учебниках.

Мы хотим дать априорное оправдание следующим двум высказываниям, хотя а posteriori они вполне оправдываются основным текстом книги (и поэтому априорное оправдание в итоге оказывается ненужным).

0.1. Принцип полугруппового продолжения (Г.И. Ольшанский). Пусть G — «бесконечномерная» группа, имеющая некоторый запас унитарных представлений. Тогда G — не группа, а лишь видимая часть некоторой невидимой невооруженным глазом полугруппы $\Gamma \supset G$. При этом любое представление G продолжается однозначно до представления полугруппы Γ . Есть веские основания думать, что G плотна в Γ . Есть также некоторые основания думать, что Γ компактна, однако последнее высказывание может быть оспорено.

Сделанное нами утверждение ни в каком смысле не является теоремой, и оно ни в каком смысле не описывает полугруппу Γ . Тем не менее, в каждом частном случае оно оказывается истинным, в том числе оказывается истинным и утверждение о «невидимости»: за исключением учебных примеров, ответ всегда оказывается неожиданным. Эту полугруппу мы будем называть *мантией* (*mantle*) группы G .

0.2. Принцип категорного продолжения. Пусть, по-прежнему, G — бесконечномерная группа. Тогда G является лишь видимой частью некоторой невидимой невооруженным глазом категории K . Более точно, существует некоторая кате-