# Глава У. Представления категорий $\mathcal{U}$, $Sp$, $SO^*$.

После того, как в главе I было построено представление Вейля категории $Sp$, естественно задать вопрос о том, как устроены все представления этой категории. Существуют еще две категории - $\mathcal{U}$ и $SO^*$, родственные категории $Sp$. Естественно рассмотреть их вместе.

## §20. Категории $\mathcal{U}$, $Sp$, $SO^*$ и двойственность Хау.

20.I. Категория $\mathcal{U}$. Категория $Sp$ была определена выше (см. §2). Объект категории $\mathcal{U}$ - конечномерное комплексное пространство $V$, снабженное невырожденной эрмитовой формой $\Theta_V$ с индексами инерции $p_V$, $q_V$.

Морфизмом $V \to W$ называется линейное отношение $P: V \rightrightarrows W$, удовлетворяющее условиям

а) $P$ "сжимает " форму $\Theta$, т.е. если $(v,w) \in P$, то $\Theta_V(v,v) \geqslant \Theta_W(w,w)$

б) $P$ имеет максимальную возможную размерность, т.е. $\dim P = p_V + q_W$

в) Если $(0,w) \in P$, то $\Theta_W(w,w) < 0$, если $(v,0) \in P$, то $\Theta_V(v,v) > 0$.

Произведение морфизмов категории $\mathcal{U}$ действительно является морфизмом, см. [55]

Группой автоморфизмов объекта $V$ является, очевидно, группа $\mathcal{U}(p_V, q_V)$. Фиксируем в каждом объекте $V$ разложение $V = V_+ \oplus V_-$, такое, что эрмитова форма $\Theta_V$ положительно определена на $V_+$ и отрицательно определена на $V_-$, причем $V_+$ и $V_-$ ортогональны. Легко видеть, что любой $P\in Mor^+(V,W)$ является графиком оператора $V_-\oplus W_+\to V_+\oplus W_-$, матрицу $S=\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ этого оператора (преобразование Потапова-Гинзбурга) удовлетворяет условиям

I. $\|S\|\leqslant 1$

2. $\|K\|<1$ , $\|N\|<1$ .

Так же, как в §3 можно построить функтор из категории в категорию матричных шаров и обобщенно дробно-линейных отображений. Используя этот функтор, можно построить все голоморфные представления категории $U$ . Мы, однако, пойдем другим путем.

20.2. Категория $SO^*$ . Объект этой категории - кватернионное пространство $V$ ,снабженное невырожденной антиэрмитовой формой $Q_V$:

$$Q_V(v_1,v_2)=-\overline{Q(v_2,v_1)}$$

Пусть $V^{\mathbb{C}}$ - пространство $V$ , рассматриваемое как комплексное. Определим в $V^{\mathbb{C}}$ две комплекснозначные формы - эрмитову форму $\Theta$ и симметричную форму $M$ - из равенства

$$Q_V(v_1,v_2)=i\,\Theta_V(v_1,v_2)+jM(v_1,v_2)$$

Теперь $V^{\mathbb{C}}$ одновременно снабжено структурой объекта категории $U$ и объекта категории $GD$ одновременно. Морфизмом $V\to W$ мы назовем подпространство в $V^{\mathbb{C}}\oplus W^{\mathbb{C}}$ , являющееся морфизмом категорий $U$ и $GD$ одновременно.

Группой автоморфизмов $n$ -мерного объекта категории $SO^*$ является классическая простая вещественная группа $SO^*(2n)$

Далее, фиксируем для любого $V\in Ob(SO^*)$ разложение в ортогональную сумму $V^{\mathbb{C}} = V_+^{\mathbb{C}} \oplus V_-^{\mathbb{C}}$, так, что $V_{\pm}^{\mathbb{C}}$ изотропны относительно формы $M$, а форма $\Theta$ положительно определена на $V_+^{\mathbb{C}}$ и отрицательно определена на $V_-^{\mathbb{C}}$. Теперь мы можем определить преобразование Потапова-Гинзбурга $S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ морфизма $P \in Mor(V, W)$, его матрица удовлетворяет условиям:

1. $\|S\| \leq 1$
2. $\|K\| < 1, \|N\| < 1$
3. $K = -K^t$, $N = -N^t$, $M = L^t$.

Опять-таки, мы можем определить функтор из категории в категорию матричных шаров и дробно-линейных отображений (мы его не будем использовать).

Замечание. Может показаться, что в выборе наших трех категорий $\mathcal{U}$, $Sp$, $SO^*$ есть какой-то произвол. На самом деле это не так. В каком-то смысле $\mathcal{U}$, $Sp$, $SO^*$ единственные в своем роде образования - это категории морфизмов классических комплексных областей (см. также п.22.I - 22.2).

20.3. Унитарные представления. Пусть $P: V \to W$ - морфизм одной из наших категорий. Пусть $P^*$ - ортогональное дополнение к $P$ в $V \oplus W$ относительно эрмитовой формы

$$\Theta_{V\oplus W}((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \Theta_V(v_1, v_2) - \Theta_W(w_1, w_2)$$

Легко видеть, что во всех случаях $P^*$ есть морфизм из $W$ в $V$. Отметим также, что $(PQ)^* = Q^* P^*$.

Представление $T = (T, \tau)$ категории $\mathcal{K} = \mathcal{U}$, $Sp$, $SO^*$ мы назовем унитарным, если пространства $T(V)$ гильбертовы, все операторы $\tau(P)$ ограничены и для любого морфизма $P$ выполнено условие $\tau(P^*) = \tau(P^*)$. Если $P \in Aut(V)$, то это условие влечет унитарность оператора $\tau(P)$.

Заметим, что во всех трех случаях множество $Mor(V,W)$ является областью с непустой внутренностью в некотором комплексном грассманиане. Унитарное представление $T=(T,\tau)$ мы назовем голоморфным, если функция $\tau(P)$ голоморфна внутри $Mor(V,W)$ и слабо непрерывна вплоть до границы.

В каждой из полугрупп $End_{\mathcal{K}}(V)$ мы выделим множество $End^{o}_{\mathcal{K}}(V)$ морфизмов, являющихся графиками операторов, Полугруппы $End^{o}_{\mathcal{K}}(V)$ изучались в [44], там было доказано, что ограничение любого неприводимого представления полугруппы $End^{o}_{\mathcal{K}}(V)$ сжимающими операторами на $Aut_{\mathcal{K}}(V)$ является представлением со старшим весом, обратно любое представление группы $Aut_{\mathcal{K}}(V)$ со старшим весом однозначно продолжается по голоморфности на $End^{o}_{\mathcal{K}}(V)$. Нас теорема Ольшанского([44]) чуть-чуть не устраивает: для нас неприятны слова "сжимающими" операторами

<u>Лемма I9.I</u>. Ограничение любого неприводимого голоморфного унитарного проективного предcтавления полугруппы $End^{o}_{\mathcal{K}}(V)$ на группу $Aut_{\mathcal{K}}(V)$ является неприводимым представлением $Aut_{\mathcal{K}}(V)$ со старшим весом. ■

Доказательство мы отложим до п.20.3.

С другой стороны, полугруппа $End^{o}_{\mathcal{K}}(V)$ плотна в $End_{\mathcal{K}}(V)$, поэтому ограничение неприводимого представления $End_{\mathcal{K}}(V)$ на $End^{o}_{\mathcal{K}}(V)$ неприводимо.

<u>20.4. Минимальные представления категорий</u> $U$, $Sp$, $SO^*$.

Минимальное представление $We_{Sp}$ категории $Sp$ - представление Вейля, хорошо нам знакомое.

Опишем минимальное представление категории $\mathcal{U}$. Для этого мы построим функтор $i_{\mathcal{U}}$ из $\mathcal{U}$ в $Sp$. Объекту категории $\mathcal{U}$ с индексами инерции $p$ $q$ (все такие объекты изоморфны) мы поставим в соответствие $2(p+q)$ -мерный объект категории $Sp$. Отображение морфизмов мы определим на уровне преобразований Потапова-Гинзбурга с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} & K & L & \\ K^t & & & M^t \\ \hline L^t & & & N^t \\ & M & N & \end{array}\right)$$

Минимальное мпредставление $We_{\mathcal{U}}$ категории $\mathcal{U}$ - это композиция функтора $i_{\mathcal{U}}$ и представления Вейля.

Далее определим функтор $i_{SO^*}$ из $SO^*$ в $Sp$. Если $V \in Ob(SO^*)$, то пространство $V^{\mathbb{C}}$, снабженное формой $\Theta_V$ - объект $\mathcal{U}$ и мы, таким образом, получаем функтор $j: SO^* \to \mathcal{U}$. Функтор $i_{SO^*}$ - это композиция $i_{SO^*} \circ j$, а минимальное представление $We_{SO^*}$ категории $SO^*$ - это композиция функтора $i_{SO^*}$ и представления Вейля.

Позже мы увидим, что все унитарные голоморфные представления категорий $\mathcal{U}$, $Sp$, $SO^*$ реализуются в тензорах над минимальными представлениями. Пока же мы лишь заметим, что $n$ -ная степень минимальных представлений могут быть описаны на другом языке. Для этого заметим, что если $V$ объект категории $\mathcal{K} = \mathcal{U}$, $Sp$, $SO^*$, то $n$ -кратная сумма $V \oplus \ldots \oplus V = V^{(n)}$ тоже естественным образои снабжена структурой объекта категории $\mathcal{K}$ и мы таким образом получаем естественный функтор $S_n : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Легко видеть, что

$$We_{\mathcal{K}}^{\otimes n} \simeq We_{\mathcal{K}} \circ S_n$$

Наше изучение тензорных степеней $We_{\mathcal{K}}^{\otimes n}$ будет основано на том, что в пространстве $We_{\mathcal{K}}^{\otimes n}$ действует большая категория: в обозначениях следующего пункта - это категории $Sp \times O(n)$, $U \times U(n)$, $SO^{\times} \times Sp(n)$.

<u>20.4. Произведение группы и категории</u>. Пусть $\mathcal{K}$ - категория, $G$ - группа. Через $\mathcal{K} \times G$ мы обозначим категорию, объекты которой совпадают с объектами категории $\mathcal{K}$, а морфизмы $V \to W$ - это пары $(P, g)$, где $P \in Mor(V,W)$, а $g \in G$. Произведение морфизмов определяется покомпонентно.

Если у нас есть (проективное) представление $\rho$ группы $G$ в пространстве $R$ и представление $T = (T, \tau)$ категории $\mathcal{K}$, то определено (проективное) представление $T \otimes \rho$ категории $\mathcal{K} \times G$, а именно $(T \otimes \rho)(V) = T(V) \otimes R$, $(\tau \otimes \rho)(P, g) = \tau(P) \otimes \rho(G)$.

Если $G$ - компактная группа, а $H$ - не очень патологическая группа (например, группа типа $\mathrm{I}$), то, как известно, (см. [15], 13.1.8) любое неприводимое унитарное представление группы $H \times G$ является тензорным произведением представления группы $H$ и представления группы $G$. Более того, любое представление $T$ группы $H \times G$ представимо в виде

$$T \simeq \bigoplus_{R \in \widehat{G}} [\mathrm{Hom}_G(R, T) \otimes R] \qquad (20.1)$$

где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям группы $G$. (Если $A \in \mathrm{Hom}_G(R, T)$, $r \in R$, то вектору $A \otimes r$ из правой части соответствует вектор

$A\tau\in T$ , это и задает изоморфизм (20.I)).

Мы имеем дело с проективными представлениями, поэтому при обобщении формулы (20.I) на категории $\mathcal{K}=U$ , $Sp$ , $SO^*$ требует некоторой осторожности. Пусть $\mathcal{K}^{\sim}$ - какое-нибудь центральное расширение одной из перечисленных категорий. Пусть $T$ - голоморфное линейное (не проективное) представление категории $\mathcal{K}^{\sim}\times G$ , где $G$ - компактная группа. Тогда

$$T=\bigoplus_{R\in\hat{G}}\left[\mathrm{Hom}_G(R,T)\otimes R\right] \qquad (20.2)$$

Переход от групп к категориям здесь происходит автоматически.

Замечание. Сформулируем аккуратно определение представления $\mathrm{Hom}_G(R,T)$ , где $T=(T,\tau)$ - представление $\mathcal{K}\times G$ . Пусть $V\in Ob(\mathcal{K})$ . Поставим ему в соответствие линейное пространство $\mathrm{Hom}_G(R,T(V))$. Если $P\in Mor_{\mathcal{K}}(V,W)$ , а $f\in\mathrm{Hom}_G(R,T)$ , то $\tau(P)f\in\mathrm{Hom}_G(R,T(W))$. Искомый функтор построен.

20.5. Теорема двойственности для $Sp$ . Рассмотрим построенный в п.20.3. функтор $S_n: Sp\to Sp$ . На уровне преобразований Потапова-Гинзбурга он задается формулой

$$S:\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}K\otimes 1_n & L\otimes 1_n\\ L^t\otimes 1_n & M\otimes 1_n\end{pmatrix}$$

где $1_n$ - единичная матрица размера $n\times n$ . Его можно продолжить до функтора $Sp\times O(n,\mathbb{R})\mapsto Sp$ , положив

$$\tilde{S}:\left(\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix},g\right)\mapsto\begin{pmatrix}K\otimes 1_n & L\otimes g\\ L^t\otimes g^t & M\otimes 1_n\end{pmatrix}$$

Таким образом композиция $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ задает проективное представление категории $Sp \times O(n, \mathbb{R})$. Из явной формулы для коцикла (см. теорему I.I) вытекает, что

$$(We_{Sp} \circ \tilde{S}_n(P, 1))(We_{Sp} \circ \tilde{S}_n(e_V, g)) =$$
$$= (We_{Sp} \circ \tilde{S}_n(e_W, g))(We_{Sp} \circ \tilde{S}_n(P, 1))$$

где $P \in Mor_{Sp}(V, W)$, $g \in O(n, \mathbb{R})$, $e_V$, $e_W$ - единицы полугрупп $End_{Sp}(V)$, $End_{Sp}(W)$. Это означает, что $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ - не просто проективное представление категории $Sp \times O(n, \mathbb{R})$, но линейное представление некоторой категории $Sp^{\sim} \times O(n, \mathbb{R})$, где $Sp^{\sim}$ - центральное расширение $Sp$.

<u>Теорема 20.I.</u> а) Разложение $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ в сумму неприводимых представлений имеет вид

$$\bigoplus_{\lambda \in \widehat{O(n, \mathbb{R})}} (T_\lambda^n \otimes R_\lambda)$$

где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям $R_\lambda$ группы $O(n, \mathbb{R})$, а $T_\lambda^n$ - неприводимые ненулевые представления $Sp$. Если $n \neq n'$ или $\lambda \neq \lambda'$, то $T_\lambda^n$ и $T_{\lambda'}^{n'}$ - неэквивалентны.

б) Любое неприводимое голоморфное унитарное представление категории $Sp$ имеет вид $T_\lambda^n$ при некотором $n = 0, 1, 2, \ldots$ и при некотором $\lambda \in \widehat{O(n, \mathbb{R})}$. ■

<u>20.6. Теорема двойственности для $\mathcal{U}$</u>. Рассмотрим функтор $i_{\mathcal{U}} \circ S_n : \mathcal{U} \to Sp$. На уровне преобразования

Потапова-Гинзбурга этот функтор задается формулой

$$\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} & K\otimes 1_n & L\otimes 1_n & \\ K^t\otimes 1_n & & & M^t\otimes 1_n \\ \hline L^t\otimes 1_n & & & N^t\otimes 1_n \\ & M\otimes 1_n & N\otimes 1_n & \end{array}\right)$$

Этот функтор продолжается до функтора $\tilde{S}_n : U \times U(n)$

а именно

$$\tilde{S}_n : \left( \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}, g \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} & K\otimes 1_n & L\otimes g & \\ K^t\otimes 1_n & & & M^t\otimes \bar{g} \\ \hline L^t\otimes \bar{g} & & & N^t\otimes 1_n \\ & M\otimes g & N\otimes 1_n & \end{array}\right)$$

где $g \in U(n)$ - унитарная матрица.

Теорема 20.2. а) Разложение представления $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ категории $U \times U(n)$ в сумму неприводимых представлений имеет вид

$$\bigoplus_{\lambda \in \widehat{U(n)}} \left( T_\lambda^n \otimes R_\lambda \right)$$

где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям $R_\lambda$ группы $U(n)$, а $T_\lambda^n$ - ненулевые неприводимые представления категории $U$. Если $n \neq n'$ или $\lambda \neq \lambda'$, то $T_\lambda^n$ и $T_{\lambda'}^{n'}$ не эквивалентны.

б) Любое неприводимое голоморфное представление категории $\mathcal{U}$ имеет вид $T_\lambda^n$ при некотором $n = 0, 1, 2, \dots$ , $\lambda \in \widehat{\mathcal{U}}(n)$ . ■

<u>20.7. Террема двойственности для</u> $SO^*$ . Сейчас мы покажем, что в пространстве представления $We_{SO^*}^{\otimes n}$ действует категория $SO^* \times Sp(n)$ . Рассмотрим функтор

$$\tilde{S}_n : SO^* \times Sp(n) \to Sp$$

Морфизмы категории $SO^*$ он преобразует по формуле.

$$\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} & & K & & \\ & + & & K & \\ -K & & & & \ddots \\ & -K & & & \\ & & \ddots & & \end{matrix} & \begin{matrix} L & & & & \\ & L & & & \\ & & \ddots & + & \\ & & & L & \\ & & & & L \; \ddots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} L^t & & & & \\ & L^t & & & \\ & & \ddots & + & \\ & & & L^t & \\ & & & & \ddots \end{matrix} & \begin{matrix} & & & -N & \\ & & & & -N \\ & & & & \ddots \\ N & & + & & \\ & N & & & \\ & & \ddots & & \end{matrix} \end{array}\right)$$

где каждая из диагональных блочных матриц имеет размеры $n \times n$ . Пусть $g$ -унитарная матрица размера $2n \times 2n$ , сохраняющая кососимметричную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , множество всех таких матриц образует компактную классическую группу $Sp(n) \simeq U(n, \mathbb{H})$ . Рассмотрим матрицу $g^{(K)}$ - это блочная матрица размера $2n \times 2n$ с блоками размера $K \times K$ , причем $ij$ -ый блок - это скалярная матрица $g_{ij} \cdot 1_K$ . Пусть группа $Sp(n)$ действует в $\tilde{S}_n(V)$ , где $V$ - $K$ -мерный объект $SO^*$ с помощью преобразований вида

$$g \mapsto \left( \begin{array}{c|c} 0 & g^{(k)} \\ \hline (g^{(k)})^t & 0 \end{array} \right), \quad g \in Sp(2n)$$

Функтор $\tilde{S}_n$ из категории $SO^* \times Sp(n)$ в категорию $Sp$ определен.

Теорема 20.3. а) Представление $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ категории $SO^* \times Sp(n)$ разлагается в прямую сумму вида

$$\bigoplus_{\lambda \in \widehat{Sp(n)}} \left( T^n_\lambda \otimes R_\lambda \right)$$

. где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям $R_\lambda$ группы $Sp(n)$ , $T^n_\lambda$ - неприводимые ненулевые представления категории $SO^*$ , причем, если $n \neq n'$ или $\lambda \neq \lambda'$ , то .

б) Любое унитарное голоморфное представление категории $SO^*$ имеет вид $T^n_\lambda$ . ■

§21. Доказательство теорем двойственности.

Доказательства очень просты и основаны на трех типах аргументов:

I. Классическая двойственность Хау.

2. Рассужденя типа п.I9.I–I9.2

3. Классификация представлений со старшим весом ([65]).

21.I. Двойственность Хау. Рассмотрим канонические вложения $SU(p,q) \to Sp(2(p+q), \mathbb{R})$ (группа $SU(p,q)$

сохраняет эрмитову форму, а значит и ее мнимую часть - симплектическую форму) и $SO^*(2\ell)\to U(\ell,\ell)\to Sp(4\ell,\mathbb{R})$ (группа $SO^*(2\ell)$ сохраняет две формы, из них одна эрмитова). Представлением Вейля $We_H$ групп $SU(p,q)$ и $SO^*(2\ell)$ мы назовем ограничение представления Вейля группы $Sp(2(p+q))$ (или соответственно $Sp(4\ell))$ на $SU(p,q)$ или $SO^*(2\ell)$. Все эти представления, по построению, проективны. Все они, однако, линеаризуются на двулистной накрывающей $\tilde{H}$ группы $H=$ $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SU(p,q)$, $SO^*(2\ell)$. Теорема двойственности Хау (идея принадлежит Хау [75], в окончательном виде она содержится в объединении статей [75], [81], [78], [65]) состоит в следующем:

Пусть $H$ и $G(n)$ - одна из следующих пар групп

$$H=Sp(2k,\mathbb{R}) \qquad G(n)=O(n,\mathbb{R})$$

$$H=SU(p,q) \qquad G(n)=U(n)$$

$$H=SO^*(2k) \qquad G(n)=Sp(n)$$

Тогда

а) Рассмотрим $n$-ную тензорную степень представления $We_H$. Это представление канонически продолжается до представления группы $H\times G(n)$ (эти продолжения нами построены в §20), полученное представление $H\times G(n)$ разлагается в сумму вида

$$\bigoplus_{\lambda\in A(n,H)\subset\widehat{G(n)}} (T_\lambda^n\otimes R_\lambda)$$

где суммирование ведется по некоторому подмножеству в множестве всех неприводимых представлений $G(n)$, а $T_\lambda^n$ - неприводимые представления $H$ со старшим весом. Если $n \neq n'$, или $\lambda \neq \lambda'$, то представления $T^n_\lambda$ и $T^{n'}_{\lambda'}$ различны.

б) Любое неприводимое линейное (!) представление группы $\tilde{H}$ со старшим весом имеет вид $T^n_\lambda$.

в) Известен явный вид соответствия $(n,\lambda) \longleftrightarrow T^n_\lambda$ (в случае $H = Sp(2k,\mathbb{R})$, $U(p,q)$, см. [81], в случае $SO^*(2k)$ он, кажется, нигде явно не написан).

21.2. Доказательство теорем 20.1 а) – 20.3 а). Эти утверждения почти мгновенно следуют из теоремы двойственности Хау. Нужно использовать лишь два дополнительных соображения.

а) Если ограничение представления $T^n_\lambda$ на все группы $\tilde{H}$ ($H$ пробегает серии $Sp(2k,\mathbb{R})$, или $U(p,q)$ или $SO^*(2k)$) неприводимо, то $H$ неприводимо (см. п.17.0).

б) Нужно, все-таки, проверить, что суммирование ведется по всем $\lambda \in \tilde{G}(n)$, а не по подмножеству в $\tilde{G}(n)$, как в теореме Хау.

Для этого посмотрим, как группа $G(n)$ действует в пространстве представления $We_H^{\otimes n}$. Это представление равно

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k\Big(\bigoplus_{j=1}^{m} \rho_0\Big)$$

где $\rho_0$ – тождественное представление в случае $G(n) = O(n,\mathbb{R})$, в случае $U(n)$ представление $\rho_0 = \varkappa_0 \oplus \overline{\varkappa_0}$, где $\varkappa_0$ – тождественное представление $U(n)$, наконец, в случае $Sp(n)$ представление $\rho_l$ – это $2n$-мерное представление $Sp(2n)$. Число $m$ равно $l$ в случае $Sp(2l,\mathbb{R})$, $p+q$ в случае $SU(p+q)$, $2l$ в случае $SO^*(2l)$. Через $S^k$, как обычно обозначены симметрические степени. Но $\rho_0^{\otimes m}$ входит в качестве подпредставления в $S^m\Big(\bigoplus_{j=1}^{m} \rho_0\Big)$, а любое представление $G(n)$ содержится в тензорных степенях $\rho_0^{\otimes m}$, см. [22] .17.2.

21.3. Представления со старшим весом. Пусть $\rho$ - унитарное представление простой линейной группы Ли $G$, пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли группы $G$. Представление $\rho$ называется представлением со старшим весом, если существует вектор $v$ в пространстве представления и борелевская подалгебра $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ такие, что вектор $v$ является собственным относительно подалгебры $\mathfrak{b}$.

Как показал Хариш-Чандра, группа $G$ имеет бесконечномерные представления со старшим весом в том и только том случае, когда максимальная компактная подгруппа $K \subset G$ имеет одномерный центр. Это выполнено в случае, когда $G = SU(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$, $SO(n,2)$, $E\,\mathrm{III}$, $E\,\mathrm{IV}$. Нас интересуют представления со старшим весом универсальных накрывающих групп $SU(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$. Такие представления со с старшим весом определяются доминантным весом универсальной накрывающей группы $K$ (подробности см., например, [81], [65] ).

Доказательство леммы 20.I. Мы разберем случай $\mathcal{K} = Sp$, два других случая разбираются точно также. Пусть $V_n$ - объект $Sp$ размерности $2n$ и пусть $\Gamma_n = \mathrm{End}^0_{Sp}(V_n)$. Полугруппа $\Gamma_n$ реализуется как полугруппа блочных комплексных матриц размера $(n+n)\times(n+n)$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и "сжимающих" эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Компактная подгруппа $K\subset Sp(2n,\mathbb{R})$ изоморфна $U(n)$ и состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} g & \\ & \bar g\end{pmatrix}$, где $g\in U(n)$.

Ее центр состоит из матриц вида

$$a_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda\cdot 1_n & \\ & \lambda^{-1}\cdot 1_n\end{pmatrix} \qquad (21.1)$$

где $|\lambda|=1$. Рассмотрим также полугруппу $A_{\mathbb{C}}\subset\Gamma$, состоящую из всех матриц вида (2I.I) с $\lambda$, удовлетворяющими условию $0<|\lambda|\leq 1$.

Итак, пусть $\rho$ - неприводимое унитарное голоморфное проективное представление $\Gamma_n$. Ограничим его на $Sp(2n,\mathbb{R})$. Из соображений голоморфности ограничение неприводимо. Известно, что все проективные представления полупростой группы линеаризуются на ее универсальной накрывающей (см.[59]). Мы обозначим эту накрывающую через $\widetilde{G}_n$. Прообраз $\widetilde{A}$ группы $A$ в $\widetilde{G}_n$ изоморфен аддитивной группе $\mathbb{R}$ (см.[81]), в частности $\widetilde{A}$ - по-прежнему абелева группа, и ограничение $\rho$ на $\widetilde{A}$ разлагается в прямую сумму одномерных представлений вида

$$Q_s:\lambda\mapsto e^{-s\ln\lambda}, \quad s\in\mathbb{R}$$

Полезно иметь в виду, что функция $\ln\lambda$ однозначна на $\widetilde{A}$. Но отсюда следует, что ограничение $\rho$ на $A_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму одномерных представлений вида

$$Q_s:\lambda\mapsto e^{-s\ln\lambda}$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя матрица оператора $\rho(a_\lambda)$ имеет спектр $e^{s_j\ln\lambda}$, где $s_j$ - набор вещественных чисел. Нам нужно, чтобы матрица $\rho(a_\lambda)$ была ограниченной, т.е. нужно, чтобы числа $s_j$ были ограничены сверху. Но все разности $s_\alpha - s_j$ должны быть целыми (в силу неприводимости $\rho$, элементы центра $Sp(2n,\mathbb{R})$ действуют скалярными операторами, а этот скаляр равен $e^{2\pi i s_j}$). Поэтому существует наибольшее возможное $s$. В соответствующем собственном пространстве $T_s$ действует группа $SU(n)$ (так как $A$ в $T_s$ - центр $U(n)$). Пусть $v$ - какой-нибудь старший вектор. Он старший, поэтому он аннулируется всеми повышающими операторами, соответствующими компактным положительным корням алгебры $sp(2n,\mathbb{R})$. Но $s$ - максимально, а поэтому $v$ аннулируется и всеми операторами, соответствующими некомпактным положительным корням. Итак, $v$ - старший вектор, что и требовалось доказать. $\boxtimes$

<u>21.4. Классификация представлений со старшим веосм.</u> Эта классификация потребовала усилий не одного десятка математиков. Последние пробелы были заделаны в работе [65] (В содержательном отношении основные шаги - это двойственность Хау и формула Янцена для определителей, обббщающая формулу Шаповалова на случай модулей, индуцированных с параболических подгрупп. Существует также альтернативный подход, основанный на базисах Гельфанда-Цетлина, но он был аккуратно реализован лишь для $SU(p,q)$ см.[42])

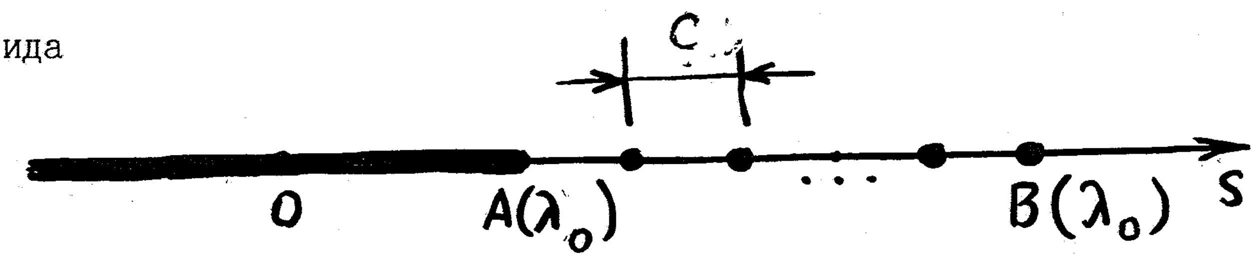
Все, не обязательно унитаризуемые, неприводимые представления со старшим весом нумеруются доминантными весами $\lambda$ универсальной накрывающей группы $K$. Переберем отдельно интересующие нас случаи.

а) Случай $Sp(2n,\mathbb{R})$, $K=U(n)$, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_j-\lambda_i$ при $j>i$ - неотрицательные целые числа. Обозначим через $\zeta$ сигнатуру $(1,1,\dots,1)$.

б) Случай $SU(p,q)$, $K=S(U(p)\times U(q))$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p,\lambda_{p+1},\dots,\lambda_q)$, где $\lambda_j-\lambda_i$ при $j>i$ – неотрицательные целые числа, в случае, если одновременно $i,j\leq p$ или одновременно $i,j>p$. (Прибавление одинаковых констант сразу ко всем $\lambda_j$, по определению, не меняет сигнатуру). Обозначим через $\zeta$ сигнатуру ($q/n,\dots,q/n$, $-p/n,\dots,-p/n$) с $p$ экземплярами $q/n$ и с $q$ экземплярами $-p/n$ $(n=p+q)$.

в) Случай $SO^*(2n)$, $K=U(n)$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, где $\lambda_j-\lambda_i$ при $j>i$ – неотрицательные целые числа. Пусть $\zeta=\frac{1}{2}(1,1,\dots,1)$.

Во всех случаях нас интересуют лишь вещественные сигнатуры (потому что лишь они могут отвечать унитарным представлениям). Мы видим, что множество всех возможных вещественных сигнатур распадается на прямые вида $\lambda_0+s\zeta$, $s\in\mathbb{R}$. Унитаризуемые представления на каждой такой прямой образуют множество вида




т.е. замкнутую полупрямую от $-\infty$ до $A(\lambda_0)$ ("непрерывная серия") и конечный дискретный набор точек, идущих через равные промежутки $c$ от $A(\lambda_0)$ до $B(\lambda_0)$ ("особые представления")

Замечание. Следуя традиции (см. [65]) мы нормируем $\lambda_0$ так чтобы $0$ был предельной точкой дискретной серии. При всех $s<A(\lambda_0)$ представления невырожденны, т.е. совпадают с обобщенными модулями Верма, индуцированными с конечномерного представления параболической подалгебры. ●

Итак, для каждой серии мы должны указать нормировку $\lambda_0$, точки $A(\lambda_0)$, $B(\lambda_0)$ и шаг $c$.

а) $Sp(2n,\mathbb{R})$

Нормировка: $\lambda_1=-n$. Шаг: $c=1/2$. Пусть $\lambda=(a,\ldots,a,b,\ldots,b,d,\ldots)$, где $a\neq b\neq d$, причем $a$ встречается $q+1$ раз, а $b$ встречается $r-q+1$ раз. Тогда $A(\lambda_0)=\frac{1}{2}(r+1)$ ; $B(\lambda_0)=\frac{1}{2}(q+r)$

б) $SU(p,q)$

Нормировка: $\lambda_1-\lambda_{p+q}+p+q-1=0$. Шаг $c=1$. Пусть $a$ - число тех $\lambda_i$ $(i\leq p)$, которые равны $\lambda_1$. Пусть $b$ - число тех $\lambda_j$ $(j>p)$, которые равны $\lambda_{p+q}$. Тогда $A(\lambda_0)=max(a,b)$, а $B(\lambda_0)=a+b-1$.

в) $SO^*(2n)$

Нормировка: $\lambda_1+\lambda_2=-2n+3$. Шаг $c=2$. Далее различаются два случая : I) $\lambda_1\neq\lambda_2$. Пусть $q$ - число $\lambda_j$, равных $\lambda_2$. Тогда $A(\lambda_0)=B(\lambda_0)=q$. 2) $\lambda_1=\lambda_2$. Пусть $p$ - число $\lambda_j$, равных $\lambda_1$. Тогда $A(\lambda_0)=p-1$, если $p$ четно, и $A(\lambda_0)=p$, если $p$ - нечетно. Наконец, $B(\lambda_0)=2p-3$.

Важно заметить, что представление с сигнатурой $\lambda$ линеаризуется на двулистной накрывающей группы $G=Sp(2n,\mathbb{R})$, $SU(p,q)$, $SO^*(2n)$ лишь в том случае, когда $\lambda=\lambda_0+cn\zeta$, где $n\in\mathbb{Z}$.

21.5. Отсев лишних представлений.

Лемма 21.1. Пусть $\rho$ -проективное унитарное представление группы $G=Sp(2n,\mathbb{R})$, $SU(p,q)$, $SO^*(2n)$ со старшим весом, которое не линеаризуется на двулистной накрывающей группы $G$. Тогда существуют числа $N>n$ (в случае

$G = Sp(2n,\mathbb{R})$ , $SO^*(2n)$ ) или числа $P>p$ , $Q>q$ (в случае $SU(p,q)$ такие, что $\rho$ не может входить в ограничение проективного унитарного представления со старшим весом группы $G$, равной соответственно $Sp(2N,\mathbb{R})$ , $SO^*(2N)$ , $SU(P,Q)$ .)

Доказательство. Начнем со случая $Sp(2n,\mathbb{R})$ . Пусть $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ - старший вес некоторого унитарного представления. Все остальные веса $\rho$ получаются из $\lambda$ последовательными прибавлениями сигнатур вида $(\dots,0,1,-1,0,\dots)$ и $(\dots,0,-1,-1,0,\dots)$ (так как $\rho$, как $Sp(2n,\mathbb{R})$ - модуль является фактормодулем Верма). Рассмотрим ограничение нашего представления на подгруппу $A_p$ всех матриц вида

$$q_\mu = \begin{pmatrix} e^{i\mu}\cdot 1_p & & & \\ & 1_{n-p} & & \\ & & e^{-i\mu}\cdot 1_p & \\ & & & 1_{n-p} \end{pmatrix}$$

где $\mu\in\mathbb{R}$ . Это ограничение является прямой суммой одномерных представлений вида $\sigma_t : q_\mu \mapsto e^{it\mu}$ , где $t$ пробегает множество $t_0=\lambda_1+\dots+\lambda_p$ , $t_0-1$, $t_0-2,\dots$

Наибольшее возможное значение $t_0$ по всем представлениям непрерывной серии равно $-np+\frac{1}{2}np=-\frac{1}{2}np$ .

Фиксируем $p$ и устремим $n$ к бесконечности. Тогда $t_0\to-\infty$. Теперь утверждение очевидно.

Случай $SO^*(2n)$ . Снова фиксируем в компактной подгруппе $K=U(n)$ подгруппу $A_p$ всех матриц вида

$\begin{pmatrix} \mu\cdot 1_p & \\ & 1_{n-p} \end{pmatrix}$. Наибольшее возможное значение $t_0$ равно $-p(n+3/2)+\frac{1}{2}np=-\frac{1}{2}p(n+3)$ что тоже стремится к $-\infty$ при $n\to\infty$.

Остался случай $SU(p,q)$. Фиксируем в группе $SU(p,q)$ подгруппу $A_k$, состоящую из всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \mu\cdot 1_k & & & \\ & 1_{p-k} & & \\ \hline & & \bar{\mu}\cdot 1_k & \\ & & & 1_{q-k} \end{array}\right)$$

(мы считаем, что $SU(p,q)$ сохраняет стандартную индефинитную эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$). Наибольшое возможное значение $t_0$ по всем унитарным представлениям $SU(p,q)$ со старшим весом равно $-k(p+q-1)+max(p,q)k$. Если мы фиксируем $k$, а $p$ и $q$ одновременно устремим к $\infty$, то $t_0$ будет стремиться к $-\infty$. $\square$

21.6. Доказательство теорем 20.1.б - 20.3.б. Для доказательства подобных утверждений у нас есть общая схема, см. пп.19.1 - 19.2. Сначала нам нужно указать морфизмы $\mu_j$ и $\nu_j$. Мы напишем явные формулы для их преобразований Потапова-Гинзбурга.

В случае категорий $Sp$ и $SO^*$ преобразования Потапова - Гинзбурга для $\mu_j$ равно.

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

а $\nu_j = \mu_j^*$ .

В случае категории $\mathcal{V}$ мы обозначим через $V_{p,q}$ объект с с индексами инерции . Построим морфизмы $\mu^1_{p,q} : V_{p,q} \to V_{p+1,q}$ и $\mu^2_{p,q} : V_{p,q} \to$ $\to V_{p,q+1}$ . Их преобразования Потапова-Гинзбурга суть

$$\left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 \end{matrix} & \end{array}\right)$$

Положим $\nu^j_{p,q} = (\mu^j_{p,q})^*$ .

Далее, для определенности, мы можем говорить про категорию $\mathcal{K} = Sp(2n, \mathbb{R})$ . Пусть $T = (T, \tau)$ - ее неприводимое представление. Стандартным образом показываем, что ограничение $T$ на $Sp(2n, \mathbb{R})$ является подпредставлением в ограничении $T$ на $Sp(2n+2, \mathbb{R})$ . Отсюда и из леммы 2I.I следует, что ограничение $T$ на $Sp(2n, \mathbb{R})$ линеаризуется на двулистной накрывающей $Sp(2n, \mathbb{R})$ . Теперь мы, наконец, можем дословно повторить рассуждения п.I9.2 с одной лингвистической поправкой: вместо того, чтобы говорить "представления нулевые (ненулевые) $End(V)\setminus Aut(V)$ " нужно говорить "представления нулевые (ненулевые) на $End(V)\setminus End^{\circ}(V)$".

## §22. Обобщенные дробно-линейные отображения как морфизмы симметрических пространств.

В этом параграфе речь пойдет о симметрических пространствах серии $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$ . Эти результаты, однако, легко переносятся, по-существу, на все серии римановых некомпактных пространств, связанных с классическими группами: $U(p,q)/U(p)\times U(q)$, $SO^{*}(2n)/U(n)$ (эрмитов случай), $GL(n,\mathbb{R})/O(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})/U(n)$, $GL(n,\mathbb{H})/Sp(n)$, $O(p,q)/O(p)\times O(q)$, $Sp(p,q)/Sp(p)\times Sp(q)$, $O(n,\mathbb{C})/O(n,\mathbb{R})$, $Sp(2n,\mathbb{C})/Sp(n)$ (неэрмитов случай). Возможность обобщения связана с тем, что любое из перечисленных пространств может быть реализовано как матричный шар, т.е. как множество матриц (вещественных, комплексных или кватернионных) фиксированного размера с нормой $<1$ , удовлетворяющих некоторому дополнительному условию (симметричность, кососимметричность, эрмитовость, антиэрмитовость, дополнительное условие может и отсутствовать)

22.I. Пространства $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$ . В §3 мы встретились с двумя реализациями:

I) $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$ реализуется как множество $Z_n$ комплексных симметрических матриц размера $n\times n$ с нормой $<1$ .

2) Пусть $V_{\mathbb{R}} \in Ob(Sp)$ и $V$ - его комплексификация, снабженная (см. §2) кососимметричной билинейной формой $\Lambda$ и эрмитовой формой $\Theta$. Рассмотрим в лагранжевом грассманиане область $\Omega$, состоящую из всех подпространств, на которых форма $\Theta$ отрицательно определена. Как однородное комплексное $Sp(2n,\mathbb{R})$ - пространство область $\Omega$ изоморфна $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$.

Переход из одной модели в другую очень прост: пусть $T \in \mathcal{Z}_n$. Тогда ей можно поставить в соответствие график $\gamma(T)$ оператора $V_- \to V_+$ с матрицей $T$.

Симметрические пространства обычно определяются через риманову метрику и симметрии. Обобщенно дробно-линейные отображения "не уважают" симметрии, они впрочем, "сжимают" риманову метрику (см §3); но это не очень интересно, потому что отображений, "сжимающих" риманову метрику очень много. Геометрия симметрических пространств, однако, несравненно богаче римановой метрики и симметрии. Среди геометрических структур на симметрических пространствах мы упомянем сложное расстояние (это, безусловно, наиболее важная структура, она является аналогом углов между подпространствами), проективную стуктуру (см. [63]), стуктуру "соседства" ([16]) (или целое расстояние, см. [90]), структуру инцидентности в грассманиане, обобщенно конформную структуру ([69]).

22.2. Сложное расстояние. Мы уже определяли (§3) сложное расстояние между точками $T_1$, $T_2$ как набор собственных чисел матрицы

$$(1-T_1^*T_1)^{-\frac{1}{2}}(1-T_1^*T_2)(1-T_2^*T_2)^{-1}(1-T_2^*T_1)(1-T_1^*T_1)^{-\frac{1}{2}}$$

все эти числа $\geq 1$ , мы будем считать, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ . Ясно, что эти же числа являются сингулярными числами матрицы.

$$(1 - T_1^* T_1)^{-\frac{1}{2}} (1 - T_1^* T_2)(1 - T_2^* T_2)^{-1/2} \qquad (22.1)$$

Далее заметим, что отображение

$$R_{T_j} : x \mapsto ((1 - T_j^* T_j)^{-1/2} x, T_j (1 - T_j^* T_j)^{-1/2} x)$$

из $V_-$ в $V = V_- \oplus V_+$ переводит $V_-$ в $\gamma(T_j)$ и является унитарным, как отображение $V_- \to \gamma(T_j)$ . Но матрица полуторалинейной формы $-\Theta(R_{T_1} x, R_{T_2} y)$ на $V_-$ совпадает с матрицей (22.I). Таким образом мы получаем еще одно описание сложного расстояния. Выберем в $\gamma(T_1)$ ортонормальный базис $e_i$, а в $\gamma(T_2)$ - ортонормальный базис $f_j$ . Тогда сложное расстояние - это сингулярные числа матрицы с матричными элементами $\Theta(e_i, f_j)$ . Иначе говоря, это сингулярные числа полуторалинейной формы $\Theta : \gamma(T_1) \times \gamma(T_2) \to \mathbb{C}$

Вспомним об экстремальных свойствах сингулярных чисел (см. [28] ). Рассмотрим $k$-мерные подпространства $L_1 \subset \gamma(T_1)$, $L_2 \subset \gamma(T_2)$ и пусть $\Theta_{L_1, L_2}$ - эрмитова форма $\Theta$ , рассматриваемая как полуторалинейное отображение $L_1 \times L_2 \to \mathbb{C}$ . Тогда

$$\lambda_k = \min_{\substack{L_1 \subset \gamma(T_1) \\ L_2 \subset \gamma(T_2)}} \Big[ \max_{\substack{h_1 \in L_1, h_2 \in L_2 \\ \Theta(h_1, h_1) = \\ = \Theta(h_2, h_2) = 1}} |\Theta(h_1, h_2)| \Big] \qquad (22.2)$$

## 22.3. Поведение сложного расстояния при обобщенно дробно-линейном отображении

Теорема 22.I. Пусть $P \in Mor_{Sp}(V, W)$, $\dim V = 2n$, $\dim W = 2m$. Пусть $\zeta(P)$ соответствующее обобщенно дробно-линейное отображение $Z_n \to Z_m$. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$ - сложное расстояние между $T_1$ и $T_2$, а $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots$ - сложное расстояние между $\zeta(P)T_1$ и $\zeta(P)T_2$. Тогда $\lambda_1 \geqslant \mu_1$, $\lambda_2 \geqslant \mu_2, \dots$ .

Доказательство. Пусть $\lambda_k \neq 1$. Прежде всего заметим что минимакс в выражении (22.2) можно брать лишь по таким векторам $h_1, h_2$, что $|\Theta(h_1, h_2)| \geqslant 1$. Если $|\Theta(h_1, h_2)| > 1$, то форма $\Theta$ является индефинитной на плоскости $A_1$ проходящей через $h_1$ и $h_2$.

Пусть теперь $(h_1, g_1), (h_2, g_2) \in P$, $|\Theta(h_1, h_2)| > 1$. Нам достаточно показать, что

$$\frac{|\Theta(g_1, g_2)|^2}{|\Theta(g_1, g_1)\Theta(g_2, g_2)|} \leqslant |\Theta(h_1, h_2)|^2 \qquad (22.3)$$

Если форма $\Theta$ на плоскости $A_2$, проходящей через $g_1, g_2$ знакоопределена (неположительно определена) или если $g_1$ и $g_2$ коллинеарны, то левая часть (22.3) не превосходит $1$ и неравенство (22.3) очевидно. Остается рассмотреть случай, когда $\Theta$ индефинитна на $A_2$. Линейное отношение $P$ является $\Theta$ -сжимающим отображением $A_1$ в $A_2$. Без ограничения общности можно считать, что ограничение $P$ на $A_1$ является оператором, Осталось доказать следующую лемму.

Лемма 22.I. Пусть $A$ - плоскость, снабженная невырожденной индефинитной формой $\mathcal{J}$. Пусть $P$ - некоторый $\mathcal{J}$-сжимающий оператор в $A$. Если $\mathcal{J}(f_1, f_1)<0$, $\mathcal{J}(f_2, f_2)<0$, то

$$\frac{|\mathcal{J}(Pf_1, Pf_2)|^2}{\mathcal{J}(Pf_1, Pf\ )\mathcal{J}(Pf_2, Pf_2)} \leq \frac{|\mathcal{J}(f_1, f_2)|^2}{\mathcal{J}(f_1, f_1)\mathcal{J}(f_2, f_2)}$$

Доказательство. Среди всех $\mathcal{J}$ - сжатий на $\mathbb{C}^2$ плотны те, которые диагонализируются в некотором базисе (см., например, [44]), пусть $e_1$, $e_2$ - этот базис, $\lambda_1$, $\lambda_2$ - собственные числа. Пусть $\mathcal{J}(e_1, e_1)>0$, $\mathcal{J}(e_2, e_2)<0$, а значит $\lambda_1 \leq 1$, $\lambda_2 \geq 1$. Теперь (22.3) переписывается в виде

$$\frac{\left| |\lambda_1|^2 x_1 \bar{y}_1 - |\lambda_2|^2 x_2 \bar{y}_2 \right|^2}{(|\lambda_1 x_1|^2 - |\lambda_2 x_2|^2)(|\lambda_1 y_1|^2 - |\lambda_2 y_2|^2)} \leq$$

$$\leq \frac{|x_1 \bar{y}_1 - x_2 \bar{y}_2|}{(|x_1|^2 - |x_2|^2)(|y_1|^2 - |y_2^2)}$$

при условии, что $|x_1|^2 \leq |x_2|^2$, $|y_1|^2 \leq |y_2|^2$. Достаточно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$. Пусть например, $\lambda_2 = 1$. Можно считать, что $x_2 =$ $= y_2 = 1$ вещественно. Итак, достаточно проверить, что

$$0<\lambda<1,\ 0<x<1,\ 0<y<1$$

влечёт

$$\frac{(1-\lambda xy)^2}{(1-\lambda x^2)(1-\lambda y^2)} \leq \frac{(1-xy)^2}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Вычмсляя производную по $\lambda$ от левой части неравенства, получаем выражение

$$\frac{(1-\lambda^2)(x-y)^2}{(1-\lambda x^2)^2(1-\lambda y^2)^2}$$

Мы видим, что производная положительна. Лемма доказана.

22.4. Проективная структура. Определим в $\Omega_n = Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$ семейство одномерных подмногообразий которые мы назовём прямыми. Пусть $H_1, H_2 \in \Omega_n$ и пусть $H_1 \cap H_2$ имеет коразмерность $1$ в $H_1$ и $H_2$. Прямой $\ell = \ell_{H_1 \cap H_2}$ мы назовём множество всех $H \in \Omega_n$ таких, что $H \supset H_1 \cap H_2$

Ясно, что обобщённо дробно-линефйное отображение переводит прямые в прямые.

22.5. Замечания. Естественно задать вопрос о том, любое ли голоморфное отображение $Q$ области $\Omega_n$ в область $\Omega_m$ прижимающее сложное расстояние к $1$ (т.е. удовлетворяющее заключению теоремы

22.I) является обобщенно дробно-линейным? Оказывается, что это почти верно, но в случае, когда образ отображения $Q$ содержится в прямой (и только в этом случае), это все-таки не так. Причина в том, что в случае $n=m=1$ условие $\lambda_1 \geq \mu_1$ означает в точности то, что отображение не увеличивает расстояния (и это условие очень слабое).

Далее возникает вопрос, нельзя ли в данном случае сформулировать аналог "основной теоремы проективной геометрии" (см.[16]) Верно ли, что отображение переводящее любую прямую в прямую, имеет вид $S(P)$, где $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$. Это тоже не совсем так, и ровно потому, что "основная теорема проективной геометрии" отсутсвует в размерности $1$. Т.е. отображение переводящее прямые в прямые или обобщенно дробно-линейно или переводит все пространство в одну прямую.

## §23. Категорные оболочки бесконечномерных групп и представления категорий.

В этом параграфе обсуждаются некоторые простые обобщения результатов диссертации. Кроме того, обсуждаются некоторые категории, теория представлений которых на сегодняшний день не доведена до конца, а также перевод на категорный язык некоторых известных теорий.

а) Категории линейных отношений.

23.I. Вещественные полупростые группы. Существует единообразная процедура, которая с каждой серией вещественных классических групп ( $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{H})$, $U(p,q)$, $O(p,q)$, $Sp(p,q)$, $O(n,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ ) связывает некоторую категорию линейных отношений,для групп $U(p,q)$ , $Sp(2n,\mathbb{R})$ , $SO^*(2n)$ эти категории изучались в главе У (Эти линейные отношения должны "сжимать" индефинитную эрмитову форму и (быть может) сохранять еще одну форму). Во всех случаях известна полная классификация унитарных представлений , в случае категорий $U$ , $Sp$ , $SO^*$ (когда множество морфизмов имеет комплексную структуру) известна также полная классификация голоморфных (не обязательно унитарных)предствалений.

С другой стороны, теорема о тривиальности слабого замыкания из [77], видимо, ставит препятствие для категорных продолжений неприводимых бесконечномерных представлений полупростых групп,

<u>23.2. Морфизмы симметрических пространств</u>. Конструкция §22 обобщается на все категории п.22.I. Для каждой из категорий предыдущего пункта существует канонический функтор, который каждому объекту ставит в соответсвие симметрическое пространство, а каждому морфизму - некоторое отображение одного симметрического пространства в другое.

<u>23.3. Алгебраические группы</u>. Пусть $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнутое поле характеристики $p>2$ . Над $\mathbb{F}$ можно определить категории $GA$ , $B$ , $C$ , $D$ . Все теоремы и все рассуждения главы IУ дословно переносятся на этот случай.

<u>23.4. Группы Шевале: модулярные представления.</u> Категории $GA$ , $B$ , $C$ , $D$ можно определить и над конечным полем $\mathbb{F}_{p^n}$ (в случае $B$ и $D$ нужно ограничиться квадратичными пространствами, отвечающими одному элементу группы Витта). Теория модулярных представлений (т.е. представлений над алгебраическим замыканием $\mathbb{F}_{p^n}$) этих категорий очень проста; а именно, теорема Стейнберга о тензорном произведении (см., например, [51]) легко переносит-

ся на категории (представление категории соответственно задается $n$ диаграммами Дынкина с числовыми отметками $<p$ ).

23.5. Группы Шевалле: комплексные представления. Здесь легко строится конструкция представления Вейля категории $C$ . По-видимому, все представления категорий $GA$ , $B$ , $C$ , $\mathcal{D}$ должны описываться с помощью теорем двойственности типа §20.

23.6. $p$ -адические группы. Здесь роль линейных отношений играют $\mathcal{O}_p$ -подмодули в линейных пространствах над $\mathbb{Q}_p$ (Назаров, см. [83] ), через $\mathcal{O}_p$ мы обозначили кольцо целых $p$ -адических чисел.

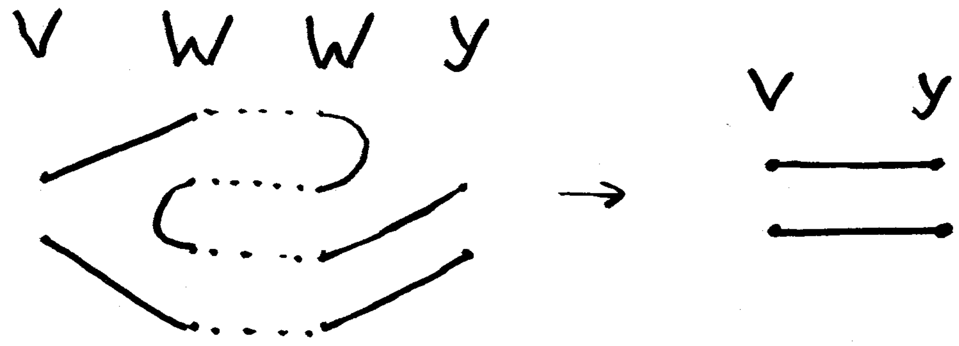
23.7. Неполупростые группы. Содержательный пример категории, связанной с неполупростыми группами – $SpH$ (см §5). Существуют ли другие интересные примеры, неизвестно (хотя примеров, конечно, можно придумать много, скажем, существует категории, похожие на $SpH$ , но связанные не с $Sp$ , а с $U$ и $SO^*$ ). Любопытно также, существуют ли категории, связанные с неклассическими однородными комплексными областями (см.[11])

б) Категории, связанные с симметрической группой.

23.8 Категория частичных биекций . Объекты категории – конечные множества, а морфизмы из $V$ в $W$ – это биекция некоторого подмножества в $V$ на подмножество в $W$ . Классификацию представлений этой категории легко вывести из [84].

23.9. Категория Брауэра $Br$ . Объект – множество из четного числа элементов, морфизм из $V$ в $W$ – разбиение

$V \cup W$ на пары. Как определяется умножение ясно из картинки




Полугруппы $End(V)$ - полугруппы Брауэра ( [61] в последнее время довольно популярны . Описание представлений $Br$ - задача дов.льно простая.

Существуют также различные вариации категории Брауэра.

в) Теоремы двойственности.

23.10. Двойтсвенность Брауэра. Пусть $V$ - тождественное представление $O(k, \mathbb{C})$ или $Sp(2n, \mathbb{C})$. тогда в тензорной алгебре над $V$ действует сплетающими операторами категория Брауэра (ср. с [61 ]).

23.11. Двойственность Хау. Для категорий $C$ и $GD$ существуют теоремы двойственности типа §20. Роль представления Вейля играет спинорное представление. Вопрос о теоремах двойственности для категорий $B$ и $GA$ остается открытым (так же как и аналогичные вопросы пп.22.3 - 22.7).

г) Категорные оболочки бесконечномерных групп.

23.12. Абстрактная конструкция категорной оболочки. Для многих бесконечномерных групп $G$ существует цепочка подгрупп $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ обладающая следующими свойствами.

1. Пусть $\rho$ - унитарное представление $G$ в $V$ . Пусть $V_j$ - множество векторов, инвариантных относительно $K_j$ . Тогда $\bigcup V_j$ плотно в $V$ .

2. Пусть $mor_{ij}$ - двойной класс смежности

$K_i \backslash G / K_j$ . Если $\gamma \in mor_{ij}$ , то корректно определен оператор $\rho(\gamma): V_i \to V_j$ . В самом деле, если $g \in G$ , $k_1 \in K_i$ , $k_2 \in K_j$ , то $\rho(k_1 g k_2)|_{V_i}$ не зависит от $k_1$ и $k_2$ .

3. Если $\gamma_1 \in mor_{ij}$, $\gamma_2 \in mor_{jk}$ , то существует элемент $\gamma_3 \in mor_{ik}$ такой, что $\rho(\gamma_3) = \rho(\gamma_1 \gamma_2)$. Таким образом мы получаем возможность определить умножение морфизмов ( именно это замечательно и именно в этом состоят теоремы мультипликативности).

Теперь объектом категории $\mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$ является число $j$ , морфизмами-множества $mor_{ij}$ . Функтор, который каждому $j$ ставит в соответствие пространство $V_j$ , а каждому морфизму $\gamma$ - оператор $\rho(\gamma)$ является представлением $\mathcal{K}$ .

Эта конструкция не является универсальной (скажем, она не применима для $Diff$ [37], для $p$ -адической группы диффеоморфизмов, пока непонятно также, что делать с некоторыми представлениями групп токов). Однако во многих случаях она применима. По-существу, именно на этой процедуре основаны работы [19] ,[84], [82], [47] , во всяком случае, эти работы хорошо переводятся на наш язык. После того, как было построено представление Вейля симплектической категории, стала ясна структура категорий, связанных с бесконечномерными классическими группами (Не следует думать, что это категории $GA$ , $B$ , $C$ , $\mathcal{D}$ ).

Так или иначе, для тех бесконечномерных групп, для которых изложенная процедура применима, проблема классификации всех унитарных представлений сводится к конечномерным задачам. Эти проблемы не выглядят особенно сложными и, по-видимому, их решение - дело ближайших лет.

23.13. Бистохастические меры и представления Вершика-Гельфанда-Граева. Объектом категории марковских операторов $\mathcal{P}$ мы назовем набор чисел $a=(a_1,\ldots,a_k)$ таких, что $a_j>0, \sum a_j=1$. Морфизмом из $a$ в $b=(b_1,\ldots,b_m)$ мы назовем матрицу $Q$ размера $k\times m$, матричные элементы которой удовлетворяют условиям $\sum_i q_{ij}=a_j$, $\sum_j a_{ij}=b_i$. Если $P: a\to b$ и $Q: b\to c$ - морфизмы, то их произведение $R$ вычисляется по формуле $R=QB^{-1}P$, где $B$ - диагональная матрица с собственными числами $b_1^{-1},\ldots,b_k^{-1}$. На самом деле, правильнее рассматривать не дискретные, непрерывные разбиения в сумму положительных чисел, иными словами, объекты категории - это пространства с вероятностной мерой (см. [6]).

Один из самых содержательных разделов в теории представлений бесконечномерных груп - это представления Вершика - Гельфанда - Граева (см. [7], [8]) группы измеримых функций на пространстве с мерой со значениями в группе $G$. Связанная с ними категория похожа на категорию марковских операторов, только элементами матрицы $Q$ являются положительные меры $\mu_{ij}$ на $G$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_i \mu_{ij}(G)=a_j \qquad \sum_j \mu_{ij}(G)=b_i$$

(см. также, не очень явно относящиеся к этому сюжету работы [5], [6]).

г) "Топологические теории поля"

23.14. Объектом категории $\mathcal{M}_n$ мы назовем компактное ориентированное многообразие. Если $A$ и $B$ - объекты $\mathcal{M}_n$, то морфизм $A\to B$ - это компактное ориентируемое многообразие $Q$ с краем, причем край $Q$ - это несвязное объединение $B$ и $-A$ (с учетом ориентаций). Два морфизма $Q, Q' : A \to B$ считаются одинаковыми, если существует диффеоморфизм $Q \to Q'$, который индуцирует на $A$ и $B$ диффеоморфизмы, изотопные тождественному (см. [87]).

Легко построить примеры представлений $\mathcal{M}_n$. Пусть поле $\mathbb{K}$ - это $\mathbb{F}_p$ или $\mathbb{C}$. Фиксируем $k$. Поставим в соответствие каждому объекту $A$ группу гомологий $H_k(A, \mathbb{K})$. Далее любому морфизму $Q : A \to B$ мы поставим в соответствие подпространство $h(Q) \subset H_k(A, \mathbb{K}) \oplus B_k(B, \mathbb{K})$, состоящее из всех пар $(v, w)$, таких, что $v$ гомологично $w$ в $Q$. Таким образом мы получили функтор из категории $\mathcal{M}_n$ в категорию линейных отношений над полем $\mathbb{K}$. Далее возможны различные варианты.