собственные числа равны

$$\sigma_m = (1-\varepsilon)^m \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}|b_i|^2\right)$$

Покажем, что система функций $g_m(z)$ полна в $F(\mathbb{C}^1)$. Иными словами, покажем, что множество $Y$ фонкций вида $P(z)\exp(\gamma z)$, где $\gamma$ фиксировано, плотно в $F(\mathbb{C}^1)$. Для этого применим оператор $B\left[\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma\\ -\bar{\gamma}\end{matrix}\right]$

унитарный с точностью до умножения на константу. Он переводит $Y$ в множество всех многочленов, которое плотно в $F(\mathbb{C}^1)$.

Итак, норма самосопряженного оператора $A_i$ равна $\max\limits_m \sigma_m = \sigma_0$. Норма оператора (5.5) равна $\prod \|A_i\| = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} b\bar{b}^t\right)$, так как $b \in \ell_2$.

Теорема доказана.

# Глава II. Ортогональная категория и морфизмы канонических антикоммутационных соотношений.

## §6. Операторы Березина в фермионном пространстве Фока.

6.I. Гильбертово фермионное пространство Фока $\overline{\Lambda}$. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$, ... - набор из $n$ $(n=0,1,2,\ldots,\infty)$ антикоммутирующих переменных:

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i \qquad \xi_j^2 = 0$$

Пусть $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$, ... - другой набор попарно антикоммутирующих между собой и антикоммутирующих со всеми $\xi_j$ переменных. Мы будем говорить, что переменные $\overline{\xi}_j$ комплексно "сопряжены" переменным $\xi_j$. Положим

$$\overline{\xi_i \xi_j} = \overline{\xi}_j \, \overline{\xi}_i \qquad \overline{\overline{\xi}}_i = \xi_i$$

Это позволяет перенести операцию комплексного сопряжения на произвольные полиномиальные выражения от переменных $\xi_j$, $\overline{\xi}_j$.

Введем левые дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\xi_i f(\xi)\right) = f(\xi) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi) = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от $\xi_i$. Введем также правые дифференцирования

$$\left(f(\xi)\xi_i\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = f(\xi) \qquad \left(f(\xi)\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от $\xi_i$.

Формальный интеграл определим следующим образом

$$\int \prod_{i=1}^{K} \bar{\xi}_{\alpha_i} \xi_{\alpha_i} d\xi d\bar{\xi} = 1$$

При перестановке сомножителей интеграл соответсвующим образом меняет свой знак. Интегралы от остальных мономов, по определению, равны нулю.

Обозначим через $\Lambda_0$ пространство всех полиномиальных выражений от переменых $\xi_1$, $\xi_2$, ... (подчеркнем, что эти выражения не зависят от "антиголоморфных" переменных $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, ... ). Введем в $\Lambda_0$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{g}(\xi) f(\xi) d\xi d\bar{\xi} \qquad (6.1)$$

Гильбертовым фермионным пространством ФОка $\bar{\Lambda}$ с $n$ степенями свободы мы назовем пополнение пространства $\Lambda_0$ по скалярному произведению (6. 1 ).

Замечание. Мономы вида $\xi_{j_1} \dots \xi_{j_n}$ $(j_1 \leqslant \dots \leqslant j_n)$ образуют в $\Lambda$ ортонормальный базис.

Замечание. Если число переменных конечно; то $\bar{\Lambda} = \Lambda_0$ - это просто внешняя алгебра.

6.2. Полинормированное фермионное пространство Фока .

Сейчас мы введем в фермионном пространстве еще одну топологию (см.[34]), которая в некоторых отношениях более предпочтительна, чем гильбертова.

Пусть $f(\xi) \in \bar{\Lambda}$ . Представим $f(\xi)$ в виде суммы

$$f(\xi) = \sum_{K=0}^{\infty} f_K(\xi) \qquad (6.2)$$

где $f_K(\xi)$ - однородная по $\xi$ форма степени $K$ . Полинормированное фермионное пространство Фока состоит из всех выражений вида (6. 2 ), удовлетворяющих условию:

$$\forall C>0\ \exists A\ \forall k: \|f_k(\xi)\| \leqslant A\exp(-Ck)$$

(т.е. $\|f_k(\xi)\|$ очень быстро убывают). Введем в $\Lambda$ семейство полунорм $|\cdot|_C$ :

$$|f|_C = \sup_{k\geqslant 0} \|f_k(\xi)\|\exp(Ck)$$

Лемма 6.I. Пространство $\Lambda$ полно.

Доказательство. Пусть последовательность $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ фундаментальна по каждой из полунорм $|\cdot|_C$. Тогда для любого $k$ последовательность $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}, \ldots$ сходится по норме, пусть $f_k = \lim_{j\to\infty} f_k^{(j)}$.

Так как для любого $k$ $\|f_k^{(j)}\| \leqslant A\exp(-Ck)$, то и $\|f_k\| \leqslant A\exp(-Ck)$, что и требовалось доказать.

Лемма 6.2. Пусть $\sum |a_{ij}|^2 < \infty$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Тогда $\exp(\sum a_{ij}\xi_i\xi_j) \in \Lambda$ ■

Перед тем, как доказывать лемму, мы докажем следующее утверждение.

Лемма 6.3. Пусть $H$ - гильбертово пространство с операцией комплексного сопряжения. Пусть $A$ - антилинейный кососимметрический оператор Гильберта-Шмидта. Тогда в $H$ существует вещественный ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ такой, что

$$Ae_{2j-1} = \lambda_j e_{2j}\ ; \ Ae_{2j} = -\lambda_j e_{2j-1}\ ; \ Ag_j = 0,\ \lambda_j \in \mathbb{R}$$

Доказательство леммы 6.3. Итак, мы имеем компактный оператор $A$, удовлетворяющий условию $\langle Ax, \bar{y}\rangle = -\langle x, \overline{Ay}\rangle$. Овеществим наше пространство. Тогда $A$ становится кососимметрическим компактным оператором в вещественном гильбертовом пространстве $H$. Такой оператор ортогональным преобразованием приводится к блочно-диагональному виду, причем блоки - это матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$ и (быть может) матрицы $(0)$.

Этот факт общеизвестен в конечномерном случае, в бесконечномерном случае достаточно комплексифицировать гильбертово пространство и применить теорему Гильберта-Шмидта.

Итак, $H$ распалось в прямую сумму двумерных и одномерных инвариантных подпространств. Пусть $H_\lambda$ $(\lambda > 0)$ - прямая сумма всех двумерных подпространств, отвечающих числу $\lambda$, $H_0 = \operatorname{Ker} A$. Ясно, что $H_\lambda$ инвариантно относительно умножения на $i$, в самом деле $H_\lambda$ - собственное подпространство (линейного) оператора $A^2$. Рассмотрим теперь в $H_\lambda$ $(\lambda > 0)$ оператор $B$, равный $\frac{1}{\lambda} A$. Итак, нам остается привести к каноническому виду в комплексном пространстве антилинейный оператор $B$ такой, что $B^2 = -1$. Теперь утверждение становится очевидным. $\boxtimes$

Доказательство леммы 6.2. Итак, нам достаточно проверить, что

$$f(\xi) = \exp\left(\sum \lambda_j \xi_{2j} \xi_{2j-1}\right)$$

содержится в $\Lambda$, если $\sum |\lambda_j|^2 < \infty$

$$f_k(\xi) = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} \lambda_{\alpha_1} \ldots \lambda_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k} \xi_{2\alpha_j} \xi_{2\alpha_j - 1}$$

Отсюда

$$\|f_k\|^2 = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} |\lambda_{\alpha_1} \ldots \lambda_{\alpha_k}|^2 \leqslant \frac{1}{k!} \left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} |\lambda_j|^2\right)^k$$

Лемма доказана.

6.3. Ядра операторов. Пусть $\bar{\Lambda}^{(1)}$ и $\bar{\Lambda}^{(2)}$ - гильбертовы фермионные пространства Фока, пусть $\bar{\Lambda}^{(1)}$ состоит из "функций" от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots$, а $\bar{\Lambda}^{(2)}$ - из функций от переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots$. Тогда любой ограниченный оператор $A : \bar{\Lambda}^{(2)} \to \bar{\Lambda}^{(1)}$ может быть записан в виде

$$A f(\xi) = \int K(\xi, \bar{\eta}) f(\eta)\, d\eta\, d\bar{\eta} \qquad (6.3)$$

где $K(\xi, \bar{\eta})$ - формальный ряд по переменным $\xi_j, \bar{\eta}_k$.

Аналогичное утверждение верно и для полинормированных пространств Фока. Выражение $K(\xi, \bar{\eta})$ по существу, является производящей функцией для матричных элементов оператора $A$ в базисе $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}, \eta_{j_1}, \ldots, \eta_{j_n}$. Поэтому в [4] "ядро" $K(\xi, \bar{\eta})$ называется производящим функционалом.

Вообще в виде (6.3) может быть записан любой оператор з пространства многочленов от переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots$ в пространство формальных рядов от $\xi_1, \xi_2, \ldots$. В самом деле, пусть

$$A\, \eta_{\alpha_1} \ldots \eta_{\alpha_k} = P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\xi)$$

где в правой части стоят формальные ряды от $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Тогда

$$K(\xi, \bar{\eta}) = \sum P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\xi)\, \bar{\eta}_{\alpha_k} \ldots \bar{\eta}_{\alpha_1}$$

6.4. Операторы Березина. Оператор из одного фермионнного пространства Фока в другое мы назовем оператором Березина, если его ядро представимо в виде

$$\left[\prod_{i=1}^{k}\left(\sum \alpha_{ij}\xi_j+\sum \beta_{ij}\bar{\eta}_j\right)\right]\times \qquad (6.4)$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix}A & B\\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t\\ \bar{\eta}^t\end{pmatrix}\right\}$$

где через $\xi$ и $\bar{\eta}$ обозначены матрицы строки $(\xi_1,\xi_2,\dots)$ , $(\bar{\eta}_1,\bar{\eta}_2,\dots)$ , через $\xi^t$ , $\bar{\eta}^t$ – соответствующие матрицы столбцы, матрица $B$ ограничена, матрицы $A$ и $C$ являются матрицами Гильберта-Шмидта, $A=-A^t$, $C=-C^t$ , $\sum_j|\alpha_{ij}|^2<\infty$ , $\sum_j|\beta_{ij}|^2<\infty$ .

Это определение очень похоже на определение операторов $B[S]$ из §I.

Строго говоря, мы пока не знаем, задает ли ядро (6.4) корректно определенный оператор в пространстве Фока, однако, в силу п. 6.3. этот оператор корректно определен как оператор из пространства многочленов в пространство формальных рядов.

6.5. <u>Второе определение операторов Березина.</u> Обозначим через $\mathcal{D}_i=\mathcal{D}_i^{\xi}$ оператор

$$\mathcal{D}_i=\xi_i+\frac{\partial}{\partial\xi_i}$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}_i^2=1$ , $\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j=-\mathcal{D}_j\mathcal{D}_i\ (i\neq j)$

Оператор $Q$ является оператором Березина, если $Q$ представим в виде

$$Q=\mathcal{D}_{i_1}^{\xi}\dots\mathcal{D}_{i_n}^{\xi}\,P\,\mathcal{D}_{j_1}^{\eta}\dots\mathcal{D}_{j_k}^{\eta} \qquad (6.5)$$

где $P$ – оператор с ядром

$$\lambda\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix}A & B\\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\} \qquad (6.6)$$

причем матрицы $A$ и $C$ - матрицы Гильберта-Шмидта, $B$ - ограниченная матрица, а $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Заметим, что операторы $\mathcal{D}_i$ корректно определены и в пространстве степенных рядов и в пространстве многочленов от $\eta_j$ , а поэтому операторы Березина (в смысле нового определения) задают отображение из пространства многочленов в пространство степенных рядов.

Замечание. Первые примеры таких операторов (а именно, унитарные операторы с ядрами вида (6.6)) появились в [4] , поэтому и в [38] был введен термин операторы Березина.

6.6. Эквивалентность определений. Предложение 6.I. Определения пп. 6.4 и 6.5 эквивалентны. ∎

Лемма 6.4. Пусть оператор $P$ имеет ядро вида (6.4). Тогда

а) Оператор $\mathcal{D}_i^{\xi} P$ имеет ядро вида (6.4)

б) Оператор $P\,\mathcal{D}_j^{\eta}$ имеет ядро вида (6.4)

Доказательство леммы 6.4. Мы докажем утверждение а), утверждение б) доказывается дословно также. Итак, достаточно проверить, что, если ядро $K(\xi, \bar\eta)$ задается формулой вида (6.4), то функция

$$\left(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) K(\xi, \bar\eta)$$

снова может быть записана в виде (6.4) (естественно с другими $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$, $k$, $A$, $B$, $C$ ). Рассмотрим выражение

$$\mu = \left(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \prod_{j=1}^{k} f_j(\xi, \bar\eta)\, L(\xi, \bar\eta)$$

где

$$f_j(\xi, \bar\eta) = \sum \alpha_{ji}\xi_i + \sum \beta_{ji}\bar\eta_j$$

$$L(\xi, \bar\eta) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \bar\eta)\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar\eta^t \end{pmatrix}\right\}$$

Тогда

$$\mu=\Big[\xi_1\prod f_j+\sum(-1)^j\frac{\partial f_j}{\partial\xi_1}f_1\ldots f_{j-1}f_{j+1}\ldots f_k+$$

$$+(-1)^k\prod f_j\frac{\partial L}{\partial\xi_1}\Big]L(\xi,\bar{\eta}) \qquad (6.7)$$

Если все производные $\partial f_j/\partial\xi_1$ равны $0$, то $\mu$ раскладывается в произведение

$$\mu=\left(\xi_1+\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)f_1\ldots f_k$$

и наше утверждение доказано. Пусть теперь не все производные $\partial f_j/\partial\xi_1$ равны $0$.

<u>Лемма 6.5</u>. Пусть $f_j=\sum\alpha_{ji}\xi_j$, $j=1,\ldots,k$. Тогда любое выражение вида $\varkappa=\sum t_j f_1\ldots f_{j-1}f_{j+1}\ldots f_p$ разлагается в произведение

$$\varkappa=\prod_{l=1}^{k-1}g_l \qquad (6.8)$$

где $g_l=\sum_{j=1}^{k}s_{lj}g_j$

<u>Доказательство леммы 6.5</u>. Алгебры всех многочленов от функций $f_1,\ldots,f_k$ естественным образом изоморфны внешней алгебре $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ от $k$ переменных. Итак, достаточно доказать, что в $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ любой элемент $\varkappa$ степени $k-1$ разлагается в произведение $(k-1)$-го элемента степени $1$. Группа $GL(k,\mathbb{C})$ действует в $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ с помощью замен переменной в $\mathbb{C}^k$. На множесве ненулевых элементов степени $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ эта группа действует транзитивно, и теперь утверждение очевидно. ☒

Вернемся к доказательству леммы 6.6. Итак, второе слагаемое, стоящее в квадратных скобках выражения (6.7) разлагается в произведение вида (6.8). Пусть $p$ -некоторая форма вида $\sum s_j f_j$ (где $s \in \mathbb{C}$ ), линейно независимая с формами $g_1, \dots, g_{k-1}$ . Тогда

$$f_1 \dots f_k = \lambda g_1 \dots g_{k-1} p$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – ненулевая константа. Без ограничения общности мы можем считать, что $\lambda = 1$ . Итак,

$$\mu = g_1 \dots g_{k-1}\Big(1 + (-1)^k p\,\xi_1 + (-1)^k p \frac{\partial L}{\partial \xi_1}\Big) L(\xi, \bar\eta) =$$

$$= g_1 \dots g_{k-1} \exp\Big((-1)^k \Big[p\,\xi_1 + p\frac{\partial L}{\partial \xi_1}\Big]\Big) L(\xi, \bar\eta) =$$

$$= g_1 \dots g_{k-1} \exp\Big\{(-1)^k p\Big(\xi_1 + \frac{\partial L}{\partial \xi_1}\Big) + \frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\Big)$$

Лемма 6.4. доказана. $\boxtimes$

<u>Доказательство предложения 6.I</u>. В силу леммы 6.4. любой оператор Березина в смысле второго определения является оператором Березина в смысле первого определения. Обратно, пусть $P$ - оператор Березина в смысле первого определения. Нам достаточно показать, что для некоторых $i_1, \dots, i_k$ , $j_1, \dots, j_l$ оператор

$$P' = \mathcal{D}^{\xi}_{i_1} \dots \mathcal{D}^{\xi}_{i_k} P \mathcal{D}^{\eta}_{j_1} \dots \mathcal{D}^{\eta}_{j_l} \tag{6.9}$$

имеет ядро вида (6.6). Пусть $K(\xi, \bar\eta)$ - ядро оператора $P$ . Допустим, что слагаемое $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \bar\eta_{j_1} \dots \bar\eta_{j_l}$ входит в формальный ряд (6.4) с ненулевым коэффициентом. Тогда формальный ряд для ядра $K'(\xi, \bar\eta)$ оператора $P'$ (см. (6.9)) имеет ненулевой свободный член. Но мы знаем, что ядро $K'(\xi, \bar\eta)$ может быть записано в виде (6.4). Тем самым ядро оператора $P'$ должно иметь вид (6.6) и предложение доказано.

6.7. Замечания. У нас есть два способа задания оператора Березина. Во-первых, мы можем его записать как оператор с ядром вида (6.4), а во-вторых – как оператор вида (6.5).

Начнем с того, что запись ядра оператора Березина $P$ в виде (6.4) не однозначна. Пусть $L(\xi, \bar\eta)$ – ядро оператора $P$. Разложим его в сумму $L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n$ выражений $L_n$, имеющих степень однородности $n$ по совокупности переменных $\xi$, $\bar\eta$. Пусть $L_k$ – первое ненулевое слагаемое. Тогда, очевидно, $L_k$ равно

$$\prod_{i=1}^{k} \left(\sum \alpha_{ij}\xi_j + \sum \beta_{ij}\bar\eta_j\right) \stackrel{def}{=} \prod f_j$$

Тем самым, сомножитель в произведении (6.4),стоящий в квадратных скобках, однозначно определен. Однако, однозначно определено лишь все произведение (6.4), а не каждый из его сомножителей в отдельности. Произведение $\prod f_j$ (с точностью до скалярного множителя) зависит лишь от подпространства всех линейных фсрм вида $\sum \lambda_j f_j$ $(\lambda_j \in \mathbb{C})$, а не от этих форм в отдельности.

Второй сомножитель в произведении (6.4) также определен не однозначно, а именно замены вида

$$\left[\prod f_j\right] \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\right\} \to$$

$$\to \left[\prod f_j\right] \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{k}\mu_j f_j\right\}$$

где $\mu_j$ - линейные формы от $\xi_k$, $\bar{\eta}_l$, не меняют ядра (хотя и меняют форму его записи).

Перейдем ко второму способу задания операторов Березина. Оператор Березина $A$ может быть записан в виде (6.5) с данными $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_k$ тогда и только тогда, когда

$$\langle A\eta_{j_1}\ldots\eta_{j_k}, \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n}\rangle \neq 0$$

В §8 мы увидим, что множество всех операторов Березина параметризуется некоторым грассманианом, и тем самым, трудности с однозначной параметризацией множества операторов Березина обусловлены объективными (топологическими) причинами.

## §7. Ограниченность операторов Березина в полинормированном фермионном пространстве Фока.

7.1. Теорема 7.1. Пусть $\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda^{(2)}$ - полинормированные пространства Фока. Любой оператор Березина из $\Lambda^{(2)}$ в $\Lambda^{(1)}$ ограничен.

Доказательство этой теоремы занимает оставшуюся часть параграфа.

7.2. Редукции. Воспользуемя вторым определением операторов Березина. Оператор $\mathcal{D}_i$ ограничен и обратим $(\mathcal{D}_i^{-1} = \mathcal{D}_i)$, поэтому достаточно доказать теорему 7.1 для операторов с ядрами вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}\right\}$$

На протяжении этого параграфа и §9 мы будем обозначать такие операторы через $\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{bmatrix}$ : ассмотрим три простейших примера таких операторов.

а) Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Легко видеть, что это просто оператор умножения на функцию $\exp\left\{\frac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right\}$

Лемма 7.I. Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ограничены. ■

б) Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$. Обозначим через $\Lambda_k^{(i)}$ пространство всех однородных элементов пространства $\Lambda^{(i)}$ степени $K$. Оператор $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$ переводит $\Lambda_K^{(2)}$ в $\Lambda_K^{(1)}$ для любого ). Ограничение этого оператора на $\Lambda_K^{(2)}$ - это просто $K$ -ая внешняя степень оператора $B$. Тем самым наш оператор - это просто оператор замены переменной.

Лемма 7.2. Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$ ограничены.

Доказательство: очевидно, см. определение топологии в полинормированном пространстве Фока. ☒

в) Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix}$. Такой оператор можно записать в виде

$$\exp\left(\sum_{i>j} c_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$$

(О переходе от интегральной записи оператора к виковской нормальной форме см. [4], п.I.I0).

Лемма 7.3. Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix}$ ограничены.

Теперь предположим, что все леммы 7.I - 7.3 доказаны и докажем теорему 7.I. Она вытекает из леммы 7.4.

Лемма 7.4.

$$\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{bmatrix} = \mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

■

Доказательство. Вычислим ядро оператора

$\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix}$. Оно равно (см. [4], п.2.I4)

$$\int \exp\left(\sum b_{ij}\xi_i \bar{\eta}_j\right)\exp\left(\sum \eta_j \bar{\zeta}_j + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\right) d\eta\, d\bar{\eta} =$$

$$= \exp\left(\sum b_{ij}\xi_i \bar{\zeta}_j + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\right)$$

т.е совпадает с ядром оператора $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & C \end{bmatrix}$. Далее

$$\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & C \end{bmatrix} f = \exp\left(\frac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right)\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & C \end{bmatrix} f =$$

$$= \int \exp\left\{\frac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum b_{ij}\xi_i\bar{\zeta}_j + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\right) f(\zeta)\, d\zeta\, d\bar{\zeta}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. В бозонном случае такой путь доказательства теорем ограниченности не пригоден: крайние сомножители в произведении (7.1) были бы неограниченными операторами.

7.3. Операторы $T_{k,l}$. Пусть $k$, $l$ – неотрицательные числа, причем их разность $l-k$ четна и неотрицательна. Пусть $\Lambda^k(l_2)$, $\Lambda^l(l_2)$ – соответственно $k$-ая и $l$-ая внешние степени пространства $l_2$, их удобно реализовывать как подпространства в $\bar{\Lambda}$, т.е. как пространства однородных форм от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Тем самым $\Lambda^k(l_2)$ и $\Lambda^l(l_2)$ являются гильбертовыми пространствами. Пусть $A$ – оператор Гильберта-Шмидта в $l_2$. Оператор $T_{k,l}(A): \Lambda^k(l_2) \to \Lambda^l(l_2)$ определяется фсрмулой

$$T_{k,l}(A)f(\xi)=\frac{1}{((l-k)/2)!}\Big(\sum_{i>j}a_{ij}\xi_i\xi_j\Big)^{\frac{l-k}{2}}f(\xi)$$

Лемма 7.5. Пусть $\sigma=\sum|a_{ij}|^2$ . Тогда

$$\|T_{k,l}(A)\|^2\leqslant\frac{1}{((l-k)/2)!}\,a^{l/2}$$

где $a=2\max(\sigma,1)$

Доказательство. Без ограничения общности (см. лемму 6.3) можно считать, что $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ имеет вид $\sum\lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}$ , где $\lambda_j>0$ . Пусть $r=(l-k)/2$ . Пусть

$$b=\sum b_{i_1\dots i_k}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}\in\Lambda_k$$

Тогда

$$T_{k,l}(A)b=\sum b_{i_1\dots i_k}\lambda_{\alpha_1}\dots\lambda_{\alpha_r}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}\prod_{j\leq r}(\xi_{2\alpha_j-1}\xi_{2\alpha_j})$$

где среди индексов $i_q$ , $2\alpha_j-1$ , $2\alpha_j$ нет повторяющихся. Фиксированный моном $\xi_{\mu_1}\dots\xi_{\mu_n}$ входит в эту сумму не более $C^r_{[l/2]}$ раз. Учитывая, что

$$(x_1+\dots+x_n)^2\leqslant n(x_1^2+\dots+x_n^2)$$

мы можем оценить сверху коэффициент при мономе

$$\|T_{k,l}(A)b\|^2\leqslant C^r_{[l/2]}\Big(\sum|b_{i_1\dots i_k}|^2\lambda^2_{\alpha_1}\dots\lambda^2_{\alpha_r}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C^r_{[l/2]}\Big(\sum|b_{i_1\dots i_k}|^2\Big)\Big(\sum\lambda^2_{\alpha_1}\dots\lambda^2_{\alpha_r}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C^r_{[l/2]}\|b\|^2\frac{(\sum\lambda_j^2)^r}{r!}$$

Окончательно

$$\| T_{k,\ell}(A)\|^2 \leq \frac{1}{r!} C^{r}_{\ell/2} \left(\sum \lambda_j^2\right)^r \leq \frac{1}{r!} 2^{\ell/2} \sigma^r$$

$$\leq \frac{1}{r!} 2^{\ell/2} \max(\sigma, 1)^{\ell/2}$$

Лемма 7.5. доказана.

7.4. Доказательство леммы 7.I. Пусть $f \in \Lambda$, представим $f$ в виде суммы однородных форм: $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, где $f_k$ имеет степень $k$. Пусть $L = \mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $g \in Lf$, пусть $g = \sum g_k$ – представление $g$ в виде суммы однородных форм. Пусть $\|f_k\| \leq \exp(-Ck)$, пусть $T_{k,\ell}(A)$ и $a$ те же, что в лемме 7.5,

$$\|g_n\|^2 = \Big\|\sum_{2j\leq n} T_{n-2j,n}(A) f_{n-2j}\Big\|^2 \leq \sum_{2j\leq n} \|T_{n-2j}(A)\|^2 \|f_{n-2j}\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{2j\leq n} \frac{1}{j!} a^{n/2} e^{-C(n-2j)} = e^{-Cn} a^{n/2} \sum \frac{e^{2Cj}}{j!} <$$

$$< e^{-Cn} a^{n/2} e^{e^{2C}}$$

Таким образом

$$|g|_{C-\frac{1}{2}\ln a} \leq |f|_C \cdot \mathrm{const}$$

Лемма доказана.

7.5. Доказательство леммы 7.3. Рассмотрим оператор $\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{2}\sum c_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^r$ действующий из $\Lambda^k(\ell_2)$ в $\Lambda^{k-2r}(\ell_2)$ (Обозначения см. п.7.3.) Легко видеть, что этот оператор сопряжен оператору $T_{k-2r,r}(C) : \Lambda^{k-2r}(\ell_2) \to$

$\to \Lambda^k(\ell_2)$ умножения на

$\frac{1}{r!}\left(-\frac{1}{2}\sum c_{ij}\xi_i\xi_j\right)$.

Пусть

$$N = \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum c_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$$

Пусть $f \in \Lambda$, пусть $g = Nf$, пусть

$$f = \sum f_k \qquad g = \sum g_k$$

- представления $f$ и $g$ в виде суммы однородных форм. Пусть $\|f_k\| \leqslant \exp(-Ck)$. Тогда

$$\|g_n\|^2 = \Big\| \sum_{r\geqslant 0} T^*_{n,n+2r}(A) f_{n+2r}\Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \|T_{n,n+2r}\|^2 \|f_{n+2r}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!} a^{n/2+r} \exp(-C(n+2r)) =$$

$$= a^{n/2} e^{-Cn} \exp(a e^{-Cn})$$

Итак, $|Nf|_{C-\frac{1}{2}\ln a} \leqslant |f|_C \cdot \mathrm{const}$. Ограниченность $N$ доказана.

## §8 Ортогональная категория $GD$ и спинорное представление.

8.I. <u>Ортогональная категория</u> $\overline{GD}$. Объект ортогональной категории - это гильбертово пространство $V$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, оснащенное следующими дополнительными структурами.

I. Фиксировано разложение $V$ в прямую сумму $V=V_+\oplus V_-$

2. Фиксирован антилинейный биективный изометрический оператор $I: V_+\to V_-$ .

3. В $V$ фиксирована симметричная билинейная форма.

$$\{(v_+, v_-),(v_+', v_-')\}_V=\langle v_-, Iv_+'\rangle+\langle v_-', Iv_+\rangle$$

Пусть $V, W\in Ob(\mathcal{D})$ . Определение морфизма категории $G\mathcal{D}$ будет дано в два шага. Сначала построим множество $m(V,W)$ , содержащееся в $Mor(V,W)$ , но не исчерпывающее его. Элементом $P\in m(V,W)$ является линейное отношение $V\rightrightarrows W$ преобразование Потапова-Гинзбурга которого является оператором $S(P)=\begin{pmatrix} A & B\\ B^t & C\end{pmatrix}$ , таким, что

I. $A=-A^t,\ C=-C^t$ ,

2. $\|B\|<\infty$

3. $A$ , $C$ - операторы Гильберта-Шмидта.

В силу кососимметричности матриц $A, C$ линейное отношение $P$ сохраняет билинейную форму $\{\cdot,\cdot\}_V$ , т.е. если $(v,w),(v',w')\in P$ , то

$$\{v,v'\}_V=\{w,w'\}_W$$

Более того, $P$ является максимальным изотропным подпространством в $V\oplus W$ относительно формы

$$\{(v,w);(v',w')\}_{V\oplus W}=\{v,v'\}_V-\{w,w'\}_W \tag{8.1}$$

Перейдем к описанию множества $Mor(V,W)$ . Оно состоит из формального "нулевого" морфизма $null_{V,W}$ (который не является линейным отношением) и ненулевых морфизмов. Линейное отношение $P: V \rightrightarrows W$ является ненулевым морфизмом, если

I. $P$ - максимальное изотропное подпространство в $V \oplus W$ относительно формы (8.I)

2. Существует $P \in m(V, W)$ такое, что $P \cap P'$ имеет конечную коразмерность в $P$ (отметим, что тем самым коразмерности $P \cap P'$ в $P$ и $P'$ равны).

Замечание. Если размерности $V$ и $W$ конечны, то ненулевые морфизмы категории $G\mathcal{D}$ - это в точности все максимальные изотропные подпространства в $V \oplus W$.

Замечание. Введение нулевого морфизма связано со следующими причинами. Ниже мы построим биекцию между множеством морфизмов категории $G\mathcal{D}$ и множеством всех операторов Березина, причем произведению морфизмов отвечает произведение операторов. Однако, оказывается, что произведение двух ненулевых операторов Березина может быть нулевым оператором. Это заставляет причислять нулевой оператор к операторам Березина, он то и соответствует морфизму $null$. О других причинах см. §17. ●

Определим теперь произведение морфизмов. Пусть $P \in Mor(V, W)$, $Q \in Mor(W, Y)$. Если хотя бы один из морфизмов $P$, $Q$ является нулевым, то и их произведение является нулевым морфизмом. Если $Ind(P) \cap Ker\, Q \neq 0$ (или, что эквивалентно, $Im\, P + \mathcal{D}(Q) \neq W$), то $QP = null$. В противном случае $Q$ и $P$ перемножаются как линейные отношения.

Замечание. Когда мы писали $Im\, P + \mathcal{D}(Q) \neq W$, мы не уточнили, какая сумма имеется в виду - алгебраическая или топологическая. Проверим, что эти две суммы действительно совпадают. Эту проверку достаточно провести в случае, когда $P\in m(V,W)$, $Q\in m(W,Y)$. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^t & C \end{pmatrix}$ – их преобразования Потапова-Гинзбурга. Легко видеть, что $\mathcal{D}(Q)$ содержит, в частности, все вектора вида $(w_+, A_1 w_+)\in W_+\oplus W_-$, а $\operatorname{Im} P$ содержит все вектора вида $(Cw_-, w_-)\in W_+\oplus W_-$. Таким образом, алгебраическая сумма $\mathcal{D}(Q)+\operatorname{Im} P$ содержит множество $H_1$ всех векторов вида $((1-CA_1)w_+, 0)$ и множество $H_2$ всех векторов вида $(0,(1-A_1C)w_-)$. В силу альтернативы Фредгольма $H_1$ и $H_2$ – замкнутые подпространства конечной коразмерности в $W_+$ и $W_-$. Так как $H_1\oplus H_2\subset \mathcal{D}(Q)+\operatorname{Im} P$ и коразмерность $H_1\oplus H_2$ в $W$ конечна, мы получаем, что подпространство $\mathcal{D}(Q)+\operatorname{Im} P$ замкнуто.

8.2. Корректность определения. Предложение 8.I.

Произведение морфизмов является морфизмом. ■

Лемма 8.I. Пусть $V$ – гильбертово пространство, снабженное непрерывной симметричной билинейной формой $\Lambda$, пусть $P$ и $P'$ – максимальные изотропные относительно $\Lambda$ подпространства в $V$. Пусть коразмерность $P\cap P'$ в $P$ конечна. Тогда коразмерности $P\cap P'$ в $P$ и $P'$ равны.

Доказательство. Пусть $(P\cap P')^\circ$ – ортогональное дополнение к $P\cap P'$ относительно формы $\Lambda$. Тогда $(P\cap P')^\circ/(P\cap P')$ – конечномерное пространство, а $P/(P\cap P')$ и $P'/(P\cap P')$ – максимальные изотропные подпространства в $(P\cap P')^\circ/(P\cap P')$. Теперь утверждение леммы очевидно.

Следствие. Пусть $P\subset V$ – максимальное изотропное подпространство, а $P'$ – изотропное подпространство. Пусть коразмерности $P'\cap P$ в $P$ и $P'$ конечны и равны. Тогда $P'$ - максимальное изотропное подпространство.

Лемма 8.2. Пусть $P\in m(V,W)$, $Q\in m(W,Y)$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} K' & L' \\ (L')^t & M'\end{pmatrix}$ - их преобразования Потапова-Гинзбурга. Пусть оператор $1-MK'$ обратим. Тогда произведение линейных отношений $P$ и $Q$ содержится в $m(V,Y)$.

Доказательство леммы. Если матрица $1-MK'$ обратима, то преобразование Потапова - Гинзбурга отношения $QP$ является графиком оператора

$$\begin{pmatrix} K-LK'(1-MK')^{-1}L^t & L(1-K'M)^{-1}L' \\ (L')^t(1-MK')^{-1}L^t & M'-(L')^t(1-MK')^{-1}ML' \end{pmatrix}$$

и теперь наше утверждение очевидно.

Доказательство предложения 8.I. Пусть $P\in Mor(V,W)$, $Q\in Mor(W,Y)$ - ненулевые морфизмы. Тогда существуют $P'\in m(V,W)$, $Q'\in m(W,Y)$ такие, что коразмерности $P\cap P'$ в $P$ и $Q\cap Q'$ в $Q$ конечны. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} K_1 & L_1 \\ L_1^t & M_1\end{pmatrix}$ - преобразования Потапова-Гинзбурга $P'$ и $Q'$. Прибавляя к $M$ и $K_1$ конечномерные операторы $\Delta M$ и $\Delta K_1$ можно добиться того, чтобы $\widetilde{M}=M+\Delta M$ и $\widetilde{K}=K_1+\Delta K_1$ удовлетворяли условию: оператор $1-\widetilde{M}\widetilde{K}$ обратим. Но матрицы $\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & \widetilde{M}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \widetilde{K}_1 & L_1 \\ -L_1^t & M_1\end{pmatrix}$ являются преобразованиями Потапова-Гинзбурга некоторых линейных отношений $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$, с одной стороны к ним применима лемма 8.2, а с другой, коразмерности $P \cap \widetilde{P}$ в $P$ и $Q \cap \widetilde{Q}$ в $Q$ конечны. Далее вектор $(\omega_+, \omega_-) \in W_+ \oplus W_- = W$ содержится в $\mathrm{Ind}\, \widetilde{P}$, если он удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} L\omega_+ = 0 \\ \omega_- = \widetilde{M}\omega_+ \end{cases}$$

с другой стороны, этот вектор лежит в $\mathrm{Ker}\, Q$, если он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \omega_+ = K_1 \omega_- \\ L_1^t \omega_- = 0 \end{cases}$$

В силу обратимости оператора $1 - K_1\widetilde{M}$ эти системы не имеют общих решений, кроме нулевого, т.е. $\mathrm{Ker}\, \widetilde{Q} \cap \mathrm{Ind}\, \widetilde{P} \neq 0$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 8.3. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ - ненулевые морфизмы. Тогда существуют $\widetilde{P} \in m(V, W)$, $\widetilde{Q} \in m(W, Y)$ такие, что коразмерности $P \cap \widetilde{P}$ в $P$ и $\widetilde{Q} \cap Q$ в $Q$ конечны и $\mathrm{Ker}\, \widetilde{Q} \cap \mathrm{Ind}\, \widetilde{P} = 0$, $\widetilde{Q}\widetilde{P} \in m(V, Y)$

Продолжим доказательство предложения. Итак, пусть $Q$ и $P$ - ненулевые морфизмы, пусть $\mathrm{Ind}\, P \cap \mathrm{Ker}\, Q \neq 0$. Ясно, что произведение $QP$ линейных отношений $Q$ и $P$ является изотропным подпространством в $V \oplus Y$. Нам достаточно доказать, что $QP$ - максимальное изотропное подпространство. В самом деле, пусть это так и пусть $\widetilde{Q}$, $\widetilde{P}$ - те же, что в лемме 8.3. Тогда $\widetilde{Q}\widetilde{P} \cap QP$ имеет конечную коразмерность в $QP$ и $\widetilde{Q}\widetilde{P} \in m(V, Y)$, т.е. $QP$ - морфизм категории $GD$.

Итак, докажем, что $QP$ – максимальное изотропное подпространство в $V\oplus Y$. Определим пространство $H = V\oplus W\oplus W\oplus Y$ снабженное билинейной формой

$$\mu\{(v,w_1,w_2,y),(v',w_1',w_2',y')\} = \{v,v'\}_V - \{w_1,w_1'\}_W + \{w_2,w_2'\}_W - \{y,y'\}_Y$$

Пусть $T$ – подпространство всех векторов вида $(v,w,w,y)$, пространство $T$ коизотропно, его ортогональное дополнение $T^\perp$ относительно формы $\mu$ есть множество векторов вида $(0,w,w,0)$. Пространство $T/T^\perp$ изоморфно $V\oplus Y$.

Произведение $QP$ (соответственно $\tilde{Q}\tilde{P}$) вычисляется следующим образом. Находим пересечение максимального изотропного пространства $P\oplus Q$ (соответственно $\tilde{P}\oplus\tilde{Q}$) с подпространством $T$ и проектируем это пересечение вдоль $T^\perp$ на $V\oplus Y$. Нам достаточно доказать (в силу леммы 8.I), что коразмерности $QP\cap\tilde{Q}\tilde{P}$ в $QP$ и $\tilde{Q}\tilde{P}$ равны. Так как $N=Q\oplus P$ и $\tilde{N}=\tilde{Q}\oplus\tilde{P}$ не пересекаются с $T^\perp$ (это эквивалентно тому, что $\operatorname{Ind} P\cap\operatorname{Ker} Q=0$, $\operatorname{Ind}\tilde{P}\cap\operatorname{Ker}\tilde{Q}=0$), то эти коразмерности равны, соответственно, коразмерностям $N\cap\tilde{N}\cap T$ в $N\cap T$ и $\tilde{N}\cap T$.

Остается заметить, что $N+T=\tilde{N}+T=H$, (см. замечание в конце п.8.I), откуда следует искомое равенство коразмерностей. Предложение 8.I. доказано. ☒

<u>Лемма 8.4.</u> Умножение морфизмов категории $\overline{GD}$ ассоциативно.

Доказательство. Пусть $(PQ)R = null$ , причем $P \in Mor(V, W)$ , $Q \in Mor(W, Y)$ , $R \in Mor(Y, Z)$ - ненулевые морфизмы. Тогда существуют $w \in W$ , $y \in Y$ , не равные одновременно нулю такие, что $(0, w) \in P$ , $(w, y) \in Q$ , $(y, 0) \in R$ . Но тогда $P(QR) = null$ .

8.3. Операторы рождения-уничтожения. Пусть $V$ - объект категории $\overline{GD}$ . Выберем в $V_+$ ортогональный (относительно скалярного произведения) базис $e_1$ , $e_2$ , ... . Поставим в соответствие каждому элементу базиса $e_i$ "нечетную" переменную $\xi_i$ и рассмотрим фермионные пространства Фока $\bar{\Lambda}$ и $\Lambda$ , состоящие из функций от $\xi$ . Эти пространства мы будем обозначать соответственно через $\bar{\Lambda}(V)$ и $\Lambda(V)$ .

Пусть $f_1$ , $f_2$ , ... - базис в $V_-$ , довйственный к базису $e_i$ $(\{e_i, f_j\}_V = \delta_{ij})$ . Пусть $v = (v_+, v_-) \in V_+ \oplus V_- = V$ . Пусть $v_i^{\pm}$ - координаты $v$ в базисе $e_1$ , $e_2$ , ... , $f_1$ , $f_2$ , ... . Операторы рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$ задаются формулой

$$\hat{a}(v) g(\xi) = \left(\sum v_i^+ \xi_i - \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) g(\xi)$$

Операторы $\hat{a}(v)$ ограничены в обеих топологиях в фермионном пространстве Фока (т.е. в пространствах $\Lambda(V_+)$ и $\bar{\Lambda}(V_+)$ ). Они удовлетворяют соотношению

$$\{\hat{a}(v_1), \hat{a}(v_2)\} \stackrel{def}{=} \hat{a}(v_1)\hat{a}(v_2) + \hat{a}(v_2)\hat{a}(v_1) = \\ = \{v_1, v_2\}_V \cdot 1$$

$$\hat{a}(v_+, v_-)^* = -\hat{a}(\bar{v}_-, \bar{v}_+)$$

8.4. Спинорное представление.

Теорема 8.I. Пусть $P : V \to W$ - ненулевой морфизм категории $\overline{GD}$. Тогда

а) существует единственный, с точностью до умножения на константу оператор $Spin(P) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ такой, что для любых $(v, w) \in P$ выполнено

$$\hat{a}(w)\, Spin(P) = Spin(P)\, \hat{a}(v) \tag{8.2}$$

б) Если $QP \neq null$, то

$$Spin(QP) = c(Q,P)\, Spin(Q)\, Spin(P) \tag{8.3}$$

где $c(Q,P)$ - ненулевой скаляр. Если же $QP = null$ то

$$Spin(Q)\, Spin(P) = 0$$

Иными словами, отображение $P \mapsto Spin(P)$, $null \mapsto 0$ является представлением категории $\overline{GD}$. ■

Перед тем, как приступить к доказательству теоремы, мы получим явные формулы для операторов $Spin(P)$, эти формулы представляют самостоятельный интерес.

8.5. Явная формула. Проще всего эта формула выглядит в случае, когда $P \in m(V, W)$ :оператор $Spin(P)$ в этом случае имеет ядро

$$\exp\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi & \bar{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix} \right\} \tag{8.4}$$

где $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга $P$.

Выберем $V$ ортогональный базис $e_1^V, e_2^V, \ldots, f_1^V, f_2^V, \ldots$, причем $e_j^V \in V_+$, $f_j^V \in V_-$, $\{e_i^V, f_j^V\} = \delta_{ij}$. Выберем аналогичный базис в $W$.

Пусть теперь $P$ - произвольный морфизм $V \to W$, не содержащийся в $m(V, W)$. Пусть $E = P \cap (V_- \oplus W)$ и пусть $P' \in m(V, W)$ таково, что $P = E \oplus (P \cap P')$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга линейного отношения $P'$. Выберем в $E$ базис $s_1, \ldots, s_k$, пусть $s_m = \sum_\alpha p_\alpha^m e_\alpha^V + \sum_\beta q_\beta^m f_\beta^W$. Тогда оператор $Spin(P): \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ имеет ядро

$$K(\xi, \bar{\eta}) = \prod_{m=1}^{k} \left( \sum p_\alpha^m \xi_\alpha + \sum (-1)^k q_\beta^m \bar{\eta}_\beta \right) \exp\left\{ \frac{1}{2} (\xi \ \bar{\eta}) \begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} (-1)^k \right\} \tag{8.5}$$

Оператор с ядром $K(\xi, \bar{\eta})$ мы будем обозначать через $Spin(P)$. Проверим соотношения (8.2).

$$\hat{a}(\omega) Spin(P) f = \hat{a}(\omega) \int K(\xi, \bar{\eta}) f(\eta) \, d\eta \, d\bar{\eta} =$$

$$= \int \left( \sum \omega_i^+ \xi_i - \sum \omega_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) K(\xi, \bar{\eta}) f(\eta) \, d\eta \, d\bar{\eta}$$

$$Spin(P) \hat{a}(v) f =$$

$$= \int K(\xi, \bar{\eta}) \left( \sum v_j^+ \eta_j - \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right) f(\eta) \, d\eta \, d\bar{\eta} =$$

$$= \int K(\xi, \bar{\eta}) \left( \sum v_j^+ \frac{\partial_r}{\partial_r \eta_j} - \sum v_j^- \bar{\eta}_j \right) f(\eta) \, d\eta \, d\bar{\eta}$$

Итак, нам нужно проверить равенство

$$\left(\sum \omega_j^+ \xi_j - \sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) K(\xi, \bar{\eta}) = \tag{8.6}$$
$$= K(\xi, \bar{\eta}) \left(\sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j} - \sum v_j^- \bar{\eta}_j\right)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $K(\xi, \bar{\eta})$ имеет вид (8.4), т.е. когда $k=0$ (или $P \in m(V, W)$ ). Равенство ( 8.6 ) эквивалентно равенству

$$\left[\sum_j \left(\omega_j^+ - \sum k_{jj} \omega_i^- - \sum \ell_{ji} v_i^+\right)\xi_j +\right.$$
$$\left. + \sum_j \left(v_j^- - \sum m_{ji} v_i^+ - \sum \ell_{ji} \omega_i^-\right)\bar{\eta}_j\right] K(\xi, \bar{\eta}) = 0$$

Но выражение в квадратных скобках равно $0$ .

Пусть теперь линейное отношение $P$ произвольно. Пусть

$$K(\xi, \bar{\eta}) = \pi(\xi, \bar{\eta}) K_0(\xi, \bar{\eta}) \tag{8.7}$$

где $\pi(\xi, \bar{\eta})$ - произведение линейных форм, а $K_0(\xi, \bar{\eta})$ имеет вид (8.4), см формулу (8.5). Проверим отдельно равенство (8.6) для $(v, \omega) \in E$ и для $(v, \omega) \in P' \cap P$ .

Начнем с $E$ . Пусть $(v, \omega) = s_m$ . Тогда $\omega_j^- = v_j^+ = 0$ .

Таким образом, в (8.6) выражение (8.7) умножается на множители, которые уже содержатся в произведении линейных форм $\pi(\xi, \bar{\eta})$ . Тем самым произведение равно $0$ .

Пусть теперь $(v, \omega) \in P' \cap P$ . Тогда

$$\Big(\sum \omega_j^+ \xi_j - \sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \Big(\sum v_j^- \bar{\eta}_j - \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\Big)\Big) \pi(\xi, \bar{\eta}) \times$$

$$\times K_0(\xi, \bar{\eta}) = \Big(-\sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} - (-1)^k \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\Big) \pi(\xi, \bar{\eta}) K_0(\xi, \bar{\eta}) + \tag{8.8}$$

$$+ (-1)^k \pi(\xi, \bar{\eta}) \Big(\sum \omega_j^+ \xi_j - \sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \Big(\sum v_j^- \bar{\eta}_j - \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\Big)\Big) K_0(\xi, \bar{\eta})$$

Но $(v, \omega) \in P$, а поэтому второе слагаемое равно $0$. Но, с другой стороны, вектор $(v, \omega)$ ортогонален каждому $S_k$ поэтому

$$\Big(\sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \eta_j}\Big)\Big(\sum p_\alpha^m \xi_\alpha + \sum q_\beta^m \bar{\eta}_\beta\Big) = 0$$

а поэтому

$$\Big(\sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \sum v_j^+ \frac{\partial}{\partial \eta_j}\Big) \pi(\xi, \bar{\eta}) = 0$$

а значит (8.8) равно нулю, что и требовалось проверить.

8.6. Перейдем к доказательству теоремы 8.I.

Лемма 8.5. Пусть $P : V \to W$, $Q : W \to Y$ – ненулевые морфизмы. Пусть оператор $A : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ удовлетворяет условию

$$\hat{a}(\omega) A = A \hat{a}(v)$$

для всех $(v, \omega) \in P$. Пусть оператор $B : \Lambda(W_+) \to \Lambda(Y_+)$ удовлетворяет условию

$$\hat{a}(y) B = B \hat{a}(\omega)$$

для всех $(\omega, y) \in Q$. Тогда оператор $BA$ удовлетворяет условию

$$\hat{a}(y)B = B\hat{a}(w)$$

для всех $(v, y) \in QP$ . ■

Доказательство. Пусть $(v, y) \in QP$ , тогда существует $w \in W$ такой, что $(v, w) \in P$ , $(w, y) \in Q$ . Тогда

$$\hat{a}(y)BA = B\hat{a}(w)A = BA\hat{a}(v)$$

Лемма доказана. ☒

Итак, равенство (8.3) будет следовать из равенства (8.2), если мы докажем единственность оператора $Spin(P)$ .

8.7 Единственность оператора $Spin(P)$ .

Лемма 8.6. Пусть $P : V \to W$ - ненулевой морфизм. Тогда существует не более одного ненулевого ограниченного оператора (с точностью до умножения на константу)

$A : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ , удовлетворяющего условию

$$\hat{a}(w)A = A\hat{a}(v)$$

для всех $(v, w) \in P$ . ■

Логическая схема доказательства этой леммы довольно сложна.

Лемма 8.7 Пусть $P : V \to W$ - ненулевой морфизм, причем преобразование Потапова-Гинзбурга морфизма $P$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда оператор $A$ , удовлетворяющий соотношению (8.9) имеет ядро

$$c \exp\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi & \bar{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ -L^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix} \right\}$$

где $c \in \mathbb{C}$ .

Доказательство леммы 8.7. Рассмотрим вектор $f(z)=1$ в пространстве $\Lambda(V_+)$ . Так как $\hat{a}(v)=1$ для любого $v \in V_-$ , то вектор $A\cdot 1$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\hat{a}(w)A\cdot 1=0$$

для всех $w \in W_-$ . Итак, $A\cdot 1 = 1$ . В силу равенства (8.9) для любых $v_1,\dots,v_k \in V_+$ выполнено

$$A\,\hat{a}(v_1)\dots\hat{a}(v_k)\cdot 1=\hat{a}(Lv_1)\dots\hat{a}(Lv_k)A\cdot 1=$$

$$=\hat{a}(Lv_1)\dots\hat{a}(Lv_k)\cdot 1$$

Таким образом, оператор $A$ однозначно определен на множестве всех векторов вида $\hat{a}(v_1)\dots\hat{a}(v_k)\cdot 1$ . Это множество, в частности, содержит все мономы вида $\xi_{\alpha_1}\dots\xi_{\alpha_n}$ , Линейная оболочка всех мономов плотна в $\Lambda(V_+)$ и, тем самым, оператор $A$ однозначно определен.

Лемма 8.8. Пусть $Q: V\to V$ - обратимый морфизм и пусть оператор $Spin(Q)$ обратим.

а) пусть $P: V\to W$ - ненулевой морфизм, и лемма 8.6 выполнена для морфизма $P$ . Тогда она выполнена и для морфизма $QP$ .

б) пусть $P: Y\to V$ - ненулевой морфизм и лемма 8.6 выполнена для морфизма $P$ . ТОгда она выполнена и для морфизма $PQ$ .

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 8.5.

Лемма 8.9. Лемма 8.6 выполнена для любого $P\in m(V,W)$ .

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга морфизма $P$. Представим $P$ в виде $P = QRT$, где $Q$, $R$, $T$ имеют соответственно преобразования Потапова-Гинзбурга

$$\begin{pmatrix} K & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & M \end{pmatrix}$$

Тогда

$$Spin(Q)f(\xi) = \exp\left\{\frac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} f(\xi)$$

$$Spin(T)f(\eta) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial \eta_i}\frac{\partial}{\partial \eta_j}\right\} f(\eta)$$

Эти операторы обратимы. теперь применяем леммы 8.9 и 8.8.

Доказательство леммы 8.6. Нам достаточно показать, что любой ненулевой морфизм $P: V \to W$ представим в виде $P = QP'R$, где $Q: W \to W$ и $R: V \to V$ - обратимые морфизмы, а $P' \in m(V, W)$. Рассмотрим оператор Березина $A$, построенный по оператору $P'$ в п. 8.5. Существуют индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_n$ такие, что оператор Березина

$$B = \mathcal{D}^{\xi}_{\alpha_1} \ldots \mathcal{D}^{\xi}_{\alpha_k} A \mathcal{D}^{\eta}_{\beta_1} \ldots \mathcal{D}^{\eta}_{\beta_n}$$

(Напомним, что $\mathcal{D}^{\xi}_{j} = \xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, см. второе определение операторов Березина) имеет ядро вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\xi\ \bar{\eta}\right)\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\} \qquad (8.10)$$

Рассмотрим линейный оператор $T_i^V : V \to V$ , который переставляет базисные векторы $e_i^V$ и $f_i^V$ , а $T_i^V e_j^V = -e_j^V$ $T_i^V f_j = -f_j$ $(j \neq i)$ . Рассмотрим также аналогичные операторы $T_j^W$ в $W$ . Легко видеть, что

$$\hat{a}(v_1)\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j \hat{a}(v_2)$$

для всех $v_1$ , $v_2$ ,связанных отношением $v_1 = T v_2$ . Отсюда по лемме 8.8 получаем. что оператор $B$ удовлетворяет условию

$$\hat{a}(w)B = B\hat{a}(v) \qquad (8.11)$$

для всех $(v, w) \in P' = T^W_{\alpha_1} \ldots T^W_{\alpha_k} P T^V_{\beta_1} \ldots T^V_{\beta_n}$ . Но для оператора $B$ с ядром (8.I0) множество всех $(v, w)$ , удовлетворяющих условию (8.2) есть линейное отношение с преобразованием Потапова-Гинзбурга $\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}$ . Искомое разложение $P = QP'R$ построено и лемма доказана.

<u>8.8. Простые спиноры</u>. Из всех утверждений теоремы 8.I. нам осталось доказать лишь условия обращения в ноль произведения операторов $Spin(P)Spin(Q)$ . Для доказательства мы введем понятие "простого спинора".

Простым спинором (это тот же объект, который называл простым спинором Э.Картан [21] ), мы назовем вектор в $\Lambda(V_+)$ вида

$$\prod_{m=1}^{K}\left(\sum_j p_j^m \xi_j\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} \qquad (8.12)$$

где $\sum_j |p_j^m|^2 < \infty$, а $K = -K^t$, $\sum_{i,j} k_{ij}^2 < \infty$. Формула (8.I2) подозрительно похожа на формулу (8.5) и это сходство не случайно. Пусть $P \in Mor(\mathbb{C}^0, \frac{V}{GD})$, где через $\mathbb{C}^0$ обозначен нульмерный объект категории $GD$. Тогда оператор $Spin(P)$ переводит одномерное пространство $\Lambda(\mathbb{C}^0_+)$ в пространство $\Lambda(V_+)$. Образом этого оператора должна быть прямая. Направляющие векторы таких прямых - это, как легко видеть, в точности простые спиноры.

Из уже доказанной части теоремы 8.I вытекает, что любой оператор Березина переводит простые спиноры в простые спиноры.

8.9. Окончание доказательства теоремы 8.I.

Лемма 8.I0. Любой ненулевой морфизм $P: V \to W$ представим в виде $P = QP'T$, где $Q: W \to W$, $T: V \to V$ - обратимые морфизмы, а $P' \in m(V, W)$, причем преобразование Потапова-Гинзбурга $P'$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}$

Доказательство. Как было показано в доказательстве леммы 8.6 любой морфизм $V \to W$ путем домножения слева и справа на обратимые морфизмы может быть переведен в множество $m(V, W)$. При доказательстве леммы 8.9 мы показали, что любой морфизм из $m(V, W)$ путем домножения слева и справа на обратимые морфизмы может быть приведен к каноническому виду, указанному в формулировке леммы. Лемма доказана. $\boxtimes$

Вернемся к доказательству теоремы. Сначала проверим утверждение в случае, когда $P \in Mor(0, V)$, $Q \in (Mor\ V, W)$. Без ограничения общности можно считать, что преобразование Потапова-Гинзбурга морфизма $Q$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & L \\ -L^t & 0 \end{pmatrix}$ и тогда утверждение очевидно.

Пусть теперь $Q \in Mor(V,W)$ , $R \in Mor(W,Y)$ . Равенство $Spin(R)Spin(Q)=0$ эквивалентно тому, что

$$Spin(R)[Spin(Q)\,Spin(P)]=0 \qquad (8.13)$$

для любого $P \in Mor(0,V)$ ( в самом деле, линейная оболочка множества простых спиноров плотна в $\Lambda(W_+)$ )

Предположим в начале, что $Ker(R) \cap Ind\,Q \neq 0$ . Тогда $Ker \cap Ind(QP) \neq 0$ для любого $P \in Mor(0,V)$ . Тем самым (8.I3) выполнено.

Обратно, предположим, что $Ker(P) \cap Ind(Q) \neq 0$ . Без ограничения общности можно считать, что преобразование Потапова-Гинзбурга отношения $Q$ равно $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда $Ind\,Q$ состоит из всех векторов вида $(0,h_-) \in W_+ \oplus W_-$ где $Lh_-=0$ . Рассмотрим произвольное максимальное изотропное подпространство $H$ в $W$ такое, что, во-первых $H \supset Ind\,Q$ , а, во-вторых, коразмерность $H \cap W_-$ в $W_-$ конечна. Такое $H$ имеет вид $QP$ для некоторого $P \in Mor(0,V)$ . Пространство $Ker\,P \cap W_-$ конечномерно, оно не пересекается $Ind\,Q$ . Поэтому $H$ можно выбрать так, что $H \cap Ind\,Q = 0$ . Итак, существует $P \in Mor(0,V)$ , для которого (8.I3) не выполнено. Теорема 8.I доказана.

<u>Замечание</u>. Рассмотрим произвольный оператор Березина $Spin(Q): \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ . Замыкание его образа состоит из всех векторов в $\Lambda(W_+)$, удовлетворяющих

системе уравнений

$$\{\hat{a}(\omega) f = 0$$

для всех $\omega \in \mathrm{Ind}\, Q$ . Ядро $\mathrm{Spin}(Q)$ - это сумма (топологическая) образов всех операторов $\hat{a}(v)$ по всем $v \in \mathrm{Ker}\, Q$ .

8.10. Классическая группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений.

Если $\dim V = 2n < \infty$ , то группа $\mathrm{Aut}(V)$ - это просто группа $O(2n, \mathbb{C})$ . Пусть $V$ бесконечномерно. Тогда обратимый морфизм из $V \to V$ является графиком ограниченного ортогонального оператора, матрица которого

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$$

удовлетворяет условию: $B$ и $C$ - операторы Гильберта-Шмидта. Классическая группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений (см. [4 ] , [89]) является подгруппой в $\mathrm{Aut}(V)$, эта подгруппа выделяется условием $D = \bar{A}$, $B = \bar{C}$. .

8.11. Атлас на грассманиане $\mathrm{Mor}(V, W) \setminus \mathrm{null}$ .

Пусть $V$ - объект категории $\overline{GD}$ . Рассмотрим в $V$ подпространство $V_+^{i_1 \dots i_k}$ , натянутое на базисные векторы $f_{i_1}^V, \dots, f_{i_k}^V$ , а также $e_j^V$ , где $j$ - пробегает все индексы, отличные от $i_1, \dots, i_k$ . Пусть подпространство $V_-^{i_1 \dots i_k}$ натянуто на все остальные базисные векторы.

Пусть $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ - набор натуральных чисел. Мы скажем, что ненулевой морфизм $P: V \to W$ лежит в карте $\mathcal{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$ , если

1°. $P$ является графиком оператора $S^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}=\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}$ из $V_+^{i_1\dots i_k}\oplus W_-^{j_1\dots j_l}\longrightarrow V_-^{i_1\dots i_k}\oplus W_+^{j_1\dots j_l}$

2°. $S$ – ограниченная матрица, $K=-K^t$, $M=-M^t$, причем $K$, $M$ – операторы Гильберта-Шмидта.

Пусть $P\in\mathcal{M}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$. Тогда несложно записать явно оператор $Spin(P)$, а именно

$$Spin(P)=\mathcal{D}^{\xi}_{i_1}\dots\mathcal{D}^{\xi}_{i_k}B\mathcal{D}^{\eta}_{j_1}\dots\mathcal{D}^{\eta}_{j_l}$$

где $B$ – оператор с ядром

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(-1)^{k+l}(\xi\ \eta)\,S^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right\}$$

Таким образом, мы получили еще одну явную формулу для операторов $Spin(P)$.

<u>Лемма 8.II</u>. Любой ненулевой морфизм $P:V\to W$ содержится в одной из карт $\mathcal{M}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим оператор $Spin(P)$. Домножениями на операторы вида $\mathcal{D}_j$ слева и справа можно привести $Spin(P)$ к виду (8.4). Тем самым домножениями на $T_j$ (обозначение из доказательства леммы 8.6, см. п.8.7) линейное отношение $P$ можно перевести в множество $m(V,W)$, что и требовалось доказать.

<u>Замечание I.</u> Наш атлас является минимальным, т.е. при выкидывании любой из карт он перестает покрывать грассманиан $Mor(V,W)\setminus null$.

<u>Замечание</u> 2. Множество $Mor(V,W)\setminus null$ состо-

ит из двух компонент связности, эти компоненты отличаются четностью числа $k+\ell$. Особенно хорошо эти две компоненты видны на уровне пространства всех ненулевых операторов Березина $\Lambda(V_+)\to\Lambda(W_+)$. А именно ядро такого оператора является либо четной, либо нечетной функцией по переменным $\xi_1, \xi_2, \dots, \bar\eta_1, \bar\eta_2, \dots$.

## §9. Операторы Березина в Гильбертовом пространстве.

9.I. Формулировки теорем. Рассмотрим оператор Березина $A$ с ядром

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left(p_j^m\xi_j+q_j^m\bar\eta_j\right)\right]\exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi & \bar\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar\eta\end{pmatrix}\right\} \qquad (9.1)$$

из в .

Теорема 9.I. Пусть операторы $K$ и $M$ являются ядерными. Оператор $A$ ограничен тогда и только тогда, когда оператор $L$ представим в виде $L=L'(1+T)$, где $\|L\|\leqslant 1$, а $T$ - ядерный оператор.

Теорема 9.2. Пусть оператор $A$ ограничен. Тогда матрица $L$ представима в виде $L=L'(1+T)$, где $\|L'\|\leqslant 1$ а $T$ - оператор Гильберта-Шмидта.

Теорема 9.3. Пусть матрица $L$ представима в виде $L=L'(1+T)$, где $\|L'\|<1$, а $T$ - оператор Гильберта-Шмидта. Тогда $A$ ограничен.

Замечание I. Теорема 9.I. показывает, что необходимые условия ограниченности в теореме 9.2 не достаточны, а достаточные условия ограниченности в теореме 9.I. не необходимы.

Доказательства этих теорем довольно длинны, содержательно они, однако, значительно проще, чем в Бозонном случае.

Без ограничения общности можно считать, что оба пространства Фока бесконечномерны, поэтому мы их можем считать совпадающими. Итак, мы будем считать, что наш оператор действует из пространства $\Lambda = \Lambda(\ell_2)$ в себя.

9.2. Избавление от предэкспоненциального произведения.

Цель этого пункта - показать, что все три теоремы сводятся к случаю, когда выражение в квадратных скобках в (9.I) отсутствует. Операторы $\mathcal{D}_j = \xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ унитарны. Домножением слева и справа на такие операторы можно перевести наш оператор с ядром (9.I) в оператор с ядром вида

$$\exp\left\{ (\xi \ \bar{\eta}) \begin{pmatrix} K' & L' \\ -(L')^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \right\}$$

при этом (см. доказательство леммы 6.4) операторы $K - K'$, $L - L'$, $M - M'$ конечномерны. Поэтому нам достаточно доказать следующие, по существу, тривиальные леммы.

Лемма 9.I. Пусть $L$ - оператор в гильбертовом пространстве. Тогда следующие два условия эквивалентны.

а) $L$ представим в виде $L'(1+T)$, где $T$ - оператор Гильберта-Шмидта, а $\|L\| \leqslant 1$.

б) $L$ представим в виде $L = \tilde{L} + \tilde{T}$, где $\|\tilde{L}\| \leqslant 1$, а $T$ - оператор Гильберта-Шмидта.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь утверждение б) $\Rightarrow$ а). Итак, пусть выполнено б). С помощью полярного разложения оператора $L$ мы можем свести утверждение к случаю, когда $(L+T)^* = (L+T)$. Далее применяем спектральную теорему.

Замечание. Утверждение леммы, очевидно, остается в силе, если в формулировке заменить слова "оператор Гильберта-Шмидта" на слова "ядерный оператор".

Лемма 9.2. Пусть $L$ – оператор в гильбертовом пространстве. Тогда следующие условия эквивалентны

а) $L$ представим в виде $L=L'(1+T)$, где $\|L\|<1$, а $T$ – компактный оператор.

б) $L$ представим в виде $L=L^{o}(1+T)$, где $\|L^{o}\|<1$, а $T$ – конечномерный оператор.

в) $L$ представим в виде $L=\tilde{L}+S$, где $\|\tilde{L}\|<1$, а $S$ – конечномерный оператор.

г) $L$ представим в виде $L=L''+H$, где $\|L''\|<1$, а $H$ – компактный оператор.

Доказательство: аналогично.

9.3. Нормы некоторых простых операторов в $\Lambda(\mathbb{C}^2)$.

Лемма 9.3. Пусть $K$ – оператор умножения на $exp(\lambda\xi_1\xi_2)$ или оператор $exp\left(\lambda\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right)$ Тогда

$$\|K\|=1+|\lambda|/\sqrt{2}+O(\lambda^2)$$

$$\|K^{-1}\|=1+|\lambda|/\sqrt{2}+O(\lambda^2)$$

при $\lambda\to 0$

Доказательство. рассмотрим, например, оператор $K$ умножения на $exp(\lambda\xi_1\xi_2)=1+\lambda\xi_1\xi_2$. В базисе $1$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_1\xi_2$ он записывается с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \lambda & & & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные числа $K^*K$ тем самым равны $1, 1,$ $1 \pm |\lambda|\sqrt{2}\sqrt{1+|\lambda^2|/4} + |\lambda|^2/2$ . Утверждение доказано.

Лемма 9.4. Пусть $K$ - оператор с символом вида

$$\exp\{\mu(\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2)+\lambda\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2\}$$

или

$$\exp\{\lambda\xi_1\xi_2+\mu(\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2)\}$$

где $0<\mu<1$ . Тогда при фиксированном $\mu$ и при $|\lambda|\to 0$ выполнено

$$\|K\| \leq 1+C(\mu)|\lambda|^2+o(|\lambda|^2)$$

Доказательство. Достаточно разобрать лишь второй случай (первый сводится к нему сопряжением). В базисе $1$ , $\xi_1$ , $\xi_2$ , $\xi_1\xi_2$ матрица оператора $K$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \mu & & \\ & & \mu & \\ \lambda & & & \mu^2 \end{pmatrix}$$

Собственные числа оператора $K^*K$ суть

$$\mu^2,\ \mu^2,\ 1+|\lambda|^2+\mu^4 \pm \sqrt{(|\lambda|^2+\mu^4+1)^2-4\mu^4}$$

Наибольшее из них равно

$$(1+\mu^4)+(1-\mu^4)\left[1+\frac{2|\lambda|^2+2|\lambda|^2\mu^4+\lambda^4}{1-\mu^4}\right]^{1/2}+|\lambda|^2=$$

$$=1+C(\mu)|\lambda|^2+O(|\lambda|^2)=\|K\|^2$$

9.4. Доказательство теоремы 9.I.

Лемма 9.5. Пусть $K$ - ядерный оператор. Тогда оператор

$$Af(\xi)=\exp\left\{\frac{1}{2}\xi K\xi^t\right\}f(\xi)$$

ограничен и обратим в $\Lambda$.

Доказательство. В силу леммы 6.3 без ограничения общности можно считать, что матрица $K$ диагональна, т.е. наш оператор есть оператор умножения на $\exp\{\sum\lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}\}$, где $\lambda_j>0$, $\sum\lambda_j<\infty$. Фермионное пространство Фока $\Lambda$ разлагается в тензорное произведение пространств $\Lambda(\mathbb{C}^2)$, а оператор $A$ разлагается в тензорное произведение операторов

$$A_k f(\xi_{2k-1},\xi_{2k})=\exp(\lambda_k\xi_{2k-1}\xi_{2k})f(\xi_{2k-1},\xi_{2k})$$

Тем самым, $\|A\|=\prod_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ в силу леммы 9.3 эта величина конечна.

Наконец, обратный оператор задается формулой

$$A^{-1}f(\xi)=\exp\left(-\sum k_{ij}\xi_i\xi_j\right)$$

и его норма конечна по той же причине. $\boxtimes$

Лемма 9.6. Пусть $M$ - ядерный оператор. Тогда оператор

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right\}$$

ограничен и обратим в $\bar{\Lambda}$ .

Доказательство аналогично. $\varnothing$

Рассмотрим теперь произвольный оператор $A$ с ядром вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\} \qquad (9.3)$$

где $K$ , $M$ - ядерные операторы. Домножая его слева на ограниченный обратимый оператор

$$Cf(\xi)=\exp\left(-\sum k_{ij}\xi_i\xi_j\right)f(\xi)$$

и справа на

$$\mathcal{D}=\exp\left(-\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$$

мы получаем оператор

$$\mathcal{B}\begin{bmatrix}0 & L\\ -L^t & 0\end{bmatrix} \qquad (9.4)$$

Итак, все свелось к вопросу об ограниченности операторов вида (9.4), или, что то же самое, операторов

$$f(\xi)\to f(\xi L^t)$$

Этот оператор переводит пространство $\Lambda^K$ однородных функций в себя, причем в пространстве $\Lambda^K$ наш оператор действует как $K$ -ая внешняя степень $\Lambda^K L$ оператора $L$ . Теперь наша теорема вытекает из следующей леммы

Лемма 9.7. Пусть $L$ – оператор в гильбертовом пространстве. Следующие условия эквивалентны

а) $L$ представим в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L'\| \leqslant 1$, а $T$ – ядерный оператор.

б) Нормы внешних степеней оператора $L$ равномерно ограничены.

Доказательство. 1. а $\Rightarrow$ б. Без ограничения общности можно считать, что оператор $T$ самосопряжен (В противном случае $1+T$ представим в виде $V(1+T')$, где $V$ – частичная изометрия, а $T'$ – самоспряжен. Теперь $L = (L'V) \times \times (1+T'))$. Без ограничения общности можно считать, что $T \geqslant 0$.

$$\|\Lambda^k L\| \leqslant \|\Lambda^k L'\| \cdot \|\Lambda^k(1+T)\| \leqslant \|\Lambda^k(1+T)\| =$$

$$= (1+\lambda_1)\dots(1+\lambda_k) \leqslant \prod_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j) < \infty$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – наибольшие собственные числа оператора $T$.

2. б $\Rightarrow$ а. Пусть $L = V(1+S)$ – полярное разложение оператора $L$. Тогда $\|\Lambda^k L\| = \|\Lambda^k(1+S)\|$. Пусть

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \varphi_-(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$$

Тогда

$$\| \Lambda^k(1+S)\| = \| \Lambda^k(1+\varphi_+(S)\| =$$

$$= \sup_{j} \prod_{j=1}^{k} (1+\lambda_j) \qquad (9.5)$$

где $\lambda_j$ - точки спектра оператора $\varphi_+(S)$, а $\sup$ берется по всем наборам $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ таким, что ни одна точка $\lambda_j$ не входит в этот набор большее число раз, чем ее кратность. Величина (9.5) должна быть конечной, отсюда следует ядерность оператора $\varphi_+(S)$. Итак,

$$L = U(1+S) = U(1+\varphi_+(S))(1+\varphi_-(S))$$

причем $\|U(1+\varphi_-(S)\| \leq 1$, что и требовалось доказать.

9.5. Доказательство теоремы 9.3.

Лемма 9.8. Пусть $\varepsilon > 0$, Операторы Березина с символами вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \bar{\eta})\begin{pmatrix} K & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix}\right\} \qquad (9.6)$$

и

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \bar{\eta})\begin{pmatrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix}\right\} \qquad (9.7)$$

ограничены.

Доказательство. Разберем первый случай. Без ограничения общности можно считать, что выражение $\sum k_{ij} \xi_i \xi_j$ имеет вид

$\sum \lambda_j \xi_{2j-1} \xi_{2j}$ . Тогда наш оператор разлагается в тензорное произведение операторов с ядрами вида

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\left(\xi_{2j-1}\bar\eta_{2j-1}+\xi_{2j}\bar\eta_{2j}\right)+\lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}\right\}$$

В силу леммы 9.4. норма этого тензорного произведения конечна. $\boxtimes$

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольный оператор Березина $A$ с ядром вида (9.3), причем $L$ удовлетворяет условию теоремы. Оператор $A$ представим в виде $A = BC\mathcal{D}$, где $B$ имеет ядро (9.6), $\mathcal{D}$ имеет ядро (9.7), а $C$ имеет ядро

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi & \bar\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & (1-\varepsilon)^{-2}L\\ (1-\varepsilon)^{-2}L^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar\eta\end{pmatrix}\right\}$$

причем $\varepsilon$ можно было выбрать столь малым, что $(1-\varepsilon)^{-2}L$ по-прежнему удовлетворяет условию теоремы. По лемме 9.8 операторы $B$ и $\mathcal{D}$ ограничены, а оператор $C$ ограничен по лемме 9.7. Теорема доказана. $\boxtimes$

<u>9.6. Доказательство теоремы 9.2</u>, мы начнем с одного простого замечания. Пусть $\bar\Lambda = \bar\Lambda(H)$ и пусть $R$ – замкнутое подпространство в $H$ . Выберем ортонормированный базис $e_1$ , $e_2$ , ... в $H$ и дополним его до ортонормированного базиса в $H$ , пусть $f_1$ , $f_2$ , ... – соответствующие базисные элементы. Теперь пространство $\bar\Lambda(H)$ мы можем рассматривать как пространство функций от переменных $\xi_1$ , $\xi_2$ , ... , $\xi_{\bar 1}$ , $\xi_{\bar 2}$ , ... . Пространство $\bar\Lambda(R)$ мы можем рассматривать как подпространство в $\bar\Lambda(R)$ состоящее из всех функций,

зависящих лишь от переменных $\xi_{\bar 1}, \xi_{\bar 2}, \ldots$. Пусть $Q_R$ - тождественное вложение $\bar\Lambda(R)$ в $\bar\Lambda(H)$, а $P_R$ - проектор в $\bar\Lambda(H)$ на $\bar\Lambda(R)$. Пусть $A$ - оператор в $\bar\Lambda(H)$. Рассмотрим оператор $P_{R_1} A Q_{R_2} : \Lambda(R_2) \to \Lambda(R_1)$ $(R_1, R_2 \subset H)$. Его ядро очнеь легко получить из ядра оператора $A$, а именно нужно положить

$$\xi_{\bar 1} = \xi_{\bar 2} = \ldots = 0 \quad , \quad \eta_{\bar 1} = \eta_2 = \ldots = 0 \quad .$$

Очевидно, что $\| P_{R_1} A Q_{R_2} \| \leq \| A \|$ и, таким образом мы получаем возможность, выбирая подходящим образом подпространства $R_1$ и $R_2$, оценивать $\| A \|$ снизу.

Шаг I. Итак, рассмотрим произвольный оператор $A$ с ядром вида (9.3). Начнем с того, что покажем, что оператор $L$ без ограничения общности можно считать самосопряженным. Пусть $L = US$ - полярное разложение оператора $L$. Пусть частичная изометрия $U$ действует из подпространства $R_2$ в подпространство $R_1$. Если мы хотим доказать неограниченность оператора $A$, нам достаточно доказать неограниченность оператора $P_{R_1} A P_{R_2}$: $\Lambda(R_2) \to \Lambda(R_1)$. Его ядро

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \ \eta)\begin{pmatrix} K^\circ & T \\ T^t & M^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \eta^t \end{pmatrix}\right\}$$

получается из ядра (9.3) изложенной выше процедурой. Изометрия $U$ отождествляет $R_2$ и $R_1$, поэтому оператор $X$ с ядром

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi \ \ \bar\eta)\begin{pmatrix} 0 & U \\ -U^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right\}$$

отождествляет $\Lambda(R_2)$ и $\Lambda(R_1)$. Тем самым $X P_{R_1} A P_{R_2}$ имеет ядро

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix} V^t K^0 V & T\bar{V} \\ V^t T & M^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\}$$

Шаг 2. Итак, мы считаем, что ядро нашего оператора $A$ имеет вид (9.3), причем $L$ - самосопряжен.

Возьмем спектральное разложение оператора $L$ и предположим, что спектральное подпространство $H_{[1+\varepsilon,\infty)}$ оператора $L$, отвечающнн полупрямой $[1+\varepsilon,\infty)$ бесконечномерно. Тогда для любого $n$ можно выбрать ортонормированную систему $e_1, \dots, e_n \in H_{[1+\varepsilon,\infty)}$ такую, что векторы $Le_1, \dots, Le_n$ ортогональны. Пусть $R_2$ - подпространство, натянутое на $e_1, \dots, e_n$, а $R_1$ - подпространство, натянутое на $Le_1, \dots, Le_n$.

Лемма 9.9. Пусть $n \to \infty$. Тогда $\|P_{R_1} A Q_{R_2}\| \to \infty$.

Из этой леммы будет следовать, что

Лемма 9.I0. Пусть форма $F = \xi K \xi^t = \sum K_{ij}\xi_i\xi_j$ приводится к каноническому виду $\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant 0$. Приравняем часть из переменных $\xi_1$, $\xi_2, \dots$ в форме $F$ к нулю. Пусть полученная форма приводится к каноническому виду $\sum \mu_j \xi'_{2j-1}\xi_{2j}$; $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots$. Тогда $\mu_1 \leqslant \lambda_1, \mu_2 \leqslant \lambda_2, \dots$.

Доказательство леммы 9.I0. Пусть $K$ - кососимметричный антилинейный оператор в гильбертовом пространстве с матричными элементами $K_{ij}$. Овеществим наше гильбертово пространство, потом его комплексифицируем. Тогда $iK$ становится самосопряженным оператором, а $\pm\lambda$ - это ни что иное как собственные числа $iK$. Теперь мы можем воспользоваться известной теоремой о поведении собственных чисел самосопряженного оператора при ограничении на подпространство (см. [3], §24).

Доказательство леммы 9.9. Разложим наш оператор $E = P_{R_1} A Q_{R_2}$ с ядром

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} K' & L' \\ -(L')^t & M'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \bar\eta\end{pmatrix}\right\} \qquad (9.8)$$

в произведение трех операторов $B$, $C$, $\mathcal{D}$ с ядрами.

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} K' & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\right\};\ \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} 0 & L' \\ (-L')^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\right\};$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & M'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar\eta^t\end{pmatrix}\right\}$$

Тогда

I) $\|C\| \geqslant (1+\varepsilon)^n$ в самом деле $\|L' e_i\| \geqslant 1-\varepsilon$, а поэтому $\|C\eta_1\cdots\eta_n\| \geqslant$ $\geqslant (1+\varepsilon)^n$

2) Пусть форма $\sum k_{ij}\xi_i\xi_j$ приводится к каноническому виду $\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Тогда $\|B^{-1}\|$ в силу лемм 9.10 и 9.3 оценивается сверху через

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j/\sqrt{2}+\varphi(\lambda_j)\right)$$

где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^2)$ при $\lambda \to 0$

3) Пусть форма $\sum m_{ij}\bar\eta_i\bar\eta_j$ приводится к каноническому виду $\sum \varkappa_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}$, $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Тогда $\|C^{-1}\|$ оценивается сверху через

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\varkappa_j/\sqrt{2}+\psi(\varkappa_j)\right)$$

где функция $\psi$ удовлетворяет условию $\psi(\varkappa)=O(\varkappa^2)$ при $\varkappa\to 0$.

Теперь

$$\|E\|\geqslant\frac{\|C\|}{\|B^{-1}\|\cdot\|\mathcal{D}^{-1}\|}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(1+\varepsilon)^n}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j/\sqrt{2}+\varphi(\lambda_j)\right)\prod_{j=1}^{n}\left(1+\varkappa_j/\sqrt{2}+\psi(\varkappa_j)\right)}$$

Учитывая, что $\sum\lambda_j^2<\infty$, $\sum\varkappa_j^2<\infty$, мы получаем, что $\|E\|\to\infty$, что и требовалось доказать.

Шаг 3. Итак, мы уже выяснили, что если оператор $A$ ограничен, то для любого $\varepsilon>0$ спектральное подпространство оператора $L$, соответствующее полупрямой $[\varepsilon,\infty)$ конечномерно. Пусть $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\ldots>1$ - все точки спектра $L$, лежащие в области $\sigma>1$, мы считаем, что кратные точки спектра встречаются в этой последовательности соответствующее число раз. Пусть $e_1$, $e_2$, ... - соответствующие собственные векторы. Пусть $R=R^{(n)}$ - подпространство натянутое на $e_1$, $e_2$, ... .

Лемма 9.II. Если $\sum(\sigma_j-1)^2=\infty$, то $\|P_{R^{(n)}}A\,Q_{R^{(n)}}\|\to\infty$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Проводя те же оценки, что и в доказательстве леммы 9.9 мы получаем

$$\|P_{R(n)} A Q_{R(n)}\| \geqslant \prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\sigma_j}{\left(1+\frac{\lambda_j}{\sqrt{2}}+\varphi(\lambda_j)\right)\left(1+\frac{\varkappa_j}{\sqrt{2}}+\psi(\varkappa_j)\right)}\right]$$

откуда сразу следует наше утверждение.

Итак, в случае ограниченного оператора $A$ выполнено $\sum(\sigma_j-1)^2<\infty$ . Теорема доказана.

## §10. Категории $\overline{GA}$ , $\overline{B}$ , $\overline{C}$ .

В следующей главе категория $\overline{GA}$ будет играть весьма важную роль, категории $\overline{B}$ и $\overline{C}$ будут использваться в не очень су - щественных конструкциях. Исследованию теории представлений категорий $GA$ , $B$ , $C$ , $\mathcal{D}$ посвящена глава IУ, эта глава однако, почти не зависит от настоящего параграфа.

<u>10.1 Категория</u> $\overline{GA}$ . Объектом категории $\overline{GA}$ является прямая сумма двух гильбертовых пространств $V=V_+\oplus V_-$ .

Морфизмами категории $\overline{GA}$ являются линейные отношения, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Пусть $V$ , $W$ - объекты $\overline{GA}$ . Множество $m(V,W)$ состоит из линейных подпространств $P\subset V\oplus W$ таких, что

1. $P$ является графиком оператора $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N\end{pmatrix}$: $V_+\oplus W_- \to V_-\oplus W_+$
2. $K$ , $N$ - операторы Гильберта-Шмидта.

Множество $\mathrm{Mor}(V,W)$ состоит из элемента $null$ , а также линейных отношений $P\subset V\oplus W$ , удовлетворяющих условию: существует $P'\subset m(V,W)$ такое, что коразмерности $P \cap P'$ в $P$ и $P'$ конечны (подчеркнем, что эти коразмерности не обязаны совпадать).

Произведение нулевого морфизма с любым другим является нулевым морфизмом. Далее, пусть $P \in Mor(V, W)$, $Q \in Mor(W, Y)$ – ненулевые морфизмы. Если не выполнено хотя бы одно из двух условий

$$Ker\ Q \cap Ind\ P = 0$$

$$Im\ P + \mathcal{D}(Q) = W$$

то $QP = null$. В противном случае $Q$ и $P$ перемножаются как линейные отношения.

<u>10.2. Вложение категории $\overline{GA}$ в $\overline{GD}$</u>. Пусть $V \in Ob(GA)$, $V = V_+ \oplus V_-$. Обозначим через $Y'$ пространство, двойственное к пространству $Y$ Рассмотрим пространство $\tilde{V} = V \oplus V'$ и снабдим его симметричной билинейной формой

$$\{(v_1, f_1), (v_2, f_2)\} = f_1(v_2) + f_2(v_1)$$

Далее, положим $\tilde{V}_+ = V_+ \oplus V_-'$, $\tilde{V}_- = V_- \oplus V_+'$. Таким образом, $\tilde{V}$ снабжено структурой объекта категории $\overline{GD}$.

Пусть $P \in Mor_{GA}(V, W)$, $P \neq null$. Пусть $P'$ – аннулятор $P$ в $V' \oplus W'$. Тогда $P \oplus P'$ – морфизм категории $\overline{GD}$. Наконец, нулевому морфизму $V \to W$ мы поставим в соответствие нулевой морфизм $\tilde{V} \to \tilde{W}$.

Искомый функтор из $\overline{GA}$ в $\overline{GD}$ построен.

<u>Следствие</u>. Умножение морфизмов категории $\overline{GA}$ ассоциативно.

В самом деле, наше отображение из $Mor_{\overline{GA}}$ в $Mor_{\overline{GD}}$ инъективно. Умножение же в $Mor_{\overline{GD}}$ ассоциативно. (До этого момента, строго говоря, мы не имели права называть $\overline{GA}$ категорией)

10.3. Спинорное представление $\overline{GA}$. Мы можем рассмотреть композицию только что построенного функтора и функтора $Spin$. Получающееся представление категории $\overline{GA}$ мы тоже будем называть спинорным.

10.4. Категория $\overline{C}$. Определение объекта категории $\overline{C}$ отличается от определения объекта категории $\overline{GD}$ (см. п.8.1) в одном-единственном слове. А именно, объект категории $\overline{C}$ - это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, оснащенное следующими дополнительными структурами:

1. Фиксировано разложение $V = V_+ \oplus V_-$

2. Фиксирован антилинейный биективный изометрический оператор $I: V_+ \to V_-$.

3. Фиксирована кососимметричная билинейная форма

$$\{(v_+, v_-), (v_+', v_-')\}_V = \langle I v_+, v_-' \rangle - \langle I v_+', v_-' \rangle$$

Определение морфизма дается точно также, как и в случае $\overline{GD}$, только условие $K = -K^t$, $M = -M^t$ нужно заменить на условие $K = K^t$, $M = M^t (S = S^t)$. Можно дать определение и по-другому. Объект категории $\overline{C}$ является и объектом категории $\overline{GA}$. Линейное отношение $P: V \rightrightarrows W$ мы назовем морфизмом категории $\overline{C}$, если

1. $P$ - морфизм категории $\overline{GA}$.

2. $P$ - максимальное изотропное подпространство в $V \oplus W$ относительно кососимметричной билинейной формы

$$[(v,w);(v',w')] = \{v,v'\}_V - \{w,w'\}_W$$

Замечание I. Ограничивая спинорное представление категории $\overline{GA}$ на $\overline{C}$ мы получаем представление категории $\overline{C}$, которое разлагается в прямую сумму счетного числа представлений. В главе IУ мы увидим, что в качестве слагаемых выступают все фундаментальные представления категории $\overline{C}$.

Замечание 2. Симплектическая категория $\overline{Sp}$ является подкатегорией в категории $C$.

10.5. Категория $B$. Пусть $V$ - объект категории $\overline{GD}$, а $\mathbb{C}e$ - одномерное пространство. Объект категории $B$ - это прямая сумма $\tilde{V} = \mathbb{C}e \oplus V$, снабженная симметричной билинейной формой

$$\{(ce,v),(c'e,v')\}_{\tilde{V}} = cc' + \{v,v'\}_V$$

Замечание. Основное отличие категории $\overline{B}$ от категории $\overline{GD}$ в том, что ее объекты "нечетномерны", в отличие от объектов категории $\overline{GD}$, которые "четномерны", хотя на первый взгляд, в бесконечномерном случае это безразлично. Известно, что серии групп $D_n = SO(2n,\mathbb{C})$ и $B_n = SO(2n+1,\mathbb{C})$ ощутимо различаются по своим свойствам. Точно также правильно определенные группы $O(2\infty,\mathbb{C})$ и $O(2\infty+1,\mathbb{C})$ - это не одно и то же (см. [37]).

Пусть $\tilde{V}$ - объект категории $B$, пусть $\mathbb{C}f$ - одномерное пространство( $f = f_V$ ). Пусть $V^0 = V \oplus \mathbb{C}f_V$, снабдим это пространство билинейной формой

$$\{(\tilde{v}_1, h_1 f_V),(\tilde{v}_2, h_2 f_V)\}_{V^0} = h_1 h_2 + \{v_1, v_2\}_{\tilde{V}}$$

Введем в $V^0$ структуру объекта категории $\overline{GD}$, положив $V^0_+ = \mathbb{C}\cdot(f+ie)\oplus V_+$, $V^0_- = \mathbb{C}\cdot(f-ie)\oplus V_-$.

Морфизм категории $B$ из $\tilde{V}$ в $\tilde{W}$ - это либо $null$, либо ненулевой морфизм $P$ категории $\overline{GD}$ из $V^0$ в $V^0$ такой, что $(f_V, f_W)\in P$.

Замечание. Категория $\overline{B}$, по построению, вложена в категорию $\overline{GD}$. Ограничение спинорного представления категории $\overline{GD}$ на категорию $\overline{B}$ разлагается в прямую сумму двух одинаковых представлений.