$Shtan$ мы получаем серию представлений $\rho_k (k\in\mathbb{Z})$ категории $Shtan$.

Предложение I6.I. Операторы $\rho_k(\gamma)$ ограничены для всех $\gamma\in Shtan$.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы I4.2.

I6.8. Примеры представлений категории $Shtan^*$. Чтобы привести пример представления $Shtan^*$ достаточно рассмотреть конструкцию I6.7, только в определении $T_k^o(\gamma)$ потребовать, чтобы дифференциал F имел нули кратности $s\geq 0$ в отмеченных точках.

I6.9. Примеры представлений категории $G-Shtan$.

Здесь, тоже можно чуть-чуть видоизменить конструкцию п I6.7. Пусть $\gamma=[S,\Sigma,s_i^+,s_j^-]$ - морфизм. А именно фиксируем голоморфное представление ρ группы G, построим по ρ линейное расслоение над S ассоциированное с Σ и далее вместо k -дифференциалов (рассматривающихся в п.I6.7) рассмотрим голоморфные сечения ρ. Роль пространства H играет пространство функций на окружности $|z|=1$ со значениями в пространстве представления ρ.

Глава IУ. Представления категорий $GA, B, C, \mathcal{D}$.

В главе II были введены категории $\overline{GA}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{G\mathcal{D}}$. Здесь нас интересуют не сами эти категории, а лишь их конечномерные части $GA, B, C, G\mathcal{D}$ т.е. подкатегории, состоящие из конечномерных объектов. Мы начнем с того, что дадим независимое определение этих категорий.

§17. Формулировки классификационных теорем.

<u>17.0. Предварительные замечания о представлениях категорий.</u> Определения подпредставления, неприводимого представления, прямой суммы представлений, тензорного произведения представлений, вполне приводимого представления (представления, разлагающегося в прямую сумму неприводимых) в комментариях не нуждаются. Определим аналог сплетающего оператора. Пусть (T, τ) и (S, σ) – представления категории $\mathcal{K}$. Сплетающим преобразованием $A:(T,\tau)\to(S,\sigma)$ мы назовем набор операторов $A(V)$, где $V\in Ob(\mathcal{K})$ такой, что для любых $V, W\in Ob(\mathcal{K})$ и для любого $P\in Mor(V,W)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "\tau(P)"] \arrow[d, "A(V)"'] & T(W) \arrow[d, "A(W)"] \\ S(V) \arrow[r, "\sigma(P)"] & S(W) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определим также циклическую оболочку. Пусть $V\in Ob(\mathcal{K})$ Пусть $L\subset T(V)$. Обозначим через $S(W)\subset T(W)$ набор подпространств, натянутых на векторы вида $\tau(P)v$, где $P\in Mor(V,W)$, $v\in L$. Легко видеть, что S – подпредставление в T и мы назовем S циклической оболочкой L.

Наконец, отметим, что под словом "представление" мы всегда понимаем непрерывное представление.

Лемма I7.I. Пусть T - неприводимое представление $\mathcal{K}$. Тогда ограничение на T на все полугруппы $End(V)$ неприводимо.

Доказательство. Допустим представление $End(V)$ в $T(V)$ приводимо, и пусть L - его некоторое собственное подпредставление. Рассмотрим циклическую оболочку L, эта циклическая оболочка является собственным подпредставлением в T. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие. Пусть для любого $V \in Ob(\mathcal{K})$ группа $Aut(V)$ плотна в $End(V)$. Тогда ограничение любого неприводимого представления T категории $\mathcal{K}$ на любую группу $Aut(V)$ неприводимо. ∎

Утверждение, обратное к лемме I7.I, неверно. Однако, для изучаемых ниже категорий оно выполнено.

Лемма I7.2. Пусть множество объектов $V_1, V_2, \dots$ категории $\mathcal{K}$ упорядочено, и пусть каждый морфизм $P \in Mor(V_j, V_j)$ представим в виде $P = QRH$, где $H \in Mor(V_j, V_{j+1})$, $R \in Mor(V_{j+1}, V_{j+1})$, $Q \in Mor(V_{j+1}, V_j)$. Пусть представление $\mathbf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathcal{K}$ таково, что ограничение T на любую подгруппу $End(V_j)$ неприводимо. Тогда T неприводимо. ∎

Доказательство. Заметим, что если представление S - произвольное представление $\mathcal{K}$ и если ограничение S на $End(V_{j+1})$ нулевое, то и ограничение S на $End(V_j)$ является нулевым. Пусть $T' \subset T$ - подпредставление, $T'' = T/T'$ - факторпредставление. Сформулированное чуть выше замечание влечет, что либо $T' = 0$, либо $T'' = 0$.

<u>17.1. Категория</u> GA. Объект категории - конечномерное комплексное линейное пространство. Множество $Mor(V,W)$ состоит из всех линейных отношений $V \rightrightarrows W$, а так же из элемента $null_{V,W}$. Произведение $null$ с любым другим морфизмом равно $null$. Если $P: V \to W$, $Q: W \to Y$ - ненулевые морфизмы и выполнены равенства

$$\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Ind} P = 0 \tag{17.1}$$

$$\operatorname{Im} P + \mathcal{D}(Q) = W \tag{17.2}$$

то P и Q перемножаются как линейные отношения. В противном случае произведение равно $null_{V,Y}$. Ассоциативность умножения мы проверили выше в п. 10.2.

Множество ненулевых морфизмов $V \to Y$ представляет из себя объединение грассманианов. Поэтому введем на $Mor(V,W) \setminus \setminus null_{V,W}$ топологию несвязного объединения грассманианов. Далее продолжим топологию на все множество $Mor(V,W)$, положив, что $null$ содержится в замыкании любой точки.

<u>Лемма 17.3</u>. Пусть $P \in Mor(V,W)$, $Q \in Mor(W,Y)$

а) Если $QP \neq null$, то

$$\dim QP = \dim P + \dim Q - \dim W$$

б) Умножение $(P,Q) \mapsto QP$ непрерывно.

<u>Доказательство.</u> Начнем с а). Рассмотрим в $Z = V \oplus W \oplus W \oplus Y$ подпространство H, состоящее из всех векторов вида (v, w, w, y). Из условия (17.2) следует, что сумма подпространств H и $P \oplus Q$ в Z совпадает с Z, поэтому

$$\dim (H \cap (P \oplus Q)) = \dim P + \dim Q - \dim W$$

Спроектируем подпространство $H \cap (P \oplus Q) \subset Z$ на подпространство $V \oplus Y \subset Z$ всех векторов вида $(v, 0, 0, y)$ параллельно пространству X всех векторов вида $(0, w, w, 0)$. Если выполнено (I7.I), то отображение инъективно. Но эта проекция есть ни что иное как QP. Утверждение а) доказано. Отсюда же следует непрерывность умножения во всех точках (P, Q), где $QP \neq null$. Во всех остальных точках непрерывность выполнена автоматически. Лемма доказана. $\boxtimes$

Группа $Aut(V) = GL(V)$ не плотна в полугруппе $End(V)$ (и именно этим будет обусловлено различие в теории представлений GA и теории представлений B, C, D). Обозначим через $End^*(V)$ полугруппу всех морфизмов $V \to V$, состоящих из $null$ и линейных отношений размерности $\dim V$. Группа $Aut(V)$ плотна в $End^*(V)$. Полугруппа $End^*(V)$ как полугруппа порождена группой $Aut(V)$ и двумя произвольными элементами P и Q, удовлетворяющими условиям $\dim Ker(P) = 1$, $\dim Ind(P) = 0$, $\dim Ker(Q) = 0$, $\dim Ind(Q) = 1$.

Пусть ρ – неприводимое представление группы $GL(V) = Aut(V)$. Тогда, очевидно, существует не более четырех непрерывных продолжений ρ до проективного представления полугруппы $End^*(V)$. В самом деле, либо $\rho(P) = 0$, либо $\rho(P)$ однозначно определено из соображений непрерывности. С $\rho(Q)$ ситуация аналогична.

Теорема I7.I. а) Проективные голоморфные представления категории GA вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные представления (T, τ) категории

GA нумеруются диаграммами вида

$$\cdots \underset{a_{-1}}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\underset{a_0}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\underset{a_1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\underset{a_2}{\circ} \cdots$$

где a_j - неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0 (При сдвиге диаграммы представление не меняется). Пусть a_α - самая левая, а a_β - самая правая из ненулевых числовых отметок. Если $\beta-\alpha-1>n$, ограничение нашего представления на группу $SL(n+1,\mathbb{C})$ является нульмерным. Если же $\beta-\alpha-1\leq n$, то это ограничение есть однократная прямая сумма всех представлений $\tau_{\mu,\nu}$ группы $SL(n+1,\mathbb{C})$ с числовыми отметками $a_\mu, a_{\mu+1},\dots,a_\nu$ на диаграмме Дынкина A_n, причем μ и ν должны удовлетворять условиям $\alpha\geqslant\mu-1$, $\nu\geqslant\beta-1$, $\nu-\mu=n-1$.

в) Пусть P и Q - те же образующие полугруппы $End^*(V)$, что и выше. Тогда $\tau_{\mu,\nu}(P)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha>\mu+1$ и $\tau_{\mu,\nu}(Q)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\nu>\beta-1$ ∎

<u>Пример</u>. Пусть (T,τ) имеет числовые отметки $(\dots 0,0,b,c,0,0,\dots)$, где $b,c\neq 0$. Ограничение T на $SL(4,\mathbb{C})$ суть сумма представлений с числовыми отметками $(0,0,b)$, $(0,b,c)$, $(b,c,0)$, $(c,0,0)$

<u>17.2. Категории</u> $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$. Объектом категории $\mathcal{C}$ является комплексное линейное пространство V снабженное невырожденой кососимметрической билинейной формой $\{\cdot,\cdot\}_V$. Пусть V,W - объекты категории $\mathcal{C}$. Введем в $V\oplus W$ симплектическую форму

$$\Lambda((v_1,w_1),(v_2,w_2))=\{v_1,v_2\}_V-\{w_1,w_2\}_W$$

Множество $Mor(V,W)$ состоит из $null=null_{V,W}$ и максимальных изотропных подпространств в $V \oplus W$. Морфизмы перемножаются также как в категории GA .

Определение категорий B и $G\mathcal{D}$ аналогично, только их объектами являются соответственно четномерные и нечетномерные комплексные линейные пространства, снабженные симметричной билинейной формой.

Очевидно $Aut_C(V) \simeq Sp(V)$, $Aut_B(W) = O(W)$, $Aut_{G\mathcal{D}}(Y) = O(Y)$. Во всех случаях группа $Aut(V)$ плотна в полугруппе $End(V)$, причем $End(V)$ как полугруппа порождена группой $Aut(V)$ и произвольным элементом P таким, что $\dim \operatorname{Ker} P = 1$, $\dim \operatorname{Ind} P = 1$. В частности, любое неприводимое представление ρ группы $Aut(V)$ имеет не более двух непрерывных продолжений до проективного представления $End(V)$, эти два продолжения различаются по тому равно или не равно $\rho(P)$ нулю.

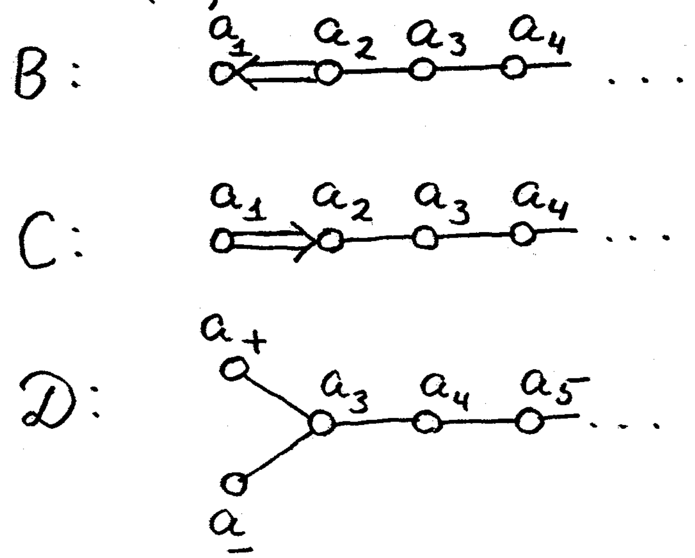
Известно, что теории представлений групп $SO(2n+1, \mathbb{C})$ и $O(2n+1, \mathbb{C}) = SO(2n+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{Z}_2$ по существу совпадают. Между теорией представлений группы $SO(2n, \mathbb{C})$ и $O(2n, \mathbb{C}) \neq SO(2n, \mathbb{C}) \times \mathbb{Z}_2$ есть небольшая разница. Нам хотелось бы иметь категорию $\mathcal{D}$ такую, что $Aut_{\mathcal{D}}(V) = SO(V)$

Прежде всего, заметим, что если Y - четномерное пространство, снабженное симметрической билинейной формой, то грассманиан $Gr(Y)$ максимальных изотропных подпространств в Y состоит из двух компонент связности. Два элемента $H_1, H_2 \in Gr(Y)$ лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда коразмерность $H_1 \cap H_2$ в H_1 и H_2 четна. Объектом категории $\mathcal{D}$ мы назовем объект V категории $G\mathcal{D}$, в котором дополнительно фиксирована одна из двух компонент связности грассманиана

$Gr(V)$, мы обозначим ее через $Gr_+(V)$. Далее в множестве $Mor_{G\mathcal{D}}(V,W)$ мы тоже должны выделить одну из двух компонент связности. Итак, пусть $V, W \in Ob(\mathcal{D})$, $V_+ \in Gr_+(V)$, $W_+ \in Gr_+(W)$. Пусть $W_- \in Gr(W)$ трансверсально W_+ (это не значит, что $W_- \notin Gr_+(W)$). Пусть $P \in Mor_{G\mathcal{D}}(V,W)$. Тогда $P \in Mor_{\mathcal{D}}(V,W)$ если размерность пересечения $P \cap (V_+ \oplus W_-)$ четна. Не совсем очевидно, что произведение морфизмов есть морфизм. У нас, однако, есть обходной путь для доказательства этого утверждения. А именно, рассмотрим спинорное представление $G\mathcal{D}$. Элемент $P \in Mor_{G\mathcal{D}}(V,W)$ содержится в $Mor_{\mathcal{D}}(V,W)$ тогда и только тогда, когда ядро оператора $Spin(P)$ является четной функцией по ξ, η. Теперь утверждение становится очевидным.

Теорема I7.2. а) Голоморфные представления категорий B, C, $\mathcal{D}$ вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные проективне представления категорий (T, τ) нумеруются диаграммами вида



где a_j – неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0. Рассмотрим, например, случай C (случаи

B и D аналогичны). Пусть a_α - самая правая ненулевая отметка. Если $n < \alpha-1$, то ограничение представления (T,τ) на группу $Sp(2n,\mathbb{C})$ является нульмерным. Если же $n \geqslant \alpha-1$ то ограничение (T,τ) на $Sp(2n,\mathbb{C})$ есть неприводимое представление $Sp(2n,\mathbb{C})$ с числовыми отметками $a_1,\dots,a_n$ на диаграмме Дынкина типа C_n. Если $n=\alpha-1$, то ограничение нашего представления на полугруппу $End_C(\mathbb{C}^{2n})$ является нулевым на $\gamma_n = End_C(\mathbb{C}^{2n}) \setminus Aut_C(\mathbb{C}^{2n})$. Если $n > \alpha-1$, то ограничение отлично от 0 на γ_n. ■

Замечание. Пусть $P \in Mor(V,W)$. Тогда $\tau(P)=0$ тогда и только тогда, когда $rk\,P < \alpha-1$.

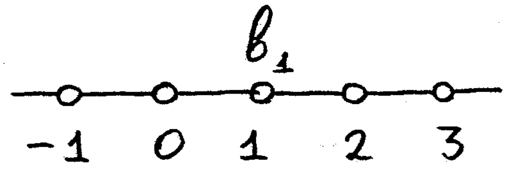
I7.3. Категории $A(\lambda)$. Не ясно, представляют ли вводимые ниже категории $A(\lambda)$ самостоятельный интерес. Они, однако, существенно используются при доказательстве теоремы I7.I. Мы хотим ввести категории, близкие к GA такие, что группа $Aut(V)$ плотна в полугруппе $End(V)$.

Пусть $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ - последовательность нулей и единиц. Объекты категории $A(\lambda)$ - те же, что и у категории GA. Множество $Mor(V,W)$ состоит из $null$ и всех линейных отношений $V \rightrightarrows W$ размерности $n+c_m-c_n$, где $m=\dim W, n=\dim V, c_k=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j$. Правила умножения - те же, что и в GA.

Теорема I7.3. Пусть среди чисел λ_j бесконечно много нулей и бесконечно много единиц.

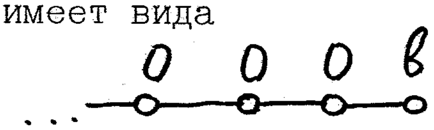
а) Голоморфные представления категории $A(\lambda)$ вполне приводимы.

б) Голоморфные неприводимые представления категории $A(\lambda)$ нумеруются диаграммами вида

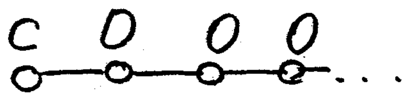


(17.3)

где место b_1 фиксировано. Отметка b_2 ставится слева от b_1, если $\lambda_2 = 0$ и справа, если $\lambda_2 = 1$. Далее, если $\lambda_3 = 0$, то отметка b_3 ставится слева от отрезка, содержащего b_1, b_2. Если же $\lambda_3 = 1$, то b_3 ставится справа и т.д. Все b_j – неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Чтобы получить ограничение нашего представления на группу $A_n = SL(n+1, \mathbb{C})$, нужно "вырезать" из диаграммы (19.1) кусок, содержащий отметки $b_1, \dots, b_n$. Если "отрезанный" слева кусок не имеет вида

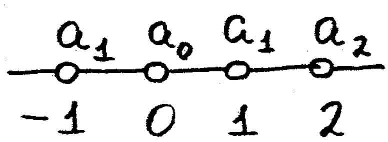


или, если "отрезанный" справа кусок не имеет вида



то ограничение нашего представления на $SL(n+1, \mathbb{C})$ нульмерно. В остальных случаях нужно рассмотреть "вырезанный" кусок длины . Полученный набор числовых отметок и является искомым. ■

Замечание. В дальнейшем мы будем использовать другую нумерацию числовых отметок на диаграммах типа $A(\lambda)$. А именно, вместо диаграммы (17.3) мы будем рассматривать диаграмму



17.4. Замечания. Замечание I. Для полного мыслимого списка бесконечных диаграмм Дынкина нам не хватает лишь диаграмм вида

$$\overset{a_1}{\circ}-\overset{a_2}{\circ}-\overset{a_3}{\circ}-\overset{a_4}{\circ}-\ldots$$

Такими диаграммами нумеруются представления категории линейных пространств и линейных операторов. Кажется, в явном виде такая классификационная теорема не формулировалась. Считать ее неизвестной, однако, также было бы опасным, потому что она легко вытекает из двойственности Шура-Вейля.

Замечание 2. По-видимому, должна существовать категория, связанная с серией групп E_n ($E_3=A_2\oplus A_1$, $E_4=A_4$, $E_5=\mathcal{D}_5$, E_6, E_7, E_8). Правда, эта категория представляла бы действительный интерес, если бы она не кончалась на E_8 .

Замечание 3. Любое неприводимое представление категорий B , C , $\mathcal{D}$, $A(\lambda)$ является тензорным произведением голоморфного и антиголоморфного представления.

§18. Конструкции представлений.

Эти конструкции похожи на конструкции представлений классических групп ([1]). Сначала мы строим фундаментальные представления $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$, т.е. представления категории $\mathcal{K}$ у которых ровно одна числовая отметка (а именно отметка a_α , где $\alpha=1,2,3,\ldots,+,-$) равна 1 , а остальные равны нулю. (Категория GA имеет лишь одно фундаментальное представление). Далее, как обычно, любое неприводимое представление содержится в тензорном произведении фундаментальных представлений.

В этом параграфе все представления категорий B , C , $\mathcal{D}$, $A(\lambda)$ будут построены. Когда мы будем говорить, что "мы построили представление с данными числовыми отметками", это следует понимать как то, что ограничение представления на группы A_n, B_n, C_n, D_n устроено так, как описано в теоремах 17.1-17.3. О единственности таких представлений мы пока (до §19) ничего не знаем.

18.1. Спинорные представления. Спинорному представлению категории GD посвящена глава II. Подкатегория D категории GD действует операторами Березина, ядро которых является четной функцией по ξ, $\bar{\eta}$. Такие операторы переводят четные по η функции в четные, а нечетные в нечетные. Таким образом, спинорное представление при ограничении на категорию D разлагается в сумму двух представлений. Ограничения этих представлений на группу $SO(2n, \mathbb{C})$ является полуспинорными представлениями группы $SO(2n, \mathbb{C})$ (т.к. ограничение спинорного представления $O(2n, \mathbb{C})$ на $SO(2n, \mathbb{C})$ есть сумма двух полуспинорных (см. [22])), полуспинорные представления неприводимы, а поэтому неприводимы и построенные представления категории D.

Итак, спинорное представление категории GD при ограничении на D дает сумму $P^+_D \oplus P^-_D$.

Ограничивая представления $P^{\pm}_D$ на B мы получаем представление P^1_B (опять-таки, ограничения P^1_B на группы $SO(2n+1, \mathbb{C})$ неприводимы, а поэтому неприводимо и P^1_B).

18.2. Фундаментальное представление категории GA. Это представление нам уже встречалось в §10, там оно называлось спинорным представлением. Изложенная в §10 конструкция довольно сложна, но эта сложность связана с тем, что в §10 мы рассматриваем бесконечномерные объекты категории $\overline{GA}$. В случае GA все намного проще, и мы изложим конструкцию P_{GA} на другом языке.

Пространством фундаментального представления $P_{GA}(V)$, где $V \in Ob(GA)$, является внешняя алгебра $\Lambda(V)$ (эта внешняя алгебра есть ни что иное как фермионное пространство Фока $\Lambda(V)$). Пусть $P: V \rightrightarrows W$ - линейное отношение. Тогда по P оче очевидным образом строится линейный оператор $P': \mathcal{D}(P) \to W / \mathrm{Ind}\, P$ (после факторизации W по $\mathrm{Ind}\, P$ подпространство P становится графиком частично опе ределенного линейного отображения. Далее ограничиваем это линейное отображение на область определения P). Оператор $\pi_{GA}(P)$ мы определим как произведение трех операторов $\pi_{GA}(P) = HQR$ где

I. $R: \Lambda(V) \to \Lambda(\mathcal{D}(P))$ - оператор внутреннего умножения на $f_1 \wedge \ldots \wedge f_l$, где $f_1, \ldots, f_l$ - базис в пространстве линейных функционалов на V, аннулирующих $\mathcal{D}(P)$.

2. $Q: \Lambda(\mathcal{D}(P)) \to \Lambda(W / \mathrm{Ind}\, P)$ - естественное функториальное отображение внешних алгебр, связанное с оператором $P': \mathcal{D}(P) \to W / \mathrm{Ind}\, P$.

3. $H: \Lambda(W / \mathrm{Ind}\, P) \to \Lambda(W)$ - оператор внешнего умножения на $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$, где $e_1, \ldots, e_k$ - базис в $\mathrm{Ind}\, P$.

Лемма I8.I. Построенный набор операторов задает представление категории GA.

Доказательство. Для нас самый короткий путь - показать, что наша конструкция совпадает с конструкцией п.I0.2. Пусть $V \in Ob(GA)$. Снабдим его структурой объекта категории $\overline{GA}$, положив $V = V \oplus 0$, обозначим через $\sigma(P)$ оператор, получающийся из морфизма P конструкцией п.I0.2. Нам нужно проверить, что $\sigma(P) = \lambda \pi_{GA}(P)$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$. Разложим P в произведение $P = AP'C$, где $C \in Mor(V, \mathcal{D}(P))$

$A \in Mor(W/\mathrm{Ind}\,P, W)$, причем C – график тождественного вложения $\mathcal{D}(P)$ в V, а A – график проекции $W \to W/\mathrm{Ind}\,P$. Таким образом, наше утверждение сводится к проверке очевидных равенств $\sigma(C) = \mu\pi_{GA}(C)$, $\sigma(P') = \nu\pi_{GA}(P')$, $\sigma(A) = \varkappa\pi_{GA}(A)$, где $\mu, \nu, \varkappa \in \mathbb{C}\setminus 0$

<u>18.3. Фундаментальные представления категории B</u>. Представления $P^{\pm}_{\mathcal{D}}$ и P^{1}_{B} мы уже построили в п.18.1. Все остальные фундаментальные представления для категорий B, C, $\mathcal{D}$ строятся единообразно.

Начнем с категории B. Эта категория, по построению, вложена в категорию GA. Пусть Q – ограничение представления P_{GA} на категорию B. Мы утверждаем, что Q разлагается в прямую сумму счетного числа приедставлений (T_j, τ_j): $Q = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} T_j$, где $T_j(\mathbb{C}^{2n+1}) = \Lambda^{n+1-j}(\mathbb{C}^{2n+1})$ (так как все $(2n+1)$-мерные объекты категории B изоморфны, мы можем обозначать их через $\mathbb{C}^{2n+1}$). В самом деле, пусть $S \in Mor_B(\mathbb{C}^{2n+1}, \mathbb{C}^{2n+1}) \setminus null$. Тогда $\dim S = m+n+1$, поэтому

$$\tau_j(\Lambda^{n+1-j}(\mathbb{C}^{2n+1})) \subset \Lambda^{m+1-j}(\mathbb{C}^{2m+1})$$

что и следовало проверить.

Ограничения представления T_j на группы $SO(2n+1, \mathbb{C})$ неприводимы, поэтому T_j неприводимы.

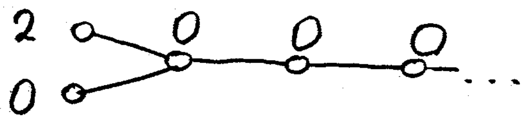
Искомые представления P^{α}_{B} – это ни что иное как представления $T_{\alpha+1}$ $(\alpha > 1)$

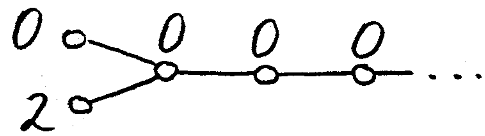
<u>Замечание</u>. Представление T_0 имеет числовые отметки

$(2,0,0,\dots)$, а $T_{-j} \simeq T_{j-1}$.

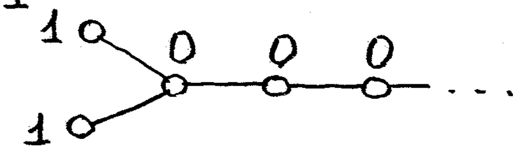
<u>18.4. Фундаментальные представления категории $\mathcal{D}$</u>. Ограничивая представление P_{GA} на категорию $\mathcal{D}$ мы снова получаем прямую сумму представлений $\bigoplus\limits_{j=-\infty}^{\infty} T_j$, где $T_j(\mathbb{C}^{2n}) = \Lambda^{n-j}(\mathbb{C}^{2n})$. Все эти представления, кроме T_0 неприводимы, $P_{\mathcal{D}}^{\alpha} = T_{\alpha-1}$ $(\alpha = 3, 4, \dots)$.

<u>Замечание</u>. Представление T_0 - это сумма представлений с числовыми отметками





Представление T_1 имеет числовые отметки



а $T_{-j} \simeq T_j$

<u>18.5. Фундаментальные представления категории C</u>. Снова возьмем представление P_{GA} и ограничим его на C. Полученное ограничение снова распадается в прямую сумму представлений T_j, где $T_j(\mathbb{C}^{2n}) = \Lambda^{n-j}(\mathbb{C}^{2n})$. Все эти представления, однако, являются приводимыми. Без ограничения общности мы можем считать, что кососимметрическая форма в $\mathbb{C}^{2n}$ устроена следующим образом: $\{e_{2j-1}, e_{2j}\} = 1$, а остальные базисные векторы кососортогональны. Теперь рассмотрим для каждого j оператор $A_n : T_j(\mathbb{C}^{2n}) \to T_{j+2}(\mathbb{C}^{2n})$ такой, что

$$A_n \omega = (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots)\,\omega$$

<u>Лемма 18.2</u>. Набор операторов A_n задает сплетающее преобразование T_j в T_{j+2}.

<u>Доказательство</u>. Пусть $S \in \mathrm{Mor}(\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^{2m})$. Тогда S представим в виде $S = PQR$, где $R \in Sp(2n, \mathbb{C})$, $P \in Sp(2m, \mathbb{C})$, а $Q \subset \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2m}$ имеет базис

$$(e_1, e_1'), (e_2, e_2'), \ldots, (e_{2\ell}, e_{2\ell}'),$$

$$(e_{2\ell+1}, 0), \ldots (e_{2n-1}, 0), (0, e_{2\ell+2}'), \ldots (0, e_{2m}')$$

где e_k, e_k' - канонические базисы в $\mathbb{C}^{2n}$, $\mathbb{C}^{2m}$. Так как $\tilde{\tau}_j(R)$ коммутирует с A_n, а $\tilde{\tau}_j(P)$ коммутирует с A_m, нам достаточно проверить, что

$$A_m \tilde{\tau}_j(Q) = \tilde{\tau}_j(Q) A_n \qquad (18.1)$$

Воспользуемся формализмом пространства Фока

$$A_k f(\xi) = (\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \ldots) f(\xi)$$

$$\tilde{\tau}_j(Q) f(\xi) = \xi_{2\ell+2} \ldots \xi_{2m} \frac{\partial}{\partial \xi_{2\ell+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi_{2n-1}} f(\xi)$$

Но $\tilde{\tau}_j(Q)(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \ldots) = 0$ и теперь равенство (I8.I) очевидно. $\boxtimes$

Пусть $\alpha \geqslant 1$. Рассмотрим сплетающее преобразование A : $T_{\alpha-2} \to T_\alpha$. Пусть $\mathrm{Im}\, A$ - образ этого преобразования. Тогда $P_C^{\alpha+1} = T_\alpha / \mathrm{Im}\, A$ (ограничения $T_\alpha / \mathrm{Im}\, A$ на группы $Sp(2n, \mathbb{C})$ - это фундаментальные представления групп $Sp(2n, \mathbb{C})$ (см. [1]).

<u>I8.6. Фундаментальные представления категорий</u> $A(\lambda)$. Это самый простой случай из всех рассматриваемых. Ограничим представление P_{GA} на $A(\lambda)$. Тогда оно распадется в прямую сумму $\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} T_j$, где $T_j(\mathbb{C}^n) = \Lambda^{(\sum_{i=1}^n \lambda_i) + j}(\mathbb{C}^n)$. Представления

T_j – это в точности все фундаментальные представления категории $A(\lambda)$.

18.7. Конструкции всех неприводимых представлений категорий B, C, $\mathcal{D}$, $A(\lambda)$.

Лемма 18.3. Пусть $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$ – одно из фундаментальных представлений категории $\mathcal{K} = B, C, \mathcal{D}, A(\lambda)$. Пусть $V \in Ob(\mathcal{K})$ и пусть $\mathcal{O}(V)$ – орбита вектора старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V)$ относительно группы $Aut(V)$. Если $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V) \neq 0$, $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(W) \neq 0$, то множество всех векторов $\pi^{\alpha}_{\mathcal{K}}(S)h$, где $S \in Mor(V, W)$, а $h \in \mathbb{C} \cdot \mathcal{O}(V)$ в точности совпадает с множеством $\mathbb{C} \cdot \mathcal{O}(W)$.

Доказательство: перебор.

а) В спинорном представлении орбита старшего вектора состоит в точности из простых спиноров (см. п.8.8). Отсюда сразу вытекает утверждение для $P^{\pm}_{\mathcal{D}}$ и P^{1}_{B}.

б) $A(\lambda)$. Здесь орбита старшего веса состоит из поливекторов, разложимых в произведение векторов. Ясно, что внутреннее умножение, замена переменных и внешнее умножение переводят разложимые поливекторы в разложимые.

в) Представления $P^{\alpha}_{B}(\alpha > 1)$, $P^{\alpha}_{\mathcal{D}}(\alpha \neq \pm)$, P^{α}_{C}. Пусть V_{ℓ} – объект размерности ℓ одной из этих категорий.

Выберем в V базис e_i так, что $\{e_{2i-1}, e_{2i}\} = 1$, остальные пары векторов ортогональны. Векторы старшего веса имеют вид $e_1 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_{2s-1}$. Пусть W – объект той же категории размерности $\ell + 2k$ с аналогичным базисом e_i. Пусть $Q \subset V \oplus W$ подпространство с базисом

$(e_i, e_i),\ i \leq 2s,\ (0, e_{2s+2\beta-1}),\ \beta \leq k,\ (e_j, e_j),\ j \geq 2(s+\beta)$

Тогда $Q \in Mor_{\mathcal{K}}(V, W)$, а оператор

$$\pi^{\alpha}_{\mathcal{K}}(Q) f = (e_{2s+1} \wedge \ldots \wedge e_{2s+2\beta-1}) f$$

переводит вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V)$ в вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(W)$. Но то же самое подпространство Q является и элементом $Mor_{\mathcal{K}}(W, V)$. Соответствующий оператор представления - оператор внутреннего умножения-переводит вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(W)$ в вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V)$.

Остается применить два соображения. Первое: орбита элемента Q под действием группы $Aut(V) \times Aut(W)$ плотна в $Mor_{\mathcal{K}}(V, W)$. Второе: множества $\mathcal{O}(V)$ и $\mathcal{O}(W)$ замкнуты (они состоят из поливекторов, разложимых в произведение попарно ортогональных векторов). Лемма доказана. $\boxtimes$

Пусть теперь мы хотим построить представление категории $\mathcal{K} = B, C, \mathcal{D}, A(\lambda)$ с числовыми отметками a_{α}. Для каждого α рассмотрим a_{α}-ую симметрическую степень $S^{a_{\alpha}} P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$ фундаментального представления $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$. Далее перемножим эти тензорные степени, и в полученном представлении R в каждом пространстве $R(V)$, где $V \in Ob(\mathcal{K})$ мы возьмем вектор старшего веса v_V. Далее, возьмем в каждом пространстве $R(V)$ циклическую оболочку $T(V)$ вектора v_V.

<u>Лемма I8.4</u>. $T(V)$ - неприводимое представление категории $\mathcal{K}$.

<u>Доказательство.</u> Представление группы $Aut(V)$ в $T(V)$ неприводимо и имеет числовые отметки a_{α} (просто потому, что наша конструкция представления $Aut(V)$ в $T(V)$ совпадает с классической конструкцией представлений с отметками a_{α}). Возьмем какой-нибудь вектор старшего веса и возьмем его циклическую

оболочку. В силу леммы I8.3 эта циклическая оболочка совпадает с $S(V)$. Неприводимость $S(V)$ опять следует из леммы I7.2.

§I9. Доказательства классификационных теорем.

Мы начнем со случая C (п. I9.I – I9.2). Случаи B и $\mathcal{D}$ аналогичны (см. п.I9.3 – I9.4), случай $A(\lambda)$ чуть-чуть сложней (п.I9.5). Потом (п.I9.6) мы доказываем вполне приводимость для случаев $\mathcal{K}=A(\lambda), B, C, \mathcal{D}$. Наконец, знание классификационной теоремы для $A(\lambda)$ позволит нам разобрать случай GA.

<u>I9.I. Морфизмы</u> μ_j, ν_j. Рассмотрим случай категории C. Через V_n мы обозначим n-мерный объект C. Фиксируем вложение $\tau_n : V_n \to V_{n+1}$. Тогда пространство V_{n+1} можно представить в виде прямой суммы $V_{n+1} = V_n \oplus V$, где V – двумерное комплексное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной формой. Важно заметить, что фиксировав вложение τ, мы фиксируем действие группы $C_n = Sp(2n, \mathbb{C})$ в V_{n+1} (Иначе говоря, мы фиксируем вложение $\varkappa : Sp(2n, \mathbb{C}) \to Sp(2n+2, \mathbb{C})$, а также вложение полугруппы $End(V_n)$ в полугруппу $End(V_{n+1})$).

Определим линейное отношение $\mu_n : V_n \rightrightarrows V_{n+1}$, это подпространство в $V_n \oplus V_{n+1} = V_n \oplus V_n \oplus V$ натянутое на график отображения τ и произвольную изотропную прямую ℓ в V.

Далее, определим линейное отношение $\nu_n : V_{n+1} \rightrightarrows V_n$. Это подпространство в $V_{n+1} \oplus V_n = (V_n \oplus V) \oplus V_n$ натянуто на график τ и произвольную изотропную прямую ℓ', отличную от ℓ, в V.

Эти линейные отношения обладают следующими свойствами:

I. μ_n и ν_n коммутируют с действием группы $Sp(2n, \mathbb{C})$, т.е. для любого $g \in Sp(2n, \mathbb{C})$ выполнено

$$\mu_n g = \varkappa(g)\mu_n \ ; \quad g\nu_n = \nu_n \varkappa(g)$$

2. $\nu_n \mu_n$ - единица группы $\mathrm{Aut}\, V_n = Sp(2n, \mathbb{C})$

3. $(\mu_n \nu_n)^2 = \mu_n \nu_n$, при этом полугруппа $\mathrm{End}\, V_{n+1}$ порождена группой $Sp(2n, \mathbb{C})$ и $\mu_n \nu_n$.

Путсь теперь $T = (T, \tau)$ - неприводимое представление категории C. Тогда операторы $\tau(\mu_n) : T(V_n) \to T(V_{n+1})$ и $\tau(\nu_n) : T(V_{n+1}) \to T(V_n)$ являются $Sp(2n, \mathbb{C})$ - сплетающими, и, более того, $\mathrm{End}(V_n)$ - сплетающими. Далее оп оператор $\tau(\mu_n \nu_n)$ является (с точностью до умножения на константу) проектором в $T(V_{n+1})$. Таким образом, сплетающие операторы

$$\tau(\mu_n) : T(V_n) \to \mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n)$$

$$\tau(\nu_n) : \mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n) \to T(V_n)$$

являются взаимно обратными. Итак, доказана

Лемма I9.I. Пусть T - неприводимое представления категории C. Тогда представления полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$ в $T(V_n)$ и в $\mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n)$ эквивалентны.

Следствие I. Следующие утверждения эквивалентны

а) $T(V_n) = 0$

б) $\tau(\mu_n \nu_n) = 0$

в) Представление τ тождественно равно 0 на $\mathrm{End}(V_{n+1}) \setminus \mathrm{Aut}(V_{n+1})$

Следствие 2. Пусть T - неприводимое представление категории C. Тогда представление $Sp(2n, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n)$ неприводимо.

Доказательство. В самом деле, оно эквивалентно неприводимому представлению $Sp(2n, \mathbb{C})$ в $T(V_n)$

Следствие 3. Пусть $T=(T,\tau)$ и $T'=(T',\tau')$ – неприводимые представления категории C, и пусть ограничения T и T' на $End(V_{n+1})$ эквивалентны. Тогда ограничения T и T' на $End(V_n)$ эквивалентны.

Доказательство. В самом деле, оба этих ограничения эквивалентны представлению $End(V_n)$ в $Im\,\tau(\mu_n\nu_n)$.

19.2. Доказательство классификационной теоремы в случае категории C. Пусть T – неприводимое представление категории C. Нам нужно доказать, что T эквивалентно одному из представлений, построенных в §18.

Лемма 19.2. Пусть ρ – неприводимое проективное представление полугруппы $End(V_n)$. Тогда существует неприводимое представление S категории C из числа построенных в п.18.7 такое, что ограничение S на $End(V_n)$ совпадает с ρ.

Доказательство. Мы видели (п.17.2), что существует не более двух продолжений неприводимого представления группы $Sp(2n,\mathbb{C})$ на полугруппу $End(V_n)$, одно равно тождественно 0 на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, другое нет.

Пусть числовые отметки ограничения представления ρ на группу $Aut(V_n)=Sp(2n,\mathbb{C})$ равны $a_1,\dots,a_n$. Рассмотрим два случая. Если ρ равно 0 на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, то в качестве S можно выбрать представление с числовыми отметками $a_1,a_2,\dots,a_n,b,0,0,\dots$, причем $b\neq 0$. Если же ρ не равно 0 на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, то искомое представление S единственно и имеет числовые отметки $a_1,\dots,a_n,0,0,\dots$. Лемма доказана. ☒

Итак, пусть $T=(T,\tau)$ – неприводимое представление категории C. Пусть $T(V_{n-1})\neq 0$. Тогда представление $End(V_n)$ в $T(V_n)$ в силу леммы I9.I не является тождественным нулем на $End(V_n)$. Пусть S' представление, из числа построенных в п.I8.7 такое, что ограничения S и T на $End(V_n)$ эквивалентны. Тогда для любого $m<n$ ограничения S и T на $End(V_n)$ эквивалентны. Пусть $k>n$ и допустим, что ограничение θ_k представления T на $End(V_k)$ отлично от ограничения S на $End(V_k)$. Заметим, что θ_k не является тождественным нулем на $End(V_k)\setminus Aut(V_k)$. Пусть тогда S' - представление категории C из числа построенных в п.I8.7 такое, что ограничение S' на $End(V_k)$ совпадает с θ_k. Но ограничения S и S' на $End(V_n)$ совпалают и являются ненулевыми на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, что может быть лишь в случае $S=S'$.

Итак, ограничения S и T на всевозможные полугруппы $End(V_n)$ совпадают. Теперь заметим, что группоид морфизмов категории C поржден группами $Sp(2n,\mathbb{C})$ и морфизмами μ_n и ν_n. Если нам известны ограничения представления T на все группы $Sp(2n,\mathbb{C})$, то операторы $\tau(\mu_n)$ и $\tau(\nu_n)$ однозначно определены просто как $Sp(2n,\mathbb{C})$ - сплетающие операторы $S(V_n)\to S(V_{n+1})$. (Здесь опять-таки нужно посмотреть на явный вид S. В $S(V_{n+1})$ есть ровно одно неприводимое представление $Sp(2n,\mathbb{C})$, эквивалентное $S(V_n)$). Остается рассмотреть логическую возможность $\tau(\mu_n)=0$ или $\tau(\nu_n)=0$. Но это мгновенно влечет $\tau(\varkappa)=0$ для всех $\varkappa\in End(V_{n-1})$, и, тем самым приводит к противоречию. Итак, теорема полностью доказана.

<u>I9.3. Случай категории B</u>. Обозначим через V_n объект категории B размерности $2n+1$. Фиксируем разложение

V_{n+1} в ортогональную прямую сумму $V_{n+1} = V_n \oplus V$, где V - двумерное пространство, снабженное невырожденной симметричной формой. Пусть τ - тождественное вложение V_n в $V_{n+1} = V_n \oplus V$. Пусть l_1, l_2 - изотропные прямые в V (их всего две), $l_1 \neq l_2$. Пусть $\mu_n : V_n \rightrightarrows V_{n+1}$ - линейное отношение, порожденное графиком отображения τ и прямой l_1, а $\nu_n : V_{n+1} \rightrightarrows V_n$ - линейное отношение, порожденное графиком отображения τ и прямой l_2. Дальнейшие рассуждения буквально повторяют рассуждения п.п. I9.I - I9.2, нужно лишь группу $Sp(2n, \mathbb{C})$ заменить на $O(2n+1, \mathbb{C})$.

<u>I9.4. Случай категории</u> $\mathcal{D}$. Обозначим через V_n объект категории $\mathcal{D}$ размерности $2n$, и, как раньше, фиксируем разложение $V_{n+1} = V_n \oplus V$ и вложение $\tau : V_n \rightrightarrows V_{n+1}$. Рассмотрим два подпространства P_1, P_2 в $V_n \oplus V_{n+1}$, каждое из них натянуто на график τ и изотропную прямую в V (таких прямых две и подпространства тоже два). Множества

$$Mor(V_n, V_{n+1}) \setminus null \quad \text{и} \quad Mor(V_{n+1}, V_n) \setminus null$$

являются компонентами грассманиана максимальных изотропных подпространств в $V_n \oplus V_{n+1}$, причем (и это важно), разными компонентами. Подпространства P_1 и P_2 тоже лежат в разных компонентах этого грассманиана. Без ограничения общности можно считать, что $P_1 \in Mor(V_n, V_{n+1}), P_2 \in Mor(V_{n+1}, V_n)$. Теперь полагаем $\mu_n = P_1$, $\nu_n = P_2$. Дальнейшее очевидно.

<u>I9.5. Случай категорий</u> $A(\lambda)$. Пусть V_n - объект категорий $A(\lambda)$ размерности $n+1$ $(Aut(V_n) \simeq A_n)$. Разложим V_{n+1} в прямую сумму $V_{n+1} = V_n \oplus V$, где $\dim V = 1$. Пусть P - график тождественного вложения V_n в V_{n+1}, а Q

натянуто на P и V. Если $\lambda_n = 0$, положим $\mu_n = P$, $\nu_n = Q$, если же $\lambda_n = 1$, положим $\mu_n = Q$, $\nu_n = P$.

При попытке дословно повторить рассуждения п. 19.1 - 19.2 ровно в одном месте возникает затруднение. Дело в том, что в рассуждениях п. 19.2 мы говорим о представлениях полугруппы $End(V)$, ненулевых на $End(V) \setminus Aut(V)$. В случае категорий B, C, $\mathcal{D}$ такие представления однозначно определяются представлением группы $Aut(V)$. В случае же $A(\lambda)$ это не так. Пусть $P_n, Q_n \in Aut(V)$ таковы, что $Ker\, P_n$ и $Ind\, Q_n$ одномерны, $Ind\, P = 0$, $Ker\, Q = 0$.

Лемма 19.3. Пусть среди чисел λ_j число нулей и единиц бесконечно. Пусть $T = (T, \tau)$ - неприводимое представление $A(\lambda)$. Тогда существует n такое, что $\tau(P_n) \neq 0$, $\tau(Q_n) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $T(V_k) \neq 0$. Пусть, для определенности, $\lambda_k = 0$. Пусть $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{s-1} = 0$, $\lambda_s = 1$. Рассмотрим линейное отношение $\theta_s = \mu_s \ldots \mu_k \nu_k \ldots \nu_s \in End\, V_{s+1}$. Тогда $\nu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_s \theta_s \mu_s \ldots \mu_k$ - единица полугруппы $End(V_k)$, а поэтому $\tau(\theta_s) \neq 0$. Но $\dim Ker\, \theta_s = s - k + 1 > 0$, $\dim Ind\, \theta_s = 1 > 0$. Если бы хотя бы одно из равенств $\tau(P_{s+1}) = 0$ или $\tau(Q_{s+1}) = 0$ было бы выполнено; это сразу бы повлекло $\tau(\theta_s) = 0$, так как θ_s представимо в виде $\theta_s = P_{s+1} A$ и $\theta_s = B\, Q_{s+1}$ для некоторых $A, B \in End(V_{s+1})$. Случай $\lambda = 1$ разбирается также. $\boxtimes$

Теперь мы можем повторить доказательство из п. 19.2, только вместо слов "представление R является тождественным нулем на $End(V_n) \setminus Aut(V_n)$" нужно говорить "$\rho(P_n) \neq 0$, $\rho(Q_n) \neq 0$" (или, в терминологии п. 19.6, "ρ - максимальное представление $End(V_n)$").

Замечание. Условие бесконечности числа нулей и единиц в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ было существенно использовано в доказательстве леммы I9.3. Классификационная теорема для представлений категорий $A(\lambda)$ может быть получена и в случае, когда число нулей и единиц конечно, в этом случае каждой диаграмме Дынкина будет отвечать два представления категории $A(\lambda)$. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

I9.6 Вполне приводимость в случае $\mathcal{K} = B, C, \mathcal{D}, A(\lambda)$.

Итак, пусть V_n - объекты перечисленных категорий, занумерованные так же, как в пп. I9.I - I9.4.

Лемма I9.4. Любое представление $T=(T, \tau)$ категории $\mathcal{K} = A(\lambda), B, C, \mathcal{D}$ содержит неприводимое подпредставление.

Доказательство. Это, конечно, очевидно, но не настолько, как кажется на первый взгляд. Выберем наименьшее n, такое, что $T(V_n) \neq 0$. Возьмем в пространстве $T(V_n)$ некоторое неприводимое подпредставление M полугруппы $End(V_n)$ и возьмем его циклическую оболочку $S=(S, \sigma)$ под действием категории $\mathcal{K}$. Покажем, что S неприводимо. Выберем в $S(V_m)$, где $m > n$, множество L_m всех векторов ℓ, удовлетворяющих условию: $\tau(R)\ell = 0$ для всех $R \in Mor(V_m, V_n)$.

Предположим, что $L_m = S(V_m)$. Но любой элемент $X \in End(V_n)$ представим в виде $X = YZU$, где $U \in Mor(V_n, V_m), Z \in End(V_m), Y \in Mor(V_m, V_n)$.

В силу предположения $\sigma(Y) = 0$, а значит и $\sigma(X) = 0$ для всех $X \in End(V_n)$. Противоречие.

Итак, $L_m \neq S(V_m)$. Выберем какое-нибудь $End(V_m)$ - инвариантное дополнение N к L_m в $S(V_m)$ и возьмем его циклическую оболочку N относительно $\mathcal{K}$. Ясно, что эта циклическая оболочка содержит $M = S(V_n)$, и, тем самым, должна совпадать с S. Итак, $S(V_m) = N$, а значит $L_m = 0$ для всех m. Лемма доказана. $\boxtimes$

Пусть теперь T – представление $\mathcal{K}$. Выберем наименьшее n такое, что $T(V_n) \neq 0$. Пусть S – неприводимое подпредставление в T, причем нам удобно считать, что $S(V_n) \neq 0$ (существование таких подпредставлений вытекает из доказательства леммы). Выберем в $T(V_n)$ инвариантное относительно $End(V_n)$ подпространство $R(V_n)$, дополнительное к $S(V_n)$. Пусть R – циклическая оболочка $R(V_n)$. Ясно, что для любого V_m выполнено $R(V_m) \cap S(V_m) = 0$ (обратное противоречило неприводимости S). Может, однако, оказаться, что $R(V_m) \oplus S(V_m) \neq T(V_m)$. Выберем минимальное k, для которого $R(V_k) \oplus S(V_k) \neq T(V_k)$. Выберем в $T(V_k)$ подпространство $R'(V_k)$, инвариантное относительно $End(V_k)$ и содержащее $R(V_k)$. Возьмем циклическую оболочку R' подпространства $R(V_k)$. Покажем, что для любого α выполнено $R'(V_\alpha) \supset R(V_\alpha)$. Это очевидно для всех $\alpha > k$, так как любой элемент $X \in Mor(V_n, V_\alpha)$ представим в виде $X = YZ$, где $Z \in Mor(V_n, V_k), Y \in Mor(V_k, V_\alpha)$. С другой стороны, рассмотрим факторпредставление $(R + R')/R'$. По построению, $[(R + R')/R'](V_k) = 0$, а значит, $[(R + R')/R'](V_\alpha) = 0$ для всех $\alpha < k$, то есть $R(V_\alpha) = R'(V_\alpha)$ при всех $\alpha < k$.

Теперь мы применим к R' ту же процедуру, что и к R и получим представление R'' и т.д. В итоге мы получим возрастающую цепочку подпраедставлений $R, R', R'', \ldots$. Тогда их объединение T' , по построению и даст представление дополнительное к S .

Далее применим к T' ту же процедуру, что и к T и т.д. В итоге мы разложим T в прямую сумму неприводимых представлений.

<u>19.7 Классификационная теорема для категории</u> GA .

Сначала введем дополнительную терминологию. Пусть ρ - неприводимое представление полугруппы $End^*(V_n)$, $V_n \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, пусть P_n , Q_n те же, что в п.19.5. Мы назовем представление ρ

а) максимальным, если $\rho(P_n)\neq 0$, $\rho(Q_n)\neq 0$

б) операторным, если $\rho(P_n)\neq 0$, $\rho(Q_n)=0$

в) кооператорным, если $\rho(P_n)=0$, $\rho(Q_n)\neq 0$

г) минимальным, если $\rho(P_n)\neq 0$, $\rho(Q_n)\neq 0$

Под категориями $A(\lambda)$ в этом и следующем пункте мы будем понимать лишь те категории, для которых число нулей и единиц в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ бесконечно.

Перейдем к доказательству. Мы уже знаем классификационные теоремы для $A(\lambda)$, а группоид морфизмов категории GA порожден группоидами морфизмов всевозможных категорий $A(\lambda)$.

<u>Лемма 19.5</u>. Пусть ограничение неприводимого представления $T=(T,\tau)$ категории GA на полугруппу $End^*(V_n)$ содержит максимальное представление S полугруппы $End^*(V_n)$ с числовыми отметками

$$(0,\ldots,0,b_1,\ldots,b_s,0,\ldots,0) \qquad (19.1)$$

$b_1\neq 0$, $b_s\neq 0$ (число нулей слева и справа здесь и дальше может быть нулевым). Тогда спектр ограничения GA на всевозможные полугруппы $End^*(V_p)$ содержит в точности следующие представления.

а) Максимальные представления с числовыми отметками вида $(0,\dots,0,b_1,\dots,b_s,0,\dots,0)$; $(b_1,\dots,b_s,0,\dots,0)$; $(0,\dots,0,b_1,\dots,b_s)$

б) Операторные представления с числовыми отметками вида $(0,\dots,0,b_1,\dots,b_{s-1})$; $(b_1,\dots,b_{s-1})$

в) Кооператорные представления с числовыми отметками вида $(b_2,\dots,b_s,0,\dots,0)$; $(b_2,\dots,b_s)$

г) Минимальное представление с отметками $(b_2,\dots,b_{s-1})$ ■

Доказательство. Запишем набор (I9.I) в виде $(a_1,\dots,a_n)$, и посмотрим, куда могут перевести S операторы из $Mor_{A(\mu)}(V_n,V_{n+1})$. Так как классификационная теорема для $A(\mu)$ уже доказана, ответы на подобные вопросы не представляют трудности. Если $\mu_n=0$, то все векторы вида $\tau(P)s$, где $P\in Mor_{A(\mu)}(V_n,V_{n+1})$, а $s\in S$, содержатся в максимальном представлении полугруппы $End^*(V_{n+1})$ с числовыми отметками $(0,a_1,\dots,a_n)$, если же $\mu_n=1$ – то в максимальном представлении с числовыми отметками $(a_1,\dots,a_n,0)$.

Посмотрим далее, куда могут перевести S операторы из $Mor_{A(\mu)}(V_n,V_{n-1})$. Множество всех векторов вида $\tau(P)s$, где $P\in Mor_{A(\mu)}(V_n,V_{n-1})$, $s\in S$ содержится в неприводимом представлении $End^*(V)$ с числовыми отметками $(a_2,\dots,a_n)$ если $\mu_{n-1}=1$ и $(a_1,\dots,a_{n-1})$, если $\mu_{n-1}=0$. Если "срезанная" числовая отметка (a_1 или a_n)равна 0, то это неприводимое представление максимально. Если $\mu_{n-1}=1$, $a_1\neq 0$, то мы получаем кооператорное представление. Если же $\mu_{n-1}=0$, $a_n\neq 0$ – то операторное.

Теперь повторим эту процедуру с одним из четырех полученных представлений и т.д. Таким образом, все представления поименованные выше в пп. а), б), в), г) действительно содержатся в спектре.

Осталось проверить, что спектр не содержит ничего больше. Но прямая сумма всех представлений, полученных многократным повторением изложенной процедуры, по построению, инвариантна относительно всех категорий $A(\lambda)$, что завершает доказательство. $\boxtimes$

Далее нам нужно проверить, что ограничение $T=(T,\tau)$ на $SL(n+1,\mathbb{C})$ является однократной суммой представлений с отметками $a_\mu, a_{\mu+1},\dots,a_\nu$ (см. формулировку теоремы). Фиксируем одно неприводимое подпредставление S группы $SL(n+1,\mathbb{C})$ такого вида. Рассмотрим линейную оболочку R множества всех векторов вида $\tau(P)\,s$ таких, что $s\in S$, $P\in End_{GA}(V_n)$, причем $\dim P=n$.

Проверим, что эта линейная оболочка неприводима. Фиксируем λ и ψ так, что $\lambda_n=0$, $\psi_n=1$. Любой морфизм P указанного вида представим в виде произведения $P=RQ$, где $Q\in Mor_{A(\lambda)}(V_n,V_{n+1})$, $P\in Mor_{A(\psi)}(V_{n+1},V_n)$. Множество всех векторов вида $\tau(Q)\,s$, где $Q\in Mor_{A(\lambda)}(V_n, V_{n+1})$, $s\in S$ порождает неприводимое подпредставление $GL(n+2,\mathbb{C})$ в $T(V_{n+1})$, что, в свою очередь, влечет неприводимость R. Остается провести аналогичную проверку для множества всех векторов вида $\tau(Q)\,s$, где $Q\in End_{GA}(V_n)$, $\dim Q=n+2$, $s\in S$.

Итак, мы выяснили, что спектр ограничения представления категории GA на полугруппы $End^*(V)$ может выглядеть лишь так, как указано в теореме I7.I.

Теперь, наконец, мы можем доказать существование всех представлений, описанных в теореме I7.I. Для этого достаточно рассмотреть всевозможные тензорные степени фундаментального представления категории GA и их ограничения на все подгруппы

$End^*(V)$. Среди этих ограничений содержатся все максимальные представления полугрупп $End^*(V)$. Но это возможно лишь в том случае, когда все допустимые спектры действительно реализуются.

Остается проверить единственность представления с фиксированным спектром. Рассмотрим все представления (T, τ) с отметками $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_s, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим в $V_q \oplus V_{q+1}$ два подпространства P и Q (обозначения из п.19.5). Пусть $\mu_q : V_q \to V_{q+1}, \varphi_q : V_{q+1} \to V_q$ -морфизмы GA с графиком P, а $\nu_q : V_{q+1} \to V_q, \psi_q : V_q \to V_{q+1}$ - морфизмы GA с графиком P. Все эти четыре морфизма коммутируют с действием $SL(q+1, \mathbb{C})$, а значит, $M_q = \tau(\mu_q), N_q = \tau(\nu_q), \Psi_q = \tau(\psi_q), \Phi_q = \tau(\varphi_q)$ являются $SL(q+1, \mathbb{C})$ - сплетающими операторами. Разложим $T(V_j)$ в прямую сумму неприводимых представлений $SL(j+1, \mathbb{C})$: $T(V_j) = \bigoplus_{i=0}^{j-s} T^i(V_j)$, где $T^i(V_j)$ имеет отметки

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ раз}}, b_1, \dots, b_s)$$

Запишем все операторы M_q, N_q, Φ_q, Ψ_q как блочные матрицы. В каждой из этих блочных матриц все ненулевые элементы стоят на одной из диагоналей, а каждый блок $(M_q)_{ij}, (N_q)_{ij}, (\Phi_q)_{ij}, (\Psi_q)_{ij}$ (будучи $SL(n+1, \mathbb{C})$ -сплетающим оператором) определен однозначно с точностью до умножения на константу. Пусть $M'_q, N'_q, \dots$ - другой допустимый набор операторов, пусть

$$(M'_q)_{ii} = m_i^q (M_q)_{ii} \qquad (N'_q)_{ii} = n_i^q (N_q)_{ii}$$

$$(\Phi'_q)_{i,i+1} = f_i^q (\Phi_q)_{i,i+1} \qquad (\Psi'_q)_{i+1,i} = p_i^q (N_q)_{i+1,i}$$

В силу равенств

$$\mu_q \nu_q = 1 \qquad \psi_q \varphi_q = 1$$

$$\mu_{q+1} \varphi_q = \varphi_{q+1} \mu_q \qquad \psi_{q-1} \nu_q = \nu_{q-1} \psi_q$$

числа $m_i^q, n_i^q, f_i^q, p_i^q \in \mathbb{C}^*$ не произвольны. Легко видеть, что они должны иметь вид

$$m_i^q = a_q \, \alpha_{q+1,i} / \alpha_{q,i} \qquad m_i^q = b_q \, \alpha_{q,i} / \alpha_{q+1,i}$$

$$f_i^q = c_q \, \alpha_{q+1,i+1} / \alpha_{q,i} \qquad p_i^q = d_q \, \alpha_{q,i} / \alpha_{q+1,i+1}$$

для некоторых наборов чисел $\alpha_{q,i}, a_q, b_q, c_q, d_q$. Но это означает, что два представления GA, определяемые набором операторов $M_n, \ldots$ и набором операторов $M_n', \ldots$ эквивалентны: они сплетаются оператором, равным скаляру $\alpha_{q,i}$ в каждом пространстве $T^i(V_q)$. Единственность доказана.

<u>19.8. Вполне приводимость в случае</u> GA. Пусть $T = (T, \tau)$ - представление GA.

Разложим сначала T в сумму изотипических компонент. Для этого возьмем неприводимое представление T_α категории GA, разложим каждое $T(V)$ в сумму неприводимых $End^*(V_n)$ - представлений, обозначим через $T_\alpha^0(V_n)$ сумму всех тех максимальных неприводимых $End^*(V_n)$ - подпредставлений в $T(V_n)$, которые входят в $T_\alpha(V_n)$. Обозначим через $\mathcal{D}_\alpha$ циклическую оболочку всех пространств $T_\alpha^0(V_n)$.

Лемма I9.6. $T = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}$

Доказательство. Если бы $\mathcal{D}_{\alpha} \cap \left(\bigoplus_{\alpha' \neq \alpha} \mathcal{D}_{\alpha'} \right)$ было бы ненулевым, то это пересечение было бы подпредставление в $\mathcal{D}_{\alpha}$ имеющим недопустимый при ограничении на группы спектр. Противоречие. Лемма доказана. $\boxtimes$

Рассмотрим теперь изотипическую компоненту $\mathcal{D}_{\alpha}$. Выберем минимальное n такое, что $\mathcal{D}_{\alpha}(V_n) \neq 0$. Тогда $\mathcal{D}_{\alpha}(V_n)$ разлагается в прямую сумму $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ одинаковых минимальных представлений полугруппы $\mathrm{End}^*(V)$. Пусть S_1 – циклическая GA – оболочка A_1, а $\tilde{S}$ - циклическая GA - оболочка $A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots$. Тогда $\mathcal{D}_{\alpha} = S_1 \oplus \tilde{S}$. В самом деле, если пересечение $S_1 \cap \tilde{S}$ - ненулевое, то это пересечение будет подпредставлением в S_1, причем $(S_1 \cap \tilde{S})(V_n) = 0$, а поэтому $S_1 \cap \tilde{S}$ будет иметь недопустимый спектр при ограничении на группы $SL(p+1, \mathbb{C})$. Точно также представление $\mathcal{D}_{\alpha} / (S_1 + \tilde{S})$ должно быть нулевым (а иначе оно имеет недопустимый спектр). Итак, $\mathcal{D}_{\alpha} = S_1 \oplus \tilde{S}$.

Вполне приводимость доказана.