Глава I. Морфизмы канонических коммутационных соотношений и симплектическая категория.

§I. Операторы $B[S]$

I.I. <u>Бозонное пространство Фока</u>. Пусть H - гильбертово пространство размерности $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$. Мы фиксируем в H операцию сопряжения $h \to \overline{h}$ (т.е. $h \to \overline{h}$ является антилинейной изометрической инволюцией). Бозонное пространство Фока $F(H)$ - это пространство голоморфных функций на H со скалярным произведением

$$\langle f(z), g(z)\rangle \doteq \iint f(z)\,\overline{g(z)}\, d\mu(z)$$

где $d\mu(z)$ - гауссова мера на H, задаваемая формулой

$$d\mu(z) = \exp(-(z,\overline{z}))\prod_j \frac{dz_j\, d\overline{z}_j}{\pi}$$

Если $\dim H < \infty$, то корректность этого определения не вызывает вопросов, в случае, когда $\dim H = \infty$ оно также корректно (см. [59], [4]), во всех случаях $F(H)$ полно ([ ])

<u>Замечание</u> I. В этой главе нам удобнее будет считать, что H - это либо ℓ_2, либо координатное пространство $\mathbb{C}^n$, операция сопряжения $h \to \overline{h}$ --это обычная операция координатного сопряжения.

<u>Замечание</u> 2. Если $\dim H = 0$, то $F(H)$ - это просто $\mathbb{C}^1$. Как ни странно, случай нульмерного H очень важен.

Известно, что для любого $u \in H$ линейный функционал $\varphi(f) = f(u)$ непрерывен, он может быть также задан формулой

$$\varphi(f) = f(u) = \langle f(z), exp(z, \bar{u}) \rangle \qquad (1.1)$$

Далее, любой ограниченный оператор A в пространстве $F(H)$ является интегральным оператором в буквальном смысле этого слова, т.е. A представим в виде

$$Af(z) = \int K(z, \bar{u}) f(u) d\mu(u)$$

где функция $K(z, \bar{u})$ голоморфна по z и антиголоморфна по u. Ядро $K(z, \bar{u})$ восстанавливается по оператору A с помощью формулы

$$K(z, \bar{u}) = \langle exp(v, \bar{z}), A\, exp(v, \bar{u}) \rangle \qquad (1.2)$$

где $exp(v, \bar{z})$ и $exp(v, \bar{u})$ рассматриваются как функции от переменной v (в [4] ядра $K(z, \bar{u})$ называются "производящими функционалами")

Мы видим, что ядро оператора определено не канонически: оно зависит от операции сопряжения.

Из равенства (I.2) очевидным образом следует критерий слабой сходимости операторов.

<u>Предложение</u> I.I. Пусть A_n - последовательность ограниченных операторов в $F(H)$, K_n - их ядра. Пусть A - ограниченный оператор с ядром K. Последовательность A_n слабо сходится к A тогда и только тогда, когда одновременно выполнено два условия.

I. Последовательность A_n равномерно ограничена.

2. $K_n(z, \bar{u})$ сходится к $K(z, \bar{u})$ поточечно. ■

<u>Доказательство</u>. Для применения обычного критерия слабой сходимости операторов достаточно заметить, что линейная оболочка

векторов $exp(z, \bar{u})$ плотна в $F(H)$, что, в свою очередь, следует из "воспроизводящего равенства" (I.I).

I.2. <u>Гауссов интеграл.</u> Пусть $z, \alpha, \beta \in \ell_2$. Мы рассматриваем их как матрицы строки. Пусть K, L, M - матрицы размера $\infty \times \infty$, пусть норма матрицы $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ меньше 1 и пусть S - матрица Гильберта-Шмидта. Тогда

$$\iint exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar{z})\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \alpha z^t + \beta \bar{z}^t\right\} d\mu(z) =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 1-L & -K \\ -M & 1-L^t \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}}\right] exp\left\{\frac{1}{2}(\alpha\beta)\begin{pmatrix} -M & 1-L \\ 1-L^t & -N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^t \\ \beta^t \end{pmatrix}\right\} \tag{1.3}$$

Важно заметить, что сначала оператор вида $1 - S$, где $\|S\| < 1$ возводится в степень $-1/2$, а потом вычисляется определитель.

Для проверки этой формулы достаточно воспользоваться обычной формулой для гауссова интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xAx^t + bx^t} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\, e^{-\frac{bA^{-1}b^t}{4}}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A - симметричная матрица, причем $Re\, xAx^t > 0$ для любого x. Переход от вещественных координат к комплексным производится с помощью замены

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

При вычислении определителя полезна формула

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix} = \det(\mathcal{D})\det\left(A - C\mathcal{D}^{-1}B\right)$$

из нее, в частности, вытекает, что

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -M \\ -N & 1\end{pmatrix} = \det(1 - MN) \tag{1.4}$$

Нам придется также несколько раз использовать следующий частный случай формулы для матрицы, обратной к блочной матрице:

$$\begin{pmatrix} -P & 1 \\ 1 & -N\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} N(1-PN)^{-1} & (1-NP)^{-1} \\ (1-PN)^{-1} & P(1-NP)^{-1}\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

(проверяется непосредственным умножением матриц).

I.3. Векторы $b[K]$ и $b[K|\alpha^t]$. Пусть $H = \ell_2$ или $\mathbb{C}^n$. Пусть K – оператор Гильберта-Шмидта в H. Пусть $\|K\| < 1$. Определим вектор

$$b[K] = b_z[K] = \exp\left\{\frac{1}{2} z K z^t\right\} \tag{1.6}$$

Норма $b[K]$ вычисляется с помощью формулы (I.3), в частности, легко видеть, что $b[K] \in F(H)$.

Замечание. В главе III нам будет неудобно считать, что $H = \ell_2$, поэтому полезно уметь переписывать формулу (I.6) в инвариантных терминах. Это делается следующим образом.

$$b[K] = \exp\left\{\frac{1}{2}(Kz, \bar{z})\right\}$$

Пусть далее K удовлетворяет тем же условиям, что и выше, а $\alpha \in \ell_2$ или $\mathbb{C}^n$. Тогда определим векторы

$$b[K|\alpha^t] = \exp\left\{\frac{1}{2} z K z^t + z\alpha^t\right\}$$

Они, по-прежнему, лежат в $F(H)$. Обозначим через $F_0(H)$ пространство финитных линейных комбинаций векторов $\mathcal{B}[K|\alpha^t]$. Очевидно $F_0(H)$ плотно в $F(H)$ (в самом деле, как уже отмечалось при доказательстве Предложения I.I. линейная оболочка векторов $\mathcal{B}[0|\alpha^t]$ плотна в $F(H)$).

I.4. Операторы $B[S]$. Пусть H_1, H_2 - гильбертовы пространства. Пусть $F(H_1)$, $F(H_2)$ - соответствующие пространства Фока. Пусть $S=\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$ - оператор из $H_1 \oplus H_2$ в $H_1 \oplus H_2$, удовлетворяющий условиям

0. $S=S^t$ (т.е. $K=K^t$, $M=M^t$)
1. $\| S \| \leqslant 1$
2. $\| K \| < 1$, $\| M \| < 1$
3. K, M - операторы Гильберта-Шмидта.

Через $B[S]$ мы обозначим оператор $F(H_2) \to F(H_1)$ с ядром

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(z \;\; \bar{u})\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t\end{pmatrix}\right\}$$

Первые примеры операторов вида $B[S]: F(H) \to F(H)$ появились в книге Ф.А.Березина [4], оказалось, что в таком виде записываются операторы, задающие представление Вейля. Как заметил Г.И.Ольшанский, операторы, использовавшиеся Ф.А.Березиным отвечают унитарным матрицам S. Далее Г.И.Ольшанский понял, что полугруппа, связанная с представлением Вейля - это полугруппа всех ограниченных операторов вида $B[S]$ ([83])

Прежде, чем мы перейдем к изучению операторов $B[S]$, мы вкратце обсудим происхождение условий I - 3. Предположим, что оператор $B[S]$ ограничен. Учитывая, что $\|\exp(z, \bar{a})\| = \exp\left(\frac{1}{2}(a, a)\right)$ и равенство (I.2) мы получаем оценку ядра ограниченного оператора

$$|K(z,\bar{u})| \leq \|A\| \exp\left(-\frac{1}{2}(z,z)-\frac{1}{2}(u,u)\right)$$

Отсюда сразу следует условие I.

Далее, легко проверить, что вектор $B[S]\cdot 1$ равен $\exp(zKz^t)$. Чтобы этот вектор лежал в $F(H)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия : а) $\|K\|<1$ б) K - оператор Гильберта-Шмидта. Рассматривая вектор $B[S]^*\cdot 1$ мы получаем аналогичные утверждения для матрицы M.

I.5. <u>Контрпример</u>. Как выяснил Г.И.Ольшанский, в случае операторов в $F(\mathbb{C}^n)$ условия I - 2 не только необходимы, но и достаточны ([83]). Сейчас мы покажем, что условия I - 3 не достаточны для ограниченности оператора $B[S]$ в бесконечномерном случае. Рассмотрим сначала оператор $B\begin{bmatrix}\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & \lambda\end{bmatrix}$ в $F(\mathbb{C}^1)$, где $0\leq\lambda<1$. Его норма равна $(1-\lambda)^{-1/2}$, это вытекает из доказанного ниже равенства (4.1).

Далее, рассмотрим оператор $A=B\begin{bmatrix}\Lambda & 1-\Lambda\\ 1-\Lambda & \Lambda\end{bmatrix}$ в $F(\ell_2)$, где Λ - диагональная матрица с собственными числами $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ $(0\leq\lambda_j<1)$. Как известно ([74]), функтор $H\mapsto F(H^d)$ переводит прямые суммы гильбертовых пространств в тензорные произведения. В частности, $F(\ell_2)=\bigotimes_{i=1}^{\infty}F(\mathbb{C}^1)$. Наш оператор A тогда разлагается в тензорное произведение операторов $A_i=B\begin{bmatrix}\lambda_i & 1-\lambda_i\\ 1-\lambda_i & \lambda_i\end{bmatrix}$. Следовательно,

$$\|A\|=\prod_{i=1}^{\infty}\|A_i\|=\prod_{i=1}^{\infty}(1-\lambda_i)^{-1/2}$$

Выбирая λ_i так, что $\sum \lambda_i^2 < \infty$, $\sum \lambda_i = \infty$ мы получаем неограниченный оператор вида $B[S]$.

I.6. Определение операторов $B[S]$. Ввиду того, что операторы $B[S]$ могут быть неограниченными, их определение требует некоторой аккуратности.

Лемма I.I. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям 0 - 3, пусть T удовлетворяет условиям п. I.3, пусть $\alpha \in \ell_2$. Тогда интеграл

$$\iint \exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar{u})\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{u} \end{pmatrix}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} z T z^t + \alpha z^t\right\} d\mu(z)$$

сходится и равен

$$\det\left[(1-MP)^{-1/2}\right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha T \alpha^t\right\} \times \qquad (1.7)$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2} z\left(K + LT(1-MT)^{-1}L^t\right)z^t + zL(1-TM)^{-1}\alpha^t\right\}$$

Доказательство. Это частный случай равенства (I.3).

Встает вопрос о том, содержится ли функция (I.7) в $F(H)$. Иными словами, верно ли, что

$$\|K + LT(1-MT)^{-1}L^t\| < 1$$

Это вытекает из следующей теоремы, которую мы докажем в §3.

Теорема 3.I. (Крейн, Шмульян). Пусть $S = S^t = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}$ - блочный оператор $H_1 \oplus H_2 \to H_1 \oplus H_2$. Пусть T - оператор $H_1 \to H_2$. Пусть $\|S\| \leq 1$, $\|X\| < 1$, $\|U\| < 1$, $\|T\| \leq 1$. Пусть

$$\mathfrak{M}(S)T = X + YT(1-UT)^{-1}Z \qquad (1.8)$$

Тогда

а) $\|\mathfrak{M}(S)T\| \leq 1$

б) Если $\|T\| < 1$, то $\|\mathfrak{M}(S)T\| < 1$.

в) Если $\|S\| < 1$, то $\|\mathfrak{M}(S)T\| < 1$. ■

Итак, в силу леммы I.1.2 выполнено

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} b[T|\alpha^t] = \det(1-MT)^{-1/2} \exp(-\alpha T \alpha^t) \times$$
$$\times b[K + LT(1-MT)^{-1}L^t \,|\, L(1-TM)^{-1}\alpha^t] \qquad (1.9)$$

Теперь мы видим, что оператор $B[S]$ корректно определен на пространстве $F_0(H_2)$ и переводит $F_0(H_2)$ в $F_0(H_1)$ (Напомним, что $F_0(H)$ - пространство финитных линейных комбинаций векторов вида $b[T|\alpha^t]$).

I.7. Умножение операторов $B[S]$.

Теорема I.I. Пусть

$$S_1 = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}$$

Тогда

$$B[S_1]\,B[S_2] = \det\left((1-MP)^{-1/2}\right) B[S_1 * S_2]$$

где

$$S_1 * S_2 = \begin{pmatrix} K + LP(1-MP)^{-1}L^t & L(1-PM)^{-1}Q \\ Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R + Q^t(1-MP)^{-1}MQ \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

■

Доказательство. Достаточно проверить, что для любого вектора $b[T|\alpha^t]$ выполнено

$$B[S_1]\left(B[S_2]\,b[T|\alpha^t]\right)=$$

$$=\det\left((1-MP)^{-\frac{1}{2}}\right)B[S_1 * S_2]\,b[T|\alpha^t]$$

В этом легко убедиться, выписав левую и правую часть равенства, используя (I.3). Остается, однако, вопрос, удовлетворяет ли матрица $S_1 * S_2$ условиям п.I.4.

Условие 0. Симметричность вытекает из равенств

$$P(1-MP)^{-1}=P+PMP+PMPMP+\ldots=(1-PM)^{-1}P$$

Условие I. $\|S_1 * S_2\|\leqslant 1$

$$S_1 * S_2=\begin{pmatrix}K&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P&Q\\Q^t&R\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}M&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P&Q\\Q^t&R\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}L^t&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\mathfrak{M}\left(\begin{array}{cc|cc}K&&L&\\&0&&1\\\hline L^t&&M&\\&1&&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}P&Q\\Q^t&R\end{pmatrix}$$

где $\mathfrak{M}$ определено формулой (I.8). Теперь мы можем применить утверждение а) теоремы 3.I.

Условие 2. $\|K+LP(1-MP)^{-1}L^t\|<1$

$$\|R+Q^t(1-MP)^{-1}MQ\|<1$$

Это сразу вытекает из утверждения б) теоремы 3.I: в качестве T первый раз выступает матрица P, а второй раз матрица M.

Наконец, проверка условия 3 тривиальна.

<u>I.8. Сопряженный оператор.</u> Известно, (см. [4]), что если оператор A имеет ядро $K(z,\bar{u})$, то ядро оператора A^* равно $K(u,\bar{z})$. Таким образом, оператор $B[S]^* = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}^*$ должен иметь вид $B[S^{\circledast}]$, где

$$S^{\circledast} = \begin{pmatrix} \bar{M} & \bar{L}^t \\ \bar{L} & \bar{N} \end{pmatrix}$$

Так как оператор $B[S]$ может оказаться неограниченным, писать $B[S]^* = B[S^{\circledast}]$ было бы неосторожно. Мы ограничимся следующим утверждением.

<u>Предложение</u> I.2. Пусть $f_1 \in F_0(H_1)$, $f_2 \in F_0(H_2)$ Тогда

$$\langle B[S]f_2, f_1\rangle = \langle f_2, B[S^{\circledast}]f_1\rangle \qquad \blacksquare$$

Для доказательства достаточно убедиться, что в левой и правой части стоит один и тот же сходящийся интеграл.

<u>I.9. Слабая сходимость.</u>

Предложение I.3. Пусть $B[S_i]$ – ограниченные операторы. Последовательность операторов $B[S_i]$ сходится слабо к $B[S]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

а) $B[S_i]$ равномерно ограничены.

б) $S_i \to S$ слабо.

Доказательство. Слабая сходимость $S_i \to S$ эквивалентна поточечной сходимости ядер $exp\left\{\frac{1}{2}(z\bar{u})\, S_i\, (z\bar{u})^t\right\}$. Теперь мы можем применить предложение I.I.

Пусть теперь $B = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ – оператор в $F(\ell_2)$, рассмотрим операторы $B_n = B\begin{bmatrix} \boxed{K}_n & \boxed{L}_n \\ \boxed{L^t}_n & \boxed{M}_n \end{bmatrix}$ в $F(\mathbb{C}^n)$, где через $\boxed{Z}$ обозначен левый верхний угол размера $n \times n$ матрицы Z .

Предложение I.4. Оператор B ограничен тогда и только тогда, когда операторы B_n равномерно ограничены, причем $\|B\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|B_n\|$.

Доказательство. Пусть P_n – проектор в $F(\ell_2)$ на пространство функций, зависящих лишь от первых n координат. Это пространство естественно отождествлять с $F(\mathbb{C}^n)$. Несложно проверить, что

$$P_n B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} P_n = B\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{K}_n & & \boxed{L}_n & \\ & 0 & & 0 \\ \hline \boxed{L^t}_n & & \boxed{M}_n & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Ограничение этого оператора на $F(\mathbb{C}^n)$ есть оператор B_n. Отсюда, в частности, следует, что $\|B_n\| \leq \|B\|$, и, тем самым ограниченность B влечет равномерную ограниченность B_n. С другой стороны, равномерная ограниченность $P_n B P_n$ влечет ограниченность B на всюду плотном множестве $\bigcup F(\mathbb{C}^n)$, а, тем самым, и ограниченность B, равенство $\|B\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n B P_n\|$ теперь тоже очевидно.

<u>I.IO. Примеры</u>. а) $B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ - единичныйоператор.

б) $B\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ - проектор на вектор $f(z) = 1$

в) $B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{bmatrix}$ - это оператор замены переменной $f(z) \to f(Lz)$.

г) $B\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} f(z) = \langle f, b[M] \rangle\, b[K]$

§2. Симплектическая категория и представление Вейля.

Цель этого параграфа - выяснить, какая алгебраическая структура стоит за операторами $B[S]$.

<u>2.I. Линейные отношения.</u> Пусть V и W - линейные пространства. Линейным отношением $P: V \rightrightarrows W$ называется произвольное подпространство в $V \oplus W$. Иногда линейные отношения оказываются графиками операторов, но вообще говоря, это не так. Мы будем рассматривать линейные отношения как графики быть может, не всюду определенных, и, быть может, многозначных операторов. Как и у оператора, у линейного отношения P можно определить

I) Ядро $\operatorname{Ker} P = \{v \in V : (v, 0) \in P\}$

2) Образ $\operatorname{Im} P = \{w \in W : \exists\, v \in V$ такое, что $(v, w) \in P\}$.

3) Область определения $\mathcal{D}(P) = \{v \in V : \exists\, w \in W$

такое, что $(v,w)\in P$.

Кроме того, мы определим неопределенность P:

4) $\operatorname{Ind} P=\{w\in W : (0,w)\in P\}$

5) $\operatorname{rk}(P)=\dim \mathcal{D}(P)-\dim \operatorname{Ker}(P)$ (если V и W конечномерны).

Пусть $P: V\rightrightarrows W$, $Q: W\rightrightarrows Y$ – линейные отношения. Тогда определено их произведение $QP: V\rightrightarrows Y$, оно состоит из тех пар $(v,y)\in V\oplus Y$, для которых существует $w\in W$ такое, что $(v,w)\in P, (w,y)\in Q$.

2.2. Симплектические линейные отношения. Пусть линейные комплексные пространства V и W снабжены невырожденными кососимметрическими билинейными формами Λ_V и Λ_W (такие пространства мы будем называть симплектическими).

Рассмотрим в их прямой сумме $V\oplus W$ форму

$$\Lambda_{V\oplus W}\big((v_1,w_1),(v_2,w_2)\big)=\Lambda_V(v_1,v_2)-\Lambda_W(w_1,w_2) \tag{2.1}$$

Мы назовем линейное отношение $P: V\rightrightarrows W$ симплектическим, если P – максимальное изотропное пространство (= лагранжево) в $V\oplus W$. Мы будем также говорить, что P сохраняет форму Λ.

Пример. Пусть $V=W$ – конечномерное пространство. Пусть $A: V\to V$ – симплектический оператор, т.е. элемент $Sp(2n,\mathbb{C})$. Тогда график оператора A является симплектическим отношением. В этом случае группа $Sp(2n,\mathbb{C})$ плотна в множестве всех симплектических отношений. Стоит заметить, что если $\dim V\neq \dim W$, то разумного понятия "симплектического оператора" $V\to W$ не существует.

Лемма 2.I. Пусть $P: V\rightrightarrows W$, $Q: W\rightrightarrows Y$ – симплектические линейные отношения. Тогда QP – симплектическое линейное отношение.

Доказательство. Рассмотрим пространство $H = V \oplus W \oplus \oplus W \oplus Y$, снабженное кососимметричной билинейной формой

$$M((v_1, w_1, w_2, y), (v_1', w_1', w_2', y')) = \Lambda_V(v, v') - -\Lambda_W(w_1, w_1') + \Lambda_W(w_2, w_2') - \Lambda_Y(y, y')$$

Пусть Z - множество всех векторов вида (v, w, w, y). Легко видеть, что Z коизотропно (т.е. $Z^{\perp} \subset Z$, через $Z^{\perp}$ обозначено ортогональное дополнение относительно формы M). Далее рассмотрим подпространство $P \oplus Q$ в H, состоящее из всех векторов (v, w_1, w_2, y) таких, что $(v, w_1) \in P$, $(w_2, y) \in Q$. Тогда QP есть, по определению, проекция $Z \cap (P \oplus Q)$ на $V \oplus Y$. Теперь заметим, что если в симплектическом пространстве L подпространство K - лагранжево, а N - коизотропно, то $(N \cap K)/(N^{\perp} \cap K)$ - лагранжево подпространство в $N/N^{\perp}$. Лемма доказана $(L = H, N = Z, L = P \oplus Q, N/N^{\perp} = V \oplus Y)$ $\boxtimes$

2.3. Симплектическая категория Sp : конечномерный случай. Объектом категории является комплексификация V конечномерного вещественного линейного пространства $V_{\mathbb{R}}$, снабженного кососимметричной билинейной формой λ_V. Продолжая λ_V в V по билинейности, мы получаем в V билинейную кососимметричную форму Λ_V. С другой стороны, продолжая форму $i\lambda_V$ в V по полуторалинейности, мы получаем в V невырожденную эрмитову форму Θ (положительный и отрицательный индексы инерции Θ равны).

Морфизмом $P: V \to W$ мы назовем линейное отношение $P: V \rightrightarrows W$, удовлетворяющее условиям:

I. P сохраняет симплектическую форму Λ (см. п...2), в частности, если $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in P$, то $\Lambda_V(v_1, v_2) = \Lambda_W(w_1, w_2)$.

2. P "сжимает" форму Θ, т.е. если $(v, w) \in P$, то $\Theta_V(v, v) \geq \Theta_W(w, w)$

3. Если $v \in Ker\, P$, то $\Theta_V(v, v) > 0$, если $w \in Ind\, P$, то $\Theta\ (w, w) < 0$

Наконец, произведение морфизмов категории Sp мы определим как произведение линейных отношений. Лемма 2.I. обеспечивает корректность определения.

Замечание I. Условие 3 чуть-чуть усиливает условие 2.

Замечание 2. Введем в $V \oplus W$ эрмитову форму

$$\Theta_{V \oplus W}((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \Theta_V(v_1, v_2) - \Theta_W(w_1, w_2) \tag{2.2}$$

Тогда условие 2 означает, что форма $\Theta_{V \oplus W}$ неотрицательно определена на P (из соображений размерности ясно, что P - максимальное попространство, на котором форма $\Theta_{V \oplus W}$ неотрицательно определена).

Замечание 3. Множество $End(V) = Mor(V, V)$ образует полугруппу по умножению. Обратимые элементы этой полугруппы, как легко видеть, в точности образуют группу $Sp(2n, \mathbb{R})$, где $\dim V = 2n$. Пересечение $\Gamma Sp(V)$ группы $Sp(2n, \mathbb{C})$ с $End(V)$ состоит из симплектических операторов A, удовлетворяющих условию

$$\Theta_V(Av, Av) \leq \Theta_V(v, v)$$

Полугруппа $\Gamma Sp(V)$ образует подполугруппу с непустой внутренностью в $Sp(2n, \mathbb{C})$ (о подобных полугруппах см. [44]).

Отметим также, что $\Gamma Sp(V)$ плотна в V.

Замечание 4. Пусть $P \in Mor(V,W)$. Тогда $\dim P = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W)$. Итак, если размерности V и W различны, то P не может быть графиком оператора.

2.4. Преобразование Потапова-Гинзбурга.

Пусть $P: H_1 \oplus H_2 \rightrightarrows X_1 \oplus X_2$ – линейное отношение. Тогда тоже самое подпространство P можно рассматривать как линейное отношение $H_1 \oplus X_2 \rightrightarrows H_2 \oplus X_1$. Итак, мы получили биекцию из множества линейных отношений $H_1 \oplus H_2 \rightrightarrows X_1 \oplus X_2$ в множество линейных отношений $H_1 \oplus X_2 \rightrightarrows H_2 \oplus X_1$. Эта биекция иногда называется преобразованием В.П.Потапова - Ю.П.Гинзбурга, см.[2] (в ситуации, обсуждаемой ниже его можно также назвать производящей функцией).

Пусть V – объект Sp, пусть $p_1, \dots, p_n$, $q_1, \dots, q_n$ – канонический базис в $V_{\mathbb{R}}$:

$$\lambda_V(p_k, p_\ell) = \lambda_V(q_k, q_\ell) = 0\ ;\ \lambda_V(p_k, q_\ell) = \delta_{k\ell}$$

Рассмотрим базис

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_k - iq_k)\ ;\ f_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_k + iq_k) \qquad (2.3)$$

в $V_{\mathbb{C}}$. Легко видеть, что

$$\Lambda_V(e_k, e_\ell) = \Lambda_V(f_k, f_\ell) = 0\ ;\ \Lambda_V(e_k, f_\ell) = 0$$

Относительно же формы Θ векторы e_k, f_ℓ попарно ортогональны, причем

$$\Theta_V(e_k, e_k) = +1 \qquad \Theta_V(f_k, f_k) = -1$$

Пусть теперь V_+ и V_- – подпространства в V, натянутые соответственно на все векторы e_k и на все векторы f_k.

Предложение 2.I. Пусть $P \in Mor(V, W)$. Тогда P является графиком оператора $V_+ \oplus W_- \to V_- \oplus W_+$, причем матрица $S = S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ этого оператора удовлетворяет условиям

I. S симметрична $(S = S^t)$

2. $\| S \| \leq 1$

3. $\| K \| < 1, \| M \| < 1$.

Обратно, если матрица удовлетворяет условиям I – 3, то она имеет вид $S(P)$, где $P \in Mor(V, W)$ ■

Лемма 2.2. Пусть H_1, H_2 – евклидовы пространства. Пусть $H_1 \oplus H_2$ снабжено эрмитовой формой

$$\Theta((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = \langle h_1, h_1' \rangle - \langle h_2, h_2' \rangle$$

Следующие утверждения эквивалентны:

а) $Q \subset H_1 \oplus H_2$ – максимальное подпространство в $H_1 \oplus H_2$, на котором форма Θ положительно определена.

б) Q – график оператора $A : H_1 \to H_2$, причем $\| A \| < 1$. ■

Доказательство леммы очевидно (см. [55]).

Перейдем к доказательству предложения. Применим лемму в случае $H_1 = V_+ \oplus W_-$, $H_2 = V_- \oplus W_+$, $Q = P$, а форма Θ задается формулой (2.2). Тогда мы сразу получаем, что P – график некоторого оператора $S(P)$ и $\| S(P) \| \leq 1$. Симметричность матрицы $S(P)$ эквивалентна лагранжевости подпространства P (это общеизвестный факт симплектической геометрии, см. например, [81]). Утверждение 3 эквивалентно условию 3 из предыдущего пункта. В самом деле, допустим $\| M \| = 1$.

Тогда существует вектор $\omega_+ \in W_+$ такой, что

$$\| M\omega_+ \| = \| \omega_+ \| \neq 0 \tag{2.4}$$

Но $\| S(P) \| \leq 1$, а поэтому $L\omega_+ = 0$. Рассмотрим вектор $M\omega_+ \oplus \omega_+ \in W_- \oplus W_+$. В силу (2.2) он изотропен относительно Θ, а в силу $L\omega_+ = 0$ он содержится в $\operatorname{Ind} P$, тем самым условие 3 предыдущего пункта не выполнено. Ясно, что это рассуждение обратимо и ясно, что оно применимо и к матрице K. $\boxtimes$

Замечание. Пусть $V = W$. Пусть P является графиком оператора в пространстве V. Запишем его матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$. Тогда

$$S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA^{-1} & A^{t-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}B \end{pmatrix}$$

Если P - график оператора из $Sp(2n, \mathbb{R})$, то матрица $S(P)$ унитарна (верно и обратное). Если $P \in \Gamma Sp$ (см. замечание 3 из предыдущего пункта), то блок L обратим (верно и обратное). ●

Предложение 2.2. Пусть $T_1 \in Mor(V, W)$, $T_2 \in Mor(W, Y)$. Пусть

$$S(T_1) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \qquad S(T_2) = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}$$

Тогда

$$S(T_1 T_2) = \begin{pmatrix} K + LP(1-MP)^{-1}L^t & L(1-PM)^{-1}Q \\ Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R + Q^t(1-MP)^{-1}MQ \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ \omega_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ \omega_+ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \omega_+ \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_- \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Выражая v_+, y_- через v_-, y_+ мы получаем искомую формулу.

Замечание. Мы видим, что формулы (2.5) и (I.I0) для "извращенного" умножения матриц совпадают.

2.5. Представление Вейля категории Sp.

Пусть V - объект категории Sp, рассмотрим разложение $V = V_+ \oplus V_-$ и рассмотрим бозонное пространство Фока $F(V_+)$. Чтобы иметь возможность записывать ядра, мы должны ввести в V_+ операцию сопряжения. Удобнее всего считать, что $\overline{\sum \alpha_j e_j} = \sum \overline{\alpha_j}\, e_j$, где e_j определены формулой (2.3).

Пусть $T \in Mor(V, W)$. Пусть $S = S(T)$ - его преобразование Потапова-Гинзбурга. Пусть

$We(T): F(V_+) \to F(W_+)$ оператор, задаваемый формулой $We(T) = B[S(T)]$. Как уже упоминалось в п.I.5, этот оператор ограничен.

Теорема 2.I. Пусть $T_1 \in Mor(V, W)$, $T_2 \in Mor(W, Y)$. Тогда

$$We(T_2 T_1) = c\, We(T_2)\, We(T_1)$$

где c - ненулевое комплексное число. Иными словами, $T \mapsto We(T)$ - проективное представление категории Sp. ■

Теорема, в сущности, уже доказана: она получается объединением теоремы I.I и предложения 2.2.

<u>Замечание</u>. Ограничение этого представления на группу $Sp(2n,\mathbb{R})$ - это обычное представление Вейля группы $Sp(2n,\mathbb{R})$. В этом случае операторы $We(T)$ унитарны, с точностью до умножения на константу.

2.6. Симплектическая категория: бесконечномерный случай.

Мы хотим добавить к Sp бесконечномерные объекты. Для этого нам будет удобно чуть-чуть изменить определение Sp. Объектом V симплектической категории $\overline{Sp}$ мы назовем комплексное гильбертово пространство V, в котором

1. Зафиксировано разложение в прямую сумму $V = V_+ \oplus V_-$
2. Фиксирована антилинейная изометрия $I : V_+ \to V_-$.

Нам будет удобно считать (но это уже не входит в определение объекта), что в V_+ и V_- выбраны базисы e_i, f_j такие, что $Ie_i = f_i$.

Определим в V эрмитову индефинитную форму

$$\Theta_V\big((v_+, v_-),(v_+', v_-')\big) = \langle v_+, v_+'\rangle - \langle v_-, v_-'\rangle \tag{2.6}$$

и кососимметричную билинейную форму

$$\Lambda_V\big((v_+, v_-),(v_+', v_-')\big) = \langle v_-, Iv_+'\rangle - \langle v_-', Iv_+\rangle \tag{2.7}$$

По сравнению с п.2.4, мы фиксировали в V разложение в прямую сумму $V_+ \oplus V_-$. Эта новая структура не существенна в случае $\dim V < \infty$.

Морфизмом $P: V \to W$ мы назовем линейное отношение такое, что его преобразование Потапова-Гинзбурга $S(P) = S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям

1. $S = S^t$

2. $\|S\| \leqslant 1$

3. $\|K\| < 1$, $\|M\| < 1$

4. K , M – операторы Гильберта-Шмидта (если хотя бы одно из пространств V , W конечномерно, это условие выполняется автоматически).

Полезно иметь в виду, что морфизм P , удовлетворяет, в частности, условиям I – 3 из п.2.3.

Морфизмы умножаются как линейные отношения. Формула для умножения морфизмов (2.5) выводится точно также. Из нее, в частности, следует, что произведение морфизмов – снова морфизм (см. доказательство теоремы I.I).

Теорема 2.2. Поставим в соответствие каждому $V \in Ob(\overline{Sp})$ бозонное пространство Фока $F(V_+)$, а каждому морфизму $P: V_1 \to V_2$ оператор $We(P) = B[S(P)]$. Тогда $P \mapsto We(P)$ – представление категории $\overline{Sp}$.

Эта теорема доказывается точно также, как теорема 2.I.

2.7. Группа $Aut(V)$. Пусть $V \in Ob(\overline{Sp})$. Если морфизм $P: V \to V$ обратим, то, очевидно, P должен быть графиком оператора $V \to V$.

Предложение 2.3. а) Элемент $P \in End(V)$ обратим тогда и только тогда, когда P является графиком оператора A_P , сохраняющего симплектическую форму Λ_V , матрица которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

причем Ψ – оператор Гильберта-Шмидта.

б) Элемент $P \in Mor(V, W)$ обратим тогда и только тогда, когда матрица $S(P)$ унитарна.

Доказательство. б) Обозначим второй экземпляр пространства V через V'. Линейное отношение $P: V \rightrightarrows V'$ "сжимает" эрмитову форму Θ_V, обратное линейное отношение тоже долэно сжимать форму Θ_V, тем самым P должно сохранять форму Θ_V, т.е. если $(v, w) \in P$, то $\Theta_V(v,v) = \Theta_{V'}(w,w)$. Но это значит, что $P \subset V \oplus V'$ изотропно относительно формы $\Theta_{V\oplus W}$, а значит, P – график униатрного оператора $S(P): V_+ \oplus V_-' \to V_- \oplus V_+^-$. Обратно, пусть матрица $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ унитарна. Тогда обратный к P элемент Q может быть записан явно, а именно

$$S(Q) = \begin{pmatrix} \overline{M} & \overline{L}^t \\ \overline{L} & \overline{N} \end{pmatrix}.$$

а) Пусть P обратим. Так как $S(P)$ унитарна, а $\|K\|<1, \|M\|<1$, то блок L матрицы $S(P)$ обратим. Отсюда вытекает, что P является графиком оператора $A_P: V \to V$, этот оператор задается матрицей

$$\begin{pmatrix} L^{t-1} & -L^{t-1} \\ KL^{t-1} & L - KL^{t-1}N \end{pmatrix}.$$

Из явного вида оператора, во-первых, видно, что он ограничен, а во-вторых видно, что блоки, стоящие на побочной диагонали являются операторами Гильберта-Шмидта.

Как было показано в доказательстве утверждения б) оператор A_P сохраняет форму Θ_V, кроме того, он сохраняет форму Λ_V. Эти две формы связаны соотношением

$$\Lambda_V(v,w)=\Theta_V(v,Hw)$$

где оператор H задается равенством

$$H(w_+,w_-)=(I^{-1}w_-,\ Iw_+)$$

Таким образом, A_p должен коммутировать с I, а это и означает, что матрица должна иметь вид (2.8) $\boxtimes$

Замечание. Оператор A_p имеет вид (2.8), а поэтому переводит вещественное пространство $V_{\mathbb{R}}$ всех векторов вида $(v,\bar{v})=(v,Iv)$ в себя. Ограничение формы Λ_V на $V_{\mathbb{R}}$ являетсявещественной невырожденной кососимметричной формой, и оператор $(A_p)_{\mathbb{R}}$ - ограничение оператора A_p на $V_{\mathbb{R}}$ сохраняет эту форму. Легко видеть, что в случае $\dim V=2n<\infty$ операторы $(A_p)_{\mathbb{R}}$ образуют в точности полную симплектическую группу $Sp(2n,\mathbb{R})$ пространства V. Если $\dim V=\infty$, это уже не так (из-за того, что ψ - оператор Гильберта-Шмидта). Группа $Aut(V)$ всех операторов вида (2.8) - это так называемая группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений.

2.8. Автоморфизмы канонических коммутационных соотношений. Пусть $V\in Ob(\overline{Sp})$. Выберем в V_+ и V_- базисы e_i, f_j так, что $Ie_i=f_i$. Пусть $v\in V$, пусть $(v_1^+,v_2^+,\dots,v_1^-,v_2^-,\dots)$ - координаты v в этом базисе. Определим операторы $\hat{a}(v)$ рождения-уничтожения в $F(V_+)$ по формуле

$$\hat{a}(v)f=\Big(\sum_j v_j^+ z_j-\sum v_j^-\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)f$$

Легко видеть, что

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)] = \Lambda(v,w)\cdot 1$$

$$\hat{a}(v_+, v_-)^* = -\hat{a}(\bar{v}_-, \bar{v}_+)$$

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)^*] = \Theta(v,w)\cdot 1$$

Классическая задача об автоморфизмах канонических коммутацион- соотношений состоит в следующем. Для каких операторов $A: V \to V$ существует оператор $Q(A): F(V_+) \to F(V_+)$ такой, что для любого $v \in V$ выполнено

$$\hat{a}(Av) = Q(A)\hat{a}(v)Q(A)^{-1}$$

Эта задача интенсивно исследовалась в математической физике в 50$^{\text{ых}}$ - начале 60$^{\text{ых}}$ годов. (К.О. Фридрихс, И.Сигал и др.). Окончательноый ответ был получен независимо Д.Шейлом [88] и Ф.А.Березиным [4]. В нашей терминологии ответ формулируется следующим образом: A должен содержаться в $Aut(V)$. Формула Березина для $Q(A)$ в наших обозначениях переписываться в виде

$$Q(A) = B\begin{bmatrix} \bar{\Psi}\varphi^{-1} & \varphi^{t-1} \\ \varphi^{-1} & -\varphi^{-1}\psi \end{bmatrix}$$

(см. (2.8))

2.9. Морфизмы канонических коммутационных соотношений.

Пусть $V, W \in Ob(\overline{Sp})$. Пусть $P \in Mor(V, W)$. Тогда оператор $We(P)$ (см. теорему 2.2) удовлетворяет равенству

$$\hat{a}(\omega)We(P)=We(P)\hat{a}(\upsilon) \tag{2.9}$$

для любых $(\upsilon,\omega)\in P$.

Проверим это, в сущности, очевидное (после того, как оно сформулировано) высказывание. Обозначим через $H(z,\bar{u})$ выражение

$$exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar{u})\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \bar{u}\end{pmatrix}\right\}$$

В левой части равенства (2.9) стоит выражение

$$\hat{a}(\omega)\iint H(z,\bar{u})\times$$
$$\times f(u)d\mu(u)=\iint\Big(\sum\omega_j^+ z_j-\sum\omega_j^-\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)H(z,\bar{u})f(u)d\mu(u) \tag{2.10}$$

В правой части стоит выражение

$$\iint H(z,\bar{u})\Big(\sum\upsilon_j^+ u_j-\sum\upsilon_j^-\frac{\partial}{\partial u_j}\Big)f(u)d\mu(u)=$$
$$=\iint\Big(\sum\upsilon_j^+\frac{\partial}{\partial\bar{u}_j}-\sum\upsilon_j^-\bar{u}_j\Big)H(z,\bar{u})f(u)d\mu(u) \tag{2.11}$$

Т.е. нужно проверить, что ядро $K(z,\bar{u})$ удовлетворяет уравнению

$$\Big(\sum\omega_j^+ z_j-\sum\omega_j^-\frac{\partial}{\partial z_j}+\sum\upsilon_j^-\bar{u}_j-\sum\upsilon_j^+\frac{\partial}{\partial\bar{u}_j}\Big)K(z,\bar{u})=0$$

Левая часть этого равенства равна

$$\Big(\sum_j\Big[\omega_j^+ - \sum_i \omega_i^- k_{ij} - \sum_i v_i^+ l_{ij}\Big] z_j +$$

$$+\sum_j\Big[v_j^- - \sum_i \omega_i^- l_{ij} - \sum_i v_i^+ m_{ij}\Big]\bar u_j\Big) H(z,\bar u)$$

Но в силу $(v,\omega)\in P$ выражения в квадратных скобках равны 0, и на уровне формальных вычислений равенство (2.9) проверено. Здесь, однако, необходимо соблюсти некоторую аккуратность. Дело в том, что как в левой, так и в правой части (2.9), вообще говоря, стоит произведение неограниченных операторов, и, поэтому, пока неясно, имеет ли вообще смысл равенство (2.9).

Обозначим через $F^0(H)\subset F(H)$ пространство всех конечных линейных комбинаций выражений вида

$$g(z)=\Big(\prod_{j=1}^{k}(z,\bar a_j)\Big)exp\Big\{\frac{1}{2}zTz^t+z\alpha^t\Big\} \qquad (2.12)$$

где a_j, $\alpha\in H$, а T - оператор Гильберта-Шмидта, $\|T\|<1$. Ясно, что $F^0(H)$ плотно в $F(H)$, и что $F^0(H)$ инвариантно относительно всех операторов рождения-уничтожения.

<u>Предложение 2.4</u>. Рассмотрим оператор $B[S]:F(H_1)\to F(H_2)$. Тогда $B[S](F^0(H_1))\subset \subset F^0(H_2)$

<u>Теорема 2.3</u>. Пусть $P\in Mor(V,W)$. Тогда для любых $(v,\omega)\in P$ и для любого $f\in F^0(V_+)$ выполнено

$$\hat a(\omega)We(P)f=We(P)\hat a(v)f$$

<u>Доказательство предложения 2.4.</u> Достаточно доказать, что

образ любого вектора $g(z)$ вида (2.I2) содержится в $F^0(H_2)$. Пусть $s_j \in \mathbb{R}$ и пусть

$$P_{s_1,\dots,s_k}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2} z T z^t + z \alpha^t + \sum_{j=1}^{k} s_j z \bar{a}_j^t\right\}$$

Тогда

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial}{\partial s_k} P_{s_1,\dots,s_k}(z)\Big|_{s_1=s_2=\dots=0}$$

Применим к обеим частям равенства оператор $B[S] = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$:

$$B[S]\, g(z) = B[S]\left(\frac{\partial}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial}{\partial s_k} P_{s_1,\dots,s_k}(z)\Big|_{s_1=s_2=\dots=0}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial}{\partial s_k}\left(B[S]\, P_{s_1,\dots,s_k}(z)\right)\Big|_{s_1=s_2=\dots=0} \tag{2.13}$$

Равенство (2.I3) мы обоснуем чуть позже. Используя (I.9) мы получаем, что выражение (2.I3) равно

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial}{\partial s_k}\Big[\det(1-MT)^{-1/2} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\big(\alpha + \sum s_j a_j\big) \times$$

$$\times T\big(\alpha^t + \sum s_j \alpha_j^t\big)\Big\} \exp\Big\{\frac{1}{2} z\big(K + LT(1-MT)^{-1} L^t\big) z^t +$$

$$+ L(1-PM)^{-1}\big(\alpha^t + \sum s_j a_j^t\big)\Big\}\Big]\Big|_{s_1=s_2=\dots=0}$$

Легко видеть, что это выражение лежит в $F^0(H_2)$. Остается обосновать корректность перестановки дифференцирования по параметру и интегрирования в (2.13).

Здесь нам единственный раз понадобится аккуратное описание гауссовой меры на ℓ_2 (подробности см. в [59], [54]) Эта мера, как известно, сосредоточена не на самом ℓ_2., а на пространстве $\mathbb{C}^\infty$, содержащем ℓ_2, и является произведением гауссовых мер на $\mathbb{C}$ с плотностями $\frac{1}{\pi}exp(-z_i\bar{z}_i)dz_id\bar{z}_i$ Функции из $F(\ell_2)$ продолжаются канонически до функций на $\mathbb{C}^\infty$ определённых почти всюду, скалярное произведение в $F(\ell^2)$ совпадает тогда со скалярным произведением в $L^2(\mathbb{C}^\infty)$

Лемма 2.3. Пусть $Q(x)\in L^1(\mathbb{C}^\infty)$. Пусть для любых $b, a_1, a_2, \dots, a_n \in \ell_2$ выполнено

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ji}x_i\right)exp\left(\sum b_i x_i\right)Q(x)\in L^1(\mathbb{C}^\infty)$$

Тогда

$$\frac{d}{ds_1}\cdots\frac{d}{ds_n}\int Q(x)exp\left(\sum_{j=1}^{n}s_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ji}x_i\right)\right)d\mu(x)\Big|_{s_1=\dots=0}=$$

$$=\int Q(x)\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\right)d\mu(x)$$

Доказательство. Достаточно разобрать случсай $n=1$. Для этого нужно обосновать предельный переход в

$$\lim_{s\to 0}\int\frac{1}{s}\left(Q(x)exp\left(s\sum a_i x_i\right)-Q(x)\right)d\mu(x)=$$

$$=\int\frac{d}{ds}\left[Q(x)exp\left(s\sum a_i x_i\right)\right]\Big|_{s=0}d\mu(x)$$

Применим теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Подинтегральное выражнние в левой части равенства не превосходит

$$\frac{1}{s}\left|Q(x)\max_{0\le s\le\varepsilon}\left(\frac{d}{ds}exp\left(s\sum a_i x_i\right)\right)\right|\le$$

$$\le|Q(x)|+\left|Q(x)\,exp\left(\varepsilon\sum a_i x_i\right)\left(\sum a_i x_i\right)\right|\in L^1(\mathbb{R}^\infty)$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Достаточно обосновать вычисления (2.I0) и (2.II) в случае $f\in F^0(H)$. Корректность дифференцирования интеграла в (2.I0) вытекает из той же леммы 2.3 и того, что подинтегральное выражение лежит в $F^0(H)$. Равенство

$$\iint f(\bar u)\frac{\partial}{\partial u_i}g(u)\,d\mu(u)=$$

$$=\iint \bar u_i f(\bar u)\,g(u)\,d\mu(u)$$

верно для любых f и g таких, что f, g, $\frac{\partial g}{\partial u_i}$, $u_i f$ $\in F(H)$ (это равенство, в сущности и утверждает, что $\partial/\partial u_i$ и u_i сопряжены, в нем проще всего убедиться, разложив f и g в ряд Тейлора по u). Таким образом, и (2.II) корректно.

§3 Симплектическая категория и симметрические пространства.

Конструкция п.3.I. очень существенна, пп.3.3 - 3.5 содержат ряд лемм для §4.

3.I. Функтор Крейна-Шмульяна. Пусть V - объект $\overline{Sp}$. Пусть $H(V)=Mor(0,V)$. Тогда для любого морфизма $P:V\to W$ определено отображение $\gamma(P):H(V)\to H(W)$

$$\gamma(P)Q=PQ$$

где $Q\in H(V)$ (через 0 обозначен нульмерный объект $\overline{Sp}$)

Применим преобразование Потапова-Гинзбурга к

$$S=\begin{pmatrix}0 & 1-\varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}(1-\varepsilon)^2K & (1-\varepsilon)^{-1}L\\ (1-\varepsilon)^{-1}L^t & M\end{pmatrix}$$

причем второй сомножитель все еще является преобразованием Потапова-Гинзбурга, морфизма P'_ε категории $\overline{Sp}$. Отображение $\zeta(P'_\varepsilon)$ не увеличивает расстояние. Нам нужно доказать, что отображение $\mathcal{Z}_\infty$ в себя, соответствующее матрице $\begin{pmatrix}0 & 1-\varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix}$ является сжимающим. Это отображение задается формулой

$$A_\varepsilon(T)=(1-\varepsilon)^2T \tag{3.4}$$

Лемма 3.4. Отображение (3.4) - сжимающее.

Доказательство. Покажем, что

$$\rho((1-\varepsilon)^2T_1,(1-\varepsilon)^2T_2)\le(1-\varepsilon)^2\rho(T_1,T_2)$$

Это достаточно проверить для областей $\mathcal{Z}_n$. Как и раньше, мы можем провести эту проверку на уровне римановых метрик. Итак, пусть $T\in\mathcal{Z}_n$. Без ограничения общности можно считать, что $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$. Риманова метрика в точке T задается формулой

$$ds^2=\sum\frac{dt_{ij}\,d\overline{t_{ij}}}{(1-\lambda_i^2)(1-\lambda_j^2)}$$

После применения преобразования $T\mapsto(1-\varepsilon)^2T$ это выражение пререйдет в

$$(1-\varepsilon)^4\sum\frac{dt_{ij}\,d\overline{t_{ij}}}{(1-\lambda_i^2)(1-\lambda_j^2)}$$

а риманова метрика в точке $(1-\varepsilon)^2T$ задается формулой

$Q \in Mor(0, V)$. Тогда $Mor(0, V)$ перейдет в множество $\mathcal{Z}(V)$ всех симметричных матриц Гильберта-Шмидта с нормой <1. Если $\dim V = 2n < \infty$, то $\mathcal{Z}(V)$ - одна из моделей эрмитова симметрического пространства $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$ (см. [48]). Реализуем $Sp(2n, \mathbb{R})$ как множество матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, сохраняющих кососимметричную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (см. п.2.7). Группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ действует на $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}(V)$ биголоморфными автоморфизмами вида

$$T \mapsto (\Phi T + \Psi)(\overline{\Psi} T + \overline{\Phi})^{-1} \tag{3.1}$$

Стабилизатором точки $T = 0$ является подгруппа всех матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \\ & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, это и есть $U(n)$. Если $\dim V = \infty$, то группа $Aut(V)$ также действует на $\mathcal{Z}(V)$ преобразованиями вида (3.I).

Пусть теперь $P \in Mor(V, W)$, пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ - его преобразование Потапова-Гинзбурга. Соответсвующее отображение $\zeta(P) : \mathcal{Z}(V) \to \mathcal{Z}(W)$ задается формулой

$$\zeta(P)T = K + LT(1 - MT)^{-1} L^t \tag{3.2}$$

Формула (3.2) - частный случай формулы (2.5). В частности, мы получаем, что $\| \zeta(P) T \| < 1$. Отображения вида (3.I) были введены М.Г.Крейном, они называются обощенно дробно-линейными. Таким образом, мы получили функтор из категории $\overline{Sp}$ в категорию симметрических пространств ("матричных шаров") и обобщенно дробно-линейных отображений.

3.2. О норме $\zeta(P)T$.

Теорема 3.1. Пусть $S=\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}=S^t$ блочный оператор $V_+\oplus W_-\to$ $\to V_-\oplus W_+$. Пусть T - оператор $V_-\to V_+$. Пусть $\|S\|\leqslant 1$, $\|K\|<1$, $\|M\|<1$, $\|T\|\leqslant 1$.

Пусть $\zeta(S)$ задается формулой (3.2). Тогда

а) $\|\zeta(S)T\|\leqslant 1$

б) Если $\|T\|<1$, то $\|\zeta(S)T\|<1$

в) Если $\|S\|<1$, то $\|\zeta(S)T\|<1$

Это утверждение, в сущности, принадлежащее Крейну и Шмульяну мы уже многократно использовали, и тем самым при доказательстве было бы опасно использовать ранее доказанные утверждения. Теперь становится ясен его геометрический смысл: утверждается, что преобразования вида (3.2) переводят матричный шар $\mathcal{Z}(V)$ в $\mathcal{Z}(W)$

Доказательство. а) Здесь мы можем просто сослаться на [55], где то же утверждение доказано в большей общности (там не предполагается, что $S=S^t$).

б) Рассмотрим преобразование $A_\varepsilon:\mathcal{Z}(V)\to\mathcal{Z}(V)$, переводящее T в $(1-\varepsilon)^2T$. Легко видеть, что $A_\varepsilon=\zeta\begin{pmatrix}0 & 1-\varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix}$. Далее

$$A_\varepsilon\circ\zeta\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}=\zeta\begin{pmatrix}(1-\varepsilon)^2K & (1-\varepsilon)L\\ (1-\varepsilon)L^t & M\end{pmatrix}$$

$$\zeta\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\circ A_\varepsilon=\zeta\begin{pmatrix}K & (1-\varepsilon)L\\ (1-\varepsilon)L^t & (1-\varepsilon)^2M\end{pmatrix},$$

Если $\|T\|<1$, то существует $T'\in\mathcal{Z}(W)$, такое, что $T=A_\varepsilon T'$ для некоторого $\varepsilon>0$.

$$\zeta\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix} T = \zeta\begin{pmatrix} K & (1-\varepsilon)L \\ (1-\varepsilon)L^t & (1-\varepsilon)^2 M\end{pmatrix} T' =$$

$$= A_\delta \zeta \begin{bmatrix} (1-\delta)^{-2}K & \frac{1-\varepsilon}{1-\delta} L \\ \frac{1-\varepsilon}{1-\delta} L^t & (1-\varepsilon)^2 M \end{bmatrix} T'$$

При достаточно малых δ матрица в квадратных скобках все еще удовлетворяет условиям теоремы. Теперь мы применяем утверждение а).

в) Если $\|S\|<1$, то $\zeta(S)$ представимо в виде $A_\varepsilon \zeta(S')$, где $\varepsilon>0$ - достаточно малое число, а S все еще удовлетворяет условиям теоремы.

<u>3.3. Геометрия пространств</u> $\mathcal{Z}_n = Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$. Пусть $V\in Ob(Sp)$, $\dim V = 2n$. Пусть $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}(V)$ - пространство всех комплексных симметрических матриц с нормой <1 . Введем в $\mathcal{Z}_n$ риманову метрику (см. [48] , §7)

$$ds^2 = \mathrm{tr}\left[(1-T^*T)^{-1} dT^* (1-TT^*)^{-1} dT\right]$$

инвариантную относительно группы $Sp(2n,\mathbb{R})$. Тогда расстояние ρ между точками $T_1, T_2 \in \mathcal{Z}_n$ считается по формуле (см. [48] , §7)

$$\rho^2(T_1,T_2) = \frac{1}{8}\sum_k \ln^2 \frac{1+\sqrt{\tau_k}}{1-\sqrt{\tau_k}} \; ; \quad \tau_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ - собственные числа матрицы

$$R(T_1,T_2) = (1-T_1^*T_1)^{-1}(1-T_1^*T_2)(1-T_2^*T_2)^{-1}(1-T_2^*T_1)$$

Отметим, что эти числа удовлетворяют условию $\lambda_k \geqslant 1$.

<u>Предложение 3.I</u>. Отображение $\zeta(P)$ не увеличивает расс-

тояния ρ , т.е.

$$\rho(\zeta(P)T_1, \zeta(P)T_2) \leq \rho(T_1, T_2)$$

Замечание. Это предложение следует из более сильной теоремы 22.I.

Доказательство. Это неравенство достаточно доказать на уровне римановой метрики ds^2 . Далее, так как ds^2 инвариантно относительно $Sp(2n, \mathbb{R})$, мы можем домножать P слева и справа на элементы $Sp(2n, \mathbb{R})$, неравенство будет оставаться в силе. Поэтому нам достаточно ограничиться случаем, когда $\zeta(P)0=0$ и показать, что дифференциал $\zeta(P)$ в 0 не увеличивает риманову метрику.

Итак $\zeta(P)0=0$, т.е. $\zeta(P)$ имеет вид

$$T \mapsto LT(1-MT)^{-1}L^t$$

а его дифференциал в нуле

$$dT \mapsto L(dT)L^t$$

Но $\|L\| \leq 1$ и утверждение становится очевидным.

3.4. Геометрия матричного шара $\mathcal{Z}_\infty = \mathcal{Z}(\ell_2)$.

Рассмотрим индуктивный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_n$ матричных шаров $\mathcal{Z}_n$. В этом пределе по-прежнему определено расстояние ρ .Спрашивается, из чего состоит пополнение $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_n$ относительно метрики ρ . В сущности, это вопрос о том, что считать бесконечномерным аналогом пространств $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$. Цель этого пункта - показать, что искомое пополнение в точности совпадает с пространством $\mathcal{Z}(\ell_2)$. Введем в $\mathcal{Z}(\ell_2)$ обычную топологию пространства операторов Гильберта-Шмидта. Она определяется метрикой

$$\rho_E^2(T_1,T_2)=tr\,(T_1-T_2)^*(T_1-T_2)$$

Лемма 3.I. Метрика $\rho(T_1,T_2)$ корректно определена на Z_∞, более того, функция $\rho(T_1,T_2)$ непрерывна в обычной топологии пространства операторов Гильберта-Шмидта.

Доказательство. Вместо матрицы $R(T_1,T_2)$ рассмотрим сопряженную к ней матрицу

$$W(T_1,T_2)=$$

$$=(1-T_1^*T_1)^{-\frac{1}{2}}(1-T_1^*T_2)(1-T_2^*T_2)^{-1}(1-T_2^*T_1)(1-T_1^*T_1)^{-1/2}$$

Эта матрица самосопряжена, следовательно, ее собственные числа вещественны, а с другой стороны, собственные числа $W(T_1,T_2)$ теже, что и у $R(T_1,T_2)$. Отображение

$$(T_1,T_2)\mapsto V(T_1,T_2)=W(T_1,T_2)-1$$

является непрерывным отображением из $Z_\infty\times Z_\infty$ в пространство ядерных самосопряженных операторов. Собственные числа матрицы $V(T_1,T_2)$ неотрицательны в конечномерном случае, т.е. в конечномерном случае $V(T_1,T_2)$ - положительно определенная матрица. Значит это так и в нашем случае. Далее отображение

$$M(V)=\sqrt{V(V+1)^{-1}}$$

является непрерывным отображением из пространства положительно определенных ядерных самосопряженных операторов в пространство самосопряженных операторов Гильберта-Шмидта. При этом

$M(V)<1$. Наконец

$$\rho(T_1,T_2)=\operatorname{tr}\ln^2\left[(1+M)(1-M)^{-1}\right]$$

а в правой части стоит непрерывная числовая функция. ☒

<u>Предложение 3.2</u>. Пространство $\mathcal{Z}_\infty$ полно относительно метрики ρ .

<u>Лемма 3.2.</u>

$$\rho_E(T_1,T_2)\leq\rho(T_1,T_2)$$

<u>Доказательство.</u> В силу соображений непрерывности это неравенство достаточно проверить для пространств $\mathcal{Z}_n,\ n<\infty$. Тогда расстояние ρ_E отвечает римановой метрике

$$ds_E^2=dT^*dT$$

а эта риманова метрика мажорируется метрикой ds^2 . Лемма доказана.

<u>Лемма 3.3</u>. Пусть B_C - шар радиуса C с центром в 0 относительно метрики ρ . Тогда метрики ρ и ρ_E в шаре B_C эквивалентны.

<u>Доказательство</u>. То, что метрика ρ мажорирует метрику ρ_E уже доказано. Нам достаточно показать, что существует константа $\mathcal{D}$ зависящая от C , но не зависящая от n такая, что $\rho(T_1,T_2)\leq\mathcal{D}\rho(T_1,T_2)$ в любом шаре B_C в области $\mathcal{Z}_n$. Это неравенство достаточно доказать на уровне римановых метрик. Без ограничения общности можно считать, что $T\in B_C$ имеет вид $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$, причем $0\leq\lambda_j<1$ ([ ], §7).

В точке T риманова метрика ds^2 задается формулой

$$ds^2 = \sum \frac{dt_{ij}\, d\bar{t}_{ij}}{(1-\lambda_i)^2(1-\lambda_j^2)}$$

Тем самым длина вектора в смысле римановых метрик ds^2 и ds_E^2 не может отличаться более чем в $\left(1-(\max_j \lambda_j)^2\right)^{-2}$ раз. Лемма доказана.

Доказательство предложения. Нам достаточно показать, полноту шара B_C. Рассмотрим функцию

$$\psi(T) = \rho(0,T) = \left[\operatorname{tr} \ln^2\left((1-|T|)(1+|T|)\right)\right]^{1/2}$$

определенную на множестве $\overline{Z}_\infty$ всех матриц Гильберта-Шмидта с нормой $\leqslant 1$. Эта функция принимает значения в множестве $\mathbb{R}_+ \cup \infty$, где через $\mathbb{R}_+$ обозначено множество положительных чисел. Легко видеть, что эта функция непрерывна на всем $\overline{Z}_\infty$ относительно метрики ρ_E (если $\|T_n\| \to 1$, то $\psi(T_n) \to \infty$, если $\|T_n\| = 1$ и $T_n \to T$, то $\|T\| = 1$). Поэтому шар B_C замкнут в метрике ρ_E в пространстве всех операторов Гильберта-Шмидта. Значит он полон относительно ρ_E, а, значит (по лемме 3.3) он полон и в метрике ρ.

3.5. Отображения $\zeta(P)$ в Z_∞.

Предложение 3.3 а) $\rho(\zeta(P)T_1, \zeta(P)T_2) \leqslant \rho(T_1, T_2)$

б) Пусть $S = S(P)$ – преобразование Потапова-Гинзбурга отношения P. Если $\|S\| < 1$, то $\zeta(S)$ – сжимающее отображение.

Доказательство. а) Следует из предложения 3.I.

б) Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$. Если $\|S\| < 1$, то S представимо в виде

$$\sum \frac{dt_{ij}\, d\overline{t_{ij}}}{(1-(1-\varepsilon)^2\lambda_i^2)(1-(1-\varepsilon)^2\lambda_j^2)}$$

Лемма доказана.

§4. Теоремы об ограниченности операторов $B[S]$.

4.I. Формулировки теорем. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям п.I.4.

Теорема 4.I. Если $\| S \| < 1$, то $B[S]$ - ограниченный оператор.

Теорема 4.2. Если K, M - ядерные операторы (= операторы со следом), то $B[S]$ - ограниченный оператор.

4.2. Сведение теорем к самосопряженному случаю.

Напомним, что умножению операторов $B[S_1]$, $B[S_2]$ отвечает умножение матриц S_1, S_2 "звездочкой", задаваемое формулой (I.I0). Напомним также, что формально сопряженный оператор к $B[S]$ - это оператор $B[S^{\circledast}]$, см. (I.II).

Лемма 4.I. а) Если $\| S \| < 1$, то $\| S^{\circledast} \| < 1$

б) Если $\| S_1 \| < 1$, $\| S_2 \| < 1$, то $\| S_1 * S_2 \| < 1$

Доказательство. а)

$$S^{\circledast} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{S} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

б) Когда мы при доказательстве теоремы I.I проверяли условие $\| S_1 * S_2 \| \leqslant 1$, мы использовали утверждение а) теоремы 3.I., теперь мы можем поступить точно так же, но использовать утверждение б) или в) теоремы 3.I. $\boxtimes$

Лемма 4.2. а) Если S удовлетворяет условиям теоремы 4.2, то $S^{\circledast}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2.

б) Если S_1, S_2 удовлетворяют условиям теоремы 4.2, то $S_1 * S_2$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2.

Доказательство: Очевидно.

Лемма 4.3. Оператор $B[S]$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен $B[S^{\circledast} * S]$

Доказательство. Пусть $B[S]$ неограничен. Тогда для любого $C>0$ существует вектор $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b[T_j | \alpha_j^t]$, такой, что $\|B[S]\sigma\| / \|\sigma\| > C$. Тогда, используя предложение I.2 получаем

$$\frac{\langle B[S^{\circledast} S]\sigma, \sigma\rangle}{\langle \sigma, \sigma\rangle} = \frac{\langle B[S]\sigma, B[S]\sigma\rangle}{\langle \sigma, \sigma\rangle} > C^2$$

т.е. $B[S^{\circledast} S]$ неограничен. Обратное утверждение очевидно. $\boxtimes$

Легко видеть, что $(A^{\circledast} A)^{\circledast} = A^{\circledast} A$

Поэтому нам достаточно доказать, теоремы 4.I и 4.2 в случае, когда $S^{\circledast} = S$ (тем самым, $B[S]$ действует из пространства $F(H)$ в себя).

4.3. Принцип неподвижной точки.

Теперь мы вспомним, что

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} b[T] = \det\left((1-MT)^{-\frac{1}{2}}\right) b[K + LT(1-MT)^{-1} L^t]$$

(это частный случай леммы I.2). Отсюда сразу вытекает следующая лемма.

Лемма 4.4. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $b[T]$ - собственный вектор оператора $B[S]$

б) $T \in Z(V)$ - неподвижная точка отображения

$$\zeta(S)T = K + LT(1-MT)^{-1}L^t$$

Предложение 4.I. Пусть $S = S^{\circledast}$. Пусть $b[T]$ - собственный вектор оператора $B[S]$. Тогда $B[S]$ ограничен. Более того,

$$\|B[S]\| = \det\left((1-MT)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.1}$$

Лемма 4.5. Группа $Aut(V)$ действует на области $Z(V)$ транзитивно.

Доказательство леммы. Достаточно показать, что 0 можно перевести в любую другую точку $T \in Z(V)$. Пусть $Q = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sqrt{1-T\overline{T}} \\ \sqrt{1-\overline{T}T} & \overline{T} \end{pmatrix}$, эта матрица удовлетворяет условиям п.I.4 и $\zeta(Q)(0) = T$. Кроме того Q унитарна, поэтому в силу предложения 2.3 б) обратное преобразование Потапова-Гинзбурга от Q содержится в $Aut(V)$.

Доказательство предложения. Мы хотим показать, что норма оператора $B[S]$ достигается на векторе $b[T]$. Пусть $Q \in Aut(V)$ таков, что $\zeta(Q)(0) = T$ и тем самым, $B[Q]\,b[0] = b[T]$. Рассмотрим оператор $B[Q]^{-1}B[S]\,B[Q]$, он имеет вид $\lambda B[S']$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, причем

$$B[S']\,b[0] = b[0] \tag{4.2}$$

а $(S')^{\circledast} = S'$. В силу равенства (4.2) матрица S' должна иметь вид $S' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$, а в силу того, что

$(S')^{\circledast} = S'$ мы имеем $M = 0$. Тем самым

$$B[S']f(z) = f(Lz)$$

Обозначим через $S^k H$ k-ую симметрическую степень гильбертова пространства H . Тогда $F(H) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k H$, пространства $S^k H$ состоят из однородных функций. Оператор $f(z) \mapsto f(Lz)$ оставляет инвариантным каждое из подпространств $S^k H$, причем в $S^k H$ этот оператор действует как k-ая симметрическая степень оператора L . Но $\|L\| \leq 1$, значит норма его симметрических степеней ≤ 1 , а значит $\|B[S']\| = 1$, она достигается на вакуумном векторе $b[0]$. Тем самым норма оператора

$$B[S] = \lambda^{-1} B[Q] \, B[S'] \, B[Q]^{-1}$$

достигается на векторе $b[T]$
(мы воспользуемся тем, что $B[Q]$ унитарен с точностью до умножения на константу). $\boxtimes$

<u>Пример</u>. Пусть S - та же матрица, что в контрпримере п.I.5. Тогда уравнение $\zeta[S]T = T$ имеет единственное решение: $T = 1$. Это решение нас не устраивает по двум причинам: I. Неверно, что $\|T\| < 1$, 2. Неверно, что - оператор Гильберта-Шмидта. Теоремы о неподвижных точках дробно-линейных отображений на матричных шарах довольно популярны в теории несамосопряженных операторов в связи с теоремой Крейна об инвариантном подпространстве (см. [53] ,[2]). К сожалению, мы не можем непосредственно воспользоваться такими теоремами, потому что они дают неподвижные точки, которые нас не устраивают.

<u>4.4. Доказательство теоремы 4.I</u>. Отображение $\zeta[S]$ в этом случае - сжимающее (см. предложение 3.2) отображение полного (см предложение 3.3) метрического пространства $\mathcal{Z}(V)$ в себя. Теперь мы можем применить предложение 4.I.

<u>4.5. Доказательство теоремы 4.2</u>. Оно проще, чем доказательство теоремы 4.I, потому что не опирается на геометрию матричных шаров, обсуждавшуюся в §3.

<u>Предложение 4.2</u>. Пусть H конечномерно, $B[S]$ - оператор в $F(H)$, причем $S = S^{\circledast}$. Тогда

$$\|B[S]\| \leq \det(1-|M|)^{-1/2} \tag{4.3}$$

где $|M| = (M^* M)^{1/2}$

<u>Доказательство</u>. Сначала покажем, что наше утверждение достаточно доказать в случае, когда $\|S\| < 1$. Действительно, предположим, что это так. Тогда для любого n и любого $B[S]$, $S = \begin{pmatrix} \overline{M} & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ мы имеем

$$\left\| B\begin{bmatrix} \overline{M} & (1-\frac{1}{n})L \\ (1-\frac{1}{n})L^t & M \end{bmatrix} \right\| \leq \det(1-|M|)^{-1/2}$$

а потому, в силу предложения I.3, мы получаем (4.3) для любого самосопряженного S $(S = S^{\circledast})$.

Итак, пусть $\|S\| < 1$. Тогда по теореме Брауэра отображение $\zeta(S)$ имеет неподвижную точку в области $\mathcal{Z}(V)$. Поэтому наше утверждение сводится к следующей лемме.

Лемма 4.6. Пусть L, X - квадратные матрицы, $\|L\|<1$, $\|X\|\leqslant 1$, $L=L^*, L>0$. Тогда

$$|\det(1-XL)|\geqslant \det(1-L)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi(t)=-\ln(1-e^t)$. Тогда $\psi''(t)=-e^{-t}(1-e^{-t})^{-2}\leqslant 0$, т.е. функция $\psi(t)$ выпукла.

Пусть $\alpha_1\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n$, $\beta_1\geqslant\ldots\geqslant\beta_n$, $\gamma_1\geqslant\ldots\geqslant\gamma_n$, - сингулярные числа операторов X, L и XL. Применяя неравенство фон Нёймана-Хорна (см. [28], теорема I + замечание 2) к функции $f(x)=\psi(\ln(x))$ мы получаем, что

$$-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\gamma_i)\leq-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\alpha_i\beta_i)$$

Отсюда

$$\det(1-|XL|)\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i\beta_i)\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-\beta_i)= \tag{4.4}$$

$$=\det(1-L)$$

Далее, пусть $\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$ - собственные числа оператор[illegible] XL. Применяя неравенство Вейля (см. [28], теорема 2 + замечание I) к функции $f(x)=\psi(\ln t)$ мы получаем

$$-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-|\lambda_i|)\leq-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\gamma_i)$$

Отсюда

$$|\det(1-XL)|=\prod_{i=1}^{n}|1-\lambda_i|\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-|\lambda_i|)\geqslant$$

$$\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)=\det(1-|XL|)$$

Искомое неравенство следует из (4.4) и (4.5).

Замечание. В формулировке неравенств фон Неймана-Хорна и Вейля требуется, чтобы функция $\psi(t)$ была выпукла и непрерывна при всех t (что у нас не выполнено). Однако эта функция выпукла и непрерывна на промежутке $[-\infty, \ln\beta_1]$, что для нас достаточно, чтобы "подогнать" нашу функцию $\psi(t)$ под формулировку теоремы, можно рассмотреть новую функцию $\tilde{\psi}(t)$ которая выпукла, непрерывна и равна $\psi(t)$ на $[-\infty, \ln\beta_1]$. ●

Сама теорема 4.2. сразу следует из предложения 4.2.и предложения I.4. Заодно мы получаем верхнюю оценку для нормы $B[S]$. ☒

§5. Аффинная симплектическая категория и операторы $B[S|h^t]$.

Как известно, вместо бесконечномерной симплектической группы часто рассматривается ее расширение с помощью группы Гейзенберга. Мы хотим построить категорный аналог этой расширенной группы.

5.I. Аффинные отношения. Пусть V и W - линейные пространства. Аффинным отношением мы будем называть произвольное множество вида $h+P\subset V\oplus W$, где $P\subset V\oplus W$ - линейное подпространство, а $h\in V\oplus W$. Пространство P мы будем называть направляющим пространством аффинного отношения. Произведение аффинных отношений определяется как обычное произведение отношений.

5.2. Аффинная симплектическая категория SpH. Объекты этой категории те же, что и у $\overline{Sp}$. Пусть $V, W \in Ob(\overline{SpH})$. Аффинное отношение $H \subset V \oplus W$ является морфизмом категории $\overline{SpH}$, если его направляющее подпространство P является морфизмом категории $\overline{Sp}$. Произведение морфизмов определяется как произведение аффинных отношений.

Пусть $H \in Mor_{\overline{SpH}}(V, W)$, P – его направляющее пространство, $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ – преобразование Потапова-Гинзбурга отношения P. В качестве вектора h, осуществляющего сдвиг P в H можно выбрать некоторый элемент $(\lambda, \mu) \in V_+ \oplus W_+$. Таким образом, мы можем поставить каюдому морфизму H матрицу

$$\left[\begin{array}{cc|c} K & L & \lambda^t \\ L^t & M & \mu^t \end{array}\right]$$

Умножению морфизмов соответствует следующая операция над матрицами:

$$\left[\begin{array}{cc|c} K & L & \lambda^t \\ L^t & M & \mu^t \end{array}\right] \circ \left[\begin{array}{cc|c} P & Q & \pi^t \\ Q^t & R & \varkappa^t \end{array}\right] = \tag{5.1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \lambda^t + L(1-PM)^{-1}(\pi^t + P\mu^t) \\ \varkappa^t + Q^t(1-PM)^{-1}(M\pi^t + \mu^t) \end{array} \right]$$

5.3. Операторы $B[S|h^t]$. Поставим в соответствие каждому морфизму $H: V \to W$ категории $\overline{SpH}$ линейный оператор $F(W_+) \to F(V_+)$ по формуле

$$We(H)f(z) \overset{def}{=} B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\lambda^t \\ \mu^t\end{matrix}\right] f(z) \overset{def}{=}$$

$$= \iint \exp\left\{ \frac{1}{2}(z\ \bar{u}) \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + z\lambda^t + \bar{u}\mu^t \right\} f(u)\, d\mu(u)$$

где $\left(\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\lambda^t \\ \mu^t\end{matrix}\right)$ – матрица, связанная с H .

Применяя формулу (I.3) мы получаем, что

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\lambda^t \\ \mu^t\end{matrix}\right] b\left[P \middle| \pi^t\right] = c(M, P, \mu, \pi) \times$$

$$\times b\left[K + LP(1-MP)^{-1}L^t \middle| \lambda^t + L(1-PM)^{-1}(\pi^t + P\mu^t)\right]$$

где (5.2)

$$c(M, P, \mu, \pi) = \det\left((1-MP)^{-\frac{1}{2}}\right) \exp\left\{\frac{1}{2}(\pi\ \mu)\begin{pmatrix} -P & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi^t \\ \mu^t \end{pmatrix}\right\}$$

Таким образом мы видим, что наш оператор (вообще говоря, неограниченный) корректно определен на множестве $F_0(W_+)$ и переводит его в $F_0(V_+)$.

Еще раз применяя формулу (I.3) мы получаем, формулу для умножения операторов

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\lambda^t \\ \mu^t\end{matrix}\right] B\left[\begin{matrix} P & Q \\ Q^t & R \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\pi^t \\ \varkappa^t\end{matrix}\right] = \qquad (5.3)$$

$$= c(M, P, \mu, \pi) B\left[\left(\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\lambda^t \\ \mu^t\end{matrix}\right) \circ \left(\begin{matrix} P & Q \\ Q^t & R \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\pi^t \\ \varkappa^t\end{matrix}\right)\right]$$

где коэффициент $c(M, P, \mu, \pi)$ задается формулой (5.2).

Итак, доказана

Теорема 5.I. Отображение $H \mapsto We(H)$ является проективным представлением категории $\overline{Sp\,H}$. ■

Полезно также знать формулу для сопряженного оператора

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}\begin{vmatrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{vmatrix}^* = B\begin{bmatrix} \overline{M} & \overline{L}^t \\ \overline{L} & \overline{K} \end{bmatrix}\begin{vmatrix} \overline{\mu}^t \\ \overline{\lambda}^t \end{vmatrix} \qquad (5.4)$$

5.4. Теорема ограниченности. Мы уже видели, что оператор $B[S|0] = B[S]$ может оказаться неограниченным. Операторы вида $B\left[\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right]$ неограниченны всегда, кроме случая $\mu = -\overline{\lambda}$, когда они унитарны с точностью до умножения на константу.

Теорема 5.2. Пусть $\|S\| < 1$. Тогда оператор $B[S|h]$ ограничен.

Доказательство. В силу формулы (5.3) оператор $B[S|h]$ представим в виде

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right] = c\,B\left[\begin{matrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ 0 \end{matrix}\right] \times$$

$$\times B\left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] B\left[\begin{matrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ \mu^t \end{matrix}\right]$$

Средний сомножитель в правой части при достаточно малых ε по теореме 4.I является ограниченным оператором, а поэтому нам достаточно доказать ограниченность двух крайних сомножителей. Итак, вопрос сводится к задаче об ограниченности операторов вида

$$B\begin{bmatrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{bmatrix}\left|\begin{matrix}\lambda^t \\ \mu^t\end{matrix}\right]$$

Как и раньше (см. п.4.2) эти операторы без ограничения общности можно считать симметричными. Это соотвествует случаю $\lambda=\bar{\mu}$ (а наш оператор тем самым действует из пространства $F(W_+)$ в себя). Итак, рассмотрим оператор

$$B\left[\begin{matrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b^t \\ \bar{b}^t \end{matrix}\right]f(z)=\iint exp\{(1-\varepsilon)z\bar{u}^t+bz^t+$$

$$+\bar{b}\,\bar{u}^t\}f(u)\,d\mu(u)=e^{z\bar{b}^t}\iint exp\{((1-\varepsilon)z+b)\bar{u}^t\}\times$$

$$\times f(u)\,d\mu(u)=exp(z\bar{b}^t)f((1-\varepsilon)z+b) \qquad (5.5)$$

(в последнем равенстве испольвано воспроизводящее свойство (I.I)). Мы можем без ограничения общности считать, что $W_+=\mathbb{C}^n$ или ℓ_2.

Теперь, как и в п.I.5, мы разложим $F(W_+)$ в тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^{n} F(\mathbb{C}^1)$, где $n=\dim W_+\leq\infty$ Наш оператор тогда раскладывается в тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ операторов A_i в $F(\mathbb{C}^1)$, задаваемых формулой

$$A_i f(z)=f((1-\varepsilon)z_i+b_i)e^{z_i\bar{b}_i}$$

Постановка показывает, что функции

$$g_m(z)=(-\varepsilon z_i+b_i)^m exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{b}_i z\right)$$

являются собственными функциями оператора A_i, соответствующие собственные числа равны

$$\sigma_m = (1-\varepsilon)^m \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}|b_i|^2\right)$$

Покажем, что система функций $g_m(z)$ полна в $F(\mathbb{C}^1)$. Иными словами, покажем, что множество Y фонкций вида $P(z)\exp(\gamma z)$, где γ фиксировано, плотно в $F(\mathbb{C}^1)$. Для этого применим оператор $B\left[\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \gamma \\ -\bar{\gamma} \end{matrix}\right]$

унитарный с точностью до умножения на константу. Он переводит Y в множество всех многочленов, которое плотно в $F(\mathbb{C}^1)$.

Итак, норма самосопряженного оператора A_i равна $\max_m \sigma_m = \sigma_0$. Норма оператора (5.5) равна $\prod \|A_i\| = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} b \bar{b}^t\right)$, так как $b \in l_2$.

Теорема доказана.

Глава II. Ортогональная категория и морфизмы канонических антикоммутационных соотношений.

§6. Операторы Березина в фермионном пространстве Фока.

6.I. Гильбертово фермионное пространство Фока $\overline{\Lambda}$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - набор из n $(n=0,1,2,\ldots,\infty)$ антикоммутирующих переменных:

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i \qquad \xi_j^2 = 0$$

Пусть $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots$ - другой набор попарно антикоммутирующих между собой и антикоммутирующих со всеми ξ_j переменных. Мы будем говорить, что переменные $\overline{\xi}_j$ комплексно "сопряжены" переменным ξ_j. Положим

$$\overline{\xi_i \xi_j} = \overline{\xi}_j \overline{\xi}_i \qquad \overline{\overline{\xi}}_i = \xi_i$$

Это позволяет перенести операцию комплексного сопряжения на произвольные полиномиальные выражения от переменных $\xi_j, \overline{\xi}_j$.

Введем левые дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\xi_i f(\xi)\right) = f(\xi) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi) = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от ξ_i. Введем также правые дифференцировании

$$\left(f(\xi)\xi_i\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = f(\xi) \qquad \left(f(\xi)\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от ξ_i.

Формальный интеграл определим следующим образом