МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

На правах рукописи

НЕРЕТИН Юрий Александрович

КАТЕГОРНЫЕ ОБОЛОЧКИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КАТЕГОРИИ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра, теория
чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

Диссертация посвящена изучению двух недавно обнаруженных математических явлений:

I. Пусть G - бесконечномерная группа и пусть G имеет содержательную теорию представлений. Тогда с G жестким образом связана некоторая категория $\mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$, сама группа G выступает в качестве группы автоморфизмов одного из объектов категории $\mathcal{K}$, а любое представление G жестким образом продолжается на $\mathcal{K}$. Это, в сущности, означает, что теория представлений бесконечномерных групп является на самом деле теорией представлений категорий.

2. Возникающие таким образом категории имеют теорию представлений, которая интересна сама по себе, без всякой связи с бесконечномерными группами.

Эти явления были осознаны в 1987 - 1988 гг (см. [83], [38], [39], [41]), однако неявно математика имела дело с подобными категориями, начиная с 60ых годов. Речь идет о так называемых "теоремах мультипликативности", в этих теоремах обычно появлялись (как мы сейчас понимаем) некоторые подмножества множества морфизмов категории $\mathcal{K}$ и показывалось, что на этих подмножествах существует естественное умножение. Первые теоремы мультипликативности были получены Э.Тома [91] и Р.С.Исмагиловым [17]-[18], и в 70ые годы подобные констркуции стали одним из главных инструментов теории представлений бесконечномерных групп. (см. работы Р.С.Исмагилова [19], [20], А.Либермана [82], С.Стратилы, Д.Войкулеску [93], А.М.Вершика, С.В.Керова, И.М. Гельфанда, М.И.Граева [9], [7], наша работа сравнительно

Введение.

Диссертация посвящена изучению двух недавно обнаруженных математических явлений:

I. Пусть G - бесконечномерная группа и пусть G имеет содержательную теорию представлений. Тогда с G жестким образом связана некоторая категория $\mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$, сама группа G выступает в качестве группы автоморфизмов одного из объектов категории $\mathcal{K}$, а любое представление G жестким образом продолжается на $\mathcal{K}$. Это, в сущности, означает, что теория представлений бесконечномерных групп является на самом деле теорией представлений категорий.

2. Возникающие таким образом категории имеют теорию представлений, которая интересна сама по себе, без всякой связи с бесконечномерными группами.

Эти явления были осознаны в 1987 - 1988 гг (см. [83], [38], [39] , [41]), однако неявно математика имела дело с подобными категориями, начиная с 60$^{\text{ых}}$ годов. Речь идет о так называемых "теоремах мультипликативности", в этих теоремах обычно появлялись (как мы сейчас понимаем) некоторые подмножества множества морфизмов категории $\mathcal{K}$ и показывалось, что на этих подмножествах существует естественное умножение. Первые теоремы мультипликативности были получены Э.Тома [91] и Р.С.Исмагиловым [17]-[18], и в 70$^{\text{ые}}$ годы подобные констркуции стали одним из главных инструментов теории представлений бесконечномерных групп. (см. работы Р.С.Исмагилова [19] ,[20] ,А.Либермана [82] , С.Стратилы, Д.Войкулеску [93] , А.М.Вершика, С.В.Керова, И.М. Гельфанда, М.И.Граева [9] , [7] , наша работа сравнительно далека от этого направления, лишь в п.23.II мы коротко обсудим как из теорем мультипликативности "вырастает" категорная оболочка). В конце 70ых годов Г.И.Ольшанский ([43], [46]) используя эти идеи, ввел понятие полугрупповой оболочки $\Gamma=\Gamma(G)$ бесконечномерной группы G. А именно, оказывается, что с каждой бесконечномерной группой G жестким образом связана некоторая, невидимая невооруженным глазом полугруппа Γ, причем любое представление G продолжается до представления Γ. Используя полугрупповой подход Г.И.Ольшанский в [46] описал все унитарные представления групп $U(p,\infty)$, $O(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$. Однако для других бесконечномерных групп полугрупповую оболочку долгое время не удавалось описать. Наконец, в работе Г.И.Ольшанского, М.Л.Назарова и автора [83], была построена полугрупповая оболочка для представления Вейля, а в работе автора [38] - для спинорного представления. Тогда и стало ясно, что речь идет не о полугрупповой оболочке, а о категорной.

Глава I диссертации основана на работе [40] и посвящена исследованию категорной оболочки представления Вейля. Пусть F_n, F_m - бозонные пространства Фока, с вообще говоря, разным числом степеней свободы (соответственно m, n, см. п. I.I), пусть пока число степеней свободы конечно. Пусть $S=\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$ - блочная симметричная матрица размера $(n+m)\times(n+m)$, причём $\|S\|\leqslant 1$, $\|K\|<1$, $\|M\|<1$. Рассмотрим оператор

$$B[S]f(z)=\iint exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar u)\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar u\end{pmatrix}\right\} f(u)\,d\mu(u)$$

из F_m в F_n (см. §I). Можно показать, что множество всех таких операторов замкнуто относительно умножения, т.е. если

$B[S]$ - оператор $F_n \to F_m$, а $B[T]$ - оператор $F_m \to F_K$, то $B[T]B[S]$ тоже имеет вид (0.I) с некоторой новой матрицей S. Оказывается, что категория всех операторов $B[S]$ эквивалентна описанной ниже симплектической категории Sp.

Объект этой категории - комплексификация V вещественного линейного пространства $V_{\mathbb{R}}$, снабженного невырожденной кососимметричной билинейной формой λ_V. Форма λ_V может быть продолжена в V как билинейно, так и полуторалинейно. Морфизмом из V в W мы назовем подпространство $P \subset V \oplus W$, удовлетворяющее условиям

а) P - лагранжев (максимальное изотропное) подпространство относительно кососимметричной формы в $V \oplus W$.

б) Если $(v, w) \in P$, то $\Theta_V(v, v) \geq \Theta(w, w)$, где Θ_V, Θ_W - полуторалинейные формы в V и W.

в) Если $(v, 0) \in P$, $(0, w) \in P$, то $\Theta_V(v, v) > 0$, а $\Theta_W(w, w) < 0$ (условие б давало бы нестрогие неравенства).

Морфизмы перемножаются как линейные отношения. (см. п.2.I)

Рассмотрим полугруппу $End(V)$, где $\dim V = 2n$. Эта полугруппа является комплексной ограниченной областью (одной из классических областей Картана [62]), а ее обратимые элементы (т.е. группа $Aut(V)$) образуют подмножество половинной размерности, лежащее на границе (Шилова) области $End(V)$, Легко видеть, что $Aut(V) \simeq Sp(2n, \mathbb{R})$. Графики линейных операторов образуют в $End(V)$ открытое плотное множество Γ^0, полугруппа Γ^0 изоморфна открытой подполугруппе в $Sp(2n, \mathbb{C})$ (это одна из полугрупп, изучавшихся в

[10], [44]). Важно заметить, что Γ^0 не исчерпывает всю Γ.

Если же $\dim V \neq \dim W$, то элементы $Mor(V,W)$ не могут быть графиками операторов.

В §2 мы строим "представление Вейля" категории Sp (определение предсталвения см. в Обозначениях), это функтор, который каждому объекту V ставит в соответствие пространство Фока с $\frac{1}{2}\dim V$ степенями свободы, а каждому морфизму - некоторый оператор вида $B[S]$ из одного пространства Фока в другое. Тем самым, в каждом пространстве Фока F_n мы получаем представление группы $Aut(V) \simeq Sp(2n,\mathbb{R})$. Это представление $Sp(2n,\mathbb{R})$ совпадает с обычным представлением Вейля.

В главе II проводится аналогичная программа для спинорного представления.

В теории бесконечномерных предсталвений полупростых групп наиболее важным способом строить представления является операция индуцирования (с различными обобщениями). В случае бесконечномерных групп индуцирование отодвигается на второй план следующей процедурой. Пус мы хотим построить представление группы G. Для этого мы должны вложить G в бесконечномерную симплектическую или ортогональную группу (т.е. группы автоморфизмов канонических коммутационных соотношений), а затем ограничить соответственно представление Вейля или спинорное представление на G (см. например, [9], [45], [86], [32], [36], [37], "вырожденный вариант" этой процедуры - схема Араки, см, например, [8]).

В случае категорий это свойство "универсальности" представления Вейля и спинорного предсталвения сохраняется. Поэтому представление Вейля и спинорное представление категорий заслуживают того, чтобы быть построенными в максимальной общности (эта общность совсем не нужна в главах IУ и У, но используется в полной мере в главе III). С одной стороны, это приводит к длинным техническим доказательствам теорем 2.3 , 8.I и предложения 8.I, с другой - к содержательному вопросу об ограниченности операторов вида (0.I) и аналогичных операторов в фермионном случае (теоремы 4.I, 4.2, 7.I, 9.I - 9.3) в пространствах Фока с бесконечным числом степеней свободы.

В п. 2.8 - 2.9 и 8.4, 8.I0 объясняется взаимоотношение наших результатов и классических теорем К.О.Фридрихса - И.Сигала - Ф.А. Березина и Ф.А.Березина - Д.Шейла - В.Стайнеспринга об автоморфизмах канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений (см. [4] ,[88] ,[89]), операторы вида (0.I) трактуются как морфизмы канонических коммутационных соотношений.

Глава III посвящена исследованию полугрупповой и категорной оболочек группы Diff диффеоморфизмов окружности. Полугрупповая оболочка Γ группы Diff была построена автором в [35] (и двумя годами позднее Гр.Сигалом [87]). Ее элементом является тройка (R, τ_+, τ_-) , где R - риманова поверхность (одномерное комплексное многообразие) с краем, топологически эквивалентное кольцу, $\tau_+ , \tau_- : e^{i\varphi} \to \mathcal{D}$ аналитические параметризации компонент края, причем при обходе контура $\tau_+(e^{i\varphi})$ поверхность остается справа, а при обходе $\tau_-(e^{i\varphi})$ - слева. Умножение в Γ - это склейка (аккуратное определение см. в §I2, см. также рисунок на стр. 132).В §I2 подробно объясняется почему Γ следует считать комплексификацией группы диффеоморфизмов окружности. В §I3 показано, что все представления алгебры Вирасосоро ос старшим весом интегрируются до голоморфных представлений полугруппы Γ , в §14 получены явные формулы для этих представлений. Представления Γ строятся с помощью вложений Γ в полугруппы линейных отношений - симплектическую и ортогональную (эти полугруппы были построены в главах I и II). Далее мы ограничиваем соответственно представление Вейля и спинорное представление на Γ .

В §15 определяется категорная оболочка Shtan группы Diff . Объектами Shtan являются неотрицательные целые числа, а морфизмами $m \to n$ - наборы (R, τ_+^i, τ_-^j) где R - риманова поверхность с $m+n$ компонентами края, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $\tau_\pm^\alpha$ - фиксированные параметризации компонент края, причем при обходе контуров $\tau_+^\nu(e^{i\varphi})$ поверхность остается справа, а при обходе $\tau_-^j(e^{i\varphi})$ - поверхность остается слева. Для того, чтобы перемножить морфизмы, нужно склеить римановы поверхности.

Конструкция категории Shtan была сообщена автору в 1987 г. М.Л.Концевичем, который предложил переформулировку конформной квантовой теории поля в терминах представлений категории Shtan . В 1988 г. появился препринт Гр.Сигала, где высказывалась примерно та же точка зрения. Аксиоматика теории поля в смысле М.Л.Концевича и Гр.Сигала налагает на представления Shtan некоторые дополнительные требования, которые, кажется должны выполняться сами собой. С другой стороны, не вполне ясно, до какой степени эти аксиоматики действительно исчерпывают конформную квантовую теорию поля. Обсуждение этих вопросов не входит в нашу задачу. В любом случае, сам факт тесной связи между теорией поля и теорией представлений категории Shtan

не вызывает сомнений (см. [94], [57], [67]), а сама категория $\mathbf{Shtan}$ является интересным математическим объектом и без какой-либо связи с теорией поля (см §15).

Представления категории $\mathbf{Shtan}$ строятся в §16 с помощью вложений $\mathbf{Shtan}$ в симплектическую и ортогональную категории.

Результаты главы IIIоснованы на работах автора [38], [39], они были сданы в печать в начале 1988 до выхода препринта Гр.Сигала [87] и, тем самым, не зависят ни от этого препринта, ни от последовавших за ним физических работ. Из этих работ мы отметим [67], где аннонсируются теоремы о голоморфном продолжении унитарных представлений алгебры Вирасоро на полугруппу Γ (опубликованную ранее автором в [35]), а также [57], где строятся (путем выписывания явных формул) те же операторы, что и в п.16.7 (авторов, однако, не интересуют ни существование этих операторов, ни их мультипликативные свойства). Наокнец, нужно отметить работу [92], которая по-видимому "перекидывает мостик" между конформной квантовой теорией поля и теоремами мультипликативности.

Категории линейных отношений (см. главы I,II) изначально были построены для изучения бесконечномерных групп (группы Diff и бесконечномерных классических групп). Эти категории, однако, оказались интересными и сами по себе. Главы IУ и У посвящены изучению подобных категорий.

Объектом категорий B, C, GD мы назовем соответственно:

а) в случае B - нечетномерное комплексное линейное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой.

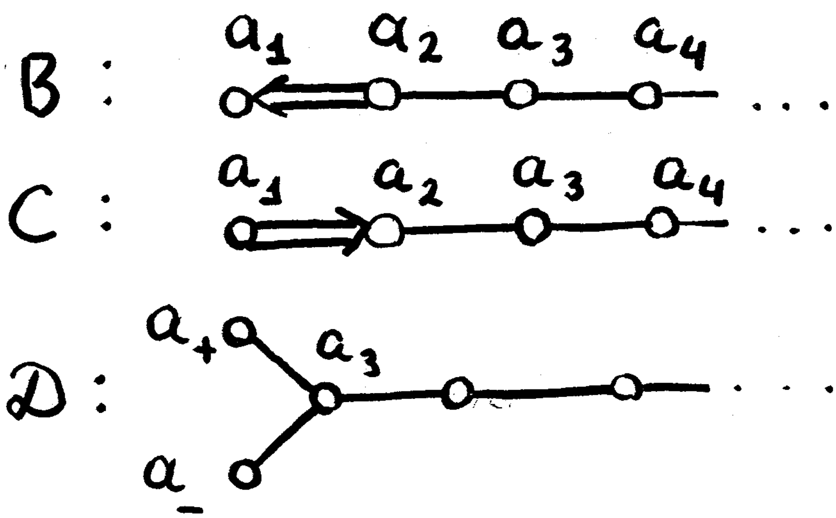
б) в случае C - конечномерное комплексное линейное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой.

в) в случае $G\mathcal{D}$ - четномерное комплексное линейное пространство, снабженное симметричной билинейной формой.

Морфизмы из V в W - это во всех трех случаях максимальные изотропные подпространства в $V \oplus W$. Группами автоморфизмов объектов категорий B, C, $G\mathcal{D}$ являются соответственно группы $B_n = O(2n+1, \mathbb{C})$, $C_n = Sp(2n, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}_n = O(2n, \mathbb{C})$. Вместо ортогональной категории $G\mathcal{D}$ нам будет удобнее рассматривать очень близкую к ней категорию $\mathcal{D}$ (см. §I7), группами автоморфизмов ее объектов являются соответственно группы $SO(2n, \mathbb{C})$.

Если мы имеем, например, представления категории C, то мы имеем сразу представления всех симплектических групп $Sp(2n, \mathbb{C})$ при всех n.

Неприводимые голоморфные проективные представления категорий B, C, $\mathcal{D}$ нумеруются диаграммами вида



где a_j - неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Чтобы получить, например, представление группы C_n, отвечающее представлению категории C, нужно "отрезать" от диагараммы Дынкина начальный кусок длины n .

С серией групп A_n связано много различных категорий (см. п.17.1, 17.3, 17.4). Дело в том, что диаграммы Дынкина типа B , C , D можно достраивать до бесконечной диаграммы Дынкина лишь одним способом, в случае же A_n можно поочередно добавлять кружочки с разных концов. Из всех этих вариантов самым интересным является категория GA (см. теорему 17.1).

Классификации представлений категорий GA , B , C , D посвящена глава IV. В главе V в дополнение к вещественной симплектической категории Sp (из главы I) вводятся категории линейных отношений U и SO^* . Эти три категории связаны с теорией бесконечномерных представлений групп $Sp(2n,\mathbb{R})$, $U(p,q)$, $SO^*(2n)$ со старшим весом примерно так же, как теория представлений категорий B , C , D связана с теорией представлений групп B_n, C_n, D_n. В §20 - 21 получена классификация унитарных голоморфных представлений этих категорий. В §22 эти категории интерпретируются как категории морфизмов симметрических пространств.

Основные результаты диссертации

1. Построено представление Вейля симплектической категории. Получены достаточные условия ограниченности операторов вида (0.1)

2. Построено спинорное представление ортогональной категории. Получены условия ограниченности операторов Березина в фермионном пространстве Фока.

3. Построена полугруппа Γ - комплексификация группы диффеоморфизмов окружности. Показано, что все представления алгебры Вирасоро со старшим весом интегрируются до представлений полугруппы Γ . Получены явные формулы для представлений полугруп-

пы Γ, а также формулы для сферических функций и характеров представлений.

4. Построены примеры представлений категории $Shtan$.

5. Получена классификация голоморфных неприводимых представлений категорий GA, B, C, D, а также голоморфных унитарных неприводимых представлений категорий Sp, U, SO^*.

Основные результаты диссертации опубликованы в [34], [35], [37], [38]-[41].

Обозначения и терминология.

1. Матрицы и операторы. Пусть K – матрица. Тогда

k_{ij} – ее матричные элементы.

K^t – транспонированная матрица

$\overline{K}$ – матрица с матричными элементами $\overline{k_{ij}}$.

K^* – сопряженная матрица $(K^* = \overline{K}^t)$

$|K| = \sqrt{K^*K}$, см. [49], УI.4.

$\|K\|$ – евклидова норма матрицы (или норма оператора в гильбертовом пространстве), $\|K\|$ равна $\sup \lambda$ по всем λ из спектра $|K|$.

Конечномерный оператор (матрица) K – оператор конечного ранга ($\dim \operatorname{Im} K < \infty$)

Матрица Гильберта-Шмидта – матрица оператора Гильберта-Шмидта (см. [49] .УI.6), т.е $\sum |k_{ij}|^2 < \infty$ или $\operatorname{tr} K^*K < \infty$

Ядерная матрица – матрица ядерного оператора (см. [49] УI.6), т.е оператора со следом $(\operatorname{tr} |K| < \infty)$

Положительный оператор K $(K \geq 0)$ – оператор, в эвклидовом пространстве, удовлетворяющий условию $(Kx, x) \geq 0$ для всех x (см. [49] IУ.4.).

Полярное разложение см. [49], IУ.4.

$\Lambda^n K$, $S^n K$ – внешние и симметрические степени оператора.

2. Категории. Пусть $\mathcal{K}$ – категория. Тогда

$Ob(\mathcal{K})$ – множество (класс) объектов .

$Mor_{\mathcal{K}}(V, W) = Mor(V, W)$ – множество морфизмов из V в W.

$Aut(V)$ – группа автоморфизмов объекта .

$End(V)$ - полугруппа эндоморфизмов V.

Пусть $\mathcal{K}$ - категория. Представлением $T=(T,\tau)$ категории $\mathcal{K}$ мы назовем функтор, который каждому объекту V категории $\mathcal{K}$ ставит в соответствие линейное пространство $T(V)$, а каждому морфизму $P: V \to W$ - отображение $\tau(P): T(V) \to T(W)$, так, что для любых $V, W, Y \in Ob(\mathcal{K})$ и любых $P \in Mor(V,W)$, $Q \in Mor(W,Y)$ выполнено

$$\tau(Q)\tau(P) = c(Q,P)\tau(QP)$$

где $c(Q,P)$ - ненулевое (!) комплексное число.

Конечно $T=(T,\tau)$ следовало бы называть проективным представлением, но так как на протяжении всей диссертации, линейное представление категории нам встретится лишь один раз (замечание I из п.I7.4), то мы будем считать слова "представление" и " "проективное представление" синонимами.

Если нам дано представление $T=(T,\tau)$ категории $\mathcal{K}$, то в каждом пространстве $T(V)$ действуют полугруппа $End(V)$ и группа $Aut(V) \subset End(V)$, т.е. с каждым представлением $\mathcal{K}$ связан набор представлений полугрупп $End(V)$ (и групп $Aut(V)$). Эти представления мы будем называть ограничениями T на группы $Aut(V)$ (и полугруппы $End(V)$)

Конкретные категории: Определения см.

Sp, $\overline{Sp}$	- §2	$\overline{GD}$	- §8
$\overline{GA}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$	- §I0	$\overline{SpH}$	- §5
GA, B, C, D	- §I7	U, SO^*	- §20
$Shtan$, $\widetilde{Shtan}$, ...	- §I5		

3. Пространства. $F(H)$ - бозонное пространство Фока

см. §I, $\Lambda(V)$, $\bar\Lambda(V)$, Λ, $\bar\Lambda$ – фермионное пространство Фока, см.§6.

$\Lambda^n V$, $S^n V$ – внешние и симметрические степени пространства.

H^2 – пространство Харди.

4. Линейные отношения – см. п.2.1.

Преобразование Потапова-Гинзбурга – п.2.2.

5. Алгебра Вирасоро $\mathcal{L}$, $Vect$, L_k, ... – см. §II, $\mathcal{D}iff$ – группа аналитических диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию.

6. Римановы поверхности – см. обозначения к главе III.

7. $\blacksquare$ – конец формулировки теоремы, леммы,...

$\boxslash$ – конец доказательства

$\bullet$ – конец замечания.

Глава I. Морфизмы канонических коммутационных соотношений и симплектическая категория.

§I. Операторы $B[S]$

I.I. Бозонное пространство Фока. Пусть H - гильбертово пространство размерности $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ со скалярным произведением $(\cdot , \cdot)$. Мы фиксируем в H операцию сопряжения $h \to \bar{h}$ (т.е. $h \to \bar{h}$ является антилинейной изометрической инволюцией). Бозонное пространство Фока $F(H)$ - это пространство голоморфных функций на H со скалярным произведением

$$\langle f(z), g(z) \rangle = \iint f(z)\, \overline{g(z)}\, d\mu(z)$$

где $d\mu(z)$ - гауссова мера на H, задаваемая формулой

$$d\mu(z) = \exp(-(z,z)) \prod_j \frac{dz_j\, d\bar{z}_j}{\pi}$$

Если $\dim H < \infty$, то корректность этого определения не вызывает вопросов, в случае, когда $\dim H = \infty$ оно также корректно (см. [59], [4]), во всех случаях $F(H)$ полно ([ ])

Замечание I. В этой главе нам удобнее будет считать, что H - это либо ℓ_2, либо координатное пространство $\mathbb{C}^n$, операция сопряжения $h \to \bar{h}$ --это обычная операция координатного сопряжения.

Замечание 2. Если $\dim H = 0$, то $F(H)$ - это просто $\mathbb{C}^1$. Как ни странно, случай нульмерного H очень важен.

Известно, что для любого $u \in H$ линейный функционал $\varphi(f) = f(u)$ непрерывен, он может быть также задан формулой

$$\varphi(f) = f(u) = \langle f(z), exp(z, \bar{u}) \rangle \qquad (1.1)$$

Далее, любой ограниченный оператор A в пространстве $F(H)$ является интегральным оператором в буквальном смысле этого слова, т.е. A представим в виде

$$Af(z) = \int K(z, \bar{u}) f(u) d\mu(u)$$

где функция $K(z, \bar{u})$ голоморфна по z и антиголоморфна по u. Ядро $K(z, \bar{u})$ восстанавливается по оператору A с помощью формулы

$$K(z, \bar{u}) = \langle exp(v, \bar{z}), A exp(v, \bar{u}) \rangle \qquad (1.2)$$

где $exp(v, \bar{z})$ и $exp(v, \bar{u})$ рассматриваются как функции от переменной v (в [4] ядра $K(z, \bar{u})$ называются "производящими функционалами")

Мы видим, что ядро оператора определено не канонически: оно зависит от операции сопряжения.

Из равенства (I.2) очевидным образом следует критерий слабой сходимости операторов.

<u>Предложение</u> I.I. Пусть A_n - последовательность ограниченных операторов в $F(H)$, K_n - их ядра. Пусть A - ограниченный оператор с ядром K. Последовательность A_n слабо сходится к A тогда и только тогда, когда одновременно выполнено два условия.

I. Последовательность A_n равномерно ограничена.

2. $K_n(z, \bar{u})$ сходится к $K(z, \bar{u})$ поточечно. ■

<u>Доказательство</u>. Для применения обычного критерия слабой сходимости операторов достаточно заметить, что линейная оболочка

векторов $exp(z,\bar{u})$ плотна в $F(H)$, что, в свою очередь, следует из "воспроизводящего равенства" (I.I).

I.2. <u>Гауссов интеграл.</u> Пусть $z,\alpha,\beta\in l_2$. Мы рассматриваем их как матрицы строки. Пусть K,L,M - матрицы размера $\infty\times\infty$, пусть норма матрицы $S=\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}$ меньше 1 и пусть S - матрица Гильберта-Шмидта. Тогда

$$\iint exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar{z})\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix}+\alpha z^t+\beta\bar{z}^t\right\}d\mu(z)=$$

$$=\det\left[\begin{pmatrix}1-L & -K\\ -M & 1-L^t\end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}}\right]exp\left\{\frac{1}{2}(\alpha\beta)\begin{pmatrix}-M & 1-L\\ 1-L^t & -N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^t\\ \beta^t\end{pmatrix}\right\} \qquad (1.3)$$

Важно заметить, что сначала оператор вида $1-S$, где $\|S\|<1$ возводится в степень $-1/2$, а потом вычисляется определитель.

Для проверки этой формулы достаточно воспользоваться обычной формулой для гауссова интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xAx^t+bx^t}=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\,e^{-\frac{bA^{-1}b^t}{4}}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, A - симметричная матрица, причем $Re\,xAx^t>0$ для любого x. Переход от вещественных координат к комплексным производится с помощью замены

$$\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

При вычислении определителя полезна формула

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix} = \det(\mathcal{D})\det\left(A - C\mathcal{D}^{-1}B\right)$$

из нее, в частности, вытекает, что

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -M \\ -N & 1\end{pmatrix} = \det(1 - MN) \qquad (1.4)$$

Нам придется также несколько раз использовать следующий частный случай формулы для матрицы, обратной к блочной матрице:

$$\begin{pmatrix} -P & 1 \\ 1 & -N\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} N(1-PN)^{-1} & (1-NP)^{-1} \\ (1-PN)^{-1} & P(1-NP)^{-1}\end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

(проверяется непосредственным умножением матриц).

I.3. Векторы $b[K]$ и $b[K|\alpha^t]$. Пусть $H = \ell_2$ или $\mathbb{C}^n$. Пусть K – оператор Гильберта-Шмидта в H. Пусть $\|K\| < 1$. Определим вектор

$$b[K] = b_z[K] = \exp\left\{\frac{1}{2} z K z^t\right\} \qquad (1.6)$$

Норма $b[K]$ вычисляется с помощью формулы (I.3), в частности, легко видеть, что $b[K] \in F(H)$.

Замечание. В главе III нам будет неудобно считать, что $H = \ell_2$, поэтому полезно уметь переписывать формулу (I.6) в инвариантных терминах. Это делается следующим образом.

$$b[K] = \exp\left\{\frac{1}{2}(Kz, \bar{z})\right\}$$

Пусть далее K удовлетворяет тем же условиям, что и выше, а $\alpha \in \ell_2$ или $\mathbb{C}^n$. Тогда определим векторы

$$b[K|\alpha^t] = \exp\left\{\frac{1}{2} z K z^t + z\alpha^t\right\}$$

Они, по-прежнему, лежат в $F(H)$. Обозначим через $F_0(H)$ пространство финитных линейных комбинаций векторов $b[K|\alpha^t]$. Очевидно $F_0(H)$ плотно в $F(H)$ (в самом деле, как уже отмечалось при доказательстве Предложения I.I. линейная оболочка векторов $b[0|\alpha^t]$ плотна в $F(H)$).

I.4. Операторы $B[S]$. Пусть H_1, H_2 - гильбертовы пространства. Пусть $F(H_1)$, $F(H_2)$ - соответствующие пространства Фока. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ - оператор из $H_1 \oplus H_2$ в $H_1 \oplus H_2$, удовлетворяющий условиям

0. $S = S^t$ (т.е. $K = K^t$, $M = M^t$)
I. $\| S \| \leqslant 1$
2. $\| K \| < 1$, $\| M \| < 1$
3. K, M - операторы Гильберта-Шмидта.

Через $B[S]$ мы обозначим оператор $F(H_2) \to F(H_1)$ с ядром

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(z \ \bar{u})\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \end{pmatrix}\right\}$$

Первые примеры операторов вида $B[S]: F(H) \to F(H)$ появились в книге Ф.А.Березина [4], оказалось, что в таком виде записываются операторы, задающие представление Вейля. Как заметил Г.И.Ольшанский, операторы, использовавшиеся Ф.А.Березиным отвечают унитарным матрицам S. Далее Г.И.Ольшанский понял, что полугруппа, связанная с представлением Вейля - это полугруппа всех ограниченных операторов вида $B[S]$ ([83])

Прежде, чем мы перейдем к изучению операторов $B[S]$, мы вкратце обсудим происхождение условий I - 3. Предположим, что оператор $B[S]$ ограничен. Учитывая, что $\| \exp(z, \bar{a}) \| = \exp\left(\frac{1}{2}(a, a)\right)$ и равенство (I.2) мы получаем оценку ядра ограниченного оператора

$$|K(z,\bar u)| \le \|A\| \exp\left(-\frac{1}{2}(z,z) - \frac{1}{2}(u,u)\right)$$

Отсюда сразу следует условие I.

Далее, легко проверить, что вектор $B[S]\cdot 1$ равен $\exp(zKz^t)$. Чтобы этот вектор лежал в $F(H)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия : а) $\|K\|<1$ б) K - оператор Гильберта-Шмидта. Рассматривая вектор $B[S]^*\cdot 1$ мы получаем аналогичные утверждения для матрицы M.

I.5. <u>Контрпример</u>. Как выяснил Г.И.Ольшанский, в случае операторов в $F(\mathbb{C}^n)$ условия I - 2 не только необходимы, но и достаточны ([83]) . Сейчас мы покажем, что условия I - 3 не достаточны для ограниченности оператора $B[S]$ в бесконечномерном случае. Рассмотрим сначала оператор $B\begin{bmatrix}\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & \lambda\end{bmatrix}$ в $F(\mathbb{C}^1)$, где $0\le\lambda<1$. Его норма равна $(1-\lambda)^{-1/2}$, это вытекает из доказанного ниже равенства (4.1).

Далее, рассмотрим оператор $A = B\begin{bmatrix}\Lambda & 1-\Lambda\\ 1-\Lambda & \Lambda\end{bmatrix}$ в $F(\ell_2)$, где Λ - диагональная матрица с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ $(0\le\lambda_j<1)$. Как известно ([74]), функтор $H\mapsto F(H)$ переводит прямые суммы гильбертовых пространств в тензорные произведения. В частности, $F(\ell_2) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} F(\mathbb{C}^1)$. Наш оператор A тогда разлагается в тензорное произведение операторов $A_i = B\begin{bmatrix}\lambda_i & 1-\lambda_i\\ 1-\lambda_i & \lambda_i\end{bmatrix}$. Следовательно,

$$\|A\| = \prod_{i=1}^{\infty}\|A_i\| = \prod_{i=1}^{\infty}(1-\lambda_i)^{-1/2}$$

Выбирая λ_i так, что $\sum \lambda_i^2 < \infty$, $\sum \lambda_i = \infty$ мы получаем неограниченный оператор вида $B[S]$.

I.6. <u>Определение операторов</u> $B[S]$. Ввиду того, что операторы $B[S]$ могут быть неограниченными, их определение требует некоторой аккуратности.

<u>Лемма</u> I.I. Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям 0 - 3, пусть T удовлетворяет условиям п. I.3, пусть $\alpha \in \ell_2$. Тогда интеграл

$$\iint \exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar{u})\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{u} \end{pmatrix}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} z T z^t + \alpha z^t\right\} d\mu(z)$$

сходится и равен

$$\det\left[(1-MP)^{-1/2}\right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha T \alpha^t\right\} \times \tag{1.7}$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2} z\left(K + LT(1-MT)^{-1}L^t\right)z^t + zL(1-TM)^{-1}\alpha^t\right\}$$

<u>Доказательство</u>. Это частный случай равенства (I.3).

Встает вопрос о том, содержится ли функция (I.7) в $F(H)$. Иными словами, верно ли, что

$$\|K + LT(1-MT)^{-1}L^t\| < 1$$

Это вытекает из следующей теоремы, которую мы докажем в §3.

<u>Теорема</u> 3.I. (Крейн, Шмульян). Пусть $S = S^t = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}$ - блочный оператор $H_1 \oplus H_2 \to H_1 \oplus H_2$. Пусть T - оператор $H_1 \to H_2$. Пусть $\|S\| \leq 1$, $\|X\| < 1$, $\|U\| < 1$, $\|T\| \leq 1$. Пусть

$$\mathfrak{M}(S)T = X + YT(1-UT)^{-1}Z \tag{1.8}$$

Тогда

а) $\|\mathfrak{M}(S)T\| \leq 1$

б) Если $\|T\| < 1$, то $\|\mathfrak{M}(S)T\| < 1$.

в) Если $\|S\| < 1$, то $\|\mathfrak{M}(S)T\| < 1$. ■

Итак, в силу леммы I.1. выполнено

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} b[T|\alpha^t] = \det(1-MT)^{-1/2} \exp(-\alpha T \alpha^t) \times$$

$$\times b[K + LT(1-MT)^{-1}L^t \mid L(1-TM)^{-1}\alpha^t] \tag{1.9}$$

Теперь мы видим, что оператор $B[S]$ корректно определен на пространстве $F_0(H_2)$ и переводит $F_0(H_2)$ в $F_0(H_1)$ (Напомним, что $F_0(H)$ - пространство финитных линейных комбинаций векторов вида $b[T|\alpha^t]$).

I.7. Умножение операторов $B[S]$.

Теорема I.I. Пусть

$$S_1 = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}$$

Тогда

$$B[S_1]\,B[S_2] = \det((1-MP)^{-1/2})\,B[S_1 * S_2]$$

где

$$S_1 * S_2 = \begin{pmatrix} K + LP(1-MP)^{-1}L^t & L(1-PM)^{-1}Q \\ Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R + Q^t(1-MP)^{-1}MQ \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

■

Доказательство. Достаточно проверить, что для любого вектора $b[T|\alpha^t]$ выполнено

$$B[S_1]\left(B[S_2]\, b[T|\alpha^t]\right)=$$

$$=\det\left((1-MP)^{-\frac{1}{2}}\right) B[S_1 * S_2]\, b[T|\alpha^t]$$

В этом легко убедиться, выписав левую и правую часть равенства, используя (I.3). Остается, однако, вопрос, удовлетворяет ли матрица $S_1 * S_2$ условиям п.I.4.

Условие 0'. Симметричность вытекает из равенств

$$P(1-MP)^{-1}=P+PMP+PMPMP+\ldots=(1-PM)^{-1}P$$

Условие I. $\| S_1 * S_2 \| \leqslant 1$

$$S_1 * S_2=\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} L^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\mathfrak{M}\left(\begin{array}{cc|cc} K & & L & \\ & 0 & & 1 \\ \hline L^t & & M & \\ & 1 & & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}$$

где $\mathfrak{M}$ определено формулой (I.8). Теперь мы можем применить утверждение а) теоремы 3.I.

Условие 2. $\| K + LP(1-MP)^{-1} L^t \| < 1$

$$\| R + Q^t (1-MP)^{-1} M Q \| < 1$$

Это сразу вытекает из утверждения б) теоремы 3.I: в качестве T первый раз выступает матрица P, а второй раз матрица M.

Наконец, проверка условия 3 тривиальна.

<u>I.8. Сопряженный оператор.</u> Известно, (см. [4]), что если оператор A имеет ядро $K(z, \bar{u})$, то ядро оператора A^* равно $K(u, \bar{z})$. Таким образом, оператор $B[S]^* = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}^*$ должен иметь вид $B[S^{\circledast}]$, где

$$S^{\circledast} = \begin{pmatrix} \overline{M} & \overline{L}^t \\ \overline{L} & \overline{N} \end{pmatrix}$$

Так как оператор $B[S]$ может оказаться неограниченным, писать $B[S]^* = B[S^{\circledast}]$ было бы неосторожно. Мы ограничимся следующим утверждением.

<u>Предложение</u> I.2. Пусть $f_1 \in F_0(H_1)$, $f_2 \in F_0(H_2)$. Тогда

$$\langle B[S] f_2, f_1 \rangle = \langle f_2, B[S^{\circledast}] f_1 \rangle \quad \blacksquare$$

Для доказательства достаточно убедиться, что в левой и правой части стоит один и тот же сходящийся интеграл.

<u>I.9. Слабая сходимость.</u>

Предложение I.3. Пусть $B[S_i]$ – ограниченные операторы. Последовательность операторов $B[S_i]$ сходится слабо к $B[S]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

а) $B[S_i]$ равномерно ограничены.

б) $S_i \to S$ слабо.

Доказательство. Слабая сходимость $S_i \to S$ эквивалентна поточечной сходимости ядер $exp\left\{\frac{1}{2}(z\bar{u})\, S_i\, (z\bar{u})^t\right\}$. Теперь мы можем применить предложение I.I.

Пусть теперь $B = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$ – оператор в $F(\ell_2)$, рассмотрим операторы $B_n = B\begin{bmatrix} \boxed{K}_n & \boxed{L}_n \\ \boxed{L^t}_n & \boxed{M}_n \end{bmatrix}$ в $F(\mathbb{C}^n)$, где через $\boxed{Z}$ обозначен левый верхний угол размера $n \times n$ матрицы Z.

Предложение I.4. Оператор B ограничен тогда и только тогда, когда операторы B_n равномерно ограничены, причем $\|B\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|B_n\|$.

Доказательство. Пусть P_n – проектор в $F(\ell_2)$ на пространство функций, зависящих лишь от первых n координат. Это пространство естественно отождествлять с $F(\mathbb{C}^n)$. Несложно проверить, что

$$P_n B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix} P_n = B\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{K}_n & & \boxed{L}_n & \\ & 0 & & 0 \\ \hline \boxed{L^t}_n & & \boxed{M}_n & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Ограничение этого оператора на $F(\mathbb{C}^n)$ есть оператор B_n. Отсюда, в частности, следует, что $\|B_n\| \leq \|B\|$, и, тем самым ограниченность B влечет равномерную ограниченность B_n. С другой стороны, равномерная ограниченность $P_n B P_n$ влечет ограниченность B на всюду плотном множестве $\bigcup F(\mathbb{C}^n)$, а, тем самым, и ограниченность B, равенство $\|B\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|P_n B P_n\|$ теперь тоже очевидно.

I.I0. Примеры. а) $B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ – единичныйоператор.

б) $B\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ – проектор на вектор $f(z) = 1$

в) $B\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{bmatrix}$ – это оператор замены переменной $f(z) \to f(Lz)$.

г) $B\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} f(z) = \langle f, b[M] \rangle b[K]$

§2. Симплектическая категория и представление Вейля.

Цель этого параграфа – выяснить, какая алгебраическая структура стоит за операторами $B[S]$.

2.I. Линейные отношения. Пусть V и W – линейные пространства. Линейным отношением $P : V \rightrightarrows W$ называется произвольное подпространство в $V \oplus W$. Иногда линейные отношения оказываются графиками операторов, но вообще говоря, это не так. Мы будем рассматривать линейные отношения как графики быть может, не всюду определенных, и, быть может, многозначных операторов. Как и у оператора, у линейного отношения P можно определить

I) Ядро $\operatorname{Ker} P = \{ v \in V : (v, 0) \in P \}$

2) Образ $\operatorname{Im} P = \{ w \in W : \exists\, v \in V$ такое, что $(v, w) \in P$.

3) Область определения $\mathcal{D}(P) = \{ v \in V : \exists\, w \in W$

такое, что $(v, w) \in P$.

Кроме того, мы определим неопределенность P :

4) $\mathrm{Ind}\, P = \{w \in W : (0, w) \in P\}$

5) $\mathrm{rk}(P) = \dim \mathcal{D}(P) - \dim \mathrm{Ker}(P)$ (если V и W конечномерны).

Пусть $P : V \rightrightarrows W$, $Q : W \rightrightarrows Y$ - линейные отношения. Тогда определено их произведение $QP : V \rightrightarrows Y$, оно состоит из тех пар $(v, y) \in V \oplus Y$, для которых существует $w \in W$ такое, что $(v, w) \in P, (w, y) \in Q$.

2.2. Симплектические линейные отношения. Пусть линейные комплексные пространства V и W снабжены невырожденными кососимметрическими билинейными формами Λ_V и Λ_W (такие пространства мы будем называть симплектическими).

Рассмотрим в их прямой сумме $V \oplus W$ форму

$$\Lambda_{V\oplus W}((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \Lambda_V(v_1, v_2) - \Lambda_W(w_1, w_2) \tag{2.1}$$

Мы назовем линейное отношение $P : V \rightrightarrows W$ симплектическим, если P - максимальное изотропное пространство (= лагранжево) в $V \oplus W$. Мы будем также говорить, что P сохраняет форму Λ.

Пример. Пусть $V = W$ - конечномерное пространство. Пусть $A : V \to V$ - симплектический оператор, т.е. элемент $Sp(2n, \mathbb{C})$. Тогда график оператора A является симплектическим отношением. В этом случае группа $Sp(2n, \mathbb{C})$ плотна в множестве всех симплектических отношений. Стоит заметить, что если $\dim V \neq \dim W$, то разумного понятия "симплектического оператора" $V \to W$ не существует.

Лемма 2.I. Пусть $P : V \rightrightarrows W$, $Q : W \rightrightarrows Y$ - симплектические линейные отношения. Тогда QP - симплектическое линейное отношение.

Доказательство. Рассмотрим пространство $H = V \oplus W \oplus \oplus W \oplus Y$, снабженное кососимметричной билинейной формой

$$M((v_1, w_1, w_2, y), (v_1', w_1', w_2', y)) = \Lambda_V(v, v') - -\Lambda_W(w_1, w_1') + \Lambda_W(w_2, w_2') - \Lambda_Y(y, y')$$

Пусть Z – множество всех векторов вида (v, w, w, y). Легко видеть, что Z коизотропно (т.е. $Z^\perp \subset Z$, через $Z^\perp$ обозначено ортогональное дополнение относительно формы M). Далее рассмотрим подпространство $P \oplus Q$ в H, состоящее из всех векторов (v, w_1, w_2, y) таких, что $(v, w_1) \in P$, $(w_2, y) \in Q$. Тогда QP есть, по определению, проекция $Z \cap (P \oplus Q)$ на $V \oplus Y$.

Теперь заметим, что если в симплектическом пространстве L подпространство K – лагранжево, а N – коизотропно, то $(N \cap K)/(N^\perp \cap K)$ – лагранжево подпространство в $N/N^\perp$. Лемма доказана ($L = H$, $N = Z$, $L = P \oplus Q$, $N/N^\perp = V \oplus Y$) $\boxtimes$

2.3. Симплектическая категория Sp : конечномерный случай. Объектом категории является комплексификация V конечномерного вещественного линейного пространства $V_{\mathbb{R}}$, снабженного кососимметричной билинейной формой λ_V. Продолжая λ_V в V по билинейности, мы получаем в V билинейную кососимметричную форму Λ_V. С другой стороны, продолжая форму $i\lambda_V$ в V по полуторалинейности, мы получаем в V невырожденную эрмитову форму Θ (положительный и отрицательный индексы инерции Θ равны).

Морфизмом $P: V \to W$ мы назовем линейное отношение $P: V \rightrightarrows W$, удовлетворяющее условиям:

I. P сохраняет симплектическую форму Λ (см. п...2), в частности, если $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in P$, то $\Lambda_V(v_1, v_2) = \Lambda_W(w_1, w_2)$.

2. P "сжимает" форму Θ, т.е. если $(v, w) \in P$, то $\Theta_V(v, v) \geq \Theta_W(w, w)$

3. Если $v \in \mathrm{Ker}\, P$, то $\Theta_V(v, v) > 0$, если $w \in \mathrm{Ind}\, P$, то $\Theta\ (w, w) < 0$

Наконец, произведение морфизмов категории Sp мы определим как произведение линейных отношений. Лемма 2.I. обеспечивает корректность определения.

Замечание I. Условие 3 чуть-чуть усиливает условие 2.

Замечание 2. Введем в $V \oplus W$ эрмитову форму

$$\Theta_{V\oplus W}((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \Theta_V(v_1, v_2) - \Theta_W(w_1, w_2) \tag{2.2}$$

Тогда условие 2 означает, что форма $\Theta_{V\oplus W}$ неотрицательно определена на P (из соображений размерности ясно, что P – максимальное попространство, на котором форма $\Theta_{V\oplus W}$ неотрицательно определена).

Замечание 3. Множество $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Mor}(V, V)$ образует полугруппу по умножению. Обратимые элементы этой полугруппы, как легко видеть, в точности образуют группу $Sp(2n, \mathbb{R})$, где $\dim V = 2n$. Пересечение $\Gamma Sp(V)$ группы $Sp(2n, \mathbb{C})$ с $\mathrm{End}(V)$ состоит из симплектических операторов A, удовлетворяющих условию

$$\Theta_V(Av, Av) \leq \Theta_V(v, v)$$

Полугруппа $\Gamma Sp(V)$ образует подполугруппу с непустой внутренностью в $Sp(2n, \mathbb{C})$ (о подобных полугруппах см. [44]).

Отметим также, что $\Gamma Sp(V)$ плотна в V.

Замечание 4. Пусть $P \in Mor(V, W)$. Тогда $\dim P = \frac{1}{2}(\dim V + \dim W)$. Итак, если размерности V и W различны, то P не может быть графиком оператора.

2.4. Преобразование Потапова-Гинзбурга.

Пусть $P: H_1 \oplus H_2 \rightrightarrows X_1 \oplus X_2$ - линейное отношение. Тогда тоже самое подпространство P можно рассматривать как линейное отношение $H_1 \oplus X_2 \rightrightarrows H_2 \oplus X_1$. Итак, мы получили биекцию из множества линейных отношений $H_1 \oplus H_2 \rightrightarrows X_1 \oplus X_2$ в множество линейных отношений $H_1 \oplus X_2 \rightrightarrows H_2 \oplus X_1$. Эта биекция иногда называется преобразованием В.П.Потапова - Ю.П.Гинзбурга, см. [2] (в ситуации, обсуждаемой ниже его можно также назвать производящей функцией).

Пусть V - объект Sp, пусть $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ - канонический базис в $V_{\mathbb{R}}$:

$$\lambda_V(p_k, p_l) = \lambda_V(q_k, q_l) = 0\ ;\ \lambda_V(p_k, q_l) = \delta_{kl}$$

Рассмотрим базис

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_k - i q_k)\ ;\ f_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_k + i q_k) \tag{2.3}$$

в $V_{\mathbb{C}}$. Легко видеть, что

$$\Lambda_V(e_k, e_l) = \Lambda_V(f_k, f_l) = 0\ ;\ \Lambda_V(e_k, f_l) = 0$$

Относительно же формы Θ векторы e_k, f_l попарно ортогональны, причем

$$\Theta_V(e_k, e_k) = +1 \qquad \Theta_V(f_k, f_k) = -1$$

Пусть теперь V_+ и V_- - подпространства в V, натянутые соответственно на все векторы e_k и на все векторы f_k.

Предложение 2.I. Пусть $P \in Mor(V, W)$. Тогда P является графиком оператора $V_+ \oplus W_- \to V_- \oplus W_+$, причем матрица $S = S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ этого оператора удовлетворяет условиям

I. S симметрична $(S = S^t)$

2. $\| S \| \leq 1$

3. $\| K \| < 1, \| M \| < 1$.

Обратно, если матрица удовлетворяет условиям I – 3, то она имеет вид $S(P)$, где $P \in Mor(V, W)$ ∎

Лемма 2.2. Пусть H_1, H_2 – евклидовы пространства. Пусть $H_1 \oplus H_2$ снабжено эрмитовой формой

$$\Theta((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = \langle h_1, h_1' \rangle - \langle h_2, h_2' \rangle$$

Следующие утверждения эквивалентны:

а) $Q \subset H_1 \oplus H_2$ – максимальное подпространство в $H_1 \oplus H_2$, на котором форма Θ положительно определена.

б) Q – график оператора $A: H_1 \to H_2$, причем $\| A \| < 1$. ∎

Доказательство леммы очевидно (см. [55]).

Перейдем к доказательству предложения. Применим лемму в случае $H_1 = V_+ \oplus W_-$, $H_2 = V_- \oplus W_+$, $Q = P$, а форма Θ задается формулой (2.2). Тогда мы сразу получаем, что P – график некоторого оператора $S(P)$ и $\| S(P) \| \leq 1$. Симметричность матрицы $S(P)$ эквивалентна лагранжевости подпространства P (это общеизвестный факт симплектической геометрии, см. например, [81]). Утверждение 3 эквивалентно условию 3 из предыдущего пункта. В самом деле, допустим $\| M \| = 1$.

Тогда существует вектор $\omega_+ \in W_+$ такой, что

$$\| M\omega_+ \| = \| \omega_+ \| \neq 0 \tag{2.4}$$

Но $\| S(P) \| \leq 1$, а поэтому $L\omega_+ = 0$. Рассмотрим вектор $M\omega_+ \oplus \omega_+ \in W_- \oplus W_+$. В силу (2.2) он изотропен относительно Θ, а в силу $L\omega_+ = 0$ он содержится в $\operatorname{Ind} P$, тем самым условие 3 предыдущего пункта не выполнено. Ясно, что это рассуждение обратимо и ясно, что оно применимо и к матрице K. $\boxtimes$

<u>Замечание</u>. Пусть $V = W$. Пусть P является графиком оператора в пространстве V. Запишем его матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$. Тогда

$$S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA^{-1} & A^{t-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}B \end{pmatrix}$$

Если P - график оператора из $Sp(2n, \mathbb{R})$, то матрица $S(P)$ унитарна (верно и обратное). Если $P \in \Gamma Sp$ (см. замечание 3 из предыдущего пункта), то блок L обратим (верно и обратное). $\bullet$

<u>Предложение 2.2</u>. Пусть $T_1 \in \operatorname{Mor}(V, W)$, $T_2 \in \operatorname{Mor}(W, Y)$. Пусть

$$S(T_1) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \qquad S(T_2) = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix}$$

Тогда

$$S(T_1 T_2) = \begin{pmatrix} K + LP(1-MP)^{-1}L^t & L(1-PM)^{-1}Q \\ Q^t(1-MP)^{-1}L^t & R + Q^t(1-MP)^{-1}MQ \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ w_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ w_+ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} w_+ \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_- \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Выражая v_+, y_- через v_-, y_+ мы получаем искомую формулу.

Замечание. Мы видим, что формулы (2.5) и (I.I0) для "извращенного" умножения матриц совпадают.

2.5. Представление Вейля категории Sp.

Пусть V – объект категории Sp, рассмотрим разложение $V = V_+ \oplus V_-$ и рассмотрим бозонное пространство Фока $F(V_+)$. Чтобы иметь возможность записывать ядра, мы должны ввести в V_+ операцию сопряжения. Удобнее всего считать, что $\overline{\sum \alpha_j e_j} = \sum \overline{\alpha_j} e_j$, где e_j определены формулой (2.3).

Пусть $T \in Mor(V, W)$. Пусть $S = S(T)$ – его преобразование Потапова-Гинзбурга. Пусть $We(T) : F(V_+) \to F(W_+)$ оператор, задаваемый формулой $We(T) = B[S(T)]$. Как уже упоминалось в п.I.5, этот оператор ограничен.

Теорема 2.I. Пусть $T_1 \in Mor(V, W)$, $T_2 \in Mor(W, Y)$. Тогда

$$We(T_2 T_1) = c\, We(T_2)\, We(T_1)$$

где C – ненулевое комплексное число. Иными словами, $T \mapsto We(T)$ – проективное представление категории Sp. ∎

Теорема, в сущности, уже доказана: она получается объединением теоремы I.I и предложения 2.2.

Замечание. Ограничение этого представления на группу $Sp(2n,\mathbb{R})$ - это обычное представление Вейля группы $Sp(2n,\mathbb{R})$. В этом случае операторы $We(T)$ унитарны, с точностью до умножения на константу.

2.6. Симплектическая категория: бесконечномерный случай.

Мы хотим добавить к Sp бесконечномерные объекты. Для этого нам будет удобно чуть-чуть изменить определение Sp. Объектом V симплектической категории $\overline{Sp}$ мы назовем комплексное гильбертово пространство V, в котором

1. Зафиксировано разложение в прямую сумму $V = V_+ \oplus V_-$
2. Фиксирована антилинейная изометрия $I : V_+ \to V_-$.

Нам будет удобно считать (но это уже не входит в определение объекта), что в V_+ и V_- выбраны базисы e_i, f_j такие, что $Ie_i = f_i$.

Определим в V эрмитову индефинитную форму

$$\Theta_V((v_+, v_-),(v_+', v_-')) = \langle v_+, v_+' \rangle - \langle v_-, v_-' \rangle \tag{2.6}$$

и кососимметричную билинейную форму

$$\Lambda_V((v_+, v_-),(v_+', v_-')) = \langle v_-, Iv_+' \rangle - \langle v_-', Iv_+ \rangle \tag{2.7}$$

По сравнению с п.2.4, мы фиксировали в V разложение в прямую сумму $V_+ \oplus V_-$. Эта новая структура не существенна в случае $\dim V < \infty$.

Морфизмом $P : V \to W$ мы назовем линейное отношение такое, что его преобразование Потапова-Гинзбурга $S(P) = S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям

1. $S = S^t$

2. $\|S\| \leqslant 1$

3. $\|K\| < 1$, $\|M\| < 1$

4. K, M – операторы Гильберта-Шмидта (если хотя бы одно из пространств V, W конечномерно, это условие выполняется автоматически).

Полезно иметь в виду, что морфизм P, удовлетворяет, в частности, условиям I и 3 из п.2.3.

Морфизмы умножаются как линейные отношения. Формула для умножения морфизмов (2.5) выводится точно также. Из нее, в частности, следует, что произведение морфизмов – снова морфизм (см. доказательство теоремы I.I).

Теорема 2.2. Поставим в соответствие каждому $V \in Ob(\overline{Sp})$ бозонное пространство Фока $F(V_+)$, а каждому морфизму $P: V_1 \to V_2$ оператор $We(P) = B[S(P)]$. Тогда $P \mapsto We(P)$ – представление категории $\overline{Sp}$.

Эта теорема доказывается точно также, как теорема 2.I.

2.7. Группа $Aut(V)$. Пусть $V \in Ob(\overline{Sp})$. Если морфизм $P: V \to V$ обратим, то, очевидно, P должен быть графиком оператора $V \to V$.

Предложение 2.3. а) Элемент $P \in End(V)$ обратим тогда и только тогда, когда P является графиком оператора A_P, сохраняющего симплектическую форму Λ_V, матрица которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

причем Ψ – оператор Гильберта-Шмидта.

б) Элемент $P \in Mor(V, W)$ обратим тогда и только тогда, когда матрица $S(P)$ унитарна.

Доказательство. б) Обозначим второй экземпляр пространства V через V'. Линейное отношение $P: V \rightrightarrows V'$ "сжимает" эрмитову форму Θ_V, обратное линейное отношение тоже долэно сжимать форму Θ_V, тем самым P должно сохранять форму Θ_V, т.е. если $(v, w) \in P$, то $\Theta_V(v,v) = \Theta_{V'}(w,w)$. Но это значит, что $P \subset V \oplus V'$ изотропно относительно формы $\Theta_{V \oplus W}$, а значит, P – график униатрного оператора $S(P): V_+ \oplus V'_- \to V_- \oplus V'_+$. Обратно, пусть матрица $S(P) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ унитарна. Тогда обратный к P элемент Q может быть записан явно, а именно

$$S(Q) = \begin{pmatrix} \overline{M} & \overline{L}^t \\ \overline{L} & \overline{N} \end{pmatrix}.$$

а) Пусть P обратим. Так как $S(P)$ унитарна, а $\|K\| < 1, \|M\| < 1$, то блок L матрицы $S(P)$ обратим. Отсюда вытекает, что P является графиком оператора $A_P: V \to V$, этот оператор задается матрицей

$$\begin{pmatrix} L^{t-1} & -L^{t-1} \\ KL^{t-1} & L - KL^{t-1}N \end{pmatrix},$$

Из явного вида оператора, во-первых, видно, что он ограничен, а во-вторых видно, что блоки, стоящие на побочной диагонали являются операторами Гильберта-Шмидта.

Как было показано в доказательстве утверждения б) оператор A_P сохраняет форму Θ_V, кроме того, он сохраняет форму Λ_V. Эти две формы связаны соотношением

$$\Lambda_V(v, w) = \Theta_V(v, Hw)$$

где оператор H задается равенством

$$H(w_+, w_-) = (I^{-1} w_-, I w_+)$$

Таким образом, A_p должен коммутировать с I, а это и означает, что матрица должна иметь вид (2.8) $\boxtimes$

Замечание. Оператор A_p имеет вид (2.8), а поэтому переводит вещественное пространство $V_{\mathbb{R}}$ всех векторов вида $(v, \bar{v}) = (v, Iv)$ в себя. Ограничение формы Λ_V на $V_{\mathbb{R}}$ являетсяявещественной невырожденной кососимметричной формой, и оператор $(A_p)_{\mathbb{R}}$ - ограничение оператора A_p на $V_{\mathbb{R}}$ сохраняет эту форму. Легко видеть, что в случае $\dim V = 2n < \infty$ операторы $(A_p)_{\mathbb{R}}$ образуют в точности полную симплектическую группу $Sp(2n, \mathbb{R})$ пространства V. Если $\dim V = \infty$, это уже не так (из-за того, что ψ - оператор Гильберта-Шмидта). Группа $Aut(V)$ всех операторов вида (2.8) - это так называемая группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений.

2.8. Автоморфизмы канонических коммутационных соотношений. Пусть $V \in Ob(\overline{Sp})$. Выберем в V_+ и V_- базисы e_i, f_j так, что $Ie_i = f_i$. Пусть $v \in V$, пусть $(v_1^+, v_2^+, \ldots, v_1^-, v_2^-, \ldots)$ - координаты v в этом базисе. Определим операторы $\widehat{a}(v)$ рождения-уничтожения в $F(V_+)$ по формуле

$$\widehat{a}(v) f = \Big(\sum_j v_j^+ z_j - \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial z_j}\Big) f$$

Легко видеть, что

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)] = \Lambda(v,w)\cdot 1$$

$$\hat{a}(v_+, v_-)^* = -\hat{a}(\bar{v}_-, \bar{v}_+)$$

$$[\hat{a}(v), \hat{a}(w)^*] = \Theta(v,w)\cdot 1$$

Классическая задача об автоморфизмах канонических коммутацион-соотношений состоит в следующем. Для каких операторов $A: V \to V$ существует оператор $Q(A): F(V_+) \to F(V_+)$ такой, что для любого $v \in V$ выполнено

$$\hat{a}(Av) = Q(A)\hat{a}(v)Q(A)^{-1}$$

Эта задача интенсивно исследовалась в математической физике в 50[ых] - начале 60[ых] годов. (К.О. Фридрихс, И.Сигал и др.). Окончательноый ответ был получен независимо Д.Шейлом [88] и Ф.А.Березиным [4]. В нашей терминологии ответ формулируется следующим образом: A должен содержаться в $Aut(V)$. Формула Березина для $Q(A)$ в наших обозначениях переписываться в виде

$$Q(A) = B\begin{bmatrix} \bar{\Psi}\Phi^{-1} & \Phi^{t-1} \\ \Phi^{-1} & -\Phi^{-1}\Psi \end{bmatrix}$$

(см. (2.8))

2.9. Морфизмы канонических коммутационных соотношений.

Пусть $V, W \in Ob(\overline{Sp})$. Пусть $P \in Mor(V,W)$. Тогда оператор $We(P)$ (см. теорему 2.2) удовлетворяет равенству

$$\hat{a}(\omega)We(P)=We(P)\hat{a}(\upsilon) \tag{2.9}$$

для любых $(\upsilon,\omega)\in P$.

Проверим это, в сущности, очевидное (после того, как оно сформулировано) высказывание. Обозначим через $H(z,\bar{u})$ выражение

$$exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar{u})\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \bar{u}\end{pmatrix}\right\}$$

В левой части равенства (2.9) стоит выражение

$$\hat{a}(\omega)\iint H(z,\bar{u})\times$$
$$\times f(u)d\mu(u)=\iint\left(\sum\omega_j^+z_j-\sum\omega_j^-\frac{\partial}{\partial z_j}\right)H(z,\bar{u})f(u)d\mu(u) \tag{2.10}$$

В правой части стоит выражение

$$\iint H(z,\bar{u})\left(\sum\upsilon_j^+u_j-\sum\upsilon_j^-\frac{\partial}{\partial u_j}\right)f(u)d\mu(u)=$$
$$=\iint\left(\sum\upsilon_j^+\frac{\partial}{\partial\bar{u}_j}-\sum\upsilon_j^-\bar{u}_j\right)H(z,\bar{u})f(u)d\mu(u) \tag{2.11}$$

Т.е. нужно проверить, что ядро $K(z,\bar{u})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\sum\omega_j^+z_j-\sum\omega_j^-\frac{\partial}{\partial z_j}+\sum\upsilon_j^-\bar{u}_j-\sum\upsilon_j^+\frac{\partial}{\partial\bar{u}_j}\right)K(z,\bar{u})=0$$

Левая часть этого равенства равна

$$\Big(\sum_j \Big[\omega_j^+ - \sum_i \omega_i^- k_{ij} - \sum_i v_i^+ l_{ij}\Big] z_j +$$

$$+ \sum_j \Big[v_j^- - \sum_i \omega_i^- l_{ij} - \sum_i v_i^+ m_{ij}\Big] \bar{u}_j\Big) H(z,\bar{u})$$

Но в силу $(v,\omega)\in P$ выражения в квадратных скобках равны 0, и на уровне формальных вычислений равенство (2.9) проверено. Здесь, однако, необходимо соблюсти некоторую аккуратность. Дело в том, что как в левой, так и в правой части (2.9), вообще говоря, стоит произведение неограниченных операторов, и, поэтому, пока неясно, имеет ли вообще смысл равенство (2.9).

Обозначим через $F^0(H)\subset F(H)$ пространство всех конечных линейных комбинаций выражений вида

$$g(z) = \Big(\prod_{j=1}^{K} (z,\bar{a}_j)\Big) exp\Big\{\frac{1}{2} zTz^t + z\alpha^t\Big\} \qquad (2.12)$$

где a_j, $\alpha\in H$, а T - оператор Гильберта-Шмидта, $\|T\|<1$. Ясно, что $F^0(H)$ плотно в $F(H)$, и что $F^0(H)$ инвариантно относительно всех операторов рождения-уничтожения.

<u>Предложение 2.4</u>. Рассмотрим оператор $B[S]:$ $F(H_1)\to F(H_2)$. Тогда $B[S](F^0(H_1))\subset$ $\subset F^0(H_2)$

<u>Теорема 2.3</u>. Пусть $P\in Mor(V,W)$. Тогда для любых $(v,\omega)\in P$ и для любого $f\in F^0(V_+)$ выполнено

$$\hat{a}(\omega)We(P)f = We(P)\hat{a}(v)f$$

<u>Доказательство предложения 2.4.</u> Достаточно доказать, что

образ любого вектора $g(z)$ вида (2.I2) содержится в $F^0(H_2)$. Пусть $s_j \in \mathbb{R}$ и пусть

$$P_{s_1,\dots,s_k}(z) = exp\{\frac{1}{2} zTz^t + z\alpha^t + \sum_{j=1}^{k} s_j z\bar{a}_j^t\}$$

Тогда

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial s_1}\cdots\frac{\partial}{\partial s_k} P_{s_1,\dots,s_k}(z)\Big|_{s_1=s_2=\dots=0}$$

Применим к обеим частям равенства оператор $B[S] = B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M \end{bmatrix}$:

$$B[S]g(z) = B[S]\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\cdots\frac{\partial}{\partial s_k} P_{s_1,\dots,s_k}(z)\Big|_{s_1=s_2=\dots=0}\right) = \tag{2.13}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s_1}\cdots\frac{\partial}{\partial s_k}\left(B[S] P_{s_1,\dots,s_k}(z)\right)\Big|_{s_1=s_2=\dots=0}$$

Равенство (2.I3) мы обоснуем чуть позже. Используя (I.9) мы получаем, что выражение (2.I3) равно

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\cdots\frac{\partial}{\partial s_k}\Big[det(1-MT)^{-1/2} exp\{-\frac{1}{2}(\alpha + \sum s_j a_j)\times$$

$$\times T(\alpha^t + \sum s_j \alpha_j^t)\} exp\{\frac{1}{2} z(K + LT(1-MT)^{-1}L^t)z^t +$$

$$+ L(1-PM)^{-1}(\alpha^t + \sum s_j a_j^t)\}\Big]\Big|_{s_1=s_2=\dots=0}$$

Легко видеть, что это выражение лежит в $F^0(H_2)$. Остается обосновать корректность перестановки дифференцирования по параметру и ингегрирования в (2.I3).

Здесь нам единственный раз понадобится аккуратное описание гауссовой меры на ℓ_2 (подробности см. в [59], [54]) Эта мера, как известно, сосредоточена не на самом ℓ_2 ., а на пространстве $\mathbb{C}^\infty$, содержащем ℓ_2, и является произведением гауссовых мер на $\mathbb{C}$ с плотностями $\frac{1}{\pi} exp(-z_i \bar{z}_i) dz_i d\bar{z}_i$ Функции из $F(\ell_2)$ продолжаются канонически до функций на $\mathbb{C}^\infty$ определённых почти всюду, скалярное произведение в $F(\ell^2)$ совпадает тогда со скалярным произведением в $L^2(\mathbb{C}^\infty)$

<u>Лемма 2.3</u>. Пусть $Q(x) \in L^1(\mathbb{C}^\infty)$. Пусть для любых $b, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \ell_2$ выполнено

$$\prod_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} x_i\Big) exp\Big(\sum b_i x_i\Big) Q(x) \in L^1(\mathbb{C}^\infty)$$

Тогда

$$\frac{d}{ds_1} \cdots \frac{d}{ds_n} \int Q(x) exp\Big(\sum_{j=1}^{n} s_j \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} x_i\Big)\Big) d\mu(x) \Big|_{s_1 = \ldots = 0} =$$

$$= \int Q(x) \prod_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\Big) d\mu(x)$$

<u>Доказательство</u>. Достаточно разобрать случсай $n=1$. Для этого нужно обосновать предельный переход в

$$\lim_{s \to 0} \int \frac{1}{s}\Big(Q(x) exp\Big(s \sum a_i x_i\Big) - Q(x)\Big) d\mu(x) =$$

$$= \int \frac{d}{ds}\Big[Q(x) exp\Big(s \sum a_i x_i\Big)\Big]\Big|_{s=0} d\mu(x)$$

Применим теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Подинтегральное выражнние в левой части равенства не превосходит

$$\frac{1}{s}\Big| Q(x) \max_{0 \le s \le \varepsilon} \Big(\frac{d}{ds} exp\Big(s \sum a_i x_i\Big)\Big)\Big| \le$$

$$\le |Q(x)| + \Big|Q(x) exp\Big(\varepsilon \sum a_i x_i\Big)\Big(\sum a_i x_i\Big)\Big| \in L^1(\mathbb{R}^\infty)$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Достаточно обосновать вычисления (2.I0) и (2.II) в случае $f \in F^0(H)$. Корректность дифференцирования интеграла в (2.I0) вытекает из той же леммы 2.3 и того, что подинтегральное выражение лежит в $F^0(H)$. Равенство

$$\iint f(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial u_i} g(u)\, d\mu(u) =$$

$$= \iint \bar{u}_i f(\bar{u})\, g(u)\, d\mu(u)$$

верно для любых f и g таких, что f, g, $\frac{\partial g}{\partial u_i}$, $u_i f$ $\in F(H)$ (это равенство, в сущности и утверждает, что $\partial/\partial u_i$ и u_i сопряжены, в нем проще всего убедиться, разложив f и g в ряд Тейлора по u). Таким образом, и (2.II) корректно.

§3 Симплектическая категория и симметрические пространства.

Конструкция п.3.I. очень существенна, пп.3.3 - 3.5 содержат ряд лемм для §4.

3.I. Функтор Крейна-Шмульяна. Пусть V - объект $\overline{Sp}$. Пусть $H(V) = \mathrm{Mor}(0, V)$. Тогда для любого морфизма $P: V \to W$ определено отображение $\nu(P): H(V) \to H(W)$

$$\nu(P)Q = PQ$$

где $Q \in H(V)$ (через 0 обозначен нульмерный объект $\overline{Sp}$)

Применим преобразование Потапова-Гинзбурга к

$$S=\begin{pmatrix}0 & 1-\varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}(1-\varepsilon)^2K & (1-\varepsilon)^{-1}L\\ (1-\varepsilon)^{-1}L^t & M\end{pmatrix}$$

причем второй сомножитель все еще является преобразованием Потапова-Гинзбурга, морфизма P'_ε категории $\overline{Sp}$. Отображение $\zeta(P'_\varepsilon)$ не увеличивает расстояние. Нам нужно доказать, что отображение $\mathcal{Z}_\infty$ в себя, соответствующее матрице $\begin{pmatrix}0 & 1-\varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix}$ является сжимающим. Это отображение задается формулой

$$A_\varepsilon(T)=(1-\varepsilon)^2T \tag{3.4}$$

Лемма 3.4. Отображение (3.4) - сжимающее.

Доказательство. Покажем, что

$$\rho((1-\varepsilon)^2T_1,(1-\varepsilon)^2T_2)\leq(1-\varepsilon)^2\rho(T_1,T_2)$$

Это достаточно проверить для областей $\mathcal{Z}_n$. Как и раньше, мы можем провести эту проверку на уровне римановых метрик. Итак, пусть $T\in\mathcal{Z}_n$. Без ограничения общности можно считать, что $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$. Риманова метрика в точке T задается формулой

$$ds^2=\sum\frac{dt_{ij}\,d\overline{t}_{ij}}{(1-\lambda_i^2)(1-\lambda_j^2)}$$

После применения преобразования $T\mapsto(1-\varepsilon)^2T$ это выражение пререйдет в

$$(1-\varepsilon)^4\sum\frac{dt_{ij}\,d\overline{t}_{ij}}{(1-\lambda_i^2)(1-\lambda_j^2)}$$

а риманова метрика в точке $(1-\varepsilon)^2T$ задается формулой

$Q \in Mor(0, V)$. Тогда $Mor(0, V)$ перейдет в множество $\mathcal{Z}(V)$ всех симметричных матриц Гильберта-Шмидта с нормой <1 . Если $\dim V = 2n < \infty$, то $\mathcal{Z}(V)$ - одна из моделей эрмитова симметрического пространства $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$ (см. [48]). Реализуем $Sp(2n, \mathbb{R})$ как множество матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, сохраняющих кососимметричную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (см. п.2.7). Группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ действует на $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}(V)$ биголоморфными автоморфизмами вида

$$T \mapsto (\Phi T + \Psi)(\overline{\Psi} T + \overline{\Phi})^{-1} \qquad (3.1)$$

Стабилизатором точки $T = 0$ является подгруппа всех матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \\ & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$, это и есть $U(n)$. Если $\dim V = \infty$, то группа $Aut(V)$ также действует на $\mathcal{Z}(V)$ преобразованиями вида (3.I).

Пусть теперь $P \in Mor(V, W)$, пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ - его преобразование Потапова-Гинзбурга. Соответсвующее отображение $\zeta(P) : \mathcal{Z}(V) \to \mathcal{Z}(W)$ задается формулой

$$\zeta(P) T = K + LT(1 - MT)^{-1} L^t \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) - частный случай формулы (2.5). В частности, мы получаем, что $\| \zeta(P) T \| < 1$. Отображения вида (3.I) были введены М.Г.Крейном, они называются обощенно дробнолинейными. Таким образом, мы получили функтор из категории $\overline{Sp}$ в категорию симметрических пространств ("матричных шаров") и обобщенно дробно-линейных отображений.

3.2. О норме $\zeta(P)T$.

Теорема 3.I. Пусть $S=\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}=S^t$ блочный оператор $V_+\oplus W_-\to$ $\to V_-\oplus W_+$. Пусть T - оператор $V_-\to V_+$. Пусть $\|S\|\leqslant 1$, $\|K\|<1$, $\|M\|<1$, $\|T\|\leqslant 1$.

Пусть $\zeta(S)$ задается формулой (3.2). Тогда

а) $\|\zeta(S)T\|\leqslant 1$

б) Если $\|T\|<1$, то $\|\zeta(S)T\|<1$

в) Если $\|S\|<1$, то $\|\zeta(S)T\|<1$

Это утверждение, в сущности, принадлежащее Крейну и Шмульяну мы уже многократно использовали, и тем самым при доказательстве было бы опасно использовать ранее доказанные утверждения. Теперь становится ясен его геометрический смысл: утверждается, что преобразования вида (3.2) переводят матричный шар $\mathcal{Z}(V)$ в $\mathcal{Z}(W)$

Доказательство. а) Здесь мы можем просто сослаться на [55], где то же утверждение доказано в большей общности (там не предполагается, что $S=S^t$).

б) Рассмотрим преобразование $A_\varepsilon:\mathcal{Z}(V)\to\mathcal{Z}(V)$, переводящее T в $(1-\varepsilon)^2T$. Легко видеть, что $A_\varepsilon=\zeta\begin{pmatrix}0 & 1-\varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix}$. Далее

$$A_\varepsilon\circ\zeta\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}=\zeta\begin{pmatrix}(1-\varepsilon)^2K & (1-\varepsilon)L\\ (1-\varepsilon)L^t & M\end{pmatrix}$$

$$\zeta\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\circ A_\varepsilon=\zeta\begin{pmatrix}K & (1-\varepsilon)L\\ (1-\varepsilon)L^t & (1-\varepsilon)^2M\end{pmatrix},$$

Если $\|T\|<1$, то существует $T'\in\mathcal{Z}(W)$, такое, что $T=A_\varepsilon T'$ для некоторого $\varepsilon>0$.

$$\zeta\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} T = \zeta\begin{pmatrix} K & (1-\varepsilon)L \\ (1-\varepsilon)L^t & (1-\varepsilon)^2 M \end{pmatrix} T' =$$

$$= A_\delta \zeta \begin{bmatrix} (1-\delta)^{-2}K & \frac{1-\varepsilon}{1-\delta} L \\ \frac{1-\varepsilon}{1-\delta} L^t & (1-\varepsilon)^2 M \end{bmatrix} T'$$

При достаточно малых δ матрица в квадратных скобках все еще удовлетворяет условиям теоремы. Теперь мы применяем утверждение а).

в) Если $\|S\|<1$, то $\zeta(S)$ представимо в виде $A_\varepsilon \zeta(S')$, где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число, а S все еще удовлетворяет условиям теоремы.

<u>3.3. Геометрия пространств</u> $\mathcal{Z}_n = Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$. Пусть $V\in Ob(Sp)$, $\dim V = 2n$. Пусть $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}(V)$ – пространство всех комплексных симметрических матриц с нормой <1. Введем в $\mathcal{Z}_n$ риманову метрику (см. [48], §7)

$$ds^2 = \operatorname{tr}\left[(1-T^*T)^{-1} dT^* (1-TT^*)^{-1} dT\right]$$

инвариантную относительно группы $Sp(2n,\mathbb{R})$. Тогда расстояние ρ между точками $T_1, T_2 \in \mathcal{Z}_n$ считается по формуле (см. [48], §7)

$$\rho^2(T_1,T_2) = \frac{1}{8}\sum_k \ln^2 \frac{1+\sqrt{\tau_k}}{1-\sqrt{\tau_k}}\ ; \quad \tau_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – собственные числа матрицы

$$R(T_1,T_2) = (1-T_1^*T_1)^{-1}(1-T_1^*T_2)(1-T_2^*T_2)^{-1}(1-T_2^*T_1)$$

Отметим, что эти числа удовлетворяют условию $\lambda_k \geqslant 1$.

<u>Предложение 3.I</u>. Отображение $\zeta(P)$ не увеличивает расс-

тояния ρ , т.е.

$$\rho(\zeta(P)T_1, \zeta(P)T_2) \leq \rho(T_1, T_2)$$

Замечание. Это предложение следует из более сильной теоремы 22.I.

Доказательство. Это неравенство достаточно доказать на уровне римановой метрики ds^2 . Далее, так как ds^2 инвариантно относительно $Sp(2n,\mathbb{R})$, мы можем домножать P слева и справа на элементы $Sp(2n,\mathbb{R})$, неравенство будет оставаться в силе. Поэтому нам достаточно ограничиться случаем, когда $\zeta(P)0=0$ и показать, что дифференциал $\zeta(P)$ в 0 не увеличивает риманову метрику.

Итак $\zeta(P)0=0$, т.е. $\zeta(P)$ имеет вид

$$T \mapsto LT(1-MT)^{-1}L^t$$

а его дифференциал в нуле

$$dT \mapsto L(dT)L^t$$

Но $\|L\| \leq 1$ и утверждение становится очевидным.

3.4. Геометрия матричного шара $Z_\infty = Z(\ell_2)$.

Рассмотрим индуктивный предел $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n$ матричных шаров Z_n. В этом пределе по-прежнему определено расстояние ρ .Спрашивается, из чего состоит пополнение $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n$ относительно метрики ρ . В сущности, это вопрос о том, что считать бесконечномерным аналогом пространств $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$. Цель этого пункта - показать, что искомое пополнение в точности совпадает с пространством $Z(\ell_2)$. Введем в $Z(\ell_2)$ обычную топологию пространства операторов Гильберта-Шмидта. Она определяется метрикой

$$\rho_E^2(T_1,T_2)=tr\,(T_1-T_2)^*(T_1-T_2)$$

Лемма 3.I. Метрика $\rho(T_1,T_2)$ корректно определена на $\mathcal{Z}_\infty$, более того, функция $\rho(T_1,T_2)$ непрерывна в обычной топологии пространства операторов Гильберта-Шмидта.

Доказательство. Вместо матрицы $R(T_1,T_2)$ рассмотрим сопряженную к ней матрицу

$$W(T_1,T_2)=$$

$$=(1-T_1^*T_1)^{-\frac{1}{2}}(1-T_1^*T_2)(1-T_2^*T_2)^{-1}(1-T_2^*T_1)(1-T_1^*T_1)^{-1/2}$$

Эта матрица самосопряжена, следовательно, ее собственные числа вещественны, а с другой стороны, собственные числа $W(T_1,T_2)$ теже, что и у $R(T_1,T_2)$. Отображение

$$(T_1,T_2)\mapsto V(T_1,T_2)=W(T_1,T_2)-1$$

является непрерывным отображением из $\mathcal{Z}_\infty\times\mathcal{Z}_\infty$ в пространство ядерных самосопряженных операторов. Собственные числа матрицы $V(T_1,T_2)$ неотрицательны в конечномерном случае, т.е. в конечномерном случае $V(T_1,T_2)$ - положительно определенная матрица. Значит это так и в нашем случае. Далее отображение

$$M(V)=\sqrt{V(V+1)^{-1}}$$

является непрерывным отображением из пространства положительно определенных ядерных самосопряженных операторов в пространство самосопряженных операторов Гильберта-Шмидта. При этом

$M(V)<1$. Наконец

$$\rho(T_1, T_2)=\operatorname{tr} \ln^2\left[(1+M)(1-M)^{-1}\right]$$

а в правой части стоит непрерывная числовая функция. $\boxtimes$

Предложение 3.2. Пространство $\mathcal{Z}_\infty$ полно относительно метрики ρ .

Лемма 3.2.

$$\rho_E(T_1, T_2) \leq \rho(T_1, T_2)$$

Доказательство. В силу соображений непрерывности это неравенство достаточно проверить для пространств $\mathcal{Z}_n$, $n<\infty$. Тогда расстояние ρ_E отвечает римановой метрике

$$ds_E^2 = dT^* dT$$

а эта риманова метрика мажорируется метрикой ds^2 . Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть B_C - шар радиуса C с центром в 0 относительно метрики ρ . Тогда метрики ρ и ρ_E в шаре B_C эквивалентны.

Доказательство. То, что метрика ρ мажорирует метрику ρ_E уже доказано. Нам достаточно показать, что существует константа $\mathcal{D}$ зависящая от C , но не зависящая от n такая, что $\rho(T_1, T_2) \leq \mathcal{D}\rho(T_1, T_2)$ в любом шаре B_C в области $\mathcal{Z}_n$. Это неравенство достаточно доказать на уровне римановых метрик. Без ограничения общности можно считать, что $T \in B_C$ имеет вид $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$, причем $0 \leq \lambda_j < 1$ ([ ], §7).

В точке T риманова метрика ds^2 задается формулой

$$ds^2 = \sum \frac{dt_{ij}\, d\bar{t}_{ij}}{(1-\lambda_i)^2(1-\lambda_j^2)}$$

Тем самым длина вектора в смысле римановых метрик ds^2 и ds_E^2 не может отличаться более чем в $\left(1-(\max_j \lambda_j)^2\right)^{-2}$ раз. Лемма доказана.

<u>Доказательство предложения</u>. Нам достаточно показать, полноту шара B_C. Рассмотрим функцию

$$\psi(T)=\rho(0,T)=\left[\operatorname{tr}\ln^2((1-|T|)(1+|T|)\right]^{1/2}$$

определенную на множестве $\bar{\mathcal{Z}}_\infty$ всех матриц Гильберта-Шмидта с нормой $\leqslant 1$. Эта функция принимает значения в множестве $\mathbb{R}_+ \cup \infty$, где через $\mathbb{R}_+$ обозначено множество положительных чисел. Легко видеть, что эта функция непрерывна на всем $\bar{\mathcal{Z}}_\infty$ относительно метрики ρ_E (если $\|T_n\| \to 1$, то $\psi(T_n) \to \infty$, если $\|T_n\|=1$ и $T_n \to T$, то $\|T\|=1$). Поэтому шар B_C замкнут в метрике ρ_E в пространстве всех операторов Гильберта-Шмидта. Значит он полон относительно ρ_E, а, значит (по лемме 3.3) он полон и в метрике ρ.

<u>3.5. Отображения $\zeta(P)$ в $\mathcal{Z}_\infty$.</u>

<u>Предложение 3.3</u> а) $\rho(\zeta(P)T_1, \zeta(P)T_2) \leqslant \rho(T_1, T_2)$

б) Пусть $S = S(P)$ – преобразование Потапова-Гинзбурга отношения P. Если $\|S\|<1$, то $\zeta(S)$ - сжимающее отображение.

<u>Доказательство</u>. а) Следует из предложения 3.I.

б) Пусть $S=\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$. Если $\|S\|<1$, то S представимо в виде

$$\sum \frac{dt_{ij}\, d\bar{t}_{ij}}{(1-(1-\varepsilon)^2\lambda_i^2)(1-(1-\varepsilon)^2\lambda_j^2)}$$

Лемма доказана.

§4. Теоремы об ограниченности операторов $B[S]$.

<u>4.I. Формулировки теорем.</u> Пусть $S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям п.I.4.

<u>Теорема 4.I</u>. Если $\| S \| < 1$, то $B[S]$ - ограниченный оператор.

<u>Теорема 4.2</u>. Если K, M - ядерные операторы (= операторы со следом), то $B[S]$ - ограниченный оператор.

<u>4.2. Сведение теорем к самосопряженному случаю</u>.

Напомним, что умножению операторов $B[S_1]$, $B[S_2]$ отвечает умножение матриц S_1, S_2 "звездочкой", задаваемое формулой (I.IO). Напомним также, что формально сопряженный оператор к $B[S]$ - это оператор $B[S^{\circledast}]$, см. (I.II).

<u>Лемма 4.I</u>. а) Если $\| S \| < 1$, то $\| S^{\circledast} \| < 1$

б) Если $\| S_1 \| < 1$, $\| S_2 \| < 1$, то $\| S_1 * S_2 \| < 1$

<u>Доказательство.</u> а)

$$S^{\circledast} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{S} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

б) Когда мы при доказательстве теоремы I.I проверяли условие $\| S_1 * S_2 \| \leqslant 1$, мы использовали утверждение а) теоремы 3.I., теперь мы можем поступить точно так же, но использовать утверждение б) или в) теоремы 3.I. ☒

Лемма 4.2. а) Если S удовлетворяет условиям теоремы 4.2, то $S^{\circledast}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2.

б) Если S_1 , S_2 удовлетворяют условиям теоремы 4.2, то $S_1 * S_2$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2.

Доказательство: Очевидно.

Лемма 4.3. Оператор $B[S]$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен $B[S^{\circledast} * S]$

Доказательство. Пусть $B[S]$ неограничен. Тогда для любого $C>0$ существует вектор $\sigma=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j b[T_j|\alpha_j^t]$, такой, что $\|B[S]\sigma\|/\|\sigma\|>C$. Тогда, используя предложение I.2 получаем

$$\frac{\langle B[S^{\circledast}S]\sigma,\sigma\rangle}{\langle\sigma,\sigma\rangle}=\frac{\langle B[S]\sigma, B[S]\sigma\rangle}{\langle\sigma,\sigma\rangle}>C^2$$

т.е. $B[S^{\circledast}S]$ неограничен. Обратное утверждение очевидно.☒

Легко видеть, что $(A^{\circledast}A)^{\circledast}=A^{\circledast}A$

Поэтому нам достаточно доказать, теоремы 4.I и 4.2 в случае, когда $S^{\circledast}=S$ (тем самым, $B[S]$ действует из пространства $F(H)$ в себя).

4.3. Принцип неподвижной точки.

Теперь мы вспомним, что

$$B\begin{bmatrix} K & L \\ L^t & M\end{bmatrix} b[T]=\det\left((1-MT)^{-\frac{1}{2}}\right) b[K+LT(1-MT)^{-1}L^t]$$

(это частный случай леммы I.2). Отсюда сразу вытекает следующая лемма.

Лемма 4.4. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $b[T]$ - собственный вектор оператора $B[S]$

б) $T \in \mathcal{Z}(V)$ - неподвижная точка отображения

$$\zeta(S)T = K + LT(1-MT)^{-1}L^t$$

<u>Предложение 4.I.</u> Пусть $S = S^{\circledast}$. Пусть $b[T]$ - собственный вектор оператора $B[S]$. Тогда $B[S]$ ограничен. Более того,

$$\| B[S] \| = \det\left((1-MT)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.1}$$

<u>Лемма 4.5</u>. Группа $Aut(V)$ действует на области $\mathcal{Z}(V)$ транзитивно.

<u>Доказательство леммы.</u> Достаточно показать, что 0 можно перевести в любую другую точку $T \in \mathcal{Z}(V)$. Пусть $Q = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sqrt{1-T\overline{T}} \\ \sqrt{1-\overline{T}T} & \overline{T} \end{pmatrix}$, эта матрица удовлетворяет условиям п.I.4 и $\zeta(Q)(0) = T$. Кроме того Q унитарна, поэтому в силу предложения 2.3 б) обратное преобразование Потапова-Гинзбурга от Q содержится в $Aut(V)$.

<u>Доказательство предложения</u>. Мы хотим показать, что норма оператора $B[S]$ достигается на векторе $b[T]$. Пусть $Q \in Aut(V)$ таков, что $\zeta(Q)(0) = T$ и тем самым, $B[Q]b[0] = b[T]$. Рассмотрим оператор $B[Q]^{-1}B[S]B[Q]$, он имеет вид $\lambda B[S']$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, причем

$$B[S']b[0] = b[0] \tag{4.2}$$

а $(S')^{\circledast} = S'$. В силу равенства (4.2) матрица S' должна иметь вид $S' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$, а в силу того, что

$(S')^{\circledast}=S^{1}$ мы имеем $M=0$. Тем самым

$$B[S']f(z)=f(Lz)$$

Обозначим через S^kH k-ую симметрическую степень гильбертова пространства H . Тогда $F(H)=\bigoplus_{k=0}^{\infty} S^kH$, пространства S^kH состоят из однородных функций. Оператор $f(z)\mapsto f(Lz)$ оставляет инвариантным каждое из подпространств S^kH , причем в S^kH этот оператор действует как k-ая симметрическая степень оператора L . Но $\|L\|\leqslant 1$, значит норма его симметрических степеней $\leqslant 1$, а значит $\|B[S']\|=1$, она достигается на вакуумном векторе $b[0]$. Тем самым норма оператора

$$B[S]=\lambda^{-1}B[Q]\,B[S']\,B[Q]^{-1}$$

достигается на векторе $b[T]$
(мы воспользуемся тем, что $B[Q]$ унитарен с точностью до умножения на константу). $\boxtimes$

Пример. Пусть S - та же матрица, что в контрпримере п.I.5. Тогда уравнение $\zeta[S]T=T$ имеет единственное решение: $T=1$. Это решение нас не устраивает по двум причинам: I. Неверно, что $\|T\|<1$, 2. Неверно, что - оператор Гильберта-Шмидта. Теоремы о неподвижных точках дробно-линейных отображений на матричных шарах довольно популярны в теории несамосопряженных операторов в связи с теоремой Крейна об инвариантном подпространстве (см. [53] ,[2]). К сожалению, мы не можем непосредственно воспользоваться такими теоремами, потому что они дают неподвижные точки, которые нас не устраивают.

4.4. Доказательство теоремы 4.I. Отображение $\zeta[S]$ в этом случае - сжимающее (см. предложение 3.2) отображение полного (см предложение 3.3) метрического пространства $\mathcal{Z}(V)$ в себя. Теперь мы можем применить предложение 4.I.

4.5. Доказательство теоремы 4.2. Оно проще, чем доказательство теоремы 4.I, потому что не опирается на геометрию матричных шаров, обсуждавшуюся в §3.

Предложение 4.2. Пусть H конечномерно, $B[S]$ - оператор в $F(H)$, причем $S = S^{\circledast}$. Тогда

$$\|B[S]\| \leq \det(1-|M|)^{-1/2} \tag{4.3}$$

где $|M| = (M^*M)^{1/2}$

Доказательство. Сначала покажем, что наше утверждение достаточно доказать в случае, когда $\|S\| < 1$. Действительно, предположим, что это так. Тогда для любого n и любого $B[S]$, $S = \begin{pmatrix} \overline{M} & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ мы имеем

$$\left\| B\begin{bmatrix} \overline{M} & (1-\frac{1}{n})L \\ (1-\frac{1}{n})L^t & M \end{bmatrix} \right\| \leq \det(1-|M|)^{-1/2}$$

а потому, в силу предложения I.3, мы получаем (4.3) для любого самосопряженного S $(S = S^{\circledast})$.

Итак, пусть $\|S\| < 1$. Тогда по теореме Брауэра отображение $\zeta(S)$ имеет неподвижную точку в области $\mathcal{Z}(V)$. Поэтому наше утверждение сводится к следующей лемме.

Лемма 4.6. Пусть L , X - квадратные матрицы, $\|L\|<1$, $\|X\|\leq 1$, $L=L^*, L>0$. Тогда

$$|\det(1-XL)|\geq \det(1-L)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi(t)=-\ln(1-e^t)$. Тогда $\psi''(t)=-e^{-t}(1-e^{-t})^{-2}\leq 0$, т.е. функция $\psi(t)$ выпукла.

Пусть $\alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_n$, $\beta_1\geq\ldots\geq\beta_n$, $\gamma_1\geq\ldots\geq\gamma_n$, - сингулярные числа операторов X , L и XL . Применяя неравенство фон Нёймана-Хорна (см. [28] , теорема I + замечание 2) к функции $f(x)=\psi(\ln(x))$ мы получаем, что

$$-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\gamma_i)\leq-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\alpha_i\beta_i)$$

Отсюда

$$\det(1-|XL|)\geq\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i\beta_i)\geq\prod_{i=1}^{n}(1-\beta_i)= \tag{4.4}$$

$$=\det(1-L)$$

Далее, пусть $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n$ - собственные числа операторов XL . Применяя неравенство Вейля (см. [28] , теорема 2 + замечание I) к функции $f(x)=\psi(\ln t)$ мы получаем

$$-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-|\lambda_i|)\leq-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\gamma_i)$$

Отсюда

$$|\det(1-XL)|=\prod_{i=1}^{n}|1-\lambda_i|\geq\prod_{i=1}^{n}(1-|\lambda_i|)\geq$$

$$\geq\prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)=\det(1-|XL|)$$

Искомое неравенство следует из (4.4) и (4.5).

Замечание. В формулировке неравенств фон Неймана-Хорна и Вейля требуется, чтобы функция $\psi(t)$ была выпукла и непрерывна при всех t (что у нас не выполнено). Однако эта функция выпукла и непрерывна на промежутке $[-\infty, \ln\beta_1]$, что для нас достаточно, чтобы "подогнать" нашу функцию $\psi(t)$ под формулировку теоремы, можно рассмотреть новую функцию $\tilde\psi(t)$ которая выпукла, непрерывна и равна $\psi(t)$ на $[-\infty, \ln\beta_1]$. ●

Сама теорема 4.2. сразу следует из предложения 4.2.и предложения I.4. Заодно мы получаем верхнюю оценку для нормы $B[S]$. ☒

§5. Аффинная симплектическая категория и операторы $B[S|h^t]$.

Как известно, вместо бесконечномерной симплектической группы часто рассматривается ее расширение с помощью группы Гейзенберга. Мы хотим построить категорный аналог этой расширенной группы.

5.I. Аффинные отношения. Пусть V и W - линейные пространства. Аффинным отношением мы будем называть произвольное множество вида $h+P\subset V\oplus W$, где $P\subset V\oplus W$ - линейное подпространство, а $h\in V\oplus W$. Пространство P мы будем называть направляющим пространством аффинного отношения. Произведение аффинных отношений определяется как обычное произведение отношений.

5.2. Аффинная симплектическая категория SpH. Объекты этой категории те же, что и у $\overline{Sp}$. Пусть $V, W \in Ob(\overline{SpH})$. Аффинное отношение $H \subset V \oplus W$ является морфизмом категории $\overline{SpH}$, если его направляющее подпространство P является морфизмом категории $\overline{Sp}$. Произведение морфизмов определяется как произведение аффинных отношений.

Пусть $H \in Mor_{\overline{SpH}}(V, W)$, P - его направляющее пространство, $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга отношения P. В качестве вектора h, осуществляющего сдвиг P в H можно выбрать некоторый элемент $(\lambda, \mu) \in V_+ \oplus W_+$. Таким образом, мы можем поставить каждому морфизму H матрицу

$$\left[\begin{array}{cc|c} K & L & \lambda^t \\ L^t & M & \mu^t \end{array}\right]$$

Умножению морфизмов соответствует следующая операция над матрицами:

$$\left[\begin{array}{cc|c} K & L & \lambda^t \\ L^t & M & \mu^t \end{array}\right] \circ \left[\begin{array}{cc|c} P & Q & \pi^t \\ Q^t & R & \varkappa^t \end{array}\right] = \tag{5.1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^t & R \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \lambda^t + L(1-PM)^{-1}(\pi^t + P\mu^t) \\ \varkappa^t + Q^t(1-PM)^{-1}(M\pi^t + \mu^t) \end{array} \right]$$

<u>5.3. Операторы</u> $B[S|h^t]$. Поставим в соответствие каждому морфизму $H : V \to W$ категории $\overline{SpH}$ линейный оператор $F(W_+) \to F(V_+)$ по формуле

$$We(H)f(z) \stackrel{def}{=} B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right] f(z) \stackrel{def}{=}$$

$$= \iint \exp\left\{ \frac{1}{2}(z\ \bar{u}) \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + z\lambda^t + \bar{u}\mu^t \right\} f(u)\, d\mu(u)$$

где $\left(\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right)$ – матрица, связанная с H.

Применяя формулу (I.3) мы получаем, что

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right] b[P|\pi^t] = c(M, P, \mu, \pi) \times$$

$$\times b[K + LP(1-MP)^{-1}L^t | \lambda^t + L(1-PM)^{-1}(\pi^t + P\mu^t)]$$

где (5.2)

$$c(M, P, \mu, \pi) = \det\left((1-MP)^{-\frac{1}{2}}\right) \exp\left\{\frac{1}{2}(\pi\,\mu) \begin{pmatrix} -P & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi^t \\ \mu^t \end{pmatrix}\right\}$$

Таким образом мы видим, что наш оператор (вообще говоря, неограниченный) корректно определен на множестве $F_0(W_+)$ и переводит его в $F_0(V_+)$.

Еще раз применяя формулу (I.3) мы получаем, формулу для умножения операторов

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right] B\left[\begin{matrix} P & Q \\ Q^t & R \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \pi^t \\ \varkappa^t \end{matrix}\right] = \qquad (5.3)$$

$$= c(M, P, \mu, \pi) B\left[\left(\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right) \circ \left(\begin{matrix} P & Q \\ Q^t & R \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \pi^t \\ \varkappa^t \end{matrix}\right)\right]$$

где коэффициент $c(M,P,\mu,\pi)$ задается формулой (5.2).

Итак, доказана

Теорема 5.I. Отображение $H \mapsto We(H)$ является проективным представлением категории $\overline{Sp\, H}$. ■

Полезно также знать формулу для сопряженного оператора

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right]^* = B\left[\begin{matrix} \overline{M} & \overline{L}^t \\ \overline{L} & \overline{K} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \overline{\mu}^t \\ \overline{\lambda}^t \end{matrix}\right] \qquad (5.4)$$

5.4. Теорема ограниченности. Мы уже видели, что оператор $B[S|0] = B[S]$ может оказаться неограниченным. Операторы вида $B\left[\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right]$ неограниченны всегда, кроме случая $\mu = -\overline{\lambda}$, когда они унитарны с точностью до умножения на константу.

Теорема 5.2. Пусть $\|S\| < 1$. Тогда оператор $B[S|h]$ ограничен.

Доказательство. В силу формулы (5.3) оператор $B[S|h]$ представим в виде

$$B\left[\begin{matrix} K & L \\ L^t & M \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right] = c\,B\left[\begin{matrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \lambda^t \\ 0 \end{matrix}\right] \times$$

$$\times B\left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] B\left[\begin{matrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ \mu^t \end{matrix}\right]$$

Средний сомножитель в правой части при достаточно малых ε по теореме 4.I является ограниченным оператором, а поэтому нам достаточно доказать ограниченность двух крайних сомножителей. Итак, вопрос сводится к задаче об ограниченности операторов вида

$$B\left[\begin{matrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda^t \\ \mu^t \end{matrix}\right]$$

Как и раньше (см. п.4.2) эти операторы без ограничения общности можно считать симметричными. Это соотвествует случаю $\lambda=\bar{\mu}$ (а наш оператор тем самым действует из пространства $F(W_+)$ в себя). Итак, рассмотрим оператор

$$B\left[\begin{matrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b^t \\ \bar{b}^t \end{matrix}\right] f(z) = \iint \exp\{(1-\varepsilon) z \bar{u}^t + b z^t + \bar{b}\,\bar{u}^t\} f(u)\,d\mu(u) = e^{z\bar{b}^t} \iint \exp\{((1-\varepsilon)z + b)\bar{u}^t\} \times$$

$$\times f(u)\,d\mu(u) = \exp(z\bar{b}^t) f((1-\varepsilon)z + b) \qquad (5.5)$$

(в последнем равенстве испольвано воспроизводящее свойство (I.I)). Мы можем без ограничения общности считать, что $W_+ = \mathbb{C}^n$ или ℓ_2.

Теперь, как и в п.I.5, мы разложим $F(W_+)$ в тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^{n} F(\mathbb{C}^1)$, где $n = \dim W_+ \leq \infty$ Наш оператор тогда раскладывается в тензорное произведение $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ операторов A_i в $F(\mathbb{C}^1)$, задаваемых формулой

$$A_i f(z) = f((1-\varepsilon)z_i + b_i) e^{z_i \bar{b}_i}$$

Постановка показывает, что функции

$$g_m(z) = (-\varepsilon z_i + b_i)^m \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{b}_i z\right)$$

являются собственными функциями оператора A_i, соответствующие собственные числа равны

$$\sigma_m = (1-\varepsilon)^m \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}|b_i|^2\right)$$

Покажем, что система функций $g_m(z)$ полна в $F(\mathbb{C}^1)$. Иными словами, покажем, что множество $\mathcal{Y}$ фонкций вида $P(z)\exp(\gamma z)$, где γ фиксировано, плотно в $F(\mathbb{C}^1)$. Для этого применим оператор $B\left[\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\gamma\\ -\bar{\gamma}\end{matrix}\right]$ унитарный с точностью до умножения на константу. Он переводит $\mathcal{Y}$ в множество всех многочленов, которое плотно в $F(\mathbb{C}^1)$.

Итак, норма самосопряженного оператора A_i равна $\max\limits_m \sigma_m = \sigma_0$. Норма оператора (5.5) равна $\prod \|A_i\| = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} b\bar{b}^t\right)$, так как $b \in \ell_2$. Теорема доказана.

Глава II. Ортогональная категория и морфизмы канонических антикоммутационных соотношений.

§6. Операторы Березина в фермионном пространстве Фока.

6.I. Гильбертово фермионное пространство Фока $\overline{\Lambda}$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – набор из n $(n=0,1,2,\dots,\infty)$ антикоммутирующих переменных:

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i \qquad \xi_j^2 = 0$$

Пусть $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \dots$ – другой набор попарно антикоммутирующих между собой и антикоммутирующих со всеми ξ_j переменных. Мы будем говорить, что переменные $\overline{\xi}_j$ комплексно "сопряжены" переменным ξ_j. Положим

$$\overline{\xi_i \xi_j} = \overline{\xi}_j \overline{\xi}_i \qquad \overline{\overline{\xi}}_i = \xi_i$$

Это позволяет перенести операцию комплексного сопряжения на произвольные полиномиальные выражения от переменных ξ_j, $\overline{\xi}_j$.

Введем левые дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\xi_i f(\xi)\right) = f(\xi) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi) = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от ξ_i. Введем также правые дифференцирования

$$\left(f(\xi)\xi_i\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = f(\xi) \qquad \left(f(\xi)\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от ξ_i.

Формальный интеграл определим следующим образом собственные числа равны

$$\sigma_m = (1-\varepsilon)^m \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}|b_i|^2\right)$$

Покажем, что система функций $g_m(z)$ полна в $F(\mathbb{C}^1)$. Иными словами, покажем, что множество Y фонкций вида $P(z)\exp(\gamma z)$, где γ фиксировано, плотно в $F(\mathbb{C}^1)$. Для этого применим оператор $B\left[\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \gamma \\ -\bar{\gamma} \end{matrix}\right]$ унитарный с точностью до умножения на константу. Он переводит Y в множество всех многочленов, которое плотно в $F(\mathbb{C}^1)$.

Итак, норма самосопряженного оператора A_i равна $\max\limits_m \sigma_m = \sigma_0$. Норма оператора (5.5) равна $\prod \|A_i\| = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} b\bar{b}^t\right)$, так как $b \in l_2$.

Теорема доказана.

Глава II. Ортогональная категория и морфизмы канонических антикоммутационных соотношений.

§6. Операторы Березина в фермионном пространстве Фока.

6.I. Гильбертово фермионное пространство Фока $\overline{\Lambda}$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – набор из n $(n=0,1,2,\ldots,\infty)$ антикоммутирующих переменных;

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i \qquad \xi_j^2 = 0$$

Пусть $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots$ – другой набор попарно антикоммутирующих между собой и антикоммутирующих со всеми ξ_j переменных. Мы будем говорить, что переменные $\overline{\xi}_j$ комплексно "сопряжены" переменным ξ_j. Положим

$$\overline{\xi_i \xi_j} = \overline{\xi}_j \overline{\xi}_i \qquad \overline{\overline{\xi}}_i = \xi_i$$

Это позволяет перенести операцию комплексного сопряжения на произвольные полиномиальные выражения от переменных ξ_j, $\overline{\xi}_j$.

Введем левые дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\xi_i f(\xi)\right) = f(\xi) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi) = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от ξ_i. Введем также правые дифференцирования

$$\left(f(\xi)\xi_i\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = f(\xi) \qquad \left(f(\xi)\right)\frac{\partial_r}{\partial_r \xi_i} = 0$$

если $f(\xi)$ не зависит от ξ_i.

Формальный интеграл определим следующим образом

$$\int \prod_{i=1}^{K} \bar{\xi}_{\alpha_i} \xi_{\alpha_i} \, d\xi \, d\bar{\xi} = 1$$

При перестановке сомножителей интеграл соответсвующим образом меняет свой знак. Интегралы от остальных мономов, по определению, равны нулю.

Обозначим через Λ_0 пространство всех полиномиальных выражений от переменых ξ_1, ξ_2, ... (подчеркнем, что эти выражения не зависят от "антиголоморфных" переменных $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, ...). Введем в Λ_0 скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{g}(\xi) f(\xi) \, d\xi \, d\bar{\xi} \qquad (6.1)$$

Гильбертовым фермионным пространством Фока $\bar{\Lambda}$ с n степенями свободы мы назовем пополнение пространства Λ_0 по скалярному произведению (6.1).

Замечание. Мономы вида $\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_n}$ $(j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_n)$ образуют в Λ ортонормальный базис.

Замечание. Если число переменных конечно; то $\bar{\Lambda} = \Lambda_0$ - это просто внешняя алгебра.

6.2. Полинормированное фермионное пространство Фока.

Сейчас мы введем в фермионном пространстве еще одну топологию (см.[34]), которая в некоторых отношениях более предпочтительна, чем гильбертова.

Пусть $f(\xi) \in \bar{\Lambda}$. Представим $f(\xi)$ в виде суммы

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi) \qquad (6.2)$$

где $f_k(\xi)$ - однородная по ξ форма степени k. Полинормированное фермионное пространство Фока состоит из всех выражений вида (6.2), удовлетворяющих условию:

$$\forall C > 0\ \exists A\ \forall k: \|f_k(\xi)\| \leqslant A\exp(-Ck)$$

(т.е. $\|f_k(\xi)\|$ очень быстро убывают). Введем в Λ семейство полунорм $|\cdot|_C$:

$$|f|_C = \sup_{k \geqslant 0} \|f_k(\xi)\| \exp(Ck)$$

Лемма 6.I. Пространство Λ полно.

Доказательство. Пусть последовательность $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ фундаментальна по каждой из полунорм $|\cdot|_C$. Тогда для любого k последовательность $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}, \ldots$ сходится по норме, пусть $f_k = \lim_{j\to\infty} f_k^{(j)}$.

Так как для любого k $\|f_k^{(j)}\| \leqslant A\exp(-Ck)$, то и $\|f_k\| \leqslant A\exp(-Ck)$, что и требовалось доказать.

Лемма 6.2. Пусть $\sum |a_{ij}|^2 < \infty$, $a_{ij} = -a_{ji}$

Тогда $\exp\left(\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right) \in \Lambda$ ■

Перед тем, как доказывать лемму, мы докажем следующее утверждение.

Лемма 6.3. Пусть H - гильбертово пространство с операцией комплексного сопряжения. Пусть A - антилинейный кососимметрический оператор Гильберта-Шмидта. Тогда в H существует вещественный ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ такой, что

$$Ae_{2j-1} = \lambda_j e_{2j}\ ;\ Ae_{2j} = -\lambda_j e_{2j-1}\ ;\ Ag_j = 0,\ \lambda_j \in \mathbb{R}$$

Доказательство леммы 6.3. Итак, мы имеем компактный оператор A, удовлетворяющий условию $\langle Ax, \bar{y}\rangle = -\langle x, \overline{Ay}\rangle$. Овеществим наше пространство. Тогда A становится кососимметрическим компактным оператором в вещественном гильбертовом пространстве H. Такой оператор ортогональным преобразованием приводится к блочно-диагональному виду, причем блоки - это матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$ и (быть может) матрицы (0).

Этот факт общеизвестен в конечномерном случае, в бесконечномерном случае достаточно комплексифицировать гильбертово пространство и применить теорему Гильберта-Шмидта.

Итак, H распалось в прямую сумму двумерных и одномерных инвариантных подпространств. Пусть H_λ $(\lambda > 0)$ - прямая сумма всех двумерных подпространств, отвечающих числу λ, $H_0 = \operatorname{Ker} A$. Ясно, что H_λ инвариантно относительно умножения на i, в самом деле H_λ - собственное подпространство (линейного) оператора A^2. Рассмотрим теперь в H_λ $(\lambda > 0)$ оператор B, равный $\frac{1}{\lambda} A$. Итак, нам остается привести к каноническому виду в комплексном пространстве антилинейный оператор B такой, что $B^2 = -1$. Теперь утверждение становится очевидным. $\boxtimes$

<u>Доказательство леммы 6.2.</u> Итак, нам достаточно проверить, что

$$f(\xi) = \exp\left(\sum \lambda_j \xi_{2j} \xi_{2j-1}\right)$$

содержится в Λ, если $\sum |\lambda_j|^2 < \infty$

$$f_k(\xi) = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} \lambda_{\alpha_1} \ldots \lambda_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k} \xi_{2\alpha_j} \xi_{2\alpha_j - 1}$$

Отсюда

$$\| f_k \|^2 = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} | \lambda_{\alpha_1} \ldots \lambda_{\alpha_k} |^2 \leqslant \frac{1}{k!} \left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \right)^k$$

Лемма доказана.

6.3. Ядра операторов. Пусть $\bar{\Lambda}^{(1)}$ и $\bar{\Lambda}^{(2)}$ - гильбертовы фермионные пространства Фока, пусть $\bar{\Lambda}^{(1)}$ состоит из "функций" от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots$, а $\bar{\Lambda}^{(2)}$ - из функций от переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots$. Тогда любой ограниченный оператор $A: \bar{\Lambda}^{(2)} \to \bar{\Lambda}^{(1)}$ может быть записан в виде

$$A f(\xi) = \int K(\xi, \bar{\eta}) f(\eta)\, d\eta\, d\bar{\eta} \tag{6.3}$$

где $K(\xi, \bar{\eta})$ - формальный ряд по переменным $\xi_j, \bar{\eta}_k$.

Аналогичное утверждение верно и для полинормированных пространств Фока. Выражение $K(\xi, \bar{\eta})$ по существу, является производящей функцией для матричных элементов оператора A в базисе $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}, \eta_{j_1}, \ldots, \eta_{j_n}$. Поэтому в [4] "ядро" $K(\xi, \bar{\eta})$ называется производящим функционалом.

Вообще в виде (6.3) может быть записан любой оператор з пространства многочленов от переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots$ в пространство формальных рядов от $\xi_1, \xi_2, \ldots$. В самом деле, пусть

$$A\, \eta_{\alpha_1} \ldots \eta_{\alpha_k} = P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\xi)$$

где в правой части стоят формальные ряды от $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Тогда

$$K(\xi, \bar{\eta}) = \sum P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\xi)\, \bar{\eta}_{\alpha_k} \ldots \bar{\eta}_{\alpha_1}$$

6.4. Операторы Березина. Оператор из одного фермионнного пространства Фока в другое мы назовем оператором Березина, если его ядро представимо в виде

$$\left[\prod_{i=1}^{k}\left(\sum \alpha_{ij}\xi_j + \sum \beta_{ij}\bar{\eta}_j\right)\right] \times \tag{6.4}$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t \\ \bar{\eta}^t\end{pmatrix}\right\}$$

где через ξ и $\bar{\eta}$ обозначены матрицы строки $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots)$, через ξ^t, $\bar{\eta}^t$ – соответствующие матрицы столбцы, матрица B ограничена, матрицы A и C являются матрицами Гильберта-Шмидта, $A = -A^t$, $C = -C^t$, $\sum_j |\alpha_{ij}|^2 < \infty$, $\sum_j |\beta_{ij}|^2 < \infty$.

Это определение очень похоже на определение операторов $B[S]$ из §I.

Строго говоря, мы пока не знаем, задает ли ядро (6.4) корректно определенный оператор в пространстве Фока, однако, в силу п. 6.3. этот оператор корректно определен как оператор из пространства многочленов в пространство формальных рядов.

<u>6.5. Второе определение операторов Березина.</u> Обозначим через $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i^{\xi}$ оператор

$$\mathcal{D}_i = \xi_i + \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}_i^2 = 1$, $\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j = -\mathcal{D}_j\mathcal{D}_i\ (i \neq j)$

Оператор Q является оператором Березина, если Q представим в виде

$$Q = \mathcal{D}^{\xi}_{i_1}\ldots\mathcal{D}^{\xi}_{i_n}\, P\, \mathcal{D}^{\eta}_{j_1}\ldots\mathcal{D}^{\eta}_{j_k} \tag{6.5}$$

где P – оператор с ядром

$$\lambda \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\} \tag{6.6}$$

причем матрицы A и C – матрицы Гильберта-Шмидта, B – ограниченная матрица, а $\lambda \in \mathbb{C}$.

Заметим, что операторы $\mathcal{D}_i$ корректно определены и в пространстве степенных рядов и в пространстве многочленов от η_j , а поэтому операторы Березина (в смысле нового определения) задают отображение из пространства многочленов в пространство степенных рядов.

Замечание. Первые примеры таких операторов (а именно, унитарные операторы с ядрами вида (6.6)) появились в [4] , поэтому и в [38] был введен термин операторы Березина.

6.6. Эквивалентность определений. Предложение 6.I. Определения пп. 6.4 и 6.5 эквивалентны.

Лемма 6.4. Пусть оператор P имеет ядро вида (6.4). Тогда

а) Оператор $\mathcal{D}_i^{\xi} P$ имеет ядро вида (6.4)

б) Оператор $P \mathcal{D}_j^{\eta}$ имеет ядро вида (6.4)

Доказательство леммы 6.4. Мы докажем утверждение а), утверждение б) доказывается дословно также. Итак, достаточно проверить, что, если ядро $K(\xi, \overline{\eta})$ задается формулой вида (6.4), то функция

$$\left(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) K(\xi, \overline{\eta})$$

снова может быть записана в виде (6.4) (естественно с другими α_{ij}, β_{ij} , k , A , B , C). Рассмотрим выражение

$$\mu = \left(\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \prod_{j=1}^{k} f_j(\xi, \overline{\eta}) L(\xi, \overline{\eta})$$

где

$$f_j(\xi, \overline{\eta}) = \sum \alpha_{ji} \xi_i + \sum \beta_{ji} \overline{\eta}_j$$

$$L(\xi, \overline{\eta}) = \exp\left\{\frac{1}{2} (\xi \ \overline{\eta}) \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \overline{\eta}^t \end{pmatrix}\right\}$$

Тогда

$$\mu=\Big[\xi_1\prod f_j+\sum(-1)^j\frac{\partial f_j}{\partial\xi_1}f_1\ldots f_{j-1}f_{j+1}\ldots f_k+$$

$$+(-1)^k\prod f_j\frac{\partial L}{\partial\xi_1}\Big]L(\xi,\bar\eta)\qquad(6.7)$$

Если все производные $\partial f_j/\partial\xi_1$ равны 0, то μ раскладывается в произведение

$$\mu=\Big(\xi_1+\frac{\partial}{\partial\xi_1}\Big)f_1\ldots f_k$$

и наше утверждение доказано. Пусть теперь не все производные $\partial f_j/\partial\xi_1$ равны 0.

Лемма 6.5. Пусть $f_j=\sum\alpha_{ji}\xi_j$, $j=1,\ldots,k$. Тогда любое выражение вида $\varkappa=\sum t_j f_1\ldots f_{j-1}f_{j+1}\ldots f_p$ разлагается в произведение

$$\varkappa=\prod_{\ell=1}^{k-1}g_\ell\qquad(6.8)$$

где $g_\ell=\sum_{j=1}^{k}s_{\ell j}g_j$

Доказательство леммы 6.5. Алгебры всех многочленов от функций $f_1,\ldots,f_k$ естественным образом изоморфны внешней алгебре $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ от k переменных. Итак, достаточно доказать, что в $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ любой элемент $\varkappa$ степени $k-1$ разлагается в произведение $(k-1)$-го элемента степени 1. Группа $GL(k,\mathbb{C})$ действует в $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ с помощью замен переменной в $\mathbb{C}^k$. На множесве ненулевых элементов степени $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ эта группа действует транзитивно, и теперь утверждение очевидно. $\boxtimes$

Вернемся к доказательству леммы 6.6. Итак, второе слагаемое, стоящее в квадратных скобках выражения (6.7) разлагается в произведение вида (6.8). Пусть p -некоторая форма вида $\sum s_j f_j$ (где $s \in \mathbb{C}$), линейно независимая с формами $g_1, \dots, g_{k-1}$. Тогда

$$f_1 \dots f_k = \lambda g_1 \dots g_{k-1} p$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – ненулевая константа. Без ограничения общности мы можем считать, что $\lambda = 1$. Итак,

$$\mu = g_1 \dots g_{k-1} \left(1 + (-1)^k p \xi_1 + (-1)^k p \frac{\partial L}{\partial \xi_1}\right) L(\xi, \bar{\eta}) =$$

$$= g_1 \dots g_{k-1} \exp\left((-1)^k \left[p \xi_1 + p \frac{\partial L}{\partial \xi_1}\right]\right) L(\xi, \bar{\eta}) =$$

$$= g_1 \dots g_{k-1} \exp\left\{(-1)^k p \left(\xi_1 + \frac{\partial L}{\partial \xi_1}\right) + \frac{1}{2} (\xi\ \bar{\eta}) \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix}\right.$$

Лемма 6.4. доказана. ☒

<u>Доказательство предложения 6.I</u>. В силу леммы 6.4. любой оператор Березина в смысле второго определения является оператором Березина в смысле первого определения. Обратно, пусть P - оператор Березина в смысле первого определения. Нам достаточно показать, что для некоторых $i_1, \dots, i_k$, $j_1, \dots, j_l$ оператор

$$P' = \mathcal{D}^{\xi}_{i_1} \dots \mathcal{D}^{\xi}_{i_k} P \mathcal{D}^{\eta}_{j_1} \dots \mathcal{D}^{\eta}_{j_l} \tag{6.9}$$

имеет ядро вида (6.6). Пусть $K(\xi, \bar{\eta})$ - ядро оператора P . Допустим, что слагаемое $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \bar{\eta}_{j_1} \dots \bar{\eta}_{j_l}$ входит в формальный ряд (6.4) с ненулевым коэффициентом. Тогда формальный ряд для ядра $K'(\xi, \bar{\eta})$ оператора P' (см. (6.9)) имеет ненулевой свободный член. Но мы знаем, что ядро $K'(\xi, \bar{\eta})$ может быть записано в виде (6.4). Тем самым ядро оператора P' должно иметь вид (6.6) и предложение доказано.

6.7. Замечания. У нас есть два способа задания оператора Березина. Во-первых, мы можем его записать как оператор с ядром вида (6.4), а во-вторых - как оператор вида (6.5).

Начнем с того, что запись ядра оператора Березина P в виде (6. 4) не однозначна. Пусть $L(\xi, \bar{\eta})$ - ядро оператора P. Разложим его в сумму $L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n$ выражений L_n, имеющих степень однородности n по совокупности переменных ξ, $\bar{\eta}$. Пусть L_k - первое ненулевое слагаемое. Тогда, очевидно, L_k равно

$$\prod_{i=1}^{k} \left(\sum \alpha_{ij} \xi_j + \sum \beta_{ij} \bar{\eta}_j \right) \stackrel{def}{=} \prod f_j$$

Тем самым, сомножитель в произведении (6.4),стоящий в квадратных скобках, однозначно определен. Однако, однозначно определено лишь все произведение (6.4), а не каждый из его сомножителей в отдельности. Произведение $\prod f_j$ (с точностью до скалярного множителя) зависит лишь от подпространства всех линейных фсрм вида $\sum \lambda_j f_j \ (\lambda_j \in \mathbb{C})$, а не от этих форм в отдельности.

Второй сомножитель в произведении (6.4) также определен не однозначно, а именно замены вида

$$\left[\prod f_j \right] \exp\left\{ \frac{1}{2} (\xi \ \bar{\eta}) \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix} \right\} \to$$

$$\to \left[\prod f_j \right] \exp\left\{ \frac{1}{2} (\xi \ \bar{\eta}) \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j f_j \right\}$$

где μ_j - линейные формы от ξ_k , $\bar{\eta}_l$, не меняют ядра (хотя и меняют форму его записи).

Перейдем ко второму способу задания операторов Березина. Оператор Березина A может быть записан в виде (6.5) с данными $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_k$ тогда и только тогда, когда

$$\langle A \eta_{j_1} \cdots \eta_{j_k}, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n} \rangle \neq 0$$

В §8 мы увидим, что множество всех операторов Березина параметризуется некоторым грассманианом, и тем самым, трудности с однозначной параметризацией множества операторов Березина обусловлены объективными (топологическими) причинами.

§7. Ограниченность операторов Березина в полинормированном фермионном пространстве Фока.

<u>7.I. Теорема 7.I</u>. Пусть $\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda^{(2)}$ - полинормированные пространства Фока. Любой оператор Березина из $\Lambda^{(2)}$ в $\Lambda^{(1)}$ ограничен.

Доказательство этой теоремы занимает оставшуюся часть параграфа.

<u>7.2. Редукции.</u> Воспользуемя вторым определением операторов Березина. Оператор $\mathcal{D}_i$ ограничен и обратим $(\mathcal{D}_i^{-1} = \mathcal{D}_i)$, поэтому достаточно доказать теорему 7.I для операторов с ядрами вида

$$\exp\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi & \bar{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \right\}$$

На протяжении этого параграфа и §9 мы будем обозначать такие операторы через $\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{bmatrix}$. ассмотрим три простейших примера таких операторов.

а) Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Легко видеть, что это просто оператор умножения на функцию $\exp\left\{\frac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right\}$

Лемма 7.I. Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ограничены. ■

б) Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$. Обозначим через $\Lambda_k^{(i)}$ пространство всех однородных элементов пространства $\Lambda^{(i)}$ степени K . Оператор $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$ переводит $\Lambda_K^{(2)}$ в $\Lambda_K^{(1)}$ для любого). Ограничение этого оператора на $\Lambda_K^{(2)}$ - это просто K -ая внешняя степень оператора B . Тем самым наш оператор - это просто оператор замены переменной.

Лемма 7.2. Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$ ограничены.

Доказательство: очевидно, см. определение топологии в полинормированном пространстве Фока. $\boxtimes$

в) Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix}$. Такой оператор можно записать в виде

$$\exp\left(\sum_{i>j} c_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$$

(О переходе от интегральной записи оператора к виковской нормальной форме см. [4], п.I.I0).

Лемма 7.3. Операторы $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix}$ ограничены.

Теперь предположим, что все леммы 7.I - 7.3 доказаны и докажем теорему 7.I. Она вытекает из леммы 7.4.

Лемма 7.4.

$$\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{bmatrix} = \mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

■

Доказательство. Вычислим ядро оператора $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix}$. Оно равно (см. [4], п.2.14)

$$\int \exp\left(\sum b_{ij}\xi_i \bar{\eta}_j\right) \exp\left(\sum \eta_j \bar{\zeta}_j + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\right) d\eta\, d\bar{\eta} =$$

$$= \exp\left(\sum b_{ij}\xi_i \bar{\zeta}_j + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\right)$$

т.е совпадает с ядром оператора $\mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & C \end{bmatrix}$. Далее

$$\mathcal{B}\begin{bmatrix} A & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & C \end{bmatrix} f = \exp\left(\frac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right) \mathcal{B}\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & C \end{bmatrix} f =$$

$$= \int \exp\left\{\frac{1}{2}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum b_{ij}\xi_i\bar{\zeta}_j + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\right) f(\zeta)\, d\zeta\, d\bar{\zeta}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. В бозонном случае такой путь доказательства теорем ограниченности не пригоден: крайние сомножители в произведении (7.1) были бы неограниченными операторами.

7.3. Операторы $T_{k,l}$. Пусть k, l - неотрицательные числа, причем их разность $l-k$ четна и неотрицательна. Пусть $\Lambda^k(l_2)$, $\Lambda^l(l_2)$ - соответственно k-ая и l-ая внешние степени пространства l_2, их удобно реализовывать как подпространства в Λ, т.е. как пространства однородных форм от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Тем самым $\Lambda^k(l_2)$ и $\Lambda^l(l_2)$ являются гильбертовыми пространствами. Пусть A - оператор Гильберта-Шмидта в l_2. Оператор $T_{k,l}(A): \Lambda^k(l_2) \to \Lambda^l(l_2)$ определяется фсрмулой

$$T_{k,l}(A)f(\xi)=\frac{1}{((l-k)/2)!}\Big(\sum_{i>j}a_{ij}\xi_i\xi_j\Big)^{\frac{l-k}{2}}f(\xi)$$

Лемма 7.5. Пусть $\sigma=\sum|a_{ij}|^2$. Тогда

$$\|T_{k,l}(A)\|^2\leq\frac{1}{((l-k)/2)!}a^{l/2}$$

где $a=2\max(\sigma,1)$

Доказательство. Без ограничения общности (см. лемму 6.3) можно считать, что $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ имеет вид $\sum\lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}$, где $\lambda_j>0$. Пусть $\tau=(l-k)/2$. Пусть

$$b=\sum b_{i_1\ldots i_k}\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}\in\Lambda_k$$

Тогда

$$T_{k,l}(A)b=\sum b_{i_1\ldots i_k}\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}\prod_{j\leq\tau}(\xi_{2\alpha_j-1}\xi_{2\alpha_j})$$

где среди индексов i_q, $2\alpha_j-1$, $2\alpha_j$ нет повторяющихся. Фиксированный моном $\xi_{\mu_1}\ldots\xi_{\mu_n}$ входит в эту сумму не более $C^{\tau}_{[l/2]}$ раз. Учитывая, что

$$(x_1+\ldots+x_n)^2\leq n(x_1^2+\ldots+x_n^2)$$

мы можем оценить сверху коэффициент при мономе

$$\|T_{k,l}(A)b\|^2\leq C^{\tau}_{[l/2]}\Big(\sum|b_{i_1\ldots i_k}|^2\lambda^2_{\alpha_1}\ldots\lambda^2_{\alpha_\tau}\Big)\leq$$

$$\leq C^{\tau}_{[l/2]}\Big(\sum|b_{i_1\ldots i_k}|^2\Big)\Big(\sum\lambda^2_{\alpha_1}\ldots\lambda^2_{\alpha_\tau}\Big)\leq$$

$$\leq C^{\tau}_{[l/2]}\|b\|^2\frac{(\sum\lambda_j^2)^\tau}{\tau!}$$

Окончательно

$$\|T_{k,\ell}(A)\|^2 \leq \frac{1}{r!} C_{\ell/2}^{r} \left(\sum \lambda_j^2\right)^r \leq \frac{1}{r!} 2^{\ell/2} \sigma^r$$

$$\leq \frac{1}{r!} 2^{\ell/2} \max(\sigma, 1)^{\ell/2}$$

Лемма 7.5. доказана.

7.4. Доказательство леммы 7.I. Пусть $f \in \Lambda$, представим f в виде суммы однородных форм: $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, где f_k имеет степень k. Пусть $L = \mathcal{B}\begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $g \in Lf$, пусть $g = \sum g_k$ – представление g в виде суммы однородных форм. Пусть $\|f_k\| \leq \exp(-Ck)$, пусть $T_{k,\ell}(A)$ и a те же, что в лемме 7.5,

$$\|g_n\|^2 = \Big\|\sum_{2j \leq n} T_{n-2j,n}(A) f_{n-2j}\Big\|^2 \leq \sum_{2j \leq n} \|T_{n-2j}(A)\|^2 \|f_{n-2j}\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{2j \leq n} \frac{1}{j!} a^{n/2} e^{-C(n-2j)} = e^{-Cn} a^{n/2} \sum \frac{e^{2Cj}}{j!} <$$

$$< e^{-Cn} a^{n/2} e^{e^{2C}}$$

Таким образом

$$|g|_{C - \frac{1}{2}\ln a} \leq |f|_C \cdot const$$

Лемма доказана.

7.5. Доказательство леммы 7.3. Рассмотрим оператор $\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{2}\sum c_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^r$ действующий из $\Lambda^k(\ell_2)$ в $\Lambda^{k-2r}(\ell_2)$ (Обозначения см. п.7.3.) Легко видеть, что этот оператор сопряжен оператору $T_{k-2r,r}(C) : \Lambda^{k-2r}(\ell_2) \to$

$\to \Lambda^k(\ell_2)$ умножения на

$\frac{1}{r!}\left(-\frac{1}{2}\sum c_{ij}\xi_i\xi_j\right)$.

Пусть

$$N = B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{bmatrix} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum c_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$$

Пусть $f\in\Lambda$, пусть $g = Nf$, пусть

$$f=\sum f_k \qquad g=\sum g_k$$

- представления f и g в виде суммы однородных форм. Пусть $\|f_k\|\leqslant \exp(-Ck)$. Тогда

$$\|g_n\|^2 = \Big\|\sum_{r\geqslant 0} T^*_{n,n+2r}(A) f_{n+2r}\Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r\geqslant 0}\|T_{n,n+2r}\|^2\|f_{n+2r}\|^2\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}a^{n/2+r}\exp(-C(n+2r)) =$$

$$= a^{n/2}e^{-Cn}\exp(ae^{-Cn})$$

Итак, $|Nf|_{C-\frac{1}{2}\ln a}\leqslant |f|_C\cdot const$. Ограниченность N доказана.

§8 Ортогональная категория GD и спинорное представление.

<u>8.I. Ортогональная категория</u> $\overline{GD}$. Объект ортогональной категории - это гильбертово пространство V со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, оснащенное следующими дополнительными

структурами.

I. Фиксировано разложение V в прямую сумму $V = V_+ \oplus V_-$

2. Фиксирован антилинейный биективный изометрический оператор $I: V_+ \to V_-$.

3. В V фиксирована симметричная билинейная форма.

$$\{(v_+, v_-), (v_+', v_-')\}_V = \langle v_-, Iv_+' \rangle + \langle v_-', Iv_+ \rangle$$

Пусть $V\ ,\ W \in Ob(\mathcal{D})$. Определение морфизма категории $G\mathcal{D}$ будет дано в два шага. Сначала построим множество $m(V, W)$, содержащееся в $Mor(V, W)$, но не исчерпывающее его. Элементом $P \in m(V,W)$ является линейное отношение $V \rightrightarrows W$ преобразование Потапова-Гинзбурга которого является оператором $S(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$, таким, что

I. $A = -A^t, C = -C^t$,

2. $\|B\| < \infty$

3. A , C - операторы Гильберта-Шмидта.

В силу кососимметричности матриц A, C линейное отношение P сохраняет билинейную форму $\{\cdot\ ,\cdot\}_V$, т.е. если $(v, w), (v', w') \in P$, то

$$\{v, v'\}_V = \{w, w'\}_W$$

Более того, P является максимальным изотропным подпространством в $V \oplus W$ относительно формы

$$\{(v, w); (v', w')\}_{V \oplus W} = \{v, v'\}_V - \{w, w'\}_W \tag{8.1}$$

Перейдем к описанию множества $Mor(V, W)$. Оно состоит из формального "нулевого" морфизма $null_{V,W}$ (который не является линейным отношением) и ненулевых морфизмов. Линейное отношение $P: V \rightrightarrows W$ является ненулевым морфизмом, если

I. P - максимальное изотропное подпространство в $V \oplus W$ относительно формы (8.I)

2. Существует $P \in m(V,W)$ такое, что $P \cap P'$ имеет конечную коразмерность в P (отметим, что тем самым коразмерности $P \cap P'$ в P и P' равны).

Замечание. Если размерности V и W конечны, то ненулевые морфизмы категории $G\mathcal{D}$ - это в точности все максимальные изотропные подпространства в $V \oplus W$.

Замечание. Введение нулевого морфизма связано со следующими причинами. Ниже мы построим биекцию между множеством морфизмов категории $G\mathcal{D}$ и множеством всех операторов Березина, причем произведению морфизмов отвечает произведение операторов. Однако, оказывается, что произведение двух ненулевых операторов Березина может быть нулевым оператором. Это заставляет причислять нулевой оператор к операторам Березина, он то и соответствует морфизму $null$. О других причинах см. §I7. ●

Определим теперь произведение морфизмов. Пусть $P \in Mor(V,W)$, $Q \in Mor(W,Y)$. Если хотя бы один из морфизмов P, Q является нулевым, то и их произведение является нулевым морфизмом. Если $Ind(P) \cap Ker\, Q \neq 0$ (или, что эквивалентно, $Im\, P + \mathcal{D}(Q) \neq W$), то $QP = null$. В противном случае Q и P перемножаются как линейные отношения.

Замечание. Когда мы писали $Im\, P + \mathcal{D}(Q) \neq W$, мы не уточнили, какая сумма имеется в виду - алгебраическая или топологическая. Проверим, что эти две суммы действительно совпадают. Эту проверку достаточно провести в случае, когда $P \in m(V,W)$, $Q \in m(W,Y)$. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^t & C \end{pmatrix}$ – их преобразования Потапова-Гинзбурга. Легко видеть, что $\mathcal{D}(Q)$ содержит, в частности, все вектора вида $(\omega_+, A_1\omega_+) \in W_+ \oplus W_-$, а $\operatorname{Im} P$ содержит все вектора вида $(C\omega_-, \omega_-) \in W_+ \oplus W_-$. Таким образом, алгебраическая сумма $\mathcal{D}(Q) + \operatorname{Im} P$ содержит множество H_1 всех векторов вида $((1-CA_1)\omega_+, 0)$ и множество H_2 всех векторов вида $(0, (1-A_1C)\omega_-)$. В силу альтернативы Фредгольма H_1 и H_2 – замкнутые подпространства конечной коразмерности в W_+ и W_-. Так как $H_1 \oplus H_2 \subset \mathcal{D}(Q) + \operatorname{Im} P$ и коразмерность $H_1 \oplus H_2$ в W конечна, мы получаем, что подпространство $\mathcal{D}(Q) + \operatorname{Im} P$ замкнуто.

8.2. Корректность определения. Предложение 8.I.

Произведение морфизмов является морфизмом. ■

Лемма 8.I. Пусть V – гильбертово пространство, снабженное непрерывной симметричной билинейной формой Λ, пусть P и P' – максимальные изотропные относительно Λ подпространства в V. Пусть коразмерность $P \cap P'$ в P конечна. Тогда коразмерности $P \cap P'$ в P и P' равны.

Доказательство. Пусть $(P \cap P')^\circ$ – ортогональное дополнение к $P \cap P'$ относительно формы Λ. Тогда $(P \cap P')^\circ / (P \cap P')$ – конечномерное пространство, а $P/(P \cap P')$ и $P'/(P \cap P')$ – максимальные изотропные подпространства в $(P \cap P')^\circ / (P \cap P')$. Теперь утверждение леммы очевидно.

Следствие. Пусть $P \subset V$ – максимальное изотропное подпространство, а P' – изотропное подпространство. Пусть коразмерности $P' \cap P$ в P и P' конечны и равны. Тогда P' - максимальное изотропное подпространство.

Лемма 8.2. Пусть $P \in m(V,W)$, $Q \in m(W,Y)$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} K' & L' \\ (L')^t & M' \end{pmatrix}$ - их преобразования Потапова-Гинзбурга. Пусть оператор $1-MK'$ обратим. Тогда произведение линейных отношений P и Q содержится в $m(V,Y)$.

Доказательство леммы. Если матрица $1-MK'$ обратима, то преобразование Потапова - Гинзбурга отношения QP является графиком оператора

$$\begin{pmatrix} K-LK'(1-MK')^{-1}L^t & L(1-K'M)^{-1}L' \\ (L')^t(1-MK')^{-1}L^t & M'-(L')^t(1-MK')^{-1}ML' \end{pmatrix}$$

и теперь наше утверждение очевидно.

Доказательство предложения 8.I. Пусть $P \in Mor(V,W)$, $Q \in Mor(W,Y)$ - ненулевые морфизмы. Тогда существуют $P' \in m(V,W)$, $Q' \in m(W,Y)$ такие, что коразмерности $P \cap P'$ в P и $Q \cap Q'$ в Q конечны. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} K_1 & L_1 \\ L_1^t & M_1 \end{pmatrix}$ - преобразования Потапова-Гинзбурга P' и Q'. Прибавляя к M и K_1 конечномерные операторы ΔM и ΔK_1 можно добиться того, чтобы $\widetilde{M} = M+\Delta M$ и $\widetilde{K} = K_1+\Delta K_1$ удовлетворяли условию: оператор $1-\widetilde{M}\widetilde{K}$ обратим. Но матрицы $\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & \widetilde{M} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \widetilde{K}_1 & L_1 \\ -L_1^t & M_1 \end{pmatrix}$ являются преобразованиями Потапова-Гинзбурга некоторых линейных отношений $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$, с одной стороны к ним применима лемма 8.2, а с другой, коразмерности $P \cap \widetilde{P}$ в P и $Q \cap \widetilde{Q}$ в Q конечны. Далее вектор $(\omega_+, \omega_-) \in W_+ \oplus W_- = W$ содержится в $\mathrm{Ind}\, \widetilde{P}$, если он удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} L\omega_+ = 0 \\ \omega_- = \widetilde{M}\omega_+ \end{cases}$$

с другой стороны, этот вектор лежит в $\mathrm{Ker}\, Q$, если он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \omega_+ = K_1 \omega_- \\ L_1^t \omega_- = 0 \end{cases}$$

В силу обратимости оператора $1 - K_1 \widetilde{M}$ эти системы не имеют общих решений, кроме нулевого, т.е. $\mathrm{Ker}\, \widetilde{Q} \cap \mathrm{Ind}\, \widetilde{P} \neq 0$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 8.3. Пусть $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, $Q \in \mathrm{Mor}(W, Y)$ - ненулевые морфизмы. Тогда существуют $\widetilde{P} \in m(V, W)$, $\widetilde{Q} \in m(W, Y)$ такие, что коразмерности $P \cap \widetilde{P}$ в P и $\widetilde{Q} \cap Q$ в Q конечны и $\mathrm{Ker}\, \widetilde{Q} \cap \mathrm{Ind}\, \widetilde{P} = 0$, $\widetilde{Q}\widetilde{P} \in m(V, Y)$

Продолжим доказательство предложения. Итак, пусть Q и P - ненулевые морфизмы, пусть $\mathrm{Ind}\, P \cap \mathrm{Ker}\, Q \neq 0$. Ясно, что произведение QP линейных отношений Q и P является изотропным подпространством в $V \oplus Y$. Нам достаточно доказать, что QP - максимальное изотропное подпространство. В самом деле, пусть это так и пусть $\widetilde{Q}$, $\widetilde{P}$ - те же, что в лемме 8.3. Тогда $\widetilde{Q}\widetilde{P} \cap QP$ имеет конечную коразмерность в QP и $\widetilde{Q}\widetilde{P} \in m(V, Y)$, т.е. QP - морфизм категории GD.

Итак, докажем, что QP – максимальное изотропное подпространство в $V \oplus Y$. Определим пространство $H = V \oplus W \oplus W \oplus Y$ снабженное билинейной формой

$$\mu\{(v, w_1, w_2, y), (v', w_1', w_2', y')\} =$$

$$= \{v, v'\}_V - \{w_1, w_1'\}_W + \{w_2, w_2'\}_W - \{y, y'\}_Y$$

Пусть T – подпространство всех векторов вида (v, w, w, y), пространство T коизотропно, его ортогональное дополнение $T^\perp$ относительно формы μ есть множество векторов вида $(0, w, w, 0)$. Пространство $T/T^\perp$ изоморфно $V \oplus Y$.

Произведение QP (соответственно $\tilde{Q}\tilde{P}$) вычисляется следующим образом. Находим пересечение максимального изотропного пространства $P \oplus Q$ (соответственно $\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$) с подпространством T и проектируем это пересечение вдоль $T^\perp$ на $V \oplus Y$. Нам достаточно доказать (в силу леммы 8.I), что коразмерности $QP \cap \tilde{Q}\tilde{P}$ в QP и $\tilde{Q}\tilde{P}$ равны. Так как $N = Q \oplus P$ и $\tilde{N} = \tilde{Q} \oplus \tilde{P}$ не пересекаются с $T^\perp$ (это эквивалентно тому, что $\operatorname{Ind} P \cap \operatorname{Ker} Q = 0$, $\operatorname{Ind} \tilde{P} \cap \operatorname{Ker} \tilde{Q} = 0$), то эти коразмерности равны, соответственно, коразмерностям $N \cap \tilde{N} \cap T$ в $N \cap T$ и $\tilde{N} \cap T$.

Остается заметить, что $N + T = \tilde{N} + T = H$, (см. замечание в конце п.8.I), откуда следует искомое равенство коразмерностей. Предложение 8.I. доказано. ⊠

<u>Лемма 8.4.</u> Умножение морфизмов категории $\overline{GD}$ ассоциативно.

Доказательство. Пусть $(PQ)R = null$, причем $P \in Mor(V,W)$, $Q \in Mor(W,Y)$, $R \in Mor(Y,Z)$ – ненулевые морфизмы. Тогда существуют $w \in W$, $y \in Y$, не равные одновременно нулю такие, что $(0,w) \in P$, $(w,y) \in Q$, $(y,0) \in R$. Но тогда $P(QR) = null$.

8.3. Операторы рождения-уничтожения. Пусть V – объект категории $\overline{GD}$. Выберем в V_+ ортогональный (относительно скалярного произведения) базис e_1 , e_2 , ... Поставим в соответствие каждому элементу базиса e_i "нечетную" переменную ξ_i и рассмотрим фермионные пространства Фока $\bar{\Lambda}$ и Λ , состоящие из функций от ξ . Эти пространства мы будем обозначать соответственно через $\bar{\Lambda}(V)$ и $\Lambda(V)$.

Пусть f_1 , f_2 , ... – базис в V_- , довйственный к базису e_i $(\{e_i, f_j\}_V = \delta_{ij})$. Пусть $v = (v_+, v_-) \in V_+ \oplus V_- = V$. Пусть $v_i^\pm$ – координаты v в базисе e_1 , e_2 , ... , f_1 , f_2 , ... Операторы рождения-уничтожения $\hat{a}(v)$ задаются формулой

$$\hat{a}(v)g(\xi) = \left(\sum v_i^+ \xi_i - \sum v_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) g(\xi)$$

Операторы $\hat{a}(v)$ ограничены в обеих топологиях в фермионном пространстве Фока (т.е. в пространствах $\Lambda(V_+)$ и $\bar{\Lambda}(V_+)$). Они удовлетворяют соотношению

$$\{\hat{a}(v_1), \hat{a}(v_2)\} \stackrel{def}{=} \hat{a}(v_1)\hat{a}(v_2) + \hat{a}(v_2)\hat{a}(v_1) = \\ = \{v_1, v_2\}_V \cdot 1$$

$$\hat{a}(v_+, v_-)^* = -\hat{a}(\bar{v}_-, \bar{v}_+)$$

8.4. Спинорное представление.

Теорема 8.I. Пусть $P: V \to W$ - ненулевой морфизм категории $\overline{GD}$. Тогда

а) существует единственный, с точностью до умножения на константу оператор $Spin(P): \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ такой, что для любых $(v, w) \in P$ выполнено

$$\hat{a}(w)\, Spin(P) = Spin(P)\, \hat{a}(v) \tag{8.2}$$

б) Если $QP \neq null$, то

$$Spin(QP) = c(Q,P)\, Spin(Q)\, Spin(P) \tag{8.3}$$

где $c(Q,P)$ - ненулевой скаляр. Если же $QP = null$ то

$$Spin(Q)\, Spin(P) = 0$$

Иными словами, отображение $P \mapsto Spin(P)$, $null \mapsto 0$ является представлением категории $\overline{GD}$. ■

Перед тем, как приступить к доказательству теоремы, мы получим явные формулы для операторов $Spin(P)$, эти формулы представляют самостоятельный интерес.

8.5. Явная формула. Проще всего эта формула выглядит в случае, когда $P \in m(V, W)$:оператор $Spin(P)$ в этом случае имеет ядро

$$\exp\left\{ \frac{1}{2} (\xi \;\; \bar{\eta}) \begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix} \right\} \tag{8.4}$$

где $\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга P.

Выберем V ортогональный базис $e_1^V, e_2^V, \ldots, f_1^V, f_2^V, \ldots$, причем $e_j^V \in V_+$, $f_j^V \in V_-$, $\{e_i^V, f_j^V\} = \delta_{ij}$. Выберем аналогичный базис в W.

Пусть теперь P - произвольный морфизм $V \to W$, не содержащийся в $m(V,W)$. Пусть $E = P \cap (V_- \oplus W)$ и пусть $P' \in m(V,W)$ таково, что $P = E \oplus (P \cap P')$. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга линейного отношения P'. Выберем в E базис $s_1, \ldots, s_k$, пусть $s_m = \sum_\alpha p_\alpha^m e_\alpha^V + \sum_\beta q_\beta^m f_\beta^W$. Тогда оператор $Spin(P): \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ имеет ядро

$$K(\xi, \overline{\eta}) = \prod_{m=1}^{k} \left(\sum p_\alpha^m \xi_\alpha + \sum (-1)^k q_\beta^m \overline{\eta}_\beta \right) \exp\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi & \overline{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \overline{\eta} \end{pmatrix} (-1)^k \right\} \tag{8.5}$$

Оператор с ядром $K(\xi, \overline{\eta})$ мы будем обозначать через $Spin(P)$. Проверим соотношения (8.2).

$$\hat{a}(w) Spin(P) f = \hat{a}(w) \int K(\xi, \overline{\eta}) f(\eta)\, d\eta\, d\overline{\eta} =$$

$$= \int \left(\sum w_i^+ \xi_i - \sum w_i^- \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) K(\xi, \overline{\eta}) f(\eta)\, d\eta\, d\overline{\eta}$$

$$Spin(P)\, \hat{a}(v) f =$$

$$= \int K(\xi, \overline{\eta}) \left(\sum v_j^+ \eta_j - \sum v_j^- \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right) f(\eta)\, d\eta\, d\overline{\eta} =$$

$$= \int K(\xi, \overline{\eta}) \left(\sum v_j^+ \frac{\partial_r}{\partial_r \overline{\eta}_j} - \sum v_j^- \overline{\eta}_j \right) f(\eta)\, d\eta\, d\overline{\eta}$$

Итак, нам нужно проверить равенство

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum \omega_j^+ \xi_j - \sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) K(\xi, \bar{\eta}) = \\
&= K(\xi, \bar{\eta}) \left(\sum \upsilon_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j} - \sum \upsilon_j^- \bar{\eta}_j\right)
\end{aligned}
\qquad (8.6)
$$

Рассмотрим сначала случай, когда $K(\xi, \bar{\eta})$ имеет вид (8.4), т.е. когда $k=0$ (или $P \in m(V, W)$). Равенство (8.6) эквивалентно равенству

$$
\Big[\sum_j \Big(\omega_j^+ - \sum k_{ij}\, \omega_i^- - \sum \ell_{ji} \upsilon_i^+\Big)\xi_j +
$$

$$
+ \sum_j \Big(\upsilon_j^- - \sum m_{ji} \upsilon_i^+ - \sum \ell_{ji} \omega_i^-\Big)\bar{\eta}_j\Big] K(\xi, \bar{\eta}) = 0
$$

Но выражение в квадратных скобках равно 0.

Пусть теперь линейное отношение P произвольно. Пусть

$$
K(\xi, \bar{\eta}) = \pi(\xi, \bar{\eta}) K_0(\xi, \bar{\eta}) \qquad (8.7)
$$

где $\pi(\xi, \bar{\eta})$ - произведение линейных форм, а $K_0(\xi, \bar{\eta})$ имеет вид (8.4), см формулу (8.5). Проверим отдельно равенство (8.6) для $(\upsilon, \omega) \in E$ и для $(\upsilon, \omega) \in P' \cap P$.

Начнем с E. Пусть $(\upsilon, \omega) = S_m$. Тогда $\omega_j^- = \upsilon_j^+ = 0$.

Таким образом, в (8.6) выражение (8.7) умножается на множители, которые уже содержатся в произведении линейных форм $\pi(\xi, \bar{\eta})$. Тем самым произведение равно 0.

Пусть теперь $(\upsilon, \omega) \in P' \cap P$. Тогда

$$\left(\sum \omega_j^+ \xi_j - \sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \left(\sum \upsilon_j^- \bar{\eta}_j - \sum \upsilon_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\right)\right) \tilde{\pi}(\xi, \bar{\eta}) \times$$
$$\times K_0(\xi,\bar{\eta}) = \left(-\sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} - (-1)^k \sum \upsilon_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\right) \tilde{\pi}(\xi,\bar{\eta}) K_0(\xi,\bar{\eta}) + \tag{8.8}$$
$$+ (-1)^k \pi(\xi,\bar{\eta}) \left(\sum \omega_j^+ \xi_j - \sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \left(\sum \upsilon_j^- \bar{\eta}_j - \sum \upsilon_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\right)\right) K_0(\xi,\bar{\eta})$$

Но $(\upsilon, \omega) \in P$, а поэтому второе слагаемое равно 0 . Но, с другой стороны, вектор (υ, ω) ортогонален каждому S_k поэтому

$$\left(\sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \sum \upsilon_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\right)\left(\sum p_\alpha^m \xi + \sum q_\beta^m \bar{\eta}_\beta\right) = 0$$

а поэтому

$$\left(\sum \omega_j^- \frac{\partial}{\partial \xi_j} + (-1)^k \sum \upsilon_j^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_j}\right) \tilde{\pi}(\xi, \bar{\eta}) = 0$$

а значит (8.8) равно нулю, что и требовалось проверить.

8.6. Перейдем к доказательству теоремы 8.I.

Лемма 8.5. Пусть $P: V \to W$, $Q: W \to Y$ - ненулевые морфизмы. Пусть оператор $A: \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$ удовлетворяет условию

$$\hat{a}(\omega) A = A\, \hat{a}(\upsilon)$$

для всех $(\upsilon, \omega) \in P$. Пусть оператор $B: \Lambda(W_+) \to \Lambda(Y_+)$ удовлетворяет условию

$$\hat{a}(y) B = B\, \hat{a}(\omega)$$

для всех $(\omega, y) \in Q$. Тогда оператор BA удовлетворяет условию

$$\hat{a}(y)B = B\hat{a}(w)$$

для всех $(v, y) \in QP$. ■

<u>Доказательство</u>. Пусть $(v, y) \in QP$, тогда существует $w \in W$ такой, что $(v, w) \in P$, $(w, y) \in Q$. Тогда

$$\hat{a}(y)BA = B\hat{a}(w)A = BA\hat{a}(v)$$

Лемма доказана. ☒

Итак, равенство (8.3) будет следовать из равенства (8.2), если мы докажем единственность оператора $Spin(P)$.

<u>8.7 Единственность оператора</u> $Spin(P)$.

<u>Лемма 8.6</u>. Пусть $P: V \to W$ – ненулевой морфизм. Тогда существует не более одного ненулевого ограниченного оператора (с точностью до умножения на константу) $A: \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$, удовлетворяющего условию

$$\hat{a}(w)A = A\hat{a}(v)$$

для всех $(v, w) \in P$. ■

Логическая схема доказательства этой леммы довольно сложна.

<u>Лемма 8.7</u> Пусть $P: V \to W$ – ненулевой морфизм, причем преобразование Потапова-Гинзбурга морфизма P имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}$. Тогда оператор A, удовлетворяющий соотношению (8.9) имеет ядро

$$c \exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi & \bar{\eta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & L \\ -L^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix}\right\}$$

где $c \in \mathbb{C}$.

Доказательство леммы 8.7. Рассмотрим вектор $f(\eta)=1$ в пространстве $\Lambda(V_+)$. Так как $\hat{a}(v)=1$ для любого $v\in V_-$, то вектор $A\cdot 1$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\hat{a}(w)A\cdot 1=0$$

для всех $w\in W_-$. Итак, $A\cdot 1 = 1$. В силу равенства (8.9) для любых $v_1,\dots,v_k\in V_+$ выполнено

$$A\,\hat{a}(v_1)\dots\hat{a}(v_k)\cdot 1=\hat{a}(Lv_1)\dots\hat{a}(Lv_k)A\cdot 1=$$
$$=\hat{a}(Lv_1)\dots\hat{a}(Lv_k)\cdot 1$$

Таким образом, оператор A однозначно определен на множестве всех векторов вида $\hat{a}(v_1)\dots\hat{a}(v_k)\cdot 1$. Это множество, в частности, содержит все мономы вида $\xi_{\alpha_1}\dots\xi_{\alpha_n}$, Линейная оболочка всех мономов плотна в $\Lambda(V_+)$ и, тем самым, оператор A однозначно определен.

Лемма 8.8. Пусть $Q: V\to V$ - обратимый морфизм и пусть оператор $Spin(Q)$ обратим.

а) пусть $P: V\to W$ - ненулевой морфизм, и лемма 8.6 выполнена для морфизма P . Тогда она выполнена и для морфизма QP .

б) пусть $P: Y\to V$ - ненулевой морфизм и лемма 8.6 выполнена для морфизма P . ТОгда она выполнена и для морфизма PQ .

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 8.5.

Лемма 8.9. Лемма 8.6 выполнена для любого $P\in m(V,W)$.

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} K & L \\ -L^t & M \end{pmatrix}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга морфизма P. Представим P в виде $P = QRT$, где Q, R, T имеют соответственно преобразования Потапова-Гинзбурга

$$\begin{pmatrix} K & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & M \end{pmatrix}$$

Тогда

$$Spin(Q) f(\xi) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \xi K \xi^t \right\} f(\xi)$$

$$Spin(T) f(\eta) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum m_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right\} f(\eta)$$

Эти операторы обратимы. теперь применяем леммы 8.9 и 8.8.

Доказательство леммы 8.6. Нам достаточно показать, что любой ненулевой морфизм $P: V \to W$ представим в виде $P = QP'R$, где $Q: W \to W$ и $R: V \to V$ - обратимые морфизмы, а $P' \in m(V, W)$. Рассмотрим оператор Березина A, построенный по оператору P' в п. 8.5. Существуют индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_n$ такие, что оператор Березина

$$B = \mathcal{D}^{\xi}_{\alpha_1} \ldots \mathcal{D}^{\xi}_{\alpha_k} A \mathcal{D}^{\eta}_{\beta_1} \ldots \mathcal{D}^{\eta}_{\beta_n}$$

(Напомним, что $\mathcal{D}^{\xi}_j = \xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, см. второе определение операторов Березина) имеет ядро вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\} \qquad (8.10)$$

Рассмотрим линейный оператор $T_i^V : V \to V$, который переставляет базисные векторы e_i^V и f_i^V, а $T_i^V e_j^V = -e_j^V$, $T_i^V f_j = -f_j$ $(j \neq i)$. Рассмотрим также аналогичные операторы T_j^W в W. Легко видеть, что

$$\hat{a}(v_1)\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j\hat{a}(v_2)$$

для всех v_1, v_2, связанных отношением $v_1 = T v_2$. Отсюда по лемме 8.8 получаем. что оператор B удовлетворяет условию

$$\hat{a}(w)B = B\hat{a}(v) \qquad (8.11)$$

для всех $(v,w) \in P' = T^W_{\alpha_1}\dots T^W_{\alpha_k} P T^V_{\beta_1}\dots T^V_{\beta_n}$.

Но для оператора B с ядром (8.I0) множество всех (v,w), удовлетворяющих условию (8.2) есть линейное отношение с преобразованием Потапова-Гинзбурга $\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}$. Искомое разложение $P = Q P' R$ построено и лемма доказана.

8.8. Простые спиноры. Из всех утверждений теоремы 8.I. нам осталось доказать лишь условия обращения в ноль произведения операторов $\mathrm{Spin}(P)\,\mathrm{Spin}(Q)$. Для доказательства мы введем понятие "простого спинора".

Простым спинором (это тот же объект, который называл простым спинором Э.Картан [21]), мы назовем вектор в $\Lambda(V_+)$ вида

$$\prod_{m=1}^{K}\left(\sum_j p_j^m \xi_j\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\xi K \xi^t\right\} \qquad (8.12)$$

где $\sum_j |p_j^m|^2 < \infty$, а $K = -K^t$, $\sum_{i,j} k_{ij}^2 < \infty$. Формула (8.12) подозрительно похожа на формулу (8.5) и это сходство не случайно. Пусть $P \in Mor(\mathbb{C}^0, \frac{V}{GD})$, где через $\mathbb{C}^0$ обозначен нульмерный объект категории GD. Тогда оператор $Spin(P)$ переводит одномерное пространство $\Lambda(\mathbb{C}^0_+)$ в пространство $\Lambda(V_+)$. Образом этого оператора должна быть прямая. Направляющие векторы таких прямых - это, как легко видеть, в точности простые спиноры.

Из уже доказанной части теоремы 8.1 вытекает, что любой оператор Березина переводит простые спиноры в простые спиноры.

8.9. Окончание доказательства теоремы 8.1.

Лемма 8.10. Любой ненулевой морфизм $P: V \to W$ представим в виде $P = QP'T$, где $Q: W \to W$, $T: V \to V$ - обратимые морфизмы, а $P' \in m(V, W)$, причем преобразование Потапова-Гинзбурга P' имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}$

Доказательство. Как было показано в доказательстве леммы 8.6 любой морфизм $V \to W$ путем домножения слева и справа на обратимые морфизмы может быть переведен в множество $m(V, W)$. При доказательстве леммы 8.9 мы показали, что любой морфизм из $m(V, W)$ путем домножения слева и справа на обратимые морфизмы может быть приведен к каноническому виду, указанному в формулировке леммы. Лемма доказана. $\boxtimes$

Вернемся к доказательству теоремы. Сначала проверим утверждение в случае, когда $P \in Mor(0, V)$, $Q \in (Mor\, V, W)$. Без ограничения общности можно считать, что преобразование Потапова-Гинзбурга морфизма Q имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & L \\ -L^t & 0 \end{pmatrix}$ и тогда утверждение очевидно.

Пусть теперь $Q \in Mor(V, W)$, $R \in Mor(W, Y)$. Равенство $Spin(R)Spin(Q) = 0$ эквивалентно тому, что

$$Spin(R)[Spin(Q)\,Spin(P)] = 0 \qquad (8.13)$$

для любого $P \in Mor(0, V)$ (в самом деле, линейная оболочка множества простых спиноров плотна в $\Lambda(W_+)$)

Предположим в начале, что $Ker(R) \cap Ind\, Q \neq 0$. Тогда $Ker \cap Ind(QP) \neq 0$ для любого $P \in Mor(0, V)$. Тем самым (8.13) выполнено.

Обратно, предположим, что $Ker(P) \cap Ind(Q) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что преобразование Потапова-Гинзбурга отношения Q равно $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $Ind\, Q$ состоит из всех векторов вида $(0, h_-) \in W_+ \oplus W_-$ где $Lh_- = 0$. Рассмотрим произвольное максимальное изотропное подпространство H в W такое, что, во-первых $H \supset Ind\, Q$, а, во-вторых, коразмерность $H \cap W_-$ в W_- конечна. Такое H имеет вид QP для некоторого $P \in Mor(0, V)$. Пространство $Ker\, P \cap W_-$ конечномерно, оно не пересекается $Ind\, Q$. Поэтому H можно выбрать так, что $H \cap Ind\, Q = 0$. Итак, существует $P \in Mor(0, V)$, для которого (8.13) не выполнено. Теорема 8.1 доказана.

Замечание. Рассмотрим произвольный оператор Березина $Spin(Q) : \Lambda(V_+) \to \Lambda(W_+)$. Замыкание его образа состоит из всех векторов в $\Lambda(W_+)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\{\hat{a}(\omega) f = 0$$

для всех $\omega \in \operatorname{Ind} Q$. Ядро $Spin(Q)$ - это сумма (топологическая) образов всех операторов $\hat{a}(v)$ по всем $v \in \operatorname{Ker} Q$.

8.10. Классическая группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений.

Если $\dim V = 2n < \infty$, то группа $Aut(V)$ - это просто группа $O(2n, \mathbb{C})$. Пусть V бесконечномерно. Тогда обратимый морфизм из $V \to V$ является графиком ограниченного ортогонального оператора, матрица которого

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \to V_+ \oplus V_-$$

удовлетворяет условию: B и C - операторы Гильберта-Шмидта. Классическая группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений (см. [4] , [89]) является подгруппой в $Aut(V)$, эта подгруппа выделяется условием $\mathcal{D} = \bar{A}$, $B = \bar{C}$. .

8.11. Атлас на грассманиане $Mor(V, W) \setminus null$.

Пусть V - объект категории $\overline{GD}$. Рассмотрим в V подпространство $V_+^{i_1 \dots i_k}$, натянутое на базисные векторы $f_{i_1}^V, \dots , f_{i_k}^V$, а также e_j^V , где j - пробегает все индексы, отличные от $i_1, \dots , i_k$. Пусть подпространство $V_-^{i_1 \dots i_k}$ натянуто на все остальные базисные векторы.

Пусть $i_1, \dots , i_k , j_1 , \dots , j_l$ - набор натуральных чисел. Мы скажем, что ненулевой морфизм $P: V \to W$ лежит в карте $\mathcal{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$, если

I°. P является графиком оператора $S^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}=\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$ из $V_+^{i_1\dots i_k}\oplus W_-^{j_1\dots j_l}\to V_-^{i_1\dots i_k}\oplus W_+^{j_1\dots j_l}$

2°. S - ограниченная матрица, $K=-K^t$, $M=-M^t$, причем K, M - операторы Гильберта-Шмидта.

Пусть $P\in\mathcal{M}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$. Тогда несложно записать явно оператор $Spin(P)$, а именно

$$Spin(P)=\mathcal{D}^{\xi}_{i_1}\dots\mathcal{D}^{\xi}_{i_k}B\mathcal{D}^{\eta}_{j_1}\dots\mathcal{D}^{\eta}_{j_l}$$

где B - оператор с ядром

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(-1)^{k+l}(\xi\ \eta)\,S^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right\}$$

Таким образом, мы получили еще одну явную формулу для операторов $Spin(P)$.

Лемма 8.II. Любой ненулевой морфизм $P:V\to W$ содержится в одной из карт $\mathcal{M}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $Spin(P)$. Домножениями на операторы вида $\mathcal{D}_j$ слева и справа можно привести $Spin(P)$ к виду (8.4). Тем самым домножениями на T_j (обозначение из доказательства леммы 8.6, см. п.8.7) линейное отношение P можно перевести в множество $m(V,W)$, что и требовалось доказать.

Замечание I. Наш атлас является минимальным, т.е. при выкидывании любой из карт он перестает покрывать грассманиан $Mor(V,W)\setminus null$.

Замечание 2. Множество $Mor(V,W)\setminus null$ состоит из двух компонент связности, эти компоненты отличаются четностью числа $k+\ell$. Особенно хорошо эти две компоненты видны на уровне пространства всех ненулевых операторов Березина $\Lambda(V_+)\to\Lambda(W_+)$. А именно ядро такого оператора является либо четной, либо нечетной функцией по переменным $\xi_1, \xi_2, \dots, \bar\eta_1, \bar\eta_2, \dots$.

§9. Операторы Березина в Гильбертовом пространстве.

9.I. Формулировки теорем. Рассмотрим оператор Березина A с ядром

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left(p_j^m\xi_j+q_j^m\bar\eta_j\right)\right]\exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi & \bar\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar\eta\end{pmatrix}\right\} \qquad (9.1)$$

из в .

Теорема 9.I. Пусть операторы K и M являются ядерными. Оператор A ограничен тогда и только тогда, когда оператор L представим в виде $L=L'(1+T)$, где $\|L\|\leq 1$, а T - ядерный оператор.

Теорема 9.2. Пусть оператор A ограничен. Тогда матрица L представима в виде $L=L'(1+T)$, где $\|L'\|\leq 1$ а T - оператор Гильберта-Шмидта.

Теорема 9.3. Пусть матрица L представима в виде $L=L'(1+T)$, где $\|L'\|<1$, а T - оператор Гильберта-Шмидта. Тогда A ограничен.

Замечание I. Теорема 9.I. показывает, что необходимые условия ограниченности в теореме 9.2 не достаточны, а достаточные условия ограниченности в теореме 9.I. не необходимы.

Доказательства этих теорем довольно длинны, содержательно они, однако, значительно проще, чем в Бозонном случае.

Без ограничения общности можно считать, что оба пространства Фока бесконечномерны, поэтому мы их можем считать совпадающими. Итак, мы будем считать, что наш оператор действует из пространства $\Lambda = \Lambda(\ell_2)$ в себя.

9.2. Избавление от предэкспоненциального произведения. Цель этого пункта - показать, что все три теоремы сводятся к случаю, когда выражение в квадратных скобках в (9.I) отсутствует. Операторы $\mathcal{D}_j = \xi_j + \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ унитарны. Домножением слева и справа на такие операторы можно перевести наш оператор с ядром (9.I) в оператор с ядром вида

$$\exp\left\{ (\xi\ \bar{\eta}) \begin{pmatrix} K' & L' \\ -(L')^t & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \right\}$$

при этом (см. доказательство леммы 6.4) операторы $K-K'$, $L-L'$, $M-M'$ конечномерны. Поэтому нам достаточно доказать следующие, по существу, тривиальные леммы.

Лемма 9.I. Пусть L - оператор в гильбертовом пространстве. Тогда следующие два условия эквивалентны.

а) L представим в виде $L'(1+T)$, где T - оператор Гильберта-Шмидта, а $\|L\| \leq 1$.

б) L представим в виде $L = \tilde{L} + \tilde{T}$, где $\|\tilde{L}\| \leq 1$, а T - оператор Гильберта-Шмидта.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь утверждение б) $\Rightarrow$ а). Итак, пусть выполнено б). С помощью полярного разложения оператора L мы можем свести утверждение к случаю, когда $(L+T)^* = (L+T)$. Далее применяем спектральную теорему.

Замечание. Утверждение леммы, очевидно, остается в силе, если в формулировке заменить слова "оператор Гильберта-Шмидта" на слова "ядерный оператор".

Лемма 9.2. Пусть L – оператор в гильбертовом пространстве. Тогда следующие условия эквивалентны

а) L представим в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L\| < 1$, а T – компактный оператор.

б) L представим в виде $L = L^0(1+T)$, где $\|L^0\| < 1$, а T – конечномерный оператор.

в) L представим в виде $L = \tilde{L} + S$, где $\|\tilde{L}\| < 1$, а S – конечномерный оператор.

г) L представим в виде $L = L'' + H$, где $\|L''\| < 1$, а H – компактный оператор.

Доказательство: аналогично.

9.3. Нормы некоторых простых операторов в $\Lambda(\mathbb{C}^2)$.

Лемма 9.3. Пусть K – оператор умножения на $exp(\lambda \xi_1 \xi_2)$ или оператор $exp\left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)$ Тогда

$$\|K\| = 1 + |\lambda|/\sqrt{2} + O(\lambda^2)$$

$$\|K^{-1}\| = 1 + |\lambda|/\sqrt{2} + O(\lambda^2)$$

при $\lambda \to 0$

Доказательство. рассмотрим, например, оператор K умножения на $exp(\lambda \xi_1 \xi_2) = 1 + \lambda \xi_1 \xi_2$. В базисе 1, ξ_1, ξ_2, $\xi_1 \xi_2$ он записывается с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \lambda & & & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные числа K^*K тем самым равны 1, 1, $1 \pm |\lambda|\sqrt{2}\sqrt{1+|\lambda^2|/4} + |\lambda|^2/2$. Утверждение доказано.

Лемма 9.4. Пусть K - оператор с символом вида

$$\exp\{\mu(\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2)+\lambda\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2\}$$

или

$$\exp\{\lambda\xi_1\xi_2+\mu(\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2)\}$$

где $0<\mu<1$. Тогда при фиксированном μ и при $|\lambda|\to 0$ выполнено

$$\|K\| \leq 1 + C(\mu)|\lambda|^2 + o(|\lambda|^2)$$

Доказательство. Достаточно разобрать лишь второй случай (первый сводится к нему сопряжением). В базисе 1, ξ_1, ξ_2, $\xi_1\xi_2$ матрица оператора K имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \mu & & \\ & & \mu & \\ \lambda & & & \mu^2 \end{pmatrix}$$

Собственные числа оператора K^*K суть

$$\mu^2, \mu^2, 1+|\lambda|^2+\mu^4 \pm \sqrt{(|\lambda|^2+\mu^4+1)^2-4\mu^4}$$

Наибольшее из них равно

$$(1+\mu^4)+(1-\mu^4)\left[1+\frac{2|\lambda|^2+2|\lambda|^2\mu^4+\lambda^4}{1-\mu^4}\right]^{1/2}+|\lambda|^2=$$

$$=1+C(\mu)|\lambda|^2+O(|\lambda|^2)=\|K\|^2$$

9.4. Доказательство теоремы 9.I.

Лемма 9.5. Пусть K - ядерный оператор. Тогда оператор

$$Af(\xi)=\exp\left\{\frac{1}{2}\xi K\xi^t\right\}f(\xi)$$

ограничен и обратим в Λ.

Доказательство. В силу леммы 6.3 без ограничения общности можно считать, что матрица K диагональна, т.е. наш оператор есть оператор умножения на $\exp\{\sum\lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}\}$, где $\lambda_j>0$, $\sum\lambda_j<\infty$. Фермионное пространство Фока Λ разлагается в тензорное произведение пространств $\Lambda(\mathbb{C}^2)$, а оператор A разлагается в тензорное произведение операторов

$$A_k f(\xi_{2k-1},\xi_{2k})=\exp(\lambda_k\xi_{2k-1}\xi_{2k})f(\xi_{2k-1},\xi_{2k})$$

Тем самым, $\|A\|=\prod_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ в силу леммы 9.3 эта величина конечна.

Наконец, обратный оператор задается формулой

$$A^{-1}f(\xi)=\exp\left(-\sum k_{ij}\xi_i\xi_j\right)$$

и его норма конечна по той же причине. $\boxtimes$

Лемма 9.6. Пусть M - ядерный оператор. Тогда оператор

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right\}$$

ограничен и обратим в $\bar{\Lambda}$.

Доказательство аналогично. $\boxtimes$

Рассмотрим теперь произвольный оператор A с ядром вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix}K & L\\ -L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\} \tag{9.3}$$

где K , M - ядерные операторы. Домножая его слева на ограниченный обратимый оператор

$$Cf(\xi)=\exp\left(-\sum k_{ij}\xi_i\xi_j\right)f(\xi)$$

и справа на

$$\mathcal{D}=\exp\left(-\sum m_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$$

мы получаем оператор

$$\mathcal{B}\begin{bmatrix}0 & L\\ -L^t & 0\end{bmatrix} \tag{9.4}$$

Итак, все свелось к вопросу об ограниченности операторов вида (9.4), или, что то же самое, операторов

$$f(\xi)\to f(\xi L^t)$$

Этот оператор переводит пространство Λ^K однородных функций в себя, причем в пространстве Λ^K наш оператор действует как K -ая внешняя степень $\Lambda^K L$ оператора L . Теперь наша теорема вытекает из следующей леммы

Лемма 9.7. Пусть L - оператор в гильбертовом пространстве. Следующие условия эквивалентны

а) L представим в виде $L = L'(1+T)$, где $\|L'\| \leq 1$, а T - ядерный оператор.

б) Нормы внешних степеней оператора L равномерно ограничены.

Доказательство. I. а $\Rightarrow$ б. Без ограничения общности можно считать, что оператор T самосопряжен (В противном случае $1+T$ представим в виде $V(1+T')$, где V - частичная изометрия, а T' - самоспряжен. Теперь $L = (L'V) \times$ $\times (1+T')$). Без ограничения общности можно считать, что $T \geq 0$.

$$\|\Lambda^k L\| \leq \|\Lambda^k L'\| \cdot \|\Lambda^k(1+T)\| \leq \|\Lambda^k(1+T)\| =$$

$$= (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_k) \leq \prod_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j) < \infty$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - наибольшие собственные числа оператора T.

2. б $\Rightarrow$ а. Пусть $L = V(1+S)$ - полярное разложение оператора L. Тогда $\|\Lambda^k L\| = \|\Lambda^k(1+S)\|$. Пусть

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \qquad \varphi_-(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\| \Lambda^K(1+S)\| = \| \Lambda^K(1+\varphi_+(S)\| =$$

$$= \sup_{j} \prod_{j=1}^{K} (1+\lambda_j) \qquad (9.5)$$

где λ_j - точки спектра оператора $\varphi_+(S)$, а $\sup$ берется по всем наборам $\lambda_1, \dots , \lambda_K$ таким, что ни одна точка λ_j не входит в этот набор большее число раз, чем ее кратность. Величина (9.5) должна быть конечной, отсюда следует ядерность оператора $\varphi_+(S)$. Итак,

$$L = U(1+S) = U(1+\varphi_+(S))(1+\varphi_-(S))$$

причем $\| U(1+\varphi_-(S)\| \leq 1$, что и требовалось доказать.

9.5. Доказательство теоремы 9.3.

Лемма 9.8. Пусть $\varepsilon > 0$, Операторы Березина с символами вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix} K & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix}\right\} \qquad (9.6)$$

и

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix}\right\} \qquad (9.7)$$

ограничены.

Доказательство. Разберем первый случай. Без ограничения общности можно считать, что выражение $\sum K_{ij}\xi_i\xi_j$ имеет вид

$\sum \lambda_j \xi_{2j-1} \xi_{2j}$. Тогда наш оператор разлагается в тензорное произведение операторов с ядрами вида

$$\exp\{(1-\varepsilon)(\xi_{2j-1}\bar{\eta}_{2j-1}+\xi_{2j}\bar{\eta}_{2j})+\lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}\}$$

В силу леммы 9.4. норма этого тензорного произведения конечна. $\boxtimes$

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольный оператор Березина A с ядром вида (9.3), причем L удовлетворяет условию теоремы. Оператор A представим в виде $A = BC\mathcal{D}$, где B имеет ядро (9.6), $\mathcal{D}$ имеет ядро (9.7), а C имеет ядро

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \ \bar{\eta})\begin{pmatrix} 0 & (1-\varepsilon)^{-2}L \\ (1-\varepsilon)^{-2}L^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right\}$$

причем ε можно было выбрать столь малым, что $(1-\varepsilon)^{-2}L$ по-прежнему удовлетворяет условию теоремы. По лемме 9.8 операторы B и $\mathcal{D}$ ограничены, а оператор C ограничен по лемме 9.7. Теорема доказана.

$\boxtimes$

9.6. Доказательство теоремы 9.2, мы начнем с одного простого замечания. Пусть $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(H)$ и пусть R - замкнутое подпространство в H . Выберем ортонормированный базис e_1 , e_2 , ... в H и дополним его до ортонормированного базиса в H , пусть f_1 , f_2 , ... - соответствующие базисные элементы. Теперь пространство $\bar{\Lambda}(H)$ мы можем рассматривать как пространство функций от переменных ξ_1 , ξ_2 , ... , $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, ... Пространство $\bar{\Lambda}(R)$ мы можем рассматривать как подпространство в $\bar{\Lambda}(R)$ состоящее из всех функций, зависящих лишь от переменных $\xi_{\bar 1}, \xi_{\bar 2}, \ldots$. Пусть Q_R - тождественное вложение $\bar\Lambda(R)$ в $\bar\Lambda(H)$, а P_R - проектор в $\bar\Lambda(H)$ на $\bar\Lambda(R)$. Пусть A - оператор в $\bar\Lambda(H)$. Рассмотрим оператор $P_{R_1} A Q_{R_2} : \Lambda(R_2) \to \Lambda(R_1)$ $(R_1, R_2 \subset H)$. Его ядро очнеь легко получить из ядра оператора A, а именно нужно положить

$$\xi_{\bar 1} = \xi_{\bar 2} = \ldots = 0 \quad , \quad \eta_{\bar 1} = \eta_2 = \ldots = 0 \quad .$$

Очевидно, что $\| P_{R_1} A Q_{R_2} \| \leq \| A \|$ и, таким образом мы получаем возможность, выбирая подходящим образом подпространства R_1 и R_2, оценивать $\| A \|$ снизу.

Шаг I. Итак, рассмотрим произвольный оператор A с ядром вида (9.3). Начнем с того, что покажем, что оператор L без ограничения общности можно считать самосопряженным. Пусть $L = US$ - полярное разложение оператора L. Пусть частичная изометрия U действует из подпространства R_2 в подпространство R_1. Если мы хотим доказать неограниченность оператора A, нам достаточно доказать неограниченность оператора $P_{R_1} A P_{R_2} : \Lambda(R_2) \to \Lambda(R_1)$. Его ядро

$$\exp\left\{ \frac{1}{2} (\xi \;\; \eta) \begin{pmatrix} K^\circ & T \\ T^t & M^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^t \\ \eta^t \end{pmatrix} \right\}$$

получается из ядра (9.3) изложенной выше процедурой. Изометрия U отождествляет R_2 и R_1, поэтому оператор X с ядром

$$\exp\left\{ \frac{1}{2} (\xi \;\; \bar\eta) \begin{pmatrix} 0 & U \\ -U^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\}$$

отождествляет $\Lambda(R_2)$ и $\Lambda(R_1)$. Тем самым $XP_{R_1}AP_{R_2}$ имеет ядро

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\xi})\begin{pmatrix} U^tK^0U & T\bar{U} \\ U^tT & M^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \bar{\xi}\end{pmatrix}\right\}$$

Шаг 2. Итак, мы считаем, что ядро нашего оператора A имеет вид (9.3), причем L - самосопряжен.

Возьмем спектральное разложение оператора L и предположим, что спектральное подпространство $H_{[1+\varepsilon,\infty)}$ оператора L, отвечающнн полупрямой $[1+\varepsilon,\infty)$ бесконечномерно. Тогда для любого n можно выбрать ортонормированную систему $e_1,\ldots,e_n\in H_{[1+\varepsilon,\infty)}$ такую, что векторы $Le_1,\ldots,Le_n$ ортогональны. Пусть R_2 - подпространство, натянутое на $e_1,\ldots,e_n$, а R_1 - подпространство, натянутое на $Le_1,\ldots,Le_n$.

Лемма 9.9. Пусть $n\to\infty$. Тогда $\|P_{R_1}AQ_{R_2}\|\to\infty$.

Из этой леммы будет следовать, что

Лемма 9.10. Пусть форма $F=\xi K\xi^t=\sum K_{ij}\xi_i\xi_j$ приводится к каноническому виду $\sum\lambda_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}$, где $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant 0$. Приравняем часть из переменных ξ_1, $\xi_2,\ldots$ в форме F к нулю. Пусть полученная форма приводится к каноническому виду $\sum\mu_j\xi_{2j-1}\xi_{2j}$; $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots$. Тогда $\mu_1\leqslant\lambda_1,\mu_2\leqslant\lambda_2,\ldots$.

Доказательство леммы 9.10. Пусть K - кососимметричный антилинейный оператор в гильбертовом пространстве с матричными элементами K_{ij}. Овеществим наше гильбертово пространство, потом его комплексифицируем. Тогда iK становится самосопряженным оператором, а $\pm\lambda$ - это ни что иное как собственные числа iK. Теперь мы можем воспользоваться известной теоремой о поведении собственных чисел самосопряженного оператора при ограничении на подпространство (см. [3], §24).

Доказательство леммы 9.9. Разложим наш оператор $E = P_{R_1} A Q_{R_2}$ с ядром

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} K' & L' \\ -(L')^t & M' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \bar\eta \end{pmatrix}\right\} \tag{9.8}$$

в произведение трех операторов B , C , $\mathcal{D}$ с ядрами.

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} K' & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar\eta^t \end{pmatrix}\right\};\ \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} 0 & L' \\ -(L')^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar\eta^t \end{pmatrix}\right\};$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar\eta)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & M' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \bar\eta^t \end{pmatrix}\right\}$$

Тогда

I) $\|C\| \geqslant (1+\varepsilon)^n$ в самом деле $\|L'e_i\| \geqslant 1-\varepsilon$, а поэтому $\|C\eta_1\cdots\eta_n\| \geqslant (1+\varepsilon)^n$.

2) Пусть форма $\sum k_{ij}\xi_i\xi_j$ приводится к каноническому виду $\sum \lambda_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Тогда $\|B^{-1}\|$ в силу лемм 9.10 и 9.3 оценивается сверху через

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j/\sqrt{2}+\varphi(\lambda_j)\right)$$

где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^2)$ при $\lambda \to 0$

3) Пусть форма $\sum m_{ij}\bar\eta_i\bar\eta_j$ приводится к каноническому виду $\sum \varkappa_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}$, $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Тогда $\|C^{-1}\|$ оценивается сверху через

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\varkappa_j/\sqrt{2}+\psi(\varkappa_j)\right)$$

где функция ψ удовлетворяет условию $\psi(\varkappa)=O(\varkappa^2)$ при $\varkappa\to 0$.

Теперь

$$\|E\|\geqslant\frac{\|C\|}{\|B^{-1}\|\cdot\|\mathcal{D}^{-1}\|}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(1+\varepsilon)^n}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j/\sqrt{2}+\varphi(\lambda_j)\right)\prod_{j=1}^{n}\left(1+\varkappa_j/\sqrt{2}+\psi(\varkappa_j)\right)}$$

Учитывая, что $\sum\lambda_j^2<\infty$, $\sum\varkappa_j^2<\infty$, мы получаем, что $\|E\|\to\infty$, что и требовалось доказать.

Шаг 3. Итак, мы уже выяснили, что если оператор A ограничен, то для любого $\varepsilon>0$ спектральное подпространство оператора L, соответствующее полупрямой $[\varepsilon,\infty)$ конечномерно. Пусть $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\ldots>1$ - все точки спектра L, лежащие в области $\sigma>1$, мы считаем, что кратные точки спектра встречаются в этой последовательности соответствующее число раз. Пусть $e_1, e_2,\ldots$ - соответствующие собственные векторы. Пусть $R=R^{(n)}$ - подпространство натянутое на $e_1, e_2,\ldots$.

Лемма 9.II. Если $\sum(\sigma_j-1)^2=\infty$, то $\|P_{R^{(n)}}A\,Q_{R^{(n)}}\|\to\infty$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Проводя те же оценки, что и в доказательстве леммы 9.9 мы получаем

$$\|P_{R(n)} A\, Q_{R(n)}\| \geqslant \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\sigma_j}{\left(1+\frac{\lambda_j}{\sqrt{2}}+\varphi(\lambda_j)\right)\left(1+\frac{\varkappa_j}{\sqrt{2}}+\psi(\varkappa_j)\right)} \right]$$

откуда сразу следует наше утверждение.

Итак, в случае ограниченного оператора A выполнено $\sum (\sigma_j - 1)^2 < \infty$. Теорема доказана.

§I0. Категории $\overline{GA}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

В следующей главе категория $\overline{GA}$ будет играть весьма важную роль, категории $\overline{B}$ и $\overline{C}$ будут использваться в не очень существенных конструкциях. Исследованию теории представлений категорий GA, B, C, $\mathcal{D}$ посвящена глава IУ, эта глава однако, почти не зависит от настоящего параграфа.

I0.I Категория GA. Объектом категории $\overline{GA}$ является прямая сумма двух гильбертовых пространств $V = V_+ \oplus V_-$.

Морфизмами категории GA являются линейные отношения, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Пусть V, W - объекты $\overline{GA}$. Множество $m(V,W)$ состоит из линейных подпространств $P \subset V \oplus W$ таких, что

I. P является графиком оператора $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$: $V_+ \oplus W_- \to V_- \oplus W_+$

2. K, N - операторы Гильберта-Шмидта.

Множество $Mor(V,W)$ состоит из элемента $null$, а также линейных отношений $P \subset V \oplus W$, удовлетворяющих условию: существует $P' \subset m(V,W)$ такое, что коразмерности $P \cap P'$ в P и P' конечны (подчеркнем, что эти коразмерности не обязаны совпадать).

Произведение нулевого морфизма с любым другим является нулевым морфизмом. Далее, пусть $P \in Mor(V, W)$, $Q \in Mor(W, Y)$ - ненулевые морфизмы. Если не выполнено хотя бы одно из двух условий

$$\operatorname{Ker} Q \cap \operatorname{Ind} P = 0$$

$$\operatorname{Im} P + \mathcal{D}(Q) = W$$

то $QP = null$. В противном случае Q и P перемножаются как линейные отношения.

<u>I0.2. Вложение категории</u> $\overline{GA}$ <u>в</u> $\overline{G\mathcal{D}}$. Пусть $V \in Ob(GA)$, $V = V_+ \oplus V_-$. Обозначим через Y' пространство, двойственное к пространству Y Рассмотрим пространство $\widetilde{V} = V \oplus V'$ и снабдим его симметричной билинейной формой

$$\{(v_1, f_1), (v_2, f_2)\} = f_1(v_2) + f_2(v_1)$$

Далее, положим $\widetilde{V}_+ = V_+ \oplus V_-'$, $\widetilde{V}_- = V_- \oplus V_+'$. Таким образом, $\widetilde{V}$ снабжено структурой объекта категории $\overline{G\mathcal{D}}$.

Пусть $P \in Mor_{GA}(V, W)$, $P \neq null$. Пусть P' - аннулятор P в $V' \oplus W'$. Тогда $P \oplus P'$ - морфизм категории $\overline{G\mathcal{D}}$. Наконец, нулевому морфизму $V \to W$ мы поставим в соответствие нулевой морфизм $\widetilde{V} \to \widetilde{W}$.

Искомый функтор из GA в $G\mathcal{D}$ построен.

<u>Следствие.</u> Умножение морфизмов категории $\overline{GA}$ ассоциативно.

В самом деле, наше отображение из $Mor_{\overline{GA}}$ в $Mor_{\overline{GD}}$ инъективно. Умножение же в $Mor_{\overline{GD}}$ ассоциативно. (До этого момента, строго говоря, мы не имели права называть $\overline{GA}$ категорией)

10.3. Спинорное представление $\overline{GA}$. Мы можем рассмотреть композицию только что построенного функтора и функтора $Spin$. Получающееся представление категории $\overline{GA}$ мы тоже будем называть спинорным.

10.4. Категория $\overline{C}$. Определение объекта категории $\overline{C}$ отличается от определения объекта категории $\overline{GD}$ (см. п.8.1) в одном-единственном слове. А именно, объект категории $\overline{C}$ - это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, оснащенное следующими дополнительными структурами:

1. Фиксировано разложение $V = V_+ \oplus V_-$

2. Фиксирован антилинейный биективный изометрический оператор $I : V_+ \to V_-$.

3. Фиксирована кососимметричная билинейная форма

$$\{(v_+, v_-), (v_+', v_-')\}_V = \langle I v_+, v_-' \rangle - \langle I v_+', v_-' \rangle$$

Определение морфизма дается точно также, как и в случае $\overline{GD}$, только условие $K = -K^t$, $M = -M^t$ нужно заменить на условие $K = K^t$, $M = M^t (S = S^t)$. Можно дать определение и по-другому. Объект категории $\overline{C}$ является и объектом категории $\overline{GA}$. Линейное отношение $P : V \rightrightarrows W$ мы назовем морфизмом категории $\overline{C}$, если

1. P - морфизм категории $\overline{GA}$.

2. P - максимальное изотропное подпространство в $V \oplus W$ относительно кососимметричной билинейной формы

$$[(v,w);(v',w')]=\{v,v'\}_V-\{w,w'\}_W$$

Замечание I. Ограничивая спинорное представление категории $\overline{GA}$ на $\overline{C}$ мы получаем представление категории $\overline{C}$, которое разлагается в прямую сумму счетного числа представлений. В главе IУ мы увидим, что в качестве слагаемых выступают все фундаментальные представления категории $\overline{C}$.

Замечание 2. Симплектическая категория $\overline{Sp}$ является подкатегорией в категории C.

10.5. Категория B. Пусть V - объект категории $\overline{GD}$, а $\mathbb{C}e$ - одномерное пространство. Объект категории B - это прямая сумма $\tilde{V}=\mathbb{C}e\oplus V$, снабженная симметричной билинейной формой

$$\{(ce,v),(c'e,v')\}_{\tilde{V}}=cc'+\{v,v'\}_V$$

Замечание. Основное отличие категории $\overline{B}$ от категории $\overline{GD}$ в том, что ее объекты "нечетномерны", в отличие от объектов категории $\overline{GD}$, которые "четномерны", хотя на первый взгляд, в бесконечномерном случае это безразлично. Известно, что серии групп $D_n=SO(2n,\mathbb{C})$ и $B_n=SO(2n+1,\mathbb{C})$ ощутимо различаются по своим свойствам. Точно также правильно определенные группы $O(2\infty,\mathbb{C})$ и $O(2\infty+1,\mathbb{C})$ - это не одно и то же (см. [37]).

Пусть $\tilde{V}$ - объект категории B, пусть $\mathbb{C}f$ - одномерное пространство($f=f_V$). Пусть $V^o=V\oplus\mathbb{C}f_V$, снабдим это пространство билинейной формой

$$\{(v_1^{\sim},h_1f_V),(v_2^{\sim},h_2f_V)\}_{V^o}=h_1h_2+\{v_1,v_2\}_{V^{\sim}}$$

Введем в V^0 структуру объекта категории $\overline{GD}$, положив $V_+^0=\mathbb{C}\cdot(f+ie)\oplus V_+$, $V_-^0=\mathbb{C}\cdot(f-ie)\oplus V_-$.

Морфизм категории B из $\tilde{V}$ в $\tilde{W}$ - это либо $null$, либо ненулевой морфизм P категории $\overline{GD}$ из V^0 в V^0 такой, что $(f_V, f_W)\in P$.

Замечание. Категория $\overline{B}$, по построению, вложена в категорию $\overline{GD}$. Ограничение спинорного представления категории $\overline{GD}$ на категорию $\overline{B}$ разлагается в прямую сумму двух одинаковых представлений.

Глава III. Комплексная оболочка группы диффеоморфизмов окружности и представления категории римановых поверхностей.

Обозначения. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ – сфера Римана $(\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty)$, Пусть $\mathcal{D}_+ \subset \overline{\mathbb{C}}$ – круг $|z| \leq 1$, а $\mathcal{D}_- \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область $|z| \geq 1$. Пусть $\mathcal{D}_+^0$ и $\mathcal{D}_-^0$ – соответственно, внутренность $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_-$. Пусть $S^1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ – окружность $|z| = 1$. Голоморфная функция в некоторой открытой области называется однолистной, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Функцию f, определенную в замкнутой области Ω мы будем называть голоморфной (соответственно, однолистной) вплоть до границы, если f голоморфно(однолистно) продолжается в некоторую открытую область, содержащую Ω.

Под словами "риманова поверхность" подразумевается одномерное комплексное многообразие. Слова "риманова поверхность с краем" означают двумерное вещественно аналитическое многообразие M с краем K с комплексной структурой на $M \setminus K$ (естественно, комплексная и вещественно аналитическая структуры согласованы).

Если $\tau : M \to N$ отображение римановых поверхностей и q – геометрический объект (обычно дифференциал) на M, через $\tau_* q$ мы обозначим образ объекта τ на N. Если же γ – геометрический объект на N, то $\tau^* \gamma$ – его прообраз.

§II. Алгебра Вирасоро $\mathcal{L}$ и группа $\mathcal{D}iff$ диффеоморфизмов окружности

Этот параграф содержит сводку необходимых далее результатов о представлениях алгебры Вирасоро. Подробности можно найти в [52], [37].

II.I. Алгебра Вирасоро. Пусть $Vect$ – алгебра Ли векторных полей на окружности. Пусть $Vect_{\mathbb{C}}$ – комплексификация $Vect$. Выберем в $Vect_{\mathbb{C}}$ базис $L_n = e^{in\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$

Эти векторные поля удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{m+n}$$

Как известно, алгебра $Vect_{\mathbb{C}}$ имеет единственное центральное расширение (построенное И.М.Гельфандом и Д.Б.Фуксом в 1968), которое и называется алгеброй Вирасоро. Это алгебра с базисом $L_n (n\in\mathbb{Z})$, ζ и с соотношениями коммутации

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(n^3-n)\delta_{m,-n}\zeta$$

$$[L_n, \zeta] = 0$$

II.2. Модули со старшим весом. Модулем Верма $M(h,c)$ со старшим весом (h,c) над алгеброй Вирасоро называется единственный модуль, удовлетворяющий условиям

1. Существует ненулевой вектор $v\in M(h,c)$ такой, что $L_{-k}v = 0$ для всех $k\geqslant 0$, $L_0 v = hv$, $\zeta v = cv$.

2. Векторы вида $v_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} = L_1^{\alpha_1}L_2^{\alpha_2}\dots L_\mu^{\alpha_\mu}v$ линейно независимы.

Модулями со старшим весом обычно называются фактормодули модуля $M(h,c)$. Известно (см. [52], [37]), что в $M(h,c)$ существует единственный максимальный собственный подмодуль Q. Фактормодуль $M(h,c)/Q$ неприводим, это единственный неприводимый модуль со старшим весом (h, c).

Известно, что в точках (h, c) общего положения модуль $M(h, c)$ неприводим. Согласно известной теореме В.Г.Каца (см. [79], [52]) модуль $M(h, c)$ приводим тогда и только тогда, когда существуют натуральные α, β такие, что

$$\Phi_{\alpha,\beta}(h,c) = \left(h + \frac{c-13}{24}(\beta^2-1) + \frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right) \times$$

$$\times\left(h + \frac{c-13}{24}(\alpha^2-1) + \frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right) + \frac{1}{16}(\alpha^2-\beta^2)^2 = 0$$

II.3. Условие унитаризуемости. Представление V алгебры Вирасоро в евклидовом пространстве называется унитаризуемым, если для любого k выполнено $L_k^* = L_{-k}$.

Необходимые условия унитаризуемости представлений $L(h,c)$ были получены независимо автором в [33] и Фриданом, Киу, Шенкером в [66], достаточность этих условий была получена Годдардом, Оливом, Кентом в [68]. Представление $L(h, c)$ унитаризуемо, если выполнено одно из двух условий

1. $h \geqslant 0, \ c \geqslant 1$

2. $c = 1 - \dfrac{6}{p(p+1)}$; $h = \dfrac{(\alpha p - \beta(p+1))^2 - 1}{4p(p+1)}$

где $\alpha, \beta, p \in \mathbb{Z}$, $p \geqslant 2$, $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, $1 \leqslant \beta \leqslant p-1$.

II.4. Интегрируемость. Представления алгебры Вирасоро естественно рассматривать как проективные представления $Vect_{\mathbb{C}}$, а $Vect_{\mathbb{C}}$ естественно рассматривать как алгебру Ли группы $\mathcal{D}iff$ диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию.

Естественно, встает вопрос о том, интегрируются ли проективные представления алгебры $Vect_{\mathbb{C}}$ со старшим весом до представлений группы $Diff$.

Замечание. Естественно встает вопрос о степени гладкости диффеоморфизмов. Нам будет удобно считать диффеоморфизмы аналитическими (на самом деле, достаточно меньшей гладкости). ●

Для большинства унитаризуемых представлений теорема интегрируемости была доказана автором в [32], общая теорема интегрируемости для унитарных представлений была получена Гудманом и Воллахом в [72]. Наконец, в [34] автор доказал интегрируемость всех, не обязательно унитарных представлений со старшим весом.

II.5. Конструкции представлений алгебры Вирасоро (см. [37]).

а) "Конструкция с двумя коциклами". Рассмотрим бозонное пространство Фока, состоящее из голоморфных функций от переменных $z_1, z_2, \ldots$, Введем операторы $(k>0)$

$$\hat{a}_k f = z_k \sqrt{k}\, f \quad ; \quad \hat{a}_{-k} = \sqrt{k}\frac{\partial}{\partial z_k} f$$

Пусть

$$L_k = \sum_{m+n=k} :a_m a_n: + (\alpha + i\beta k) a_k + \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\delta_{k,0}$$

$$\zeta = 1 + 12\beta^2$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Двоеточия означают, что "операторы уничтожения" a_{-n} выполняются раньше "операторов рождения" a_ℓ $(n, \ell > 0)$. Эти операторы образуют представление алгебры $\mathcal{L}$, которое мы будем обозначать через $N_{\alpha,\beta}$. Вакуумный вектор (единичная функция) являетсявектором старшего веса

$$h=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) \qquad c=1+12\beta^2$$

В точках (α,β) общего положения представления $N_{\alpha,\beta}$ являются модулями Верма. При исключительных значениях α,β эти модули имеют те же факторы ряда Жордана-Гельдера, что и модули Верма. Если $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, наше представление унитарно.

<u>б) Универсальная фермионная конструкция</u>. Путсь p пробегает все числа вида $p=n+\mu$, где $n\in\mathbb{Z}$, а μ - фиксированное число. Рассмотрим фермионное пространство Фока, состоящее из функций от антикоммутирующих переменных ξ_p. Введем операторы

$$A_p f=\begin{cases}\xi_p f, & \text{если } p>0\\ \frac{\partial}{\partial\xi_p}f, & \text{если } p\le 0\end{cases};\quad A_p^*=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\xi_p}f, & \text{если } p>0\\ \xi_p f, & \text{если } p\le 0\end{cases}$$

Тогда операторы

$$L_k=\sum_p\left(p+\frac{1+is}{2}k\right)A_{p+k}A_p^*$$

образуют проективное представление алгебры Вирасоро. Эти представления были построены в [52],[33] (на разных языках), в физической литературе они, кажется, появились несколько раньше. Все эти представления приводимы по очень простой причине. Пусть $\lambda=\xi_{p_1}\dots\xi_{p_k}$ - некоторый моном. Положим $deg(\lambda)$ есть разность числа тех p_j, которые больше 0 и числа тех p_j которые не положительны. Тогда операторы L_k сохраняют величину $deg\,\lambda$. Тем самым наше представление разлагается в счетную прямую сумму представлений $\oplus Q_\theta$, нумерующихся целыми числами $\theta = \deg\lambda$. Для нас будет важно, что среди подфакторов этих представлений содержатся все представления алгебры Вирасоро со старшим весом. Представления Q_θ совпадают с представлениями $N_{\alpha,\beta}$ (Б.Л.Фейган).

<u>в) Вырожденные фермионные конструкции.</u> Рассмотрим фермионное пространство Фока, состоящее из функций от переменных ξ_k , где $k = 1/2, 3/2, \ldots$. Положим

$$L_n = \sum_{k \geq 0} \left(k + \frac{n}{2}\right) \xi_{n+k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha+\beta=n} (\alpha - \beta) \xi_\alpha \xi_\beta$$

при $n > 0$, $L_{-n} = L_n^*$, а

$$L_0 = \sum k \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \qquad \zeta = 1/2$$

Эти операторы образуют унитарное представление $L(0, \frac{1}{2}) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ алгебры Вирасоро. Существует очень похожая конструкция для модуля $L(1/16, 1/2)$ (эти конструкции независимо были найдены Р.С.Исмагиловым и автором, см. [32] , работа Исмагилова не опубликована, они были первыми примерами особых унитарных представлений и опровергали ошибочное утверждение В.Г.Каца о классификации унитарных представлений.

В пунктах II.6, II.7, II.9 строим представления группы Diff , соответствующие представлениям алгебры Вирасоро из этого пункта (эти конструкции получены автором в [30] -, [32] , [36] , [37]), часть из них была независимо получена Р.С.Исмагиловым, представление $N_{0,0}$ было также независимо построено Д.Кажданом и Гр.Сигалом, см. [86]).

<u>II.6. Бозонная конструкция</u>. Мы вложим группу Diff

в группу автоморфизмов объекта категории $\overline{SpH}$, (далее ограничивая представление Вейля на $\mathcal{D}iff$ мы получим представление $N_{\alpha,\beta}$).

Вложение $\mathcal{D}iff$ в группу аффинных симплектических преобразований строится следующим образом.

Пусть V - пространство функций на окружности $|z|=1$ $(z=e^{i\varphi})$, определенных с точностью до прибавления константы. Введем в V структуру объекта категории $\overline{SpH}$. Для этого определим

I. Скалярное произведение в V.

$$\left\langle \sum c_k z^k, \sum d_k z^k \right\rangle = \sum |k| c_k \overline{d}_k$$

или, что то же самое

$$\langle f(\varphi), g(\varphi)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\varphi) g'(\psi)\, d\varphi\, d\psi$$

2. Фиксированное разложение $V = V_+ \oplus V_-$. Пространство V_+ состоит из функций, голоморфно продолжимых внутрь круга $|z|<1$ (т.е. функций вида $\sum\limits_{k>0} c_k z^k$), а V_- - из функций, голоморфно продолжимых в область $|z|>1$ на сфере Римана (т.е. функций вида $\sum\limits_{k>0} c_k z^{-k}$).

3. Кососимметричную билинейную форму

$$\{f(z), g(z)\} = \int_{|z|=1} f(z) g'(z)\, dz \qquad (11.1)$$

4. Эрмитову индефинитную форму

$$\Theta(f,g) = i\int_{|z|=1} f(z)\, d\overline{g(z)}$$

Теперь построим серию вложений $T_{\alpha,\beta}$ группы $Diff$ в группу $Aut(V)=Aut_{\overline{SpH}}(V)$. Пусть $q\in Diff$. Положим

$$T_{\alpha,\beta}(q)f(\varphi)=f(q(\varphi))+\alpha(q(\varphi)-\varphi)+\beta\ln q'(\varphi)$$

(см. [32], [37]), или, полагая $z=e^{i\varphi}$, $p(e^{i\varphi})=e^{iq(\varphi)}$

$$T_{\alpha,\beta}(p)f(z)=f(p(z))-(\beta+i\alpha)\ln(p(z)/z)+\beta\ln p'(z) \tag{11.3}$$

Ограничивая представление Вейля группы $Aut(V)$ на $Diff$, мы и получаем серию представлений $N_{\alpha,\beta}$ группы $Diff$. Если $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, то построенные представления унитарны, в противном случае ($\alpha\notin\mathbb{R}$ или $\beta\notin\mathbb{R}$) операторы $N_{\alpha,\beta}(q)$, где $q\in Diff$ не являются ограниченными операторами в гильбертовом пространстве.

<u>II.7. Универсальная накрывающая</u> $Diff^{\sim}$ <u>группы</u> $Diff$.

Рассмотрим группу $Diff^{\sim}$ диффеоморфизмов $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $q(x+2\pi)=q(x)+2\pi$. Ее центр состоит из всех преобразований вида $x\to x+2\pi k$. Факторгруппа группы $Diff^{\sim}$ по центру, очевидно, изоморфна $Diff$.

Обозначим через H_γ, где $\gamma\in\mathbb{C}$ пространство всех функций на прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$f(x+2\pi)=e^{2\pi i\gamma}f(x)$$

Функции $e_n=\exp(i(n+\gamma)x)$ образуют базис в H_γ. Определим представление $T_{\gamma,\nu}$ группы $Diff$ в H_γ

по формуле

$$T_{\gamma,\nu} f(x) = f(q(x))\, q'(x)^{\nu}$$

<u>II.8. Универсальная фермионная конструкция</u>. Снабдим пространство H_γ структурой объекта категории $\overline{GA}$, а именно, положим, что пространство $(H_\gamma)_-$ натянуто на все векторы e_n с $n \leqslant 0$, а $(H_\gamma)_+$ натянуто на все векторы e_n с $n > 0$. При этом операторы (II.4) являются автоморфизмами пространства H_γ. Ограничивая спинорное представление группы $Aut(H_\gamma)$ на $\mathcal{D}iff$ мы получаем серию представлений $\mathcal{D}iff$, соответствующих представлениям алгебры Вирасоро из п.II.5.б $\left(\gamma = p,\ \nu = \frac{1+is}{2}\right)$

<u>II.9. Вырожденные фермионные конструкции</u>. Нам осталось описать представления $\mathcal{D}iff$, связанные с представлениями п. II.5.в). Сначала рассмотрим представление $T_{1/2,0}$. Снабдим $H_{1/2}$ структурой объекта категории $\overline{GD}$ положив

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, g(\varphi)\, d\varphi$$

Тогда $\mathcal{D}iff$ действует автоморфизмами объекта $H_{1/2}$ категории $\overline{GD}$. Ограничивая спинорное представление $\overline{GD}$ на $\mathcal{D}iff$ мы получаем представление $L(0, 1/2) \oplus L(1/2, 1/2)$.

Чтобы построить модуль $L(1/16, 1/2)$ рассмотрим пространство H_0, разложим его в сумму трех подпространств $(H_0)_- \oplus \mathbb{C}e_0 \oplus (H_0)_+$ положив, что $(H_0)_-$ натянуто на все e_k с $k < 0$, а $(H_0)_+$ на все e_k с $k > 0$. Наконец, введем в H_0 симметричную билинейную форму

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) g(\varphi) d\varphi$$

Тогда H_0 становится объектом категории $\overline{B}$, а операторы $T_{0,0}(q)$ являются автоморфизмами H_0.

§I2. Полугруппа Γ.

Обозначения. Через S^1 мы обозначим окружность $|z| = 1$ на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, через $\mathcal{D}_+$ - круг $|z| \leqslant 1$, через $\mathcal{D}_-$ - область $|z| \geqslant 1$ на сфере Римана, через $\mathcal{D}^0_\pm$ - внутренности этих областей. Слова "риманова поверхность" означают одномерное комплексное многообразие. Голоморфные взаимно однозначные отображения мы будем называть, как обычно, однолистными. Мы будем называть функцию в замкнутой области Ω однолистной, если она однолистно продолжается в некоторую открытую область, содержащую Ω.

I2.I. Косвенные указания на существование полугруппы Γ. Пусть G - вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ - ее алгебра Ли, $G_{\mathbb{C}}$ - комплексификация группы G. Пусть ρ - унитарное представление группы ρ. Представление ρ является аналитической функцией на G и естественно встает вопрос о ее продолжении в комплексную область, т.е. на группу $G_{\mathbb{C}}$. Если ρ конечномерно, то, как х хорошо известно, такое продолжение существует - на нем основан "унитарный трюк" Вейля. Причины, по которым в бесконечномерном случае это не так, видно на следующем простом примере. Рассмотрим представление группы $\mathbb{R}$ в $L^2(\mathbb{R})$ с помощью операторов

$$T_h f(x) = f(x+h) = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} f(x)$$

Если $h \in \mathbb{C}$, но $h \notin \mathbb{R}$, то определение таких операторв наталкивается на некоторые трудности. Известно, что если группа G нильпотентна (см. [70]), то любое унитарное представление G может быть продолжено до представления группы $G_{\mathbb{C}}$ неограниченными операторами (в случае группы Гейзенберга такое продолжение неявно обсуждалось в §5). Любопытно,что подобная ситуация не может возникать в случае полупростых групп, но встречается в бесконечномерном случае, в таких терминах может трактоваться спинорное представление группы $Aut_{\overline{GD}}(V), \dim V=\infty$. Похожая ситуация возникает и в случае представлений групп, связанных с аффинными алгебрами (это было независимо выяснено Гудманом и Валлахом [71] и автором [35], см. также [37]).

Если группа G полупроста, то представление ρ вообще говоря, может быть продолжено голоморфно лишь на малую окрестность подмногообразия G в $G_{\mathbb{C}}$, операторы представления являются однако, неограниченными, и их область определения катастрофически убывает при удалении от группы G.

Существует, однако, замечательное исключение, а именно, когда ρ - представление со старшим весом. В этом случае представление продолжается на некоторую открытую подполугруппу $\Gamma \subset G_{\mathbb{C}}$. В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ в этом случае существует G -инвариантный выпуклый конус C и полугруппа Γ обязательно имеет вид $\Gamma = G \cdot \exp(iC)$ ([10], [44])

Теперь вспомним, что группа диффеоморфизмов окружности имеет представления со старшим весом. несложно указать и $\mathcal{D}iff$ -инвариантный выпуклый конус $C \subset Vect$: он состоит из всех векторных полей, направленных по часовой стрелке. Есть, однако, существенное отличие от конечномерного случая: группы $\mathcal{D}iff_{\mathbb{C}}$ не существует. Итак, наша полугруппа Γ должна быть существующей частью несуществующей группы $\mathcal{D}iff_{\mathbb{C}}$.

Можно предложить две неявных конструкции этой полугруппы (они действительно дают нашу полугруппу, хотя это и не очевидно).

Пусть ρ -представление $\mathcal{D}iff$ со старшим весом. Тогда можно попытаться определить Γ как множество всех операторов вида $\lambda \rho(g_1) \exp(t\rho(L_0))\rho(g_2)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, g_1, $g_2 \in \mathcal{D}iff$, $t > 0$. Неясно, однако, замкнуто ли это множество относительно умножения.

Во-вторых, полугруппу Γ можно было бы определить как замыкание множества всех операторов вида $\rho(g)$, $g \in \mathcal{D}iff$ в слабой операторной топологии. Ясно, что это замыкание является полугруппой, но не ясно, имеет ли она какое-либо отношение к искомой полугруппе.

<u>12.2. Локальная полугруппа</u> $L\Gamma$. Элементом этой полугруппы является вещественно аналитическое отображение μ из окружности S^1 в круг $\mathcal{D}_+^0 = \{z : |z| < 1\}$, такое, что

1. $\mu'(e^{i\varphi}) \neq 0$
2. $\mu(e^{i\varphi})$ - жорданов контур, проходимый против часовой стрелки.

Если $\mu_1, \mu_2 \in L\Gamma$, то иногда определено их произведение $\mu_1\mu_2$, а именно, может оказаться, что отображение μ_1 продолжается по голоморфности до конформного отображения области ограниченной контурами S^1 и $\mu_2(e^{i\varphi})$. Тогда $\mu_1\mu_2$ определяется как произведение отображений.

Кажется очевидным, что эта локальная полугруппа не может быть продолжена до глобальной полугруппы. На самом деле это не так.

12.3. Первая конструкция полугруппы Γ. Элементом Γ является тройка (R, r_+, r_-), где R - риманова поверхность, конформно эквивалентная кольцу, а $r_\pm : S^1 \to R$ - аналитические параметризации компонент края, причем при проходе контура $r_+(e^{i\varphi})$ поверхность остается слева, а при проходе контура $r_-(e^{i\varphi})$ —справа.

Два элемента полугруппы (R, r_+, r_-) и (R', r'_+, r'_-) считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\theta : R \to R'$ такое, что $r'_\pm(e^{i\varphi}) = r_\pm(e^{i\varphi})$.

Пусть (R, r_+, r_-), $(Q, q_+, q_-) \in \Gamma$. Определим их произведение $(P, p_+, p_-) \in \Gamma$. Риманова поверхность P получается"склейкой" римановых поверхностей R и Q путем отождествления точек $r_-(e^{i\varphi})$ и $q_+(e^{i\varphi})$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$. Далее $p_+(e^{i\varphi}) = r_+(e^{i\varphi})$, $p_-(e^{i\varphi}) = q_-(e^{i\varphi})$. Чтобы увидеть комплексную структуру на Γ, мы дадим еще одно определение этой полугруппы.

12.4. Вторая конструкция полугруппы Γ. Элементом Γ является тройка $[M, m_+, m_-]$, где M - риманова поверхность, конформно эквивалентная сфере, $m_+ : \mathcal{D}_+ \to M$, $m_- : \mathcal{D}_- \to M$ - однолистные отображения, причем множест-

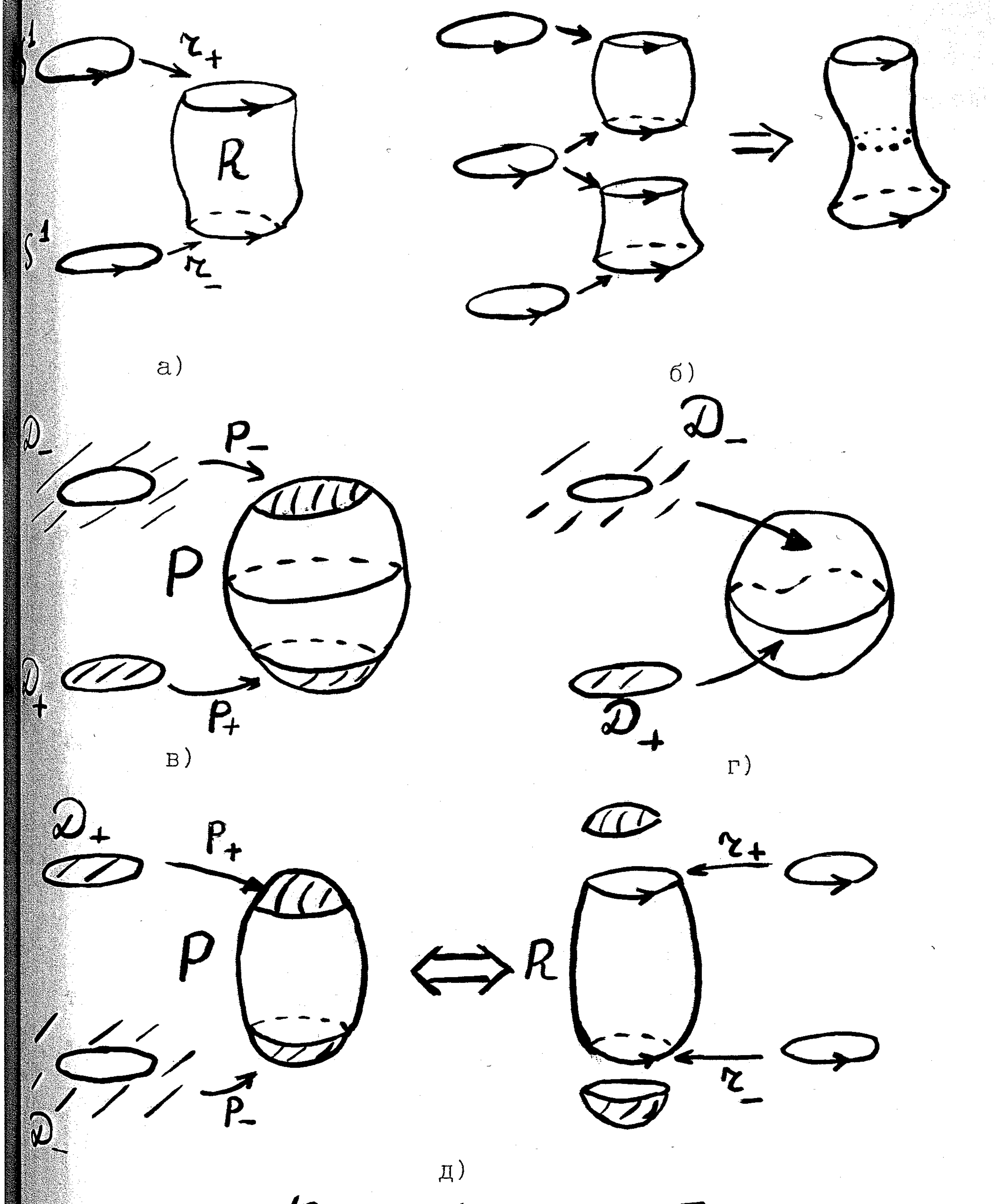


Рис. I. а) Элемент (R, τ_+, τ_-) полугруппы Γ . б) Умножение
г) Второе определение Γ д) Элемент группы $Diff \subset \Gamma$
д) Эквивалентность определений: $[P, P_+, P_-] =$
$= (R, \tau_+, \tau_-)$

ва $m_+(\mathcal{D}_+)$ и $m_-(\mathcal{D}_-)$ не пересекаются (Дабы не возникало путаницы, мы используем квадратные скобки). Два элемента $[M, m_+, m_-]$ и $[M', m'_+, m'_-]$ мы будем считать совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\tau : M \to M'$ такое, что $m'_\pm(z) = \tau m_\pm(z)$.

Пусть $[M, m_+, m_-]$, $[N, n_+, n_-] \in \Gamma$. Определим их произведение $[K, k_+, k_-] \in \Gamma$. Риманова поверхность K получается склейкой римановых поверхностей $M \setminus m_-(\mathcal{D}_-^0)$ и $N \setminus n_+(\mathcal{D}_+^0)$ путем отождествления точек $m_-(e^{i\varphi})$ и $n_+(e^{i\varphi})$. При этом

$k_+(z) = m_+(z)$, $k_-(z) = m_-(z)$.

Установим изоморфизм этих двух моделей. Пусть $[M, m_+, m_-]$ - элемент полугруппы Γ в смысле второго определения, построим по нему элемент (R, τ_+, τ_-) полугруппы Γ в смысле первого определения. Для этого положим

$$R = M \setminus (m_+(\mathcal{D}_+^0) \cup m_-(\mathcal{D}_-^0)), \quad \tau_+(e^{i\varphi}) = m_+(e^{i\varphi}),$$
$$\tau_-(e^{i\varphi}) = m_-(e^{i\varphi}).$$

Сама группа $\mathcal{D}iff$ строго говоря (если придерживаться точно нашего определения) в полугруппе Γ не содержится. Элементам группы $\mathcal{D}iff$ соответствуют тройки $[L, \ell_+, \ell_-]$, где L - риманова поверхность, конформно эквивалентная сфере, $\ell_\pm : \mathcal{D}_\pm \to L$ - однолистные функции, причем области $\ell_+(\mathcal{D}_+^0)$ и $\ell_-(\mathcal{D}_-^0)$ не пересекаются, а области $\ell_+(\mathcal{D}_+)$ и $\ell_-(\mathcal{D}_-)$ покрывают всю сферу L. Эквивалентность троек и их произведение определяются так же, как и выше. Нам будет удобно дополнить полугруппу Γ элементами группы $\mathcal{D}iff$. Такую пополненную полугруппу мы будем обозначать через $\underline{\Gamma}$.

<u>Замечания</u>. Полугруппа Γ обладает рядом свойств (см. [39]),

которые, на первый взгляд, воспринимаются как странные: например, группа $\mathcal{D}iff$ плотна в $\overline{\Gamma}$ (в смысле единственной разумной топологии на Γ). Дифференциал сдвига на полугруппе Γ инъективен, но не сюръективен. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

I2.5. Каноническое разложение в Γ. Любой элемент $\gamma \in \Gamma$ представим в виде

$$\gamma = g_1 \mathcal{L}_t g_2$$

где $g_1, g_2 \in \mathcal{D}iff$, а $\mathcal{L}_t$ - это тройка (R, τ_+, τ_-), где R - кольцо $e^{-t} \leq |z| \leq 1$, $\tau_+(e^{i\varphi}) = e^{-t+i\varphi}$, $\tau_-(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$.

Произведение (I2.I) понимается как произведение в полугруппе $\dot{\Gamma}$.

Если

$$\gamma = g_1 \mathcal{L}_t g_2 = g_1' \mathcal{L}_{t'} g_2'$$

то $t = t'$ и существует поворот окружности l такой, что

$$g_1' = g_1 l \qquad g_2' = l^{-1} g_2$$

Проверим истинность сформулированных утверждений. Пусть $(Q, q_+, q_-) \in \Gamma$. Так как любая риманова поверхность, топологически эквивалентная кольцу, конформно эквивалентна кольцу вида $e^{-t} \leq |z| \leq 1$ ([12]), то мы без ограничения общности можем считать, что Q - это кольцо. Но тогда $g_2(e^{i\varphi}) = \tau_-(e^{i\varphi})$, $g_1^{-1}(e^{i\varphi}) = e^{t}\tau_+(e^{i\varphi})$.

Наконец, утверждение о единственность канонического разложения (с точностью до преобразований (II.2)) вытекает из того, что t - инвариант римановой поверхности, а любой голоморфный автоморфизм кольца есть вращение (см. [12], [14])

12.6. Универсальная накрывающая $\tilde{\Gamma}$ над Γ. Элементом полугруппы $\tilde{\Gamma}$ является четверка $(K, \varkappa, k_+, k_-)$, где

1. K – риманова поверхность с краем, конформно эквавалентная кругу (Удобно представлять себе K как полосу $-t \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0$)

2. $\varkappa$ – гиперболический автоморфизм поверхности K (удобно считать, что $\varkappa$ – сдвиг полосы: $z \to z + 2\pi$). На крае поверхности K есть две неподвижные точки, они делят край на две части, которые мы будем называть компонентами.

3. $k_\pm$ – аналитические диффеоморфизмы прямой $\mathbb{R}$ в компоненты края K, удовлетворяющие условию $k_\pm(x+2\pi) = \varkappa k_\pm(x)$, при этом, при проходе кривой $k_+(x)$ поверхность K остается слева, а при проходе кривой $k_-(x)$ поверхность остается справа.

Пусть $(K, \varkappa, k_+, k_-)$, $(L, \lambda, \ell_+, \ell_-) \in \tilde{\Gamma}$. Их произведение есть четверка (M, μ, m_+, m_-), где

1. M получается склейкой K и L путем отождествления точек $k_-(x)$ и $\ell_+(x)$, автоморфизм μ получается склейкой автоморфизмов $\varkappa$ и λ

2. $m_+(x) = k_+(x)$, $m_-(x) = \ell_-(x)$

Осталось построить канонический гомоморфизм $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$. Пусть $(K, \varkappa, k_+, k_-) \in \tilde{\Gamma}$. Выкинем из края поверхности K неподвижные точки автоморфизма $\varkappa$ и полученную риманову поверхность профакторизуем по действию автоморфизма $\varkappa$. Тогда мы получим искомый элемент из Γ.

§13. Конструкции представлений полугруппы Γ.

Этот параграф содержит конструкции всех представлений полугруппы Γ со старшим весом. Эти представления могут быть реализованы как в бозонном (п.13.6), так и в фермионном (п.13.7) пространстве Фока. Сначала мы разберем простейшую бозонную конструкцию (п.13.1 - 13.3), остальные конструкции можно рассматривать как вариацию этой. Кроме того, в параграфе содержится абстрактная теорема интегрируемости на полугруппу для унитарных представлений алгебры Вирасоро (п.13.4).

<u>13.1. Простейшая конструкция</u>. Рассмотрим пространство V функций с нулевым средним на окружности $S^1: |z|=1$ и снабдим V структурой объекта симплектической категории, так как это сделано в п.11.6. Рассмотрим естественное действие $T(q)=T_{0,0}(q)$ группы $\mathcal{D}iff$ в V. Как мы уже говорили ранее (п.11.6), операторы $T(q)$ являются автоморфизмами объекта V. Естественно попытаться продолжить это вложение на Γ, т.е. попытаться вложить полугруппу Γ в полугруппу $End(V)$ эндоморфизмнов пространства V.

Пусть $\mathcal{R}=(R,\tau_+,\tau_-)$ - элемент полугруппы Γ в смысле первого определния (п.11.3). Пусть $P(\mathcal{R})\subset V\oplus V$ - это множество всех пар $(v_1,v_2)\in V\oplus V$ таких, что существует голоморфная функция F на R такая, что ее ограничение f_1 на контур $\tau_+(e^{i\varphi})$ есть $v_1\circ(\tau_+)^{-1}$, а ограничение функции f_2 на $\tau_-(e^{i\varphi})$ есть $v_2\circ(\tau_-)^{-1}$. Оказывается, что $P(\mathcal{R})\in End(V)$. Отображение $\mathcal{R}\mapsto P(\mathcal{R})$ является вложением полугруппы Γ в полугруппу $End(V)$. Ограничивая представление Вейля на полугруппу Γ, мы получаем представление полугруппы Γ . Это представление соответствует представлению $N_{0,0}$ группы $\mathcal{D}iff$ (см. п.II.5, II.6).

13.2. Аккуратное изложение конструкции предыдущего пункта. Прежде всего, заметим, что операция ограничения голоморфной функции на край-операция не вполне безобидная, чтобы ее аккуратно определить, мы должны наложить какие-либо условия на поведение функции F при подходе к краю . Кроме того, не совсем ясно, почему функция, голоморфная по обе стороны линии склейки римановых поверхностей, и имеющая одинаковые граничные значения на линии склейки (при подходе с обеих сторон) голоморфна. Эти трудности можно преодолеть в лоб, используя элементарную граничную теорию аналитических функций, но проще эти трудности обойти. Для этого мы заново определим отношение $P(\mathcal{R})$.

Сначала мы построим линейное отношение $P_0(\mathcal{R})\subset V\oplus V$, оно состоит из всех $(v_1, v_2)\in V\oplus V$ таких, что существует голоморфная аналитическая вплоть до границы функция F на $\mathcal{R}$ такая, что ограничение F на контур $\tau_+(e^{i\varphi})$ суть $v_1\circ\tau_+^{-1}$, а ограничение F на контур $\tau_-(e^{i\varphi})$ суть $v_2\circ\tau_-^{-1}$. Пусть теперь $P(\mathcal{R})$ - это замыкание подпространства $P_0(\mathcal{R})$.

Лемма 13.1. Отображение $\mathcal{R}\mapsto P_0(\mathcal{R})$ является гомоморфизмом из Γ в полугруппу линейных отношений в пространстве V.

Доказательство: очевидно.

Теорема 13.1. Отображение $\mathcal{R}\mapsto P(\mathcal{R})$ является гомоморфизмом Γ в $End(V)$.

Теорема вытекает из леммы 13.1 и следующей леммы 13.2.

Лемма I3.2. $P(\mathcal{R}) \in \mathrm{End}(V)$.

Доказательство. Пусть L_t - кольцо вида $e^{-t} \leq |z| \leq 1$. Пусть $\mathcal{L}_t = (L_t, e^{-t}e^{i\varphi}, e^{i\varphi}) \in \Gamma$. Покажем сначала, что $P(\mathcal{L}_t) \in \mathrm{End}(V)$. Выберем в V_+ ортонормальный базис $e_k = z^k/\sqrt{k}$, $k>0$, а в V_- ортонормальный базис $f_k = z^{-k}/\sqrt{-k}$, $k>0$. Тогда $P_0(\mathcal{L}_t)$ состоит из всех пар $(v_1, v_2) = ((v_1^+, v_1^-), (v_2^+, v_2^-)) \in V \oplus V$ имеющих в базисе $e_1, e_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ вид

$$((\alpha_1 e^{-t}, \alpha_2 e^{-2t}, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots), (\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1 e^{-t}, \beta_2 e^{-2t}, \ldots)) \quad (13.1)$$

причем α_j, β_j удовлетворяют условию: существует $\varepsilon>0$ такое, что ряды

$$\sum \alpha_k (1+\varepsilon)^k \quad ; \quad \sum \beta_k (1+\varepsilon)^k$$

сходятся. Замыкание $P(\mathcal{L}_t)$ линейного пространства $P_0(\mathcal{L}_t)$ состоит из всех векторов вида (I3.I), удовлетворяющих условию $\sum |\alpha_j|^2 < \infty, \sum |\beta_j|^2 < \infty$. Преобразование Потапова-Гинзбурга линейного отношения $P_0(\mathcal{L}_t)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$

где

$$A = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{-2t} & & \\ & & e^{-3t} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

Теперь утверждение $P(\mathcal{L}_t) \in \mathrm{End}(V)$ очевидно.

Пусть теперь $\mathcal{R} \in \Gamma$ произвольно. Тогда (см. п.I2.5)
$\mathcal{R}$ представимо в виде $\mathcal{R} = g_1 \mathcal{L}_t g_2$, где $g_1, g_2 \in \mathrm{Diff}$

Тем самым $P_0(\mathcal{R}) = P_0(g_1)P_0(\mathcal{L}_t)P_0(g_2)$,
при этом операторы $P_0(g_i) = T_{0,0}(g_i)$ обратимы и сохраняют пространство аналитических функций. Поэтому

$$P_0(\mathcal{R}) = P(g_1)\,P_0(\mathcal{L}_t)\,P(g_2)$$

Взяв замыкание обеих частей равенства, получаем

$$P(\mathcal{R}) = P(g_1)\,P(\mathcal{L}_t)\,P(g_2)$$

Но правая часть равенства содержится в $End(V)$. [Л]емма I3.2 доказана, а вместе с ней доказана и теорема I3.I

<u>I3.3. Дополнения к п.I3.2.</u> Пусть We - представление Вейля (см. §2). Мы видели, что операторы $We(P)$ могут быть неограниченными, поэтому встает вопрос об ограниченности операторов $We(P(\mathcal{R}))$.

<u>Предложение I3.I</u>. Пусть $\mathcal{R} \in \Gamma$. Тогда операторы $We(P(\mathcal{R}))$ ограничены. Более того, эти операторы ядерны.

<u>Доказательство</u>. Мы сразу докажем ядерность. Пусть $\mathcal{R} = g_1 \mathcal{L}_t g_2$ - каноническое разложение $\mathcal{R}$. Тогда

$$We(P(\mathcal{R})) = We(P(g_1))\,We(P(\mathcal{L}_t))\,We(P(g_2))$$

Так как крайние сомножители этого произведения унитарны с точностью до умножения на константу, нам достаточно доказать ядерность оператора $We(P(\mathcal{L}_t))$. В силу вычислений, проведенных в доказательстве леммы I3.2, мы получаем

$$We(P(\mathcal{L}_t))f(u) = f(Au) \tag{13.3}$$

где A задается матрицей (I3.2). Оператор $f(u) \to f(Au)$ очевидно ограничен и самосопряжен, его собственные векторы - это одночлены $u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}$ а соответствующие собственные числа суть $exp(-t\Sigma_j k_j)$. Поэтому след оператора (I3.3) равен $\prod_{j=1}^{\infty}(1-e^{-t_j}) < \infty$, если $t > 0$, что и требовалось доказать.

Естественно встает вопрос о вычислении характера представления $We(P(\mathcal{R}))$, т.е. следа оператора $We(P(\mathcal{R}))$. Ответ на этот вопрос будет дан в п.I3.

Следующее утверждение нам понадобится в §I7.

Лемма I3.3. Преобразование Потапова-Гинзбурга линейного отношения $P(\mathcal{R})$ является оператором Гильберта-Шмидта с нормой строго меньше 1.

Доказательство. Из формулы (2.5) видно, что преобразование Потапова-Гинзбурга линейных отношений $P(g_1\mathcal{L}_{t/2})$ и $P(\mathcal{L}_{t/2}g_2)$ являются операторами Гильберта-Шмидта с нормой меньше <1. Теперь из той же формулы следует и наше утверждение $(P(g_1\mathcal{L}_t g_2) = P(g_1\mathcal{L}_{t/2})P(\mathcal{L}_{t/2}g_2))$.

I3.4. Абстрактная теория о продолжении унитарных представлений.

Теорема I3.2. Пусть ρ - унитарное проективное представление группы $\mathcal{D}iff$ со старшим весом. Пусть $d\rho$ - соответствующее представление алгебры $\mathcal{L}$. Тогда ρ продолжается до представления полугруппы Γ по формуле

$$\rho(\mathcal{R}) = \rho(g_1)exp(t\,d\rho(L_0))\rho(g_1) \qquad (13.4)$$

где $\mathcal{R} = g_1\mathcal{L}_t g_2$ - каноническое разложение $\mathcal{R}$. $\boxtimes$

Мы будем доказывать эту теорему в следующей формулировке.

Теорема I3.2'. Путсь ρ - унитарное проективное представление группы $\mathcal{D}iff$, разлагающееся в прямую сумму представлений со старшим весом. Тогда формула (I3.4) задает представление полугруппы Γ.

<u>Лемма I3.4.</u> Если теорема I3.2$'$ верна для представлений ρ_1, ρ_2, то она верна и для $\rho_1 \otimes \rho_2$.

<u>Доказательство</u> очевидно.

<u>Лемма I3.5</u>. Пусть ρ_1, ρ_2 унитарные представления $\mathcal{D}iff$ со старщим весом и пусть теорема I3.2$'$ верна для $\rho_1 \otimes \rho_2$. Тогда она верна и для ρ_1 и ρ_2.

<u>Доказательство.</u> Итак, мы знаем, что

$$\rho_1(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)\otimes\rho_2(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)=\lambda\rho_1(\mathcal{R}_1)\rho_1(\mathcal{R}_2)\otimes\rho_2(\mathcal{R}_1)\rho_2(\mathcal{R}_2)$$

для некоторого скаляра λ. Мы хотим показать, что

$$\rho_j(\mathcal{R}_1)\rho_j(\mathcal{R}_2)=\mu\rho_j(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$$

для некоторых μ_1, μ_2. Т.е. мы должны убедитться в том, что для любых ненулевых операторов A, B, A', B' в гильбертовом пространстве равенство

$$A\otimes B=\lambda A'\otimes B' \tag{13.5}$$

влечет $A=\nu A'$, $B=\mu B'$. Пусть a_{ij}, b_{ij}, a'_{ij}, b'_{ij} – матричные элементы этих операторов. Равенство (I3.5) влечет $a_{ij}b_{kl}=a'_{ij}b'_{kl}$ для любых i, j, k, l. Отсюда, в частности, следует, что a_{ij} и a'_{ij} (соответственно b_{kl} и b'_{kl}) обращаются в 0 одновременно. Далее для любых i, j, k, l таких, что $a_{ij}\neq 0$, $b_{kl}\neq 0$ выполнено $a_{ij}/a'_{ij}=b_{kl}/b'_{kl}$, что и требовалось доказать. $\boxtimes$

Сформулируем несколько замечаний о тензорных произведениях представлений со старшим весом. Пусть $L(h_1,c_1)$ и $L(h_2,c_2)$ - неприводимые унитарные представления $Diff$. Тогда

$$L(h_1,c_1)\otimes L(h_2,c_2)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}\mu_p L(h_1+h_2+p,c_1+c_2) \tag{13.6}$$

где μ_p - неотрицательные целые числа, причем $\mu_0=1$ (в самом деле, произведение модулей со старшим весом может разлагаться лишь в прямую сумму модулей со старшим весом, в силу унитаризуемости эти модули неприводимы). Пусть теперь $M(h_1,c_1)=$ $=L(h_1,c_1)$, $M(h_2,c_2)=L(h_2,c_2)$ - унитаризуемые модули Верма (если $h>0$, а $c>1$, то $M(h,c)=L(h,c)$ унитаризуем, см., например, [37]). Тогда

$$M(h_1,c_1)\otimes M(h_2,c_2)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}c(p)L(h_1+h_2+p,c_1+c_2)$$

где $c(p)$ число разбиений числа p (чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить размерности весовых L_0 - подпространств)

Доказательство теоремы 13.2'. В пп. 13.1 и 13.2 мы убедились, что теорема 13.2' верна для $\rho=N_{0,0}$. Как известно, $N_{0,0}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}L(k^2,1)$ (см. [37]), в частности, теорема 13.2' верна для $L(0,1)$ и $L(1,1)$. Значит она верна и для $L(0,1)\otimes L(1,1)$, а это представление, в свою очередь, содержит подмодуль $L(1,2)=M(1,2)$. Итак, теорема верна для модулей $M(1,2)^{\otimes k}$, а значит и для всех модулей вида $M(k,2\ell)$ при $k\geq \ell$. Значит она верна и для сумм таких модулей, т.е для всех модулей вида

$$\bigoplus_{p=0}^{\infty} \nu_p M(k+p, 2k) \qquad (13.7)$$

где ν_p - неотрицательные числа. Из условий унитаризуемости (п.II.3) видно, что для любого унитаризуемого модуля $L(h,c)$ найдется унитаризуемый модуль $L(h',c')$ такой, что $L(h,c)\otimes L(h',c')$ имеет вид (13.7). Осталось применить лемму I3.5. $\boxtimes$

Представления $N_{\alpha,\beta}$ группы $\mathcal{D}iff$ получаются с помощью вложений $\mathcal{D}iff$ в группу $Aut_{\overline{SpH}}(V)$ автоморфизмов объекта категории $\overline{SpH}$. Естественно ожидать, что соответствующие представления полугруппы Γ можно построить с помощью вложений Γ в полугруппу $End_{\overline{SpH}}(V)$. Это действительно так, но перед тем как переходить к конструкции вложения мы обсудим одну вспомогательную конструкцию.

I3.5. Логарифмические формы. Тензорные плотности на римановых поверхностях можно рассматривать как набор функций на картах, меняющихся при помощи подходящих линейных преобразований при замене переменных. Объекты, которые мы сейчас введем, меняются при замене переменных при помощи аффинных преобразований.

Пусть $R\subset \mathbb{C}\setminus 0$ - связная двусвязная (кольцеобразная) область, причем R не стягиваема в $\mathbb{C}\setminus 0$ (т.е. кольцо R охватывает 0). Мы будем рассматривать R как комплексное многообразие, но в качестве карт мы будем рассматривать лишь однолистные отображения. $\psi: R'\to R$, где

I. R' - кольцеобразная область в $\mathbb{C}\setminus 0$, не стягиваемая в $\mathbb{C}\setminus 0$.

2. Если $\gamma: S^1\to R'$ - контур, охватывающий 0 ,

проходимый против часовой стрелки, то контур $\psi\circ\gamma$ охватывает O и проходится против часовой стрелки.

Мы скажем, что в области R задана логарифмическая форма F типа (μ,ν) если

I. В каждой карте Q задано формальное выражение $F_Q = f(z)+\mu\ln z+\nu\ln dz$, где $f(z)$ – функция, определенная с точностью до прибавления константы.

2. Пусть Q_1, Q_2 – две карты, $\psi_1 : Q_1 \to R$, $\psi_2 : Q_2 \to R$ – соответствующие отображения, причем $\psi_1(Q_1)$ и $\psi_2(Q_2)$ пересекаются по кольцеобразной области. Пусть $F_{Q_j} = f_j(z)+\mu\ln z+\nu\ln dz$ и пусть $\varphi = \psi_1^{-1}\circ\psi_2$ – функция перехода. Тогда

$$f_1(z) = f_2(\varphi(z))+\mu\ln(\varphi(z)/z)+\nu\ln\varphi'(z)$$

Замечание. Пространство всех логарифмических форм типа (μ,ν) не имеет естественной структуры линейного пространства. Оно является аффинным пространством. ●

Пусть далее R_1 и R_2 – кольцеобразные области, охватывающие O. Пусть $p : R_1 \to R_2$ – однолистное отображение, которое переводит контур, охватывающий O, проходимый против часовой стрелки в охватывающий O контур, проходимый против часовой стрелки. Пусть F – логарифмическая форма в R_2. Определим логарифмическую форму p^*F в R_1. А именно, пусть $\psi : Q \to R_1$ – карта в R_1. Тогда соответствующее выражение $f(z)+\mu\ln z+\nu\ln dz$ совпадает с записью формы F в карте $p\circ\psi : Q\to R_2$.

Далее, рассмотрим жорданов аналитический контур R на плоскости, охватывающий O. Нам ничего не мешает распространить определение логарифмической формы и на такие "бесконечно узкие" римановы поверхности.

13.6. Представления $N_{\alpha,\beta}$ полугруппы Γ. Поставим каждому элементу $f(z)$ пространства V логарифмическую форму

$$f(z)-(\beta+i\alpha)\varphi+\beta \ln d\varphi \qquad (13.8)$$

на окружности S^1 ($\varphi=\frac{1}{i}\ln z,\ \ln d\varphi=\frac{1}{i}(-\ln z+\ln dz)$) типа $(-i\alpha-\beta,\beta)$. Таким образом, мы отождествили пространство V с некоторым пространством логарифмических форм типа $(-i\alpha-\beta,\beta)$.

Действие (11.3) группы $\mathcal{D}iff$ в V отвечает естественному действию $\mathcal{D}iff$ в пространстве логарифмических форм на окружности $|z|=1$.

Пусть $\mathfrak{R}=(R,\tau_+,\tau_-)\in\Gamma$. Пусть $P^0_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})\subset \subset V\oplus V$ - это множество всех пар $(v_1,v_2)\in V\oplus V$ таких, что существует такая голоморфная аналитическая вплоть до границы логарифмическая форма F типа $(-\beta-i\alpha,\beta)$, такая, что $\tau_+^* F=v_1$, $(\tau_-)^*F=v_2$. Пусть $P_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ - замыкание $P^0_{\alpha,\beta}$ в $V\oplus V$.

Теорема 13.1'. Отображение $\mathfrak{R}\mapsto P^0_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ является гомоморфизмом Γ в $End_{\overline{SpH}}(V)$. ■

Доказательство совпадает с доказательтвом теоремы 13.1.

Ограничивая представление Вейля полугруппы $End_{\overline{SpH}}(V)$ на Γ мы получаем серию представлений $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})= =We(P_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R}))$ полугруппы Γ.

Предложение 13.1. Пусть $\mathfrak{R}\in\Gamma$. Операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ ограничены. Более того, эти операторы - ядерные.

Замечание. Если $\mathfrak{R}\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma=\mathcal{D}iff$, то операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ вообще говоря неограничены.

Доказательство. Начнем с ограниченности. Оператор $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ имеет вид

$$B[\mathcal{Y}(\mathfrak{R})|\nu(\mathfrak{R})] = B\left[\begin{matrix} K(\mathfrak{R}) & L(\mathfrak{R}) \\ L^t(\mathfrak{R}) & M(\mathfrak{R}) \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \varkappa(\mathfrak{R})^t \\ \mu(\mathfrak{R})^t \end{matrix}\right]$$

Важно заметить, что подставив вместо $\varkappa$ и μ нули, мы получим операторы $N_{0,0}(\mathfrak{R})$, уже изученные выше. Пусть $\mathfrak{R} = g_1 \mathcal{L}_t g_2$ – каноническое разложение $\mathfrak{R}$. Тогда

$$\mathcal{Y}(\mathfrak{R}) = \mathcal{Y}(g_1) \circ \mathcal{Y}(\mathcal{L}_t) \circ \mathcal{Y}(g_2)$$

где умножение $\circ$ определяется формулой (5.1). Но $\mathcal{Y}(\mathcal{L}_t) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$, где A задается формулой (13.2). Отсюда получаем $\|\mathcal{Y}(\mathfrak{R})\| < 1$. Применяя теорему 5.I мы получаем ограниченность операторов $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$.

Докажем ядерность. Для этого заметим, что $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_t)$ не зависит от α, β, поэтому $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_t)$ – ядерный оператор (в силу предложения 13.I). Далее, пусть $t = t_1 + t_2 + t_3$, где $t_j > 0$. Тогда

$$N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R}) = [N_{\alpha,\beta}(g_1) N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_{t_1})] \times$$
$$\times N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_{t_2}) [N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_{t_3}) N_{\alpha,\beta}(g_2)]$$

Сомножители, стоящие в квадратных скобках, как мы только что доказали, ограничены, а средний сомножитель – ядерный оператор. Предложение доказано. $\varnothing$

13.7. Универсальная фермионная конструкция. В п.II.8 мы построили серию вложений группы $\mathcal{D}iff$ в группу $Aut_{\overline{GA}}(H_\gamma)$

автоморфизмов некоторого объекта категории $\overline{GA}$. Теперь мы продолжим эти вложения до вложений полугруппы $\widetilde{\Gamma}$ в полугруппу $\mathrm{End}_{\overline{GA}}(V)$.

Пусть $\gamma, \mu \in \mathbb{C}$, а $\widetilde{\gamma}=(S, \sigma, s_+, s_-) \in \widetilde{\Gamma}$. Построим по $\widetilde{\gamma}$ линейное отношение $T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}) \in \mathrm{End}_{\overline{GA}}(H_\gamma)$. Введем сначала линейное отношение $T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}) \subset H_\gamma \oplus H_\gamma$. Оно состоит из всех $(f_1, f_2) \in H_\gamma \oplus H_\gamma$ таких, что существует голоморфная форма F веса μ на S, удовлетворяющая условиям.

I. $\sigma_* F = e^{2\pi i \gamma} F$

2. F аналитична вплоть до границы на всей S, кроме быть может, неподвижных точек автоморфизма σ.

3. Ограничение F на кривую $s_+(x)$ суть $(s_+)_*(f_1(x)(dx)^\mu)$, а ограничение F на кривую $s_-(x)$ суть $(s_-)_*(f_2(x)(dx)^\mu)$

Наконец $T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma})$ - это замыкание $T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma})$.

<u>Теорема I3.3</u>. Отображение $\widetilde{\gamma} \mapsto T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma})$ является гомоморфизмом полугруппы Γ в полугруппу $\mathrm{End}(H_\gamma)$.

<u>Доказательство</u> почти дословно повторяет доказательство теоремы I3.I. Во-первых, мы замечаем, что $T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{\gamma}_2) = T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}_1) T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}_2)$. Далее, нам нужно проверить, что $T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}) \in \mathrm{End}(H_\gamma)$. Для этого, как и ранее, мы представим $\widetilde{\gamma}$ в виде произведения

$$\widetilde{\gamma} = g_1 \mathcal{L}_t g_2$$

где $g_1, g_2 \in \mathcal{D}iff^\sim$, а $\mathcal{L}_t = (L_t, \lambda, \ell_+, \ell_-)$, где L_t - полоса $-t \le \mathrm{Im}\, z \le 0$, $\lambda(z) = z + 2\pi$,

$l_+(x) = x - it$, $l_-(x) = x$. В силу п.II.8 $T_{\gamma,\mu}(g_i) \in End(H_\gamma)$, а условие $\mathcal{L}_t \in End(H_\gamma)$ очевидно. Доказательство завершают те же аргументы, что и в теореме I3.I. $\boxtimes$

Ограничивая спинорное представление полугруппы $End_{\overline{GA}}(H_\gamma)$ на Γ мы получаем серию представлений полугруппы Γ , эти представления мы обозначаем через $\rho_{\gamma,\mu}$.

Предложение I3.2. Операторы $\rho_{\gamma,\mu}(\gamma)$ ограничены в топологии гильбертова фермионного пространства Фока.

Доказательство. Сначала заметим, что любой элемент $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ представим в виде $\gamma = \mathcal{L}_\varepsilon \gamma'$, где $\mathcal{L}_\varepsilon$ то же, что и в доказательстве предыдущей теоремы, $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а $\gamma' \in \tilde{\Gamma}$ (это вытекает из аналитичности $S_\pm(x)$). Оператор $\rho_{\gamma,\mu}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ имеет ядро вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^t \\ \eta^t \end{pmatrix}\right\}$$

где Λ – диагональная матрица с собственными числами $e^{-(n\pm\gamma)\varepsilon}$, где $n \geqslant 0$. Или, иными словами

$$\rho_{\gamma,\mu}(\mathcal{L}_\varepsilon) f(\xi) = f(\Lambda\xi) \qquad (13.8)$$

Оператор $\rho_{\gamma,\mu}(\gamma')$ – это некоторый оператор Березина. Но произведение любого оператора Березина с оператором (13.8) ограничено, по теореме 9.3. В самом деле, матрица L (в обозначениях теоремы 9.3) в этом случае представляется в виде $L = M\Lambda$, где M – ограничена. Поэтому оператор L компактен, а значит и удовлетворяет условиям теоремы 9.3. Итак, $\rho_{\gamma,\mu}(\gamma) = \rho_{\gamma,\mu}(\mathcal{L}_\varepsilon)\rho_{\gamma,\mu}(\gamma')$ – ограниченный оператор, что и требовались доказать.

13.8. Вырожденные фермионные конструкции. Они добавляют очень немного к уже имеющейся у нас информации, поэтому мы скажем об этом лишь вкратце.

Рассмотрим гомоморфизм $T_{0,1/2}$ полугруппы Γ в $\mathrm{End}_{\overline{GA}}(H_{1/2})$. Как мы уже отмечали (см. п.II.9) в этом случае в пространстве $H_{1/2}$ существует естественная структура объекта категории $\overline{B}$. Несложно проверить, что операторы $T_{0,1/2}(\gamma)$ лежат в $\mathrm{End}_{\overline{B}}(H_0)$. Ограничивая спинорное представление полугруппы $\mathrm{End}_{\overline{B}}(H_0)$ на Γ, мы получаем проективное представление Γ, отвечающее модулю $L(1/16, 1/2)$.

Далее, рассмотрим гомоморфизм $T_{1/2,1/2}$ полугруппы $\widetilde{\Gamma}$ в $\mathrm{End}_{\overline{GA}}(\underline{H_{1/2}})$. Введем в $H_{1/2}$ структуру объекта категории GD (см. п.II.9). Тогда, как несложно проверить $T_{1/2,1/2}(\gamma) \in \mathrm{End}_{\overline{GD}}(H_{1/2})$ и мы можем ограничить спинорное представление $\mathrm{End}_{\overline{GD}}(H_{1/2})$ на $\widetilde{\Gamma}$ (полученное представление отвечает модулю $L(0,1/2) \oplus L(1/2,1/2)$)

13.9 Замечания об абстрактной теореме интегрируемости.

Во-первых, мы выяснили, что любой модуль $L(h, c)$ (не обязательно унитаризуемой) над алгеброй Вирасоро интегрируется до представления полугруппы Γ ограниченными операторами в некотором пространстве Фреше: (Мы это выяснили дважды: в п.13.6 и в п.13.8 (в обоих случаях мы построили запас представлений, среди подфакторов которых содержатся все модули $L(h, c)$). Фермионная конструкция имеет небольшое преимущество перед бозонной: а именно в полинормированном фермионном пространстве Фока ограниченными операторами задается представление всей полугруппы $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \mathrm{Diff}$.

Во-вторых, мы доказали абстрактную теорему интегрируемости унитаризуемых представлений $L(h,c)$ (см. п.I3.4). Любопытно, что эта теорема не вытекает из общей теоремы интегрируемости.

§I4. Явные формулы.

Здесь мы приводим явные формулы для бозонных представлений полугруппы Γ со старшим весом (п.I4.I., фермионные формулы пишутся аналогично и мы их опускаем). Кроме того, мы вычисляем сферическую функцию представлений со старшим весом (представления являются проективными, чтобы не говорить о сферической функции расширенной группы мы говорим о "канонических коциклах" п.I4.2 - I4.3, это эквивалентно). Наконец, в п.I4.4 мы вычисляем характеры представлений.

<u>I4.I. Формула для оператора</u> $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$.

$\mathfrak{R}=[R,\tau_+,\tau_-]\in\Gamma$. Без ограничения общности можно считать, что $R=\overline{\mathbb{C}}$, $\tau_+(0)=0$, $\tau_-(\infty)=\infty$. Тогда

$$N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})=B\left[\begin{array}{cc|c} K(\tau_+) & L(\tau_+,\tau_-) & -(\beta+i\alpha)l_1^t(\tau_+)+\beta m_1^t(\tau_+) \\ L^t(\tau_+,\tau_-) & M(\tau_-) & -(\beta+i\alpha)l_2^t(\tau_-)+\beta m_2^t(\tau_-) \end{array}\right] \tag{14.1}$$

где матричнозначные функции K , L , M и векторнозначные функции l_1 , l_2 , m_1 , m_2 определены ниже.

Пусть $f\in V_+$. Тогда функция $f\circ\tau_-^{-1}$, определенная на контуре $\tau_-(e^{i\varphi})$ представима в виде $f\circ\tau_-^{-1}=F_1+F_2$

где F_1 голоморфна в области $\tau_-(\mathcal{D}_-)$, а F_2 - голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus \tau_-(\mathcal{D}_-^o)$. Тогда

$$K f = F_1 \circ \tau_- \qquad L^t f = F_2 \circ \tau_+ \qquad (14.2)$$

Пусть, далее, $g \in V_-$. Тогда функция $g \circ \tau_+^{-1}$, определенная на контуре $\tau_+(e^{i\varphi})$ представима в виде $g \circ \tau_+^{-1} = G_1 + G_2$, где G_1 голоморфна в области $\tau_+(\mathcal{D}_+)$ а G_2 голоморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \tau_+(\mathcal{D}_+)$. Тогда

$$M g = G_1 \circ \tau_+ \qquad L g = G_2 \circ \tau_- \qquad (14.3)$$

Наконец,

$$\ell_1(\tau_+) = \ln(\tau_+(z)/z) \qquad \ell_2(\tau_-) = \ln(\tau_-(z)/z)$$
$$m_1(\tau_+) = \ln(\tau_-'(z)) \qquad m_2(\tau_-) = \ln \tau_-'(z) \qquad (14.4)$$

Замечание I. Правые части всех формул (I4.2) - (I4.4) определены лишь с точностью до прибавления константы. Но, в силу определения пространства V, нам это не существенно.

Замечание 2. Пусть f - аналитическая функция на контуре $\gamma \subset \mathbb{C}$. Пусть $f = f_+ + f_-$, где f_+ голоморфна внутри γ, а f_- голоморфна вне γ в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда

$$f_\pm(v) = \pm \int_\gamma \frac{f(u)}{u - v}\, du$$

(см., например, [14], III.3.II)

Замечание 3. Оператор $K(\mathcal{R}) = K(\tau_+)$

$$K(\tau_+)f(z)=\int\limits_{|z|=1}\ln\frac{\tau_+(z)-\tau_+(u)}{z-u}f(u)\,du$$

как заметил Д.В.Юрьев, совпадает с так называемым оператором Грунского (см. [73],[12],[64]) - одним из основных объектов в геометрической теории функций. Неравенство $\|K(\tau_+)\|<1$ (это условие 2 п.I.4) - это "теорема площадей" Грунского.

Вывод формулы (I4.I). Явный вид операторов K, L, M ясен непосредственно из конструкции вложения $\Gamma\to End(V)$ из п.I3.I. Остается найти два оставшихся элемента матрицы. Рассмотрим логарифмическую форму типа $(-i\alpha+\beta,\beta)$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\tau_+(\mathcal{D}_+^0)\cup\tau_-(\mathcal{D}_-^0))$, равную тождественно нулю в стандартной карте на $\mathbb{C}\setminus 0$. Ее прообразы при отображениях τ_+ и τ_- из кольца $1-\varepsilon\le|z|\le1+\varepsilon$ в $\overline{\mathbb{C}}$ суть формы

$$[-(i\alpha+\beta)\ln(\tau_+(z)/z)+\beta\ln\tau_+'(z)]-$$
$$-(i\alpha+\beta)\ln z+\beta\ln dz \tag{14.5}$$

и

$$[-(i\alpha+\beta)\ln(\tau_-(z)/z)+\beta\ln\tau_-'(z)]-$$
$$-(i\alpha+\beta)\ln z+\beta\ln dz \tag{14.6}$$

Отождествляя логарифмические формы (I4.5), (I4.6) с функциями (т.е. рассматривая выражения в квадратных скобках) в (I4.5) мы получаем функцию из V_+, а в (I4.6) - функцию из V_-, к чему мы и стремились.

14.2. Канонические коциклы. Мы построили серию проективных представлений $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ полугруппы Γ со старшим весом. Операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ определены лишь с точностью до умножения на константу. Мы потребуем, чтобы операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ имели в точности вид (14.1) или, что эквивалентно равенству

$$\langle N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})\psi, \psi\rangle = 1$$

где через ψ обозначена функция $\psi(z)\equiv 1$ – вектор старшего веса. Назовем каноническим коциклом $\varkappa_{\alpha,\beta}: \Gamma\times\Gamma\to \to\mathbb{C}\setminus 0$ функцию, определяемую из равенства

$$N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_1)N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_2)=\varkappa_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$$

Пусть теперь T – произвольное проективное представление полугурппы Γ со старшим весом (h,c) и вектором старшего веса S. Отнормируем операторы $T(\mathcal{R})$ из условия: проекция вектора $T(\mathcal{R})s$ на прямую $\mathbb{C}s$ совпадает с S (заметим, что проекция на весовое подпространство корректно определена для всех (не обязательно унитарных) представлений Diff со старшим весом). Если $T=N_{\alpha,\beta}$, то эта нормировка совпадает с предыдущей. Канонические коциклы мы определяем по формуле

$$T(\mathcal{R}_1)T(\mathcal{R}_2)=\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)T(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$$

Так как представление $N_{\alpha,\beta}$ имеет старший вес $(h,c)=(\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2), 1+12\beta^2)$ мы получаем

$$\varkappa_{\alpha,\beta}=\varkappa^{\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2),\,1+12\beta^2} \tag{14.7}$$

С другой стороны, очевидно

$$\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)\varkappa^{h',c'}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\varkappa^{h+h',c+c'}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$$

Чуть позже мы увидим, что выражение $\varkappa^{h,c}$ голоморфно по h и c. Поэтому $\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$ имеет вид

$$\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\exp\left(h\lambda(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)+c\mu(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)\right) \qquad (14.8)$$

таким образом, проблема состоит в вычислении функций $\lambda(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$, и $\mu(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$.

<u>I4.3. Вычисление канонических коциклов.</u> Пусть $\mathcal{R}=(\overline{\mathbb{C}},\tau_+,\tau_-)$, $\mathcal{P}=(\overline{\mathbb{C}},p_+,p_-)$, $\tau_+(0)=0$, $\tau_-(\infty)=\infty$. $p_+(0)=0$, $p_-(\infty)=\infty$. В силу формулы (5.2)

$$\varkappa_{\alpha,\beta}(\mathcal{R},\mathcal{P})=\varkappa_{\alpha,\beta}(\tau_-,p_+)=\det\left[(1-MK)^{1/2}\right]\times$$

$$\times\exp\Big\{\frac{1}{2}\left(-(i\alpha+\beta)l_1+\beta m_1;-(i\alpha+\beta)l_2+\beta m_2\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-(i\alpha+\beta)l_1^t+\beta m_1^t\\ -(i\alpha+\beta)l_2^t+\beta m_2^t\end{pmatrix}\Big\} \qquad (14.9)$$

где $K=K(p_+)$, $M=M(\tau_-)$, $l_1=l_1(p_+)$, $l_2=l_2(\tau_-)$, $m_1=m_1(p_+)$, $m_2=m_2(\tau_-)$.

Из этой формулы следует обещанная ранее голоморфность $\varkappa_{\alpha,\beta}$ по α, β.

Сравним теперь три равенства (I4.7), (I4.8), (I4.9). Подставляя в них $\alpha=\beta=0$ получаем

$$\det\left(1-M(\tau_-)K(p_+)\right)^{-1/2}=\exp\mu(\tau_-,p_+) \qquad (14.10)$$

Это тождество для определителей Фредгольма выглядит интересным само по себе.

Далее, так как правая часть (I4.9) должна иметь вид

$$\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\lambda(\tau_-,p_+)+(1+12\beta^2)\mu(\tau_-,p_+)\right)$$

мы получаем, что член с $\alpha\beta$ в фигурных скобках в выражении (I4.9) отсутствует. Кроме того

$$\lambda(\tau_-,p_+)=-(\ell_1\ \ \ell_2)\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\ell_1^t\\ \ell_2^t\end{pmatrix}$$

$$\mu(\tau_-,p_+)=\frac{1}{12}(m_1\ \ m_2)\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}m_1^t\\ m_2^t\end{pmatrix}$$

Эти формулы нельзя еще считать явными, так как они содержат обращение интегрального оператора.

Учитывая, что

$$\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}M(1-KM)^{-1} & (1-MK)^{-1}\\ (1-KM)^{-1} & K(1-MK)^{-1}\end{pmatrix}$$

мы должны вычислить выражение

$$\ell_1\left[M(1-KM)^{-1}\ell_1^t+(1-MK)^{-1}\ell_2^t\right]+$$

$$+\ell_2\{(1-KM)^{-1}\ell_1^t+K(1-MK)^{-1}\ell_2^t\} \qquad (14.11)$$

а также аналогичное выражение для m_1, m_2.

Вспомним, что наши выражения не зависят от τ_+ и p_-, а поэтому, без ограничения общности, мы их можем выбрать так, что $\mathcal{R}, \mathcal{P} \in \mathcal{D}iff$. Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{R}\mathcal{P} = (\bar{\mathbb{C}}, q_+, q_-)$, $q_+(0)=0$, $q_-(\infty)=\infty$. Обозначим диффеоморфизмы, соответсвующие $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ через γ_1 и γ_2.

Теперь мы готовы применить второе решающее соображение в этом вычислении: в силу формулы (5.I) мы получаем (подставляя в (I4.II) $\beta=0$) , что

$$\ell_1(q_+)=\ell_1(\tau_+)+L(\tau_+,\tau_-)\{(1-K(p_+)M(\tau_-))^{-1}\times$$

$$\times(\ell_1(\tau_+)+K(p_+)\ell_2(p_-))\}$$

$$(14.12)$$

$$\ell_2(q_-)=\ell_2(p_-)+L^t(p_+,p_-)[(1-M(\tau_-)K(p_+))^{-1}\times$$

$$\times(\ell_2(\tau_-)+M(\tau_-)\ell_-(p_+)]$$

(мы имеем мложение Γ в полугруппу $End_{\overline{Sp}}(V)$, вводя параметры α , β мы превращаем вложение во вложение Γ в $End_{\overline{SpH}}(V)$. Тем самым (ℓ_1, ℓ_2) - не произвольный вектор, он представляет из себя что-то вроде 1 -коцикла и должен удовлетворять соответствующему уравнению)

Теперь сравним выражения в квадратных и фигурных скобках соответственно в (I4.II) и (I4.I2). Удивительным образом эти выражения совпадают. Итак,

$$\lambda(r_+,p_-)=\ell_2(r_-)L(r_+,r_-)^{-1}(\ell_1(q_+)-\ell_1(r_+))+$$

$$+\ell_1(p_+)L^t(p_+,p_-)^{-1}(\ell_2(q_-)-\ell_2(p_-))$$

Теперь мы должны вычислить L^{-1}. Это совсем просто (см. формулу (2.4)).

$$L^{-1}(r_+,r_-)f(z)=P_+f(\gamma_1(z))$$

$$L^{-1}(p_+,p_-)f(z)=P_+f(\gamma_2(z))$$

где P_+ - проектор на V_+. Учитывая, что для $g\in V_-$ выполнено

$$\int\limits_{|z|=1} g\,d(P_+f)=\int\limits_{|z|=1} g\,df$$

Мы можем написать окончательные формулы для λ,μ. Итак

$$\lambda(r_+,p_-)=\int\limits_{|z|=1}\Big(\ln\frac{r_-(z)}{z}\,d\ln\frac{q_+(\gamma_1(z))}{r_+(\gamma_1(z))}+$$

$$+\ln\frac{p_+(z)}{z}\,d\ln\frac{q_-(\gamma_2(z))}{p_-(\gamma_2(z))}\Big) \qquad (14.13)$$

$$\mu(r_+,p_-)=\frac{1}{12}\int\limits_{|z|=1}\Big(\ln r_-'(z)\,d\ln\frac{q_+'(\gamma_1(z))}{r_+'(\gamma_1(z))}+$$

$$+\ln p_+'(z)\, d\ln \frac{q_-'(\gamma_2(z))}{p_-'(\gamma_2(z))}$$

14.4. Формула для характеров. Мы видели (предложение 13.1 и 13.1), что операторы $N_{\alpha,\beta}(R)$ для $R\in\Gamma$ являются ядерными. Тем самым определен характер представления в буквальном смысле этого слова

$$\chi_{\alpha,\beta}(R)=\operatorname{tr} N_{\alpha,\beta}(R)$$

где $N_{\alpha,\beta}(R)$ нормировано так же, как в п.14.2. След интегрального оператора в пространстве Фока (если он существует) может быть вычислен с помощью стандартной процедуры интегрирования ядра по диагонали). Применяя формулу (1.3) для гауссова интеграла, мы получаем

$$\operatorname{tr} N_{\alpha,\beta}(R)=\det(iR)\exp\left\{\frac{1}{2}\left(-(i\alpha+\beta)\ell+\beta m\right)\times\right.$$
$$\left.\times R\left(-(i\alpha+\beta)\ell^t+\beta m^t\right)\right\} \tag{14.14}$$

где $\ell=(\ell_1,\ell_2)$, $m=(m_1,m_2)$, $R=\begin{pmatrix}-K & 1-L\\ 1-L^t & -M\end{pmatrix}^{-1}$

Введем для характеров также обозначение

$$\chi^{h,c}(R)=\chi_{\alpha,\beta}(R)$$

если

$$h=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\quad;\quad c=1+12\beta^2 \tag{14.15}$$

Вспомним, что при $h>0$, $c>1$ модуль $N_{\alpha,\beta}$ является модулем Верма. Так как при $h>0$, $h'>0$, $c>1$, $c'>1$ выполнено

$$M(h,c)\otimes M(h',c')=\bigoplus_{k=0}^{\infty} p(k)M(h+h'+k,c+c')$$

где $p(k)$ - число разбиений, мы получаем, что

$$\chi^{h_1,c_1}(R)\chi^{h_2,c_2}(R)= \\ =\sum_{k=0}^{\infty} p(k)\chi^{h_1+h_2+k,\,c+c'}(R) \tag{14.16}$$

при $h_1>0$, $h_2>0$, $c_1>1$, $c_2>1$.

Учитывая (I4.I4) - (I4.I6) мы получаем

$$\sum p(k)\det(iR)\exp\Big\{-\Big(h_1+h_2+k-\frac{1}{24}(c_1+c_2-1)\Big)lRl^t+ \\ +\Big[\Big(2h_1+2h_2+2k-\frac{1}{2}(c_1+c_2-1)\Big)\frac{1}{12}(c_1+c_2-1)\Big]^{1/2}(-ilRl^t- \\ -ilRm^t)+\frac{1}{24}(c_1+c_2-1)(lRl^t+mRm^t)\Big\}=$$

$$=\exp\Big\{-\Big(h_1+h_2-\frac{1}{24}(c_1+c_2-2)\Big)lRl^t+ \\ +\Big[\Big(2h_1-\frac{1}{12}(c_1-1)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{12}(c_1-1)\Big)^{1/2}+\Big(2h_2-\frac{1}{2}(c_2-1)\Big)^{1/2}\times \\ \times\Big(\frac{1}{12}(c_2-1)\Big)^{1/2}\Big](-ilRl^t-ilRm^t)+ \\ +\frac{1}{24}(c_1+c_2-2)(lRl^t+mRm^t)\Big\}\times \\ \times\det(iR)^2$$

Проводя очевидные сокращения, получаем

$$\exp\left\{\frac{1}{24} mRm^t\right\} \sum p(k) \exp\left\{-k \ell R \ell^t\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\left(2h_1+2h_2+2k-\frac{1}{12}\left(c_1+c_2-1\right)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{12}\left(c_1+c_2-1\right)^{1/2}\right) \times\right.$$
$$\left.\times\left(-i\ell Rm^t - i\ell R\ell^t\right)\right\} =$$
$$= \det(iR)\left\{\left[\left(2h_1+\frac{1}{12}\left(c_1-1\right)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{12}\left(c_1-1\right)\right)^{1/2}+\right.\right.$$
$$\left.+\left(2h_2+\frac{1}{12}\left(c_2-1\right)^{1/2}\right)\left(\frac{1}{12}\left(c_2-1\right)\right)^{1/2}\right] \times$$
$$\left.\times\left(-i\ell Rm^t - i\ell R\ell^t\right)\right\}$$

Левая часть этого равенства зависит лишь от h_1+h_2 и c_1+c_2, а не от h_1, h_2, c_1, c_2 в отдельности. Значит этим свойством обладает и правая часть. Но это возможно лишь в случае, когда

$$\ell Rm^t + \ell R\ell^t = 0$$

что в свою очередь влечет

$$\det(iR) = \exp\left\{\frac{1}{24} mRm^t\right\} \times$$
$$\times \sum p(k) \exp\left\{-k\ell R\ell^t\right\}$$

Ввдя обозначение

$$P(t) = \sum_{k \geqslant 0} p(k) t^k = \prod_{n \geqslant 1} \left(1-t^n\right)^{-1}$$

мы получаем окончательный ответ

$$\chi_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}) = P\left(\exp\{lRl^t\}\right) \times \exp\{\tfrac{1}{24} mRm^t\} \times$$
$$\times \exp\{-\tfrac{1}{2}\alpha^2 lRl^t + \tfrac{1}{2}\beta^2 mRm^t\} \qquad (14.17)$$

Наше доказательство проводилось при условии, что $h_1>0$, $h_2>0$, $c_1>1$, $c_2>1$. Однако, учитывая голоморфность (I4.I4) и (I4.I7) по h, c, мы получаем, что равенство (I4.I7) выполнено при всех α, β.

Замечание. Слова "формула для характеров" имеют два связанных между собой, но не совпадающих смысла: формула для следа $tr\,\rho(g)$ с одной стороны и производящая фонкция для размерностей весовых подпространств с другой. В случае "формулы Г.Вейля для характеров" эти два смысла совпадают, потому что почти любой элемент компактной группы сопряжен элементу картановской подгруппы. Далее аналоги формулы Вейля начали применяться для обощенных модулей Верма и отсюда началось раздвоение терминологии. Формула (I4.I7), конечно, содержит в себе формулу для размерностей весовых подпространств, в случае модулей $N_{\alpha,\beta}$, впрочем, тривиальную:

$$\sum (\dim V_k)\, t^k = P(t)$$

Формулы для характеров вырожденных модулей, конечно, легко выводятся из (14.17)

I4.5. О фермионном случае. Формулы типа (I4.I) здесь пишутся аналогично через проекторы Коши в пространствах голоморфных дифференциалов данного веса. Мы эти формулы опускаем.

§15. Категория $Shtan$ Концевича-Сигала.

15.1. Определение. Объектом категории $Shtan$ является неотрицательное целое число. Морфизм $n \to m$ это набор $\mathcal{R} = (R, \tau_i^+, \tau_j^-)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, где

1. R - компактная (быть может, несвязная) риманова поверхность с краем, причем край состоит из $m+n$ окружностей (компоненты края упорядочены).

2. $\tau_\alpha^\pm : S^1 \to R$ - фиксированные параметризации компонент края, причем при проходе контуров τ_i^+ поверхность R остается слева, а при проходе контуров τ_j^- - справа.

Два морфизма (R, τ_i^+, τ_j^-) и (Q, q_i^+, q_j^-) считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\mu : R \to Q$, такое, что $q_\alpha^\pm = \mu \circ \tau_\alpha^\pm$.

Мы будем говорить, что морфизм $\mathcal{R} = (R, \tau_i^+, \tau_j^-)$ имеет род 0, если R - несвязное объединение поверхностей рода , т.е. поверхностей, которые реализуются как области в сфере Римана.

Пусть $\mathcal{R} = (R, \tau_i^+, \tau_j^-) : m \to n$,

$\gamma = (S, s_j^+, s_\alpha^-) : n \to K$ - морфизмы категории $Shtan$. Определим их произведение $\mathcal{B} = (B, b_i^+, b_\alpha^-)$. Риманова поверхность B получается склейкой R и S, при склейке отождествляются всевозможные пары точек $\tau_j^-(e^{i\varphi})$ и $s_j^+(e^{i\varphi})$, где $1 \leq j \leq n$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Далее

$$b_i^+(e^{i\varphi}) = \tau_i^+(e^{i\varphi}), \quad b_\alpha^-(e^{i\varphi}) = s_\alpha^-(e^{i\varphi})$$

15.2. Второе определение категории $Shtan$. Объекты категории по-прежнему, неотрицательные целые числа. Морфизм $n \to m$, это набор $\mathcal{U} = [V, u_i^+, u_j^-]$,

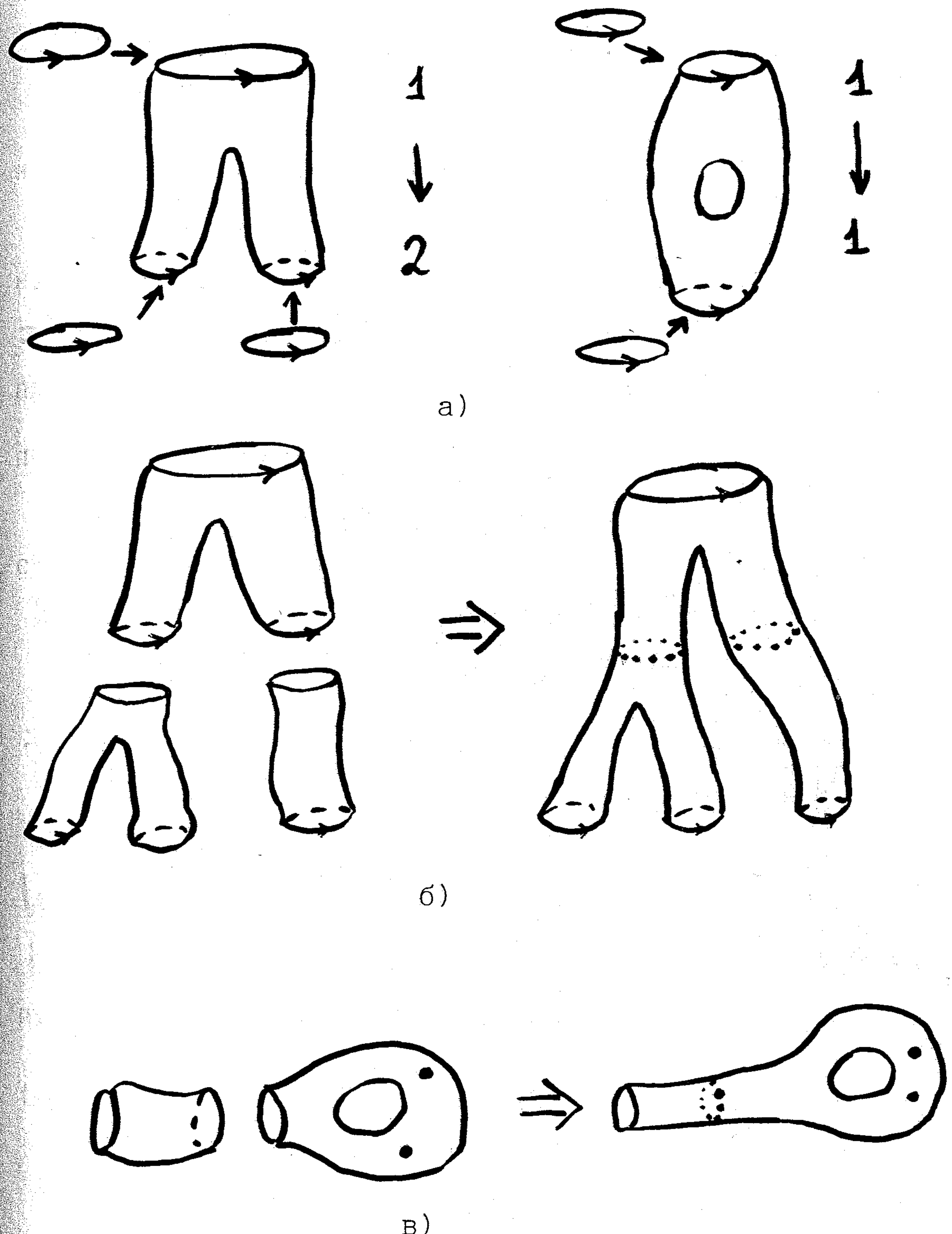


Рис.2. а) Морфизмы категории Shtan.

б) Умножение морфизмов.

в) Действие Γ на $\Omega_{1,2}$.

$1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, где

1. U – компактная замкнутая (быть может, несвязная) риманова поверхность,

2. $u_i^+ : \mathcal{D}_+ \to U$, $u_j^- : \mathcal{D}_- \to U$ – однолистные вплоть до границы отображения (напомним, что $\mathcal{D}_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, $\mathcal{D}_- = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geqslant 1$), причем $m+n$ област $r_i^+(\mathcal{D}_+)$, $r_j^-(\mathcal{D}_-)$ попарно не пересекаются

Два морфизма $[U, u_i^+, u_j^-]$ и $[W, \omega_i^+, \omega_j^-]$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $\tau : U \to W$, такое, что $\omega_\alpha^\pm = \tau \circ v_\alpha^\pm$.

Пусть $\mathcal{U} = [U, u_i^+, u_j^-] : m \to n$, $\mathcal{V} = [V, v_j^+, v_\alpha^-] : n \to k$ – морфизмы категории $Shtan$. Определим их произведение $\mathcal{V}\mathcal{U} = [W, \omega_i^+, \omega_\alpha^-] : m \to k$. Риманова поверхность W получается склейкой римановых поверхностей $U \setminus \bigcup_{j=1}^{n} u_j^-(\mathcal{D}_-)$ и $V \setminus \bigcup_{j=1}^{m} v_j^+(\mathcal{D}_+)$ путем отождествления пар точек $u_j^-(e^{i\varphi})$ и $v_j^+(e^{i\varphi})$ ($1 \leqslant j \leqslant n$, $\varphi \in [0, 2\pi]$)

Эквивалентность определений очевидна. В самом деле, пусть $\mathcal{U} = [U, u_i^+, u_j^-]$ – морфизм категории $Shtan$ в смысле второго определения. Построим по нему морфизм $\mathcal{R} = (R, r_i^+, r_j^-)$ категории $Shtan$ в смысле первого определения. Для этого положим

$$R = U \setminus \left(\left(\bigcup_i u_i^+(\mathcal{D}_+^0) \right) \cup \left(\bigcup_j u_j^-(\mathcal{D}_-^0) \right) \right),$$

$$r_i^+(e^{i\varphi}) = u_i^+(e^{i\varphi}), \quad r_j^-(e^{i\varphi}) = u_j^-(e^{i\varphi}).$$

<u>15.3. Физическая интерпретация</u>. Струна – замкнутый контур –

при движении заметает цилиндрическую поверхность. Принято считать, что на этой поверхности есть каноническая риманова метрика, а значит, есть и каноническая комплексная структура. Таким образом движению одной струны отвечают цилиндрообразные римановы поверхности. Далее, струны могут сталкиваться (взаимодействовать), при этом две струны могут сливаться в одну. Такое движение описывается морфизмом из 2 в I и т.д. М.Л.Концевич (I987) и Гр.Сигал (I988) переформулировали конформную теорию поля в терминах теории представлений категории $Shtan$. К этому моменту ряд"кусков" категории $Shtan$ уже встречался в математической литературе, это полугруппа $\Gamma \subset Mor(1,1)$, введенная автором, область $Diff/U(1)$ Кириллова, повышающие подалгебры Кричевера-Новикова. Их мы обсудим чуть позже.

<u>I5.4. Вариации определения</u>. категория $Shtan$, при всей своей элегантности, по-видимому, сама представляет собой лишь часть какой-то большей правильной категории. Для почти всех бесконечномерных групп автору известны категорные оболочки, т.е. такие категории, на которые продолжаются любые представления данной группы. В этом смысле категория $Shtan$, строго говоря, категорной оболочкой группы $Diff$ не является.Ее главный недостаток - то, что на эту категорию не продолжаются представления [37] , §5 , близкие к представлениям со старшим весом. В настоящей работе мы интересуемся лишь представлениями $Diff$ со старшим весом, но и здесь, как показывает п.I6.I категория $Shtan$ не совсем достаточна. Перечислим некоторые категории, близкие к категории $Shtan$.

<u>а) Категория</u> $Shtan^*$. Ее объекты - те же, что и у $Shtan$, а морфизмы - это наборы

$\mathcal{R}=(R, r_i^+, r_j^-, \mathcal{U}_\alpha)$, где (R, r_i^+, r_j^-) - морфизм категории $Shtan$, а $\mathcal{U}$ - конечный набор точек на поверхности R .

б) Категория $Shtan^{\sim}$. Ее объекты - те же, что и у $Shtan$. Морфизм $m \to n$ - это набор $\mathcal{S}=(S, s_i^+, s_j^-, \sigma)$, где (S, s_i^+, s_j^-) - морфизм $m \to n$ в смысле категории $Shtan$, а σ - максимальная изотропная подгруппа в пространстве $H_1(R, \mathbb{Z})$ первых целочисленных гомологий римановой поверхности R . (Напомним, что в группе $H_1(R, \mathbb{Z})$ определена естественная кососимметричная форма - индекс пересечения. Ядро этой формы порождено циклами $r_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$, тем самым все эти циклы содержатся в подгруппе σ). Пусть теперь $\mathcal{S}=(S, s_i^+, s_j^-, \sigma): m \to n$, $\mathcal{B}=(B, b_j^+, b_\alpha^-, \beta): n \to k$ -морфизмы категории $Shtan^{\sim}$. тогда определено их произведение $\mathcal{L}=(L, l_i^+, l_\alpha^-, \lambda): m \to k$ при этом (L, l_i^+, l_α^-) - это произведение (S, s_i^+, s_j^-) и (B, b_j^+, b_α^-) в смысле категории $Shtan$; а подгруппа λ - это сумма подгрупп σ и β .

Замечание. Пусть риманова поверхность R описывает движение струны. Положения струны в разные моменты времени не пересекаются, тем самым все положения струны порождают максимальную изотропную подгруппу в $H_1(R, \mathbb{Z})$. Таким образом, подгруппу $\mathcal{U} \subset H_1(R, \mathbb{Z})$ можно рассматривать как "воспоминание" о топологии движения струны, полностью же эта тополигия по решетке, конечно, не восстанавливается. С другой стороны, все максимальные изотропные подгруппы в $H_1(R, \mathbb{Z})$ могут быть построены таким образом.

Лемма I5.I. Любой морфизм $\gamma=(S, s_i^+, s_j^-, \sigma)$ категории $Shtan^\sim$ может быть разложен в произведение морфизмов рода 0.

Доказательство. Пусть R - компактная замкнутая риманова поверхность. Группа G автоморфизмов $H_1(R,\mathbb{Z})$ сохраняющих форму пересечения, очевидно, изоморфна $Sp(2g,\mathbb{Z})$, где g - род R. Естественное отображение модулярной группы Тейхмюллера (т.е. группы компонент группы диффеоморфизмов R) в группу G, как известно (см. [60]) сюръективно. Таким образом, любые две максимальные изотропные подгруппы в $H_1(R,\mathbb{Z})$ переводятся друг в друга посредством диффеоморфизма R. Поэтому в любой максимальной изотропной подгруппе есть базис из попарно непересекающихся (и не самопересекающихся) кривых. разрезая R вдоль этих кривых, мы получаем поверхность рода 0. Отсюда вытекает, что такой же базис есть и в случае компактных поверхностей с краем. Итак, разрезая S вдоль кривых, лежащих в σ мы можем получить поверхность рода 0. Теперь не составляет труда провести еще несколько дополнительных разрезов в S так, что S распадется в произведение морфизмов рода 0.

в) Категория G-$Shtan$. Пусть G - коплексная группа Ли. Объекты категории G-$Shtan$, те же, что и у $Shtan$. Морфизм $m\to n$ - это набор

$$\gamma=[S,\Sigma,s_i^+,s_j^-], \quad 1\le i\le m, \quad 1\le j\le n$$

I. S - компактная замкнутая риманова поверхность.

2. Σ - главное комплексное G-расслоение над S, пусть $\sigma:\Sigma\to S$

3. $s_\alpha^\pm:\mathcal{D}_\pm\times G\to\Sigma$ - морфизмы главных

$G-$ расслоений, причем образы всех $m+n$ отображений $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \times G \to \Sigma$ попарно не пересекаются, а отображения $\sigma \circ s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \to S$ однолистны вплоть до границы. Морфизмы $[S, \Sigma, s_i^+, s_j^-]$ и $[L, \Lambda, \ell_i^+, \ell_j^-]$ считаются совпадающими, если существует биголоморфный морфизм главных расслоений $\tau : \Sigma \to \Lambda$ такой, что $\ell_\alpha^\pm = \tau \circ s_\alpha^\pm$.

Пусть $[S, \Sigma, s_i^+, s_j^-] : m \to n$, $[X, \Xi, x_j^+, x_\mu^-] : n \to k$ – морфизмы категории $G-Shtan$. Тогда определено их произведение $[L, \Lambda, \ell_i^+, \ell_\mu^-] : m \to k$. Пространство L получается склейкой $\Sigma \setminus (\bigcup s_\alpha^-(\mathcal{D}_-^0 \times G))$ и $\Xi \setminus (\bigcup x_\beta^+(\mathcal{D}_+^0 \times G))$ путем отождествления всевозможных пар точек $s_j^-(e^{i\varphi}, g)$, $x_j^+(e^{i\varphi}, g)$, где $1 \leq j \leq n$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $g \in G$. Далее, $\ell_i^+ = s_i^+$, $\ell_j^- = x_j^-$.

Замечание. Эта категория связана не с алгеброй Вирасоро, а с аффинными алгебрами. В самом деле, рассмотрим группу $Aut(1)$. Эта группа, строго говоря, пуста. Однако, если мы заменим в определении категории $G-Shtan$ слова "образы отображений $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \times G \to \Sigma$ попарно не пересекаются " на чуть-чуть более слабое условие: "образы отображений $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm^0 \times G \to \Sigma$ попарно не пересекаются", то группа $Aut(1)$ перестает быть пустой. Легко видеть, что $Aut(1)$ изоморфна полупрямому произведению группы $Diff$ и группы $\widetilde{G}$, состоящей из всех аналитических отображений окружности в группу G. Естественным объектом теории представлений, собственно, и является это полупрямое произведение, а не группа токов $\widetilde{G}$ (см. [37]) ●

<u>15.5. Полугруппа $End_{Shtan}(1)$ как полугруппа эндоморфизмов алгебры Вирасоро</u>. Как известно, группа автоморфизмов полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является соответствующей группой Ли. Естественно подумать, что будет в случае, когда $\mathfrak{g}$ - алгебра Вирасоро

Пусть $\gamma = [S, s^+, s^-] : 1 \to 1$ - морфизм категории $Shtan$. Рассмотрим векторное поле $v(\varphi)\partial/\partial\varphi = v$ на окружности $|z| = 1$. Рассмотрим поле $(s^-)_* v$, продолжим его голоморфно (если это, конечно, возможно) на риманову поверхность $S \setminus (s_+(\mathcal{D}_+^0) \cup s_-(\mathcal{D}_-^0))$, затем ограничим это поле на контур $s_i^+(e^{i\varphi})$ и возьмем его прообраз при отображении s_i^+. Таким образом мы получили неограниченный плотно определенный оператор $A(\gamma): Vect_{\mathbb{C}} \to Vect_{\mathbb{C}}$ (векторные поля на замкнутой римановой поверхности с двумя выколотыми точками плотны на любом контуре разделяющем эти точки, см. [25], поэтому оператор $A(\gamma)$ плотно определен). Далее, легко понять, что $A(\gamma)$ сохраняет оператию коммутирования.

Здесь удобнее перейти на язык линейных отношений. Пусть $\gamma \in End(1)$. Построим по γ линейное $T(\gamma)$ отношение в $Vect_{\mathbb{C}} \oplus Vect_{\mathbb{C}}$. Для этого положим, что $(v_1, v_2) \in T(\gamma)$, если существует такое голоморфное, аналитическое вплоть до границы, векторное поле V на $S \setminus (s_+(\mathcal{D}_+^0) \cup s_-(\mathcal{D}_-^0))$ такое, что прообразы V при отображениях s_+ и s_- суть v_1 и v_2. Отношение $T(\gamma)$ сохраняет операцию коммутирования в следующем смысле этого слова: если (v_1, v_2), $(w_1, w_2) \in T(\gamma)$, то $([v_1, w_1], [v_2, w_2]) \in T(\gamma)$. Таким образом, полугруппу $End(1)$ можно рассматривать как полугруппу линейных отношений в $Vect_{\mathbb{C}}$, сохраняющих операцию коммутирования.

15.6. Пространства $\Omega_{g,n}$ и обобщенные повышающие подалгебры Кричевера-Новикова. Обозначим через $\Omega_{g,n}$ множество всех морфизмов $\gamma=(S, s^+, p_\alpha): 1\to 0,\ 1\le\alpha\le n$ категории $Shtan^*$ таких, что род поверхности S равен g. Полугруппа Γ действует на $\Omega_{g,n}$ очевидным образом:

$\mathcal{R}(\gamma)=\mathcal{R}\gamma$, где $\mathcal{R}\in\Gamma$, $\gamma\in\Omega_{g,n}$.

Каждому элементу γ пространства $\Omega_{g,n}$ мы можем поставить в соответствие подалгебру $\mathcal{B}(\gamma)\subset Vect_{\mathbb{C}}$, состоящую из всех векторных полей v на окружности, для которых существует голоморфное векторное поле V на S такое, что

1. Прообраз V при отображении s_+ суть v.
2. V обращается в 0 в точках p_α.

Классическая борелевская подалгебра в $Vect_{\mathbb{C}}$ (она натянута на $L_0, L_1, L_2, \ldots$) отвечает точке $(\mathcal{D}_+, e^{i\varphi}, 0)\in\Omega_{0,1}$. Остальные подалгебры $\mathcal{B}(\gamma)$, как было осознано в [25], столько же заслуживают названия борелевских, как и классическая. О старших векторах относительно таких подалгебр пока известно очень мало (конструкция 16.7 дает примеры таких векторов). Сами пространства $\Omega_{g,n}$ тем самым естественно рассматривать как пространство флагов (или как страты единого пространства флагов, как предлагает И.М.Кричевер).

Замечание. Может быть, вместо слова "борелевская" лучше говорить "повышающая" или "параболическая" или что-либо еще, это вопрос терминологии.

Замечание. Каждому элементу пространства $Mor(n,0)$ мы можем аналогичным образом поставить в соответствие "повышающую" подалгебру в $\bigoplus_{i=1}^{n} Vect_{\mathbb{C}}$.

15.7 Пространство однолистных функций $\Omega_{0,1}$. Обозначим через S пространство однолистных вплоть до границы функций $f(z)$ в круге $|z|\leqslant 1$, представимых в виде

$$f(z)=z+\sum_{k\geqslant 2} c_k z^k \qquad (15.1)$$

Каждой такой функции можно поставить в соответствие элемент $\gamma_f=(\bar{\mathbb{C}}\setminus f(\mathcal{D}_+^0), f, \infty)$ пространства $\Omega_{0,1}$. Легко видеть, что отображение $f\mapsto \gamma(f)$ является биекцией.

Как мы уже говорили, полугруппа Γ действует на $\Omega_{0,1}$. Более того, на $\Omega_{0,1}$ действует полугруппа $\bar{\Gamma}=\Gamma\cup \mathcal{D}iff$: группа $\mathcal{D}iff$ действует с помощью замены параметра на границе круга. Легко видеть, что область $\Omega_{0,1}$ однородна относительно группы $\mathcal{D}iff$. (Стабилизатор точки $(\mathcal{D}_-, e^{i\varphi}, \infty)$ состоит из вращений (т.е. преобразований вида $z\to e^{i\theta}z$)). Таким образом, как однородное пространство, $\Omega_{0,1}$ изоморфно $\mathcal{D}iff/\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ - группа вращений окружности. Тем самым и пространство S однолистных функций оказывается однородным пространством. Удивительно, но этот факт был обнаружен лишь в 1986 году А.А.Кирилловым [23], хотя пространством однолистных функций занималась целая (и весьма содержательная) область математики - теория однолистных функций.

Явные формулы для действия алгебры Ли векторных полей на $\Omega_{0,1}$ были получены в [24]. Векторному полю $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ отвечает следующеё векторное поле на пространстве однолистных функций

$$(\mathcal{L}_v f)(z)=-i f^2(z)\int_{|w|=1}\left[\frac{wf'(w)}{f(w)}\right]^2\frac{v(w)}{f(w)-f(z)}\,\frac{dw}{w} \qquad (15.2)$$

Если $p \geq 0$, генераторам $L_{-p} = e^{-ip\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$ алгебры $Vect_{\mathbb{C}}$ отвечают векторные поля

$$B_{-p} = \frac{\partial}{\partial c_p} + \sum_{k \geq 0} (k+1) c_k \frac{\partial}{\partial c_{k+p}} \qquad (p>0)$$

$$B_0 = \sum k c_k \frac{\partial}{\partial c_k}$$

Формулы для B_p при $p>0$ могут быть получены из (I5.2) Эти формулы заметно сложнее.

I5.8. Реализация представлений со старшим весом в пространстве голоморфных функций на $\Omega_{0,1}$. Введем на $\Omega_{0,1}$ координаты c_k - коэффициенты ряда Тейлора однолистной функции (см.(I5.I)). Функци F на $\Omega_{0,1}$ мы будем называть голоморфной, если для любого голоморфного отображения ψ из области Λ в $\mathbb{C}^n$ в $\Omega_{0,1}$ функция $F \circ \psi$ голоморфна на Λ. Пространство всех голоморфных функций на $\Omega_{0,1}$ мы обозначим через $\mathcal{T}$.

Известно (см., например, [81]), что бесконечномерные представления полупростых групп Ли со старшим весом могут быть реализованы на однородных областях Картана (=эрмитовых симметрических пространствах). Сейчас мы построим аналогичную реализацию для представлений $\mathcal{D}iff$ со старшим весом (правда, у нас получатся представления с младшим весом).

Пусть $\gamma = [\overline{\mathbb{C}}, p_+, p_-] \in \Gamma$, $x = [\overline{\mathbb{C}}, q_+, \infty] \in \Omega_{0,1}$. Операторы $T_{h,c}(\gamma)$ в $\mathcal{T}$ задаются формулой

$$T_{h,c}(\gamma) f(x) = F(\gamma x) \exp(h\lambda(p_-, q_+) + c\mu(p_-, q_+))$$

где функции λ и μ задаются формулой (I4.I3), см. также (I4.I8).

Проверим, что операторы $T_{h,c}$ задают представление. Это эквивалентно равенству

$$\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_3)\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=$$
$$=\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3)\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_3)$$

которое, в свою очередь, выполнено в силу самого определения канонического коцикла.

Замечание I. Рассмотрим оператор $I_{\alpha,\beta}$ из $F(V_+)$ в $\mathcal{T}$, заданный формулой

$$I_{\alpha,\beta}\psi(x)=$$
$$=\langle \ell[K(q_+)|-(\beta+i\alpha)\ell_1^t(q_+)+\beta m_1^t(q_+)],\psi\rangle$$

(Обозначения из п.I4.I и п.I.3). Можно показать, что в точках $h=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$, $c=1+12\beta^2$ общего положения этот оператор устанавливает изоморфизм представления $T_{h,c}$ и представления, сопряженного к $N_{\alpha,\beta}$. ●

Замечание 2. Можно показать, что на уровне алгебры Ли (алгебры Вирасоро) представление $T_{h,c}$ задается операторами

$$L_n f(q_+)=B_n f(q_+)+$$
$$+\left(\int\limits_{|z|=1} z^{-n+2}\left[h\frac{q_+'(z)^2}{q_+(z)^2}+\frac{c}{24}\left(\frac{2q_+'''(z)}{q_+'(z)}-\frac{3q_+''(z)^2}{q'(z)^2}\right)\right]dz\right)f(q_+)$$

(операторы B_n введены в предыдущем пункте).

§16. Представления категории $Shtan$.

16.1. Бозонная конструкция для категории $\overline{Shtan^{\sim}}$.

Мы начнем с того, что построим функтор $P: Shtan^{\sim} \to \overline{Sp}$. Каждому объекту m категории $Shtan^{\sim}$ (т.е.числу) мы поставим в соответствие пространство $V^{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{m} V$, где V - пространство из п.II.6. Снабдим $V^{(m)}$ структурой объекта категории $\overline{Sp}$, положив $V_{\pm}^{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\pm}^{(m)}$. Пусть, далее $\gamma^{\sim} = (S, s_i^{+}, s_j^{-}, \sigma): m \to n$ - морфизм категории $Shtan^{\sim}$. Построим по $\gamma^{\sim}$ линейное отношение $P^{o}(\gamma^{\sim}) \subset V^{(m)} \oplus V^{(n)}$. Пусть $\varphi^{+} = (f_1^{+}, \dots, f_m^{+}) \in V^{(m)}$,
$\varphi^{-} = (f_1^{-}, \dots, f_n^{-}) \in V^{(n)}$. Пара $(\varphi^{+}, \varphi^{-})$ содержится в $P^{o}(\gamma^{\sim})$, если существует голоморфная на S вплоть до границы 1-форма F такая, что

1. $\int F$ по любому циклу из решетки σ равен нулю.

2. Прообраз F при отображениях $S_{\alpha}^{\pm}$ суть $df_{\alpha}^{\pm}$. Мы будем называть форму F связывающей формой для $(\varphi^{+}, \varphi^{-})$.

Пусть $P(\gamma^{\sim})$ - замыкание пространства $P^{o}(\gamma^{\sim})$.

Теорема 16.1 а) отображение $\gamma^{\sim} \mapsto P(\gamma^{\sim})$ является функтором из категории $Shtan^{\sim}$ в симплектическую категорию. $\overline{Sp}$.

б) $\gamma^{\sim} \mapsto We(P(\gamma^{\sim}))$ - представление категории $Shtan^{\sim}$ ограниченными операторами. ☒

Доказательство теоремы занимает три следующих пункта.

16.2. Доказательство теоремы в случае, когда род S равен 0. В этом случае комплексная поверхность S может быть реализована как область на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная набором непересекающихся окружностей (см., например, [12], глава V)

Лемма I6.1. Пространство $P_0(\gamma^{\sim})$ изотропно, т.е. для любых $(f_1^+, \dots, f_m^+, f_1^-, \dots f_n^-), (h_1^+, \dots, h_m^+, h_1^-, \dots, h_n^-) \in$ $\in P_0(\gamma^{\sim})$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{m} \{f_i^+, h_i^+\} - \sum_{j=1}^{n} \{f_j^-, h_j^-\} = 0$$

Доказательство, в сущности, очевидно. Пусть F и H - связывающие формы для элементов $(f_1^+, \dots, f_n^-)$ и $(h_1^+, \dots, h_n^-)$. Эти формы в нашем случае (т.е. в случае рода 0) точны. Пусть $F = d\varphi$, $f_\alpha^\pm = d\psi_\alpha^\pm$. Тогда форма φH голоморфна в S и тоже точна (потому что она замкнута), а поэтому

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{m} \int_{\tau_\alpha^+(e^{i\varphi})} \varphi H - \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau_j^-(e^{i\varphi})} \varphi H =$$

$$= \sum_{\alpha} \int_0^{2\pi} \psi_\alpha^+ h_\alpha^+ d\varphi - \sum_{j} \int_0^{2\pi} \psi^- h_j^- d\varphi$$

что и требовалось доказать.

Лемма I6.2. Линейное отношение $P_0(\gamma^{\sim})$ сжимает эрмитову форму Θ, т.е. для любого $(f_1^+, \dots, f_m^+, f_1^-, \dots, f_n^-) \in P_0(\gamma^{\sim})$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{m} \Theta(f_i^+, f_i^+) \geq \sum_{j=1}^{n} \Theta(f_j^-, f_j^-)$$

Доказательство. (Эта лемма - одна из версий теоремы площадей Лебедева [27]). Ввиду простоты доказательства, мы его приведем. Пусть F - связывающая форма, $f_\alpha^\pm = d\psi_\alpha^\pm$

$$0 \leq \iint_S dF\, d\bar{F} = i \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_j^+(e^{i\varphi})} F\, dF - i \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\tau_\alpha^-(e^{i\varphi})} F\, dF$$

$$= i\sum_{j=1}^{m}\int_0^{2\pi}\psi_j^+\overline{f_j^+}\,dx - i\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^{2\pi}\psi_\alpha^-\overline{f_\alpha^-}\,d\varphi$$

что и требовалось доказать.

Лемма I6.3. Пространство $P(\gamma)$ – максимальное изотропное пространство.

Доказательство. Лемма основывается на простых прямых вычислениях. Так как преобразование $f \mapsto f\circ q$ содержится в $Aut(V)$ для любого $q \in \mathcal{D}iff$ (см.II.6), мы без ограничения общности можем считать, что окружности, ограничивающие область S, имеют стандартную параметризацию $(\varphi \mapsto a + \tau e^{\pm i\varphi})$. Естественно выяснить, как устроено преобразование Потапова-Гинзбурга отношения $P(\gamma)$. Рассмотрим следующую блочную матрицу A размера $(m+n)\times(m+n)$, действующую из $V_-^{(m)}\oplus V_+^{(n)}$ в $V_+^{(m)}\oplus V_-^{(n)}$. Ее блоки суть следующие операторы $A_{k,\ell}^{\alpha,\beta}: V_\beta \to V_\alpha$, где $\alpha,\beta=\pm$, а k, ℓ – целые числа.

$$A_{k,\ell}^{\alpha,\beta}\,\sigma = (\tau_k^\alpha)^*(\tau_\ell^\beta)_*\,\sigma$$

Эта формула нуждается в некоторых пояснениях. Функция $(\tau_\ell^\beta)_*\sigma$ формально определена лишь на окружности $\tau_\ell^+(e^{i\varphi})$, эта окружно сть делит плосткость на две области. Но функция $(\tau_\ell^\beta)_*\sigma$ голоморфно продолжается в ту область, которая содержит область S. Теперь к этой, продолженной функции мы можем применить преобразование $(\tau_k^\alpha)_*$.

Если все функции набора $\omega=(\upsilon_{1,+},\upsilon_{2,+},\dots,\upsilon_{m,+},$ $\upsilon_{1,-},\dots,\upsilon_{n,-})$ аналитичны на окружности, то вектор $\omega\oplus A\omega\in(V_-^{(m)}\oplus V_+^{(n)})\oplus(V_+^{(m)}\oplus V_-^{(n)})=V^{(m)}\oplus V^{(n)}$ содержится в $P^o(\gamma)$. В силу леммы I3.I $\|A\omega\|\leq\|\omega\|$. Поэтому $P(\gamma)$ состоит из всех векторов вида $\omega\oplus A\omega$, где $\omega\in V_-^{(m)}\oplus V_+^{(n)}$, причем A ограничен $(\|A\|\leq 1$. Но любое изотропное пространство такого вида является максимальным изтропным

<u>Лемма I6.4</u>. Операторы $A_{i\,j}^{\alpha\beta}$ из доказательства леммы I6.3. являются ядерными.

<u>Доказательство</u>. Пусть, для определенности $\alpha,\beta=+$, пусть, для определенности, $r_j^+(e^{i\varphi})=e^{i\varphi}$, $r_i^+(e^{i\varphi})=a+ce^{i\varphi}$ $(|a|+|c|<1)$. Тогда в ортогональном (но не нормированном)базисе z^k оператор $A_{i\,j}^{\alpha\beta}$ задается матрицей

$$Q(a,c)=\begin{pmatrix} c & 2ac & 3a^2c & 4a^3c & \dots \\ 0 & c^2 & 3ac^2 & 6a^2c^2 & \dots \\ 0 & 0 & c^3 & 4ac^3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c^4 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \end{pmatrix} \qquad (16.1)$$

Перейдем в ортонормированный базис $z^k/\sqrt{k}$. Мы видим, что сумма модулей матричных коэффициентов сходится, а поэтому матрица ядерна.

<u>Лемма I6.5</u>. а) $P(\gamma)\in\mathrm{Mor}_{\overline{Sp}}(V^{(m)},V^{(n)})$

б) Операторы $We(P(\gamma))$ ограничены.

Доказательство. Как и в лемме I6.3 нам достаточно рассмотреть случай круговой области со стандартной параметризацией границ. В этом случае преобразование Потапова-Гинзбурга отношения $P(\gamma)$ мы уже вычислили при доказательстве леммы I6.3, в с силу леммы I6.2 оно является ядерным оператором. Это сразу доказывает утверждение а) (нам оставалось проверить условие 4 из п.2.6), а вместе с ним (в силу теоремы 4.2) и утверждение б).

I6.3. Лемма о стирании особенностей. Главная цель этого пункта - доказать следующую лемму.

Лемма I6.6. Пусть $\mathfrak{R}=(R, r_i^+, r_j^-): m\to n$, , $\gamma=(S, s_j^+, s_\alpha^-)\, n\to k$ - морфизмы категории $Shtan^\sim$, причем род поверхностей R и S равен 0. Пусть $w=(v_1,\dots,v_n)\in V^{(n)}$ - такой набор функций, что $w\in \operatorname{Im} T(\mathfrak{R})\cap \mathcal{D}(\gamma)$. Тогда все формы v_j аналитичны.

Доказательство потребует некоторых дополнительных рассмотрений.

Прежде всего, заметим; что $V\subset L^2/\mathbb{C}$, где через $L^2/\mathbb{C}$ обозначено фактор-пространство $L^2(S^1)$ по пространству констант. Сходимость в V влечет сходимость в $L^2/\mathbb{C}$.

Лемма I6.7. Пусть R - круговая область в $\mathbb{C}$. Пусть $F_1, F_2, \dots$ - последовательность голоморфных функций в R, аналитических вплоть до границы. Пусть f_j^i - ограничение F_i на j-ую компоненту границы и пусть f_j^i сходится к f_j при $i\to\infty$ в смысле $L^2/\mathbb{C}$. Тогда существует голоморфная функция $F\in H^2(R)$, такая, что для некоторых констант c_i последовательность функций F_i+c_i

сходится к F в смысле $H^2(R)$, а ограничение F на j-ую компоненту границу суть $f_j+\alpha_j$, где α_j - набор констант.

Доказательство. Обозначим через $H^2(S,a)$ пространство Харди функций класса H^2 в области S, обращающихся в 0 в точке a (О пространствах Харди в многосвязных областях см., например, [85])

Без ограничения общности мы сможем считать, что $F_i \in H^2(R,a)$. Пусть ℓ_α - контуры, ограничивающие область R. Рассмотрим изометрическое отображение $\tau: H^2(R,a) \to \oplus L^2(\ell_\alpha)$, которое ставит в соответствие каждой функции из $H^2(R)$ набор ее ограничений на контуры ℓ_α. Пусть $\psi: \underset{\alpha}{\oplus} L^2(\ell_\alpha) \to \underset{\alpha}{\oplus} L^2(\ell_\alpha)/\mathbb{C}$ - отображение проекции. Ядро проекции ψ конечномерно, поэтому ψ переводит замкнутое подпространство $\tau(H^2(R,a))$ в $\oplus L^2(\ell_\alpha)$ в замкнутое подпространство. Так как ядро ψ не пересекается с $\tau(H^2(R,a))$, то по теореме Банаха об обратном операторе, оператор $(\psi\circ\tau)^{-1}$ ограничен на пространстве $\psi\tau(H^2(R,a))$. Отсюда следует, что последовательность F_j сходится в H^2 и теперь утверждение очевидно. $\boxtimes$

Лемма I6.8. Пусть R и S - кольцеобразные неперекрывающиеся области на плоскости $\mathbb{C}$, имеющие в качестве общей компоненты границы аналитическую кривую ℓ. Пусть $F_1 \in H^2(R)$, $F_2 \in H^2(S)$ и пусть ограничения F_1 и F_2 на ℓ совпадают. Тогда функция

$$F(z)=\begin{cases} F_1(z), & z\in R \\ F_2(z), & z\in S \\ F_1(z)=F_2(z), & z\in l \end{cases}$$

голоморфна. ■

Доказательство. Достаточно доказать голоморфность F в малой окрестности контура l. Поэтому, в силу аналитичности l, мы, без ограничения общности, можем считать, что l – это окружность $|z|=1$, R лежит внутри l, а S – снаружи. В силу совпадения граничных значений коэффициенты ряда Лорана функции F в области $1-\varepsilon<|z|<1$ совпадают с коэффициентами ряда Лорана F в области $1<|z|<1+\delta$ $(\varepsilon, \delta>0)$. Теперь утверждение очевидно. ☒

Лемма 16.6 сразу следует из лемм 16.7 и 16.8

16.4. Доказательство теоремы 16.1. Мы уже видели, (лемма 15.1) что любой морфизм γ категории $Shtan^{\sim}$ представим в виде произведения морфизмов $\gamma=R_1\ldots R_n$, отвечающих римановым поверхностям рода 0. Очевидно

$$T^0(\gamma)=T^0(R_1)\ldots T^0(R_n)$$

В силу леммы 16.6 отсюда следует, что

$$T(\gamma)\supset T(R_1)\ldots T(R_n)$$

Но в правой части стоит максимальное изотропное подпространство, поэтому $T(\gamma)$ – максимальное изотропное подпространство, а значит $T(\gamma)$ – морфизм симплектической категории. Теперь равенство $T^0(\gamma_1)T^0(\gamma_2)=T^0(\gamma_1\gamma_2)$ влечет $T(\gamma_1)\,T(\gamma_2)=T(\gamma_1\gamma_2)$

16.5. Явные формулы. Итак, по каждому морфизму γ категории

Shtan$^{\sim}$ мы построили оператор $B[\Omega(\gamma)]$ (обозначения из §I) в бозонном пространстве Фока. Сейчас мы выпишем явную формулу для матрицы $\Omega(\gamma)$, которая, по определению, есть преобразование Потапова-Гинзбурга от $T(\gamma)$.

Итак, пусть $\gamma=[S, s_i^+, s_j^-, \sigma]\in Mor(m,n)$ Напомним, что квадратные скобки обозначают, что S - замкнутая компактная риманова поверхность, $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \to S$ - однолистные отображения, а σ - максимальная изотропная подгруппа в $H_1(S \setminus \cup s_\alpha^\pm(\mathcal{D}_\pm^0), \mathbb{Z})$. Матрица $\Omega : V_-^{(m)} \oplus V_+^{(n)} \to V_+^{(m)} \oplus V_-^{(n)}$ тем самым является блочной $(m+n)\times(m+n)$ -матрицей, ее блоки мы будем обозначаьт через $\Omega_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$, где $\varphi,\psi=\pm$, а α, β - натуральные индексы, блок $\Omega_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ отображает β-ый экземпляр пространства V_ψ в α-тый экземпляр пространства V_φ. Опишем эти блоки явно.

Пусть $v\in V_\psi$. Рассмотрим 1-форму $q=(s_\beta^\psi)_* dv$, которая определена на кривой $s_\beta^\psi(e^{i\varphi})$ на S. Представим q в виде суммы $q=q_+ + q_-$, где q_+ голоморфна в области $s_\beta^\psi(\mathcal{D}_+)$ а q_-- в дополнении этой области. Тогда

$$d[\Omega_{\beta\beta}^{\psi\psi} v] = (s_\beta^\psi)^* q_+$$

$$d[\Omega_{\alpha\beta}^{\theta\psi} v] = (s_\alpha^\theta) q_-$$

если пара (θ,α) отлична от пары (ψ,β).

<u>Теорема I6.2.</u> ("теорема площадей") $\|\Omega\| < 1$.

Доказательство: $\Omega(\gamma)$ есть преобразование Потапова-Гинзбурга $T(\gamma)$.

Замечание. Если род S равен 0, то сформулированное утверждение, по существу, совпадает с "теоремой площадей" Лебедева (см. [27]).

16.6. ФЕрмионная конструкция для $\mathrm{Shtan}^{\sim}$. Как мы уже отмечали в §10 симплектическая категория $\overline{Sp}$ вкладывается в категорию $\overline{C}$. Итак, конструкцию п.16.1. можно рассматривать как вложение $\mathrm{Shtan}^{\sim}$ в $\overline{C}$, категория $\overline{C}$ в свою очередь вкладывается в $\overline{GA}$. Ограничивая спинорное представление $\overline{GA}$ на $\mathrm{Shtan}^{\sim}$ мы получаем представление категории $\mathrm{Shtan}^{\sim}$.

16.7. Фермионные конструкции для Shtan. Пусть H - это пространство H_0 из п.11.7, т.е. пространство $L^2(S^1)$, снабженное структурой объекта категории $\overline{GA}$, пространство H_+ натянуто на функции $e^{in\varphi}$ с $n \geqslant 0$, а H_- - на функции $e^{in\varphi}$ с $n < 0$.

Пусть k - целое число. Построим вложение T_k категории Shtan в категорию $\overline{GA}$. Каждому $n \in Ob(\mathrm{Shtan})$ мы поставим в соответствие пространство

$H^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} H \in Ob(\overline{GA})$ (мы полагаем, $H_+^{(n)} = \oplus H_+$, $H_-^{(n)} = \oplus H_-$) Пусть

$\gamma = (S, s_i^+, s_j^-) : m \to n$ - морфизм категории Shtan.

Введем линейное отношение $T_k^0(\gamma) \subset H^{(m)} \oplus H^{(n)}$, положив что $(v_1^+, \ldots, v_m^+, v_1^-, \ldots, v_n^-) \in H^{(m)} \oplus H^{(n)}$ содержится в $T_k^0(\gamma)$ тогда и только тогда, когда существует голоморфный дифференциал F степени k на S такой, что

$(s_\alpha^{\pm})^* F = v_\alpha^{\pm}(\varphi)(d\varphi)^k$. Наконец, $T_k(\gamma)$ - это замыкание $T_k^0(\gamma)$.

Замечание. Дадим эквивалентное, в некоторых отношениях более прият..ое, определение $T_k(\gamma)$ (мы не будем им пользоваться). Введем сначала гильбертово пространство $H^2(\gamma, (dz)^k)$ голоморфных дифференциалов степени k на S, положив

$$\|F\|^2_{H^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{i=1}^{m} \|((\gamma_\alpha^+)_\varepsilon)^* F\|^2_{L^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \|((\gamma_\alpha^-)_\varepsilon)^* F\|^2_{L^2}\right)$$

где $(\gamma_\alpha^\pm)_\varepsilon(\varphi) = \gamma_\alpha^\pm(\varepsilon,\varphi) \in C^\infty([0,\delta]\times[0,2\pi])$ причем $\gamma_\alpha^\pm(\varepsilon,\varphi) = \gamma_\alpha^\pm(\varepsilon, 2\pi)$, $\gamma_\alpha^\pm(0,\varphi) = s_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$, если же $\varepsilon > 0$, то $\gamma_\alpha^\pm(\varepsilon,\varphi)$ лежит во внутренней части S . Наконец, мы, по определению, полагаем

$$\|f(\varphi)(d\varphi)^k\|_{L^2} = \|f(\varphi)\|_{L^2[0,2\pi]}$$

Теперь набор $(\sigma_1^+,\ldots,\sigma_m^+,\sigma_1^-,\ldots,\sigma_n^-)$ содержится в $T(\gamma)$, если существует голоморфный дифференциал F из $H^2(\gamma, (dz)^k)$ такой, что граничные значания F на компонентах края суть $(s_\alpha^\pm)^*(\sigma_\alpha^\pm(\varphi)(d\varphi)^k)$.

Теорема I6.3. $T_k(\gamma)$ - морфизм категории $\overline{GA}$.

Доказательство. напоминает доказательство теоремы I6.I, но намного проще.

Лемма I6.3. Пусть γ - круговая область в $\mathbb{C}$ стандартной параметризацией границ $\varphi \to a + re^{\pm i\varphi}$, ограниченная одной, двумя, или тремя окружностями. Тогда $T_k(\gamma) \in \mathrm{Mor}_{\overline{GA}}$.

Доказательство. Разберем, например, случай области

$\gamma \in Mor(0,3)$. Пусть $\bar{\mathbb{C}} \setminus S$ есть объединение дисков Q_1, Q_2, Q_3. Отождествим дифференциалы степени k с функциями (т.е. отождествим $F(dz)^k$ с F). Тогда преобразование Потапова-Гинзбурга отношения $T(\gamma)$ является графиком оператора с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

где Ω_{ij} - отображение ограничения из пространства H^2 функций, голоморфных внутри области $\mathbb{C} \setminus Q_i$ в пространство H^2 функций, голоморфных внутри Q_j. Этот оператор является ядерным (и даже лежит в любом операторном $\mathcal{L}_p$, $p>0$), проще всего в этом убедиться, выписав его матрицу (мы это, по существу уже делали, в формуле (I6.I), нужно добавить сверху нулевую строку). Таким образом матрица Ω ядерна. Случаи, когда $\gamma \in Mor(1,2)$, $Mor(2,1)$, $Mor(3,0)$, почти не отличаются от рассмотренного. Случаи, когда S - круг или кольцо, еще проще. $\boxtimes$

<u>Доказательство теоремы I6.3</u>. Из леммы сразу следует, что теорема верна в случае, когда риманова поверхность - это сфера с одно, двумя или тремя дырками (напомним, что $Diff \subset Aut(H)$ см. п.II.7). Далее, любой морфизм представляется в виде произведения морфизмов $\mathcal{R}_K = (R_K, (r_K)_i^+, (r_K)_j^-)$, где каждая риманова поверхность R_K есть объединение сфер с одной, двумя или тремя дырками. Далее мы дословно повторяем рассуждения п. I6.4. $\boxtimes$

Ограничивая спинорное представление категорий GA на

$Shtan$ мы получаем серию представлений $\rho_k (k \in \mathbb{Z})$ категории $Shtan$.

Предложение I6.I. Операторы $\rho_k(\gamma)$ ограничены для всех $\gamma \in Shtan$.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы I4.2.

I6.8. Примеры представлений категории $Shtan^*$. Чтобы привести пример представления $Shtan^*$ достаточно рассмотреть конструкцию I6.7, только в определении $T_k^0(\gamma)$ потребовать, чтобы дифференциал F имел нули кратности $s \geqslant 0$ в отмеченных точках.

I6.9. Примеры представлений категории $G-Shtan$.

Здесь, тоже можно чуть-чуть видоизменить конструкцию п I6.7. Пусть $\gamma = [S, \Sigma, s_i^+, s_j^-]$ - морфизм. А именно фиксируем голоморфное представление ρ группы G, построим по ρ линейное расслоение над S ассоциированное с Σ и далее вместо k -дифференциалов (рассматривающихся в п.I6.7) рассмотрим голоморфные сечения ρ. Роль пространства H играет пространство функций на окружности $|z| = 1$ со значениями в пространстве представления ρ.

Глава IУ. Представления категорий $GA, B, C, \mathcal{D}$.

В главе II были введены категории $\overline{GA}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{G\mathcal{D}}$. Здесь нас интересуют не сами эти категории, а лишь их конечномерные части $GA, B, C, G\mathcal{D}$ т.е. подкатегории, состоящие из конечномерных объектов. Мы начнем с того, что дадим независимое определение этих категорий.

§I7. Формулировки классификационных теорем.

I7.0. Предварительные замечания о представлениях категорий. Определения подпредставления, неприводимого представления, прямой суммы представлений, тензорного произведения представлений, вполне приводимого представления (представления, разлагающегося в прямую сумму неприводимых) в комментариях не нуждаются. Определим аналог сплетающего оператора. Пусть (T, τ) и (S, σ) – представления категории $\mathcal{K}$. Сплетающим преобразованием $A : (T, \tau) \to (S, \sigma)$ мы назовем набор операторов $A(V)$, где $V \in Ob(\mathcal{K})$ такой, что для любых $V, W \in Ob(\mathcal{K})$ и для любого $P \in Mor(V, W)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "\tau(P)"] \arrow[d, "A(V)"'] & T(W) \arrow[d, "A(W)"] \\
S(V) \arrow[r, "\sigma(P)"] & S(W)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определим также циклическую оболочку. Пусть $V \in Ob(\mathcal{K})$ Пусть $L \subset T(V)$. Обозначим через $S(W) \subset T(W)$ набор подпространств, натянутых на векторы вида $\tau(P)v$, где $P \in Mor(V, W)$, $v \in L$. Легко видеть, что S – под-

$Shtan$ мы получаем серию представлений $\rho_k (k\in\mathbb{Z})$ категории $Shtan$.

Предложение I6.I. Операторы $\rho_k(\gamma)$ ограничены для всех $\gamma\in Shtan$.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы I4.2.

I6.8. Примеры представлений категории $Shtan^*$. Чтобы привести пример представления $Shtan^*$ достаточно рассмотреть конструкцию I6.7, только в определении $T_k^0(\gamma)$ потребовать, чтобы дифференциал F имел нули кратности $s\geqslant 0$ в отмеченных точках.

I6.9. Примеры представлений категории $G-Shtan$. Здесь, тоже можно чуть-чуть видоизменить конструкцию п I6.7. Пусть $\gamma=[S,\Sigma,s_i^+,s_j^-]$ – морфизм. А именно фиксируем голоморфное представление ρ группы G , построим по ρ линейное расслоение над S ассоциированное с Σ и далее вместо k -дифференциалов (рассматривающихся в п.I6.7) рассмотрим голоморфные сечения ρ . Роль пространства H играет пространство функций на окружности $|z|=1$ со значениями в пространстве представления ρ .

Глава IУ. Представления категорий $\mathcal{GA}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.

В главе II были введены категории $\overline{\mathcal{GA}}, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{GD}}$. Здесь нас интересуют не сами эти категории, а лишь их конечномерные части $\mathcal{GA}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{GD}$ т.е. подкатегории, состоящие из конечномерных объектов. Мы начнем с того, что дадим независимое определение этих категорий.

§I7. Формулировки классификационных теорем.

<u>I7.0. Предварительные замечания о представлениях категорий.</u> Определения подпредставления, неприводимого представления, прямой суммы представлений, тензорного произведения представлений, вполне приводимого представления (представления, разлагающегося в прямую сумму неприводимых) в комментариях не нуждаются. Определим аналог сплетающего оператора. Пусть (T, τ) и (S, σ) – представления категории $\mathcal{K}$. Сплетающим преобразованием $A : (T, \tau) \to (S, \sigma)$ мы назовем набор операторов $A(V)$, где $V \in Ob(\mathcal{K})$ такой, что для любых $V, W \in Ob(\mathcal{K})$ и для любого $P \in Mor(V, W)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{\tau(P)} & T(W) \\ {\scriptstyle A(V)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A(W)} \\ S(V) & \xrightarrow{\sigma(P)} & S(W) \end{array}$$

коммутативна.

Определим также циклическую оболочку. Пусть $V \in Ob(\mathcal{K})$ Пусть $L \subset T(V)$. Обозначим через $S(W) \subset T(W)$ набор подпространств, натянутых на векторы вида $\tau(P)v$, где $P \in Mor(V, W)$, $v \in L$. Легко видеть, что S - подпредставление в T и мы назовем S циклической оболочкой L.

Наконец, отметим, что под словом "представление" мы всегда понимаем непрерывное представление.

Лемма I7.I. Пусть T - неприводимое представление $\mathcal{K}$. Тогда ограничение на T на все полугруппы $End(V)$ неприводимо.

Доказательство. Допустим представление $End(V)$ в $T(V)$ приводимо, и пусть L - его некоторое собственное подпредставление. Рассмотрим циклическую оболочку L, эта циклическая оболочка является собственным подпредставлением в T. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие. Пусть для любого $V \in Ob(\mathcal{K})$ группа $Aut(V)$ плотна в $End(V)$. Тогда ограничение любого неприводимого представления T категории $\mathcal{K}$ на любую группу $Aut(V)$ неприводимо. ■

Утверждение, обратное к лемме I7.I, неверно. Однако, для изучаемых ниже категорий оно выполнено.

Лемма I7.2. Пусть множество объектов $V_1, V_2, \dots$ категории $\mathcal{K}$ упорядочено, и пусть каждый морфизм $P \in Mor(V_j, V_j)$ представим в виде $P = QRH$, где $H \in Mor(V_j, V_{j+1})$, $R \in Mor(V_{j+1}, V_{j+1})$, $Q \in Mor(V_{j+1}, V_j)$. Пусть представление $\mathsf{T} = (T, \tau)$ категории $\mathcal{K}$ таково, что ограничение T на любую подгруппу $End(V_j)$ неприводимо. Тогда T неприводимо. ■

Доказательство. Заметим, что если представление S - произвольное представление $\mathcal{K}$ и если ограничение S на $End(V_{j+1})$ нулевое, то и ограничение S на $End(V_j)$ является нулевым. Пусть $T' \subset T$ - подпредставление, $T'' = T/T'$ - факторпредставление. Сформулированное чуть выше замечание влечет, что либо $T' = 0$, либо $T'' = 0$.

<u>17.1. Категория</u> GA. Объект категории – конечномерное комплексное линейное пространство. Множество $Mor(V,W)$ состоит из всех линейных отношений $V \rightrightarrows W$, а так же из элемента $null_{V,W}$. Произведение $null$ с любым другим морфизмом равно $null$. Если $P: V \to W$, $Q: W \to Y$ – ненулевые морфизмы и выполнены равенства

$$Ker\, Q \cap Ind\, P = 0 \tag{17.1}$$

$$Im\, P + \mathcal{D}(Q) = W \tag{17.2}$$

то P и Q перемножаются как линейные отношения. В противном случае произведение равно $null_{V,Y}$. Ассоциативность умножения мы проверили выше в п. 10.2.

Множество ненулевых морфизмов $V \to Y$ представляет из себя объединение грассманианов. Поэтому введем на $Mor(V,W) \setminus \setminus null_{V,W}$ топологию несвязного объединения грассманианов. Далее продолжим топологию на все множество $Mor(V,W)$, положив, что $null$ содержится в замыкании любой точки.

<u>Лемма 17.3</u>. Пусть $P \in Mor(V,W)$, $Q \in Mor(W,Y)$

а) Если $QP \neq null$, то

$$\dim QP = \dim P + \dim Q - \dim W$$

б) Умножение $(P,Q) \mapsto QP$ непрерывно.

<u>Доказательство.</u> Начнем с а). Рассмотрим в $Z = V \oplus W \oplus W \oplus Y$ подпространство H, состоящее из всех векторов вида (v, w, w, y). Из условия (17.2) следует, что сумма подпространств H и $P \oplus Q$ в Z совпадает с Z, поэтому

$$\dim (H \cap (P \oplus Q)) = \dim P + \dim Q - \dim W$$

Спроектируем подпространство $H \cap (P \oplus Q) \subset Z$ на подпространство $V \oplus Y \subset Z$ всех векторов вида $(v, 0, 0, y)$ параллельно пространству X всех векторов вида $(0, w, w, 0)$. Если выполнено (I7.I), то отображение инъективно. Но эта проекция есть ни что иное как QP. Утверждение а) доказано. Отсюда же следует непрерывность умножения во всех точках (P, Q), где $QP \neq null$. Во всех остальных точках непрерывность выполнена автоматически. Лемма доказана. ☐

Группа $Aut(V) = GL(V)$ не плотна в полугруппе $End(V)$ (и именно этим будет обусловлено различие в теории представлений GA и теории представлений B, C, D). Обозначим через $End^*(V)$ полугруппу всех морфизмов $V \to V$, состоящих из $null$ и линейных отношений размерности $\dim V$. Группа $Aut(V)$ плотна в $End^*(V)$. Полугруппа $End^*(V)$ как полугруппа порождена группой $Aut(V)$ и двумя произвольными элементами P и Q, удовлетворяющими условиям $\dim Ker(P) = 1$, $\dim Ind(P) = 0$, $\dim Ker(Q) = 0$, $\dim Ind(Q) = 1$.

Пусть ρ - неприводимое представление группы $GL(V) = Aut(V)$. Тогда, очевидно, существует не более четырех непрерывных продолжений ρ до проективного представления полугруппы $End^*(V)$. В самом деле, либо $\rho(P) = 0$, либо $\rho(P)$ однозначно определено из соображений непрерывности. С $\rho(Q)$ ситуация аналогична.

<u>Теорема I7.I</u>. а) Проективные голоморфные представления категории GA вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные представления (T, τ) категории

GA нумеруются диаграммами вида

$$\cdots \quad \overset{a_{-1}}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{a_0}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{a_1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{a_2}{\circ} \quad \cdots$$

где a_j - неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0 (При сдвиге диаграммы представление не меняется). Пусть a_α - самая левая, а a_β - самая правая из ненулевых числовых отметок. Если $\beta-\alpha-1>n$, ограничение нашего представления на группу $SL(n+1,\mathbb{C})$ является нульмерным. Если же $\beta-\alpha-1\leq n$, то это ограничение есть однократная прямая сумма всех представлений $\tau_{\mu,\nu}$ группы $SL(n+1,\mathbb{C})$ с числовыми отметками $a_\mu, a_{\mu+1},\dots,a_\nu$ на диаграмме Дынкина A_n, причем μ и ν должны удовлетворять условиям $\alpha\geqslant\mu-1$, $\nu\geqslant\beta-1$, $\nu-\mu=n-1$.

в) Пусть P и Q - те же образующие полугруппы $End^*(V)$, что и выше. Тогда $\tau_{\mu,\nu}(P)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha>\mu+1$ и $\tau_{\mu,\nu}(Q)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\nu>\beta-1$ ■

<u>Пример</u>. Пусть (T,τ) имеет числовые отметки $(\dots 0,0,b,c,0,0,\dots)$, где $b,c\neq 0$. Ограничение T на $SL(4,\mathbb{C})$ суть сумма представлений с числовыми отметками $(0,0,b)$, $(0,b,c)$, $(b,c,0)$, $(c,0,0)$

<u>17.2. Категории</u> $B, C, \mathcal{D}$. Объектом категории C является комплексное линейное пространство V снабженное невырожденой кососимметрической билинейной формой $\{\cdot\,,\cdot\}_V$. Пусть V,W - объекты категории C. Введем в $V\oplus W$ симплектическую форму

$$\Lambda((v_1,w_1),(v_2,w_2))=\{v_1,v_2\}_V-\{w_1,w_2\}_W$$

Множество $Mor(V,W)$ состоит из $null=null_{V,W}$ и максимальных изотропных подпространств в $V \oplus W$. Морфизмы перемножаются также как в категории GA .

Определение категорий B и $G\mathcal{D}$ аналогично, только их объектами являются соответственно четномерные и нечетномерные комплексные линейные пространства, снабженные симметричной билинейной формой.

Очевидно $Aut_C(V) \simeq Sp(V), Aut_B(W) = O(W)$, $Aut_{G\mathcal{D}}(Y) = O(Y)$. Во всех случаях группа $Aut(V)$ плотна в полугруппе $End(V)$, причем $End(V)$ как полугруппа порождена группой $Aut(V)$ и произвольным элементом P таким, что $\dim Ker P = 1$, $\dim Ind P = 1$. В частности, любое неприводимое представление ρ группы $Aut(V)$ имеет не более двух непрерывных продолжений до проективного представления $End(V)$, эти два продолжения различаются по тому равно или не равно $\rho(P)$ нулю.

Известно, что теории представлений групп $SO(2n+1, \mathbb{C})$ и $O(2n+1, \mathbb{C}) = SO(2n+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{Z}_2$ по существу совпадают. Между теорией представлений группы $SO(2n, \mathbb{C})$ и $O(2n, \mathbb{C}) \neq SO(2n, \mathbb{C}) \times \mathbb{Z}_2$ есть небольшая разница. Нам хотелось бы иметь категорию $\mathcal{D}$ такую, что $Aut_{\mathcal{D}}(V) = SO(V)$

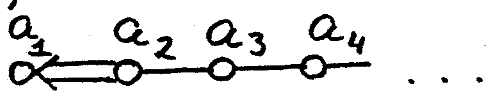
Прежде всего, заметим, что если Y - четномерное пространство, снабженное симметрической билинейной формой, то грассманиан $Gr(Y)$ максимальных изотропных подпространств в Y состоит из двух компонент связности. Два элемента $H_1, H_2 \in Gr(Y)$ лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда коразмерность $H_1 \cap H_2$ в H_1 и H_2 четна. Объектом категории $\mathcal{D}$ мы назовем объект V категории $G\mathcal{D}$, в котором дополнительно фиксирована одна из двух компонент связности грассманиана

$Gr(V)$, мы обозначим ее через $Gr_+(V)$. Далее в множестве $Mor_{GD}(V,W)$ мы тоже должны выделить одну из двух компонент связности. Итак, пусть $V, W \in Ob(\mathcal{D})$, $V_+ \in Gr_+(V)$, $W_+ \in Gr_+(W)$. Пусть $W_- \in Gr(W)$ трансверсально W_+ (это не значит, что $W_- \notin Gr_+(W)$). Пусть $P \in Mor_{GD}(V,W)$. Тогда $P \in Mor_{\mathcal{D}}(V,W)$ если размерность пересечения $P \cap (V_+ \oplus W_-)$ четна. Не совсем очевидно, что произведение морфизмов есть морфизм. У нас, однако, есть обходной путь для доказательства этого утверждения. А именно, рассмотрим спинорное представление $G\mathcal{D}$. Элемент $P \in Mor_{GD}(V,W)$ содержится в $Mor_{\mathcal{D}}(V,W)$ тогда и только тогда, когда ядро оператора $Spin(P)$ является четной функцией по ξ, η. Теперь утверждение становится очевидным.

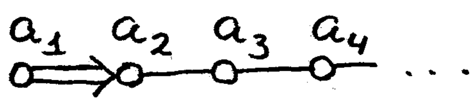
<u>Теорема 17.2.</u> а) Голоморфные представления категорий B, C, $\mathcal{D}$ вполне приводимы.

б) Неприводимые голоморфные проективне представления категорий (T, τ) нумеруются диаграммами вида

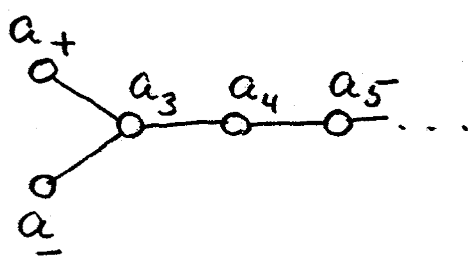
B:



C:



$\mathcal{D}$:



где a_j – неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от 0. Рассмотрим, например, случай C (случаи

B и D аналогичны). Пусть a_α - самая правая ненулевая отметка. Если $n < \alpha - 1$, то ограничение представления (T, τ) на группу $Sp(2n, \mathbb{C})$ является нульмерным. Если же $n \geqslant \alpha - 1$ то ограничение (T, τ) на $Sp(2n, \mathbb{C})$ есть неприводимое представление $Sp(2n, \mathbb{C})$ с числовыми отметками $a_1, \dots, a_n$ на диаграмме Дынкина типа C_n. Если $n = \alpha - 1$, то ограничение нашего представления на полугруппу $End_C(\mathbb{C}^{2n})$ является нулевым на $\gamma_n = End_C(\mathbb{C}^{2n}) \setminus Aut_C(\mathbb{C}^{2n})$. Если $n > \alpha - 1$, то ограничение отлично от 0 на γ_n. ■

Замечание. Пусть $P \in Mor(V, W)$. Тогда $\tau(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $rk\, P < \alpha - 1$.

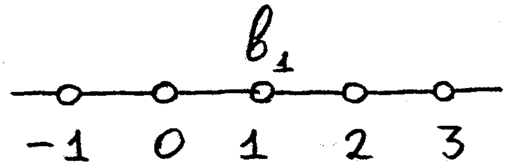
I7.3. Категории $A(\lambda)$. Не ясно, представляют ли вводимые ниже категории $A(\lambda)$ самостоятельный интерес. Они, однако, существенно используются при доказательстве теоремы I7.I. Мы хотим ввести категории, близкие к GA такие, что группа $Aut(V)$ плотна в полугруппе $End(V)$.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ - последовательность нулей и единиц. Объекты категории $A(\lambda)$ - те же, что и у категории GA. Множество $Mor(V, W)$ состоит из $null$ и всех линейных отношений $V \rightrightarrows W$ размерности $n + c_m - c_n$, где $m = \dim W, n = \dim V, c_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$. Правила умножения - те же, что и в GA.

Теорема I7.3. Пусть среди чисел λ_j бесконечно много нулей и бесконечно много единиц.

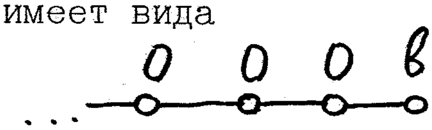
а) Голоморфные представления категории $A(\lambda)$ вполне приводимы.

б) Голоморфные неприводимые представления категории $A(\lambda)$ нумеруются диаграммами вида

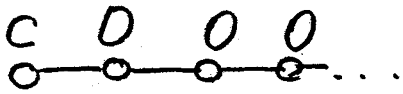


(17.3)

где место b_1 фиксировано. Отметка b_2 ставится слева от b_1, если $\lambda_2 = 0$ и справа, если $\lambda_2 = 1$. Далее, если $\lambda_3 = 0$, то отметка b_3 ставится слева от отрезка, содержащего b_1, b_2. Если же $\lambda_3 = 1$, то b_3 ставится справа и т.д. Все b_j – неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Чтобы получить ограничение нашего представления на группу $A_n = SL(n+1, \mathbb{C})$, нужно "вырезать" из диаграммы (19.1) кусок, содержащий отметки $b_1, \dots, b_n$. Если "отрезанный" слева кусок не имеет вида

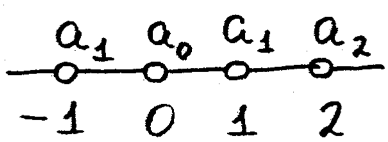


или, если "отрезанный" справа кусок не имеет вида

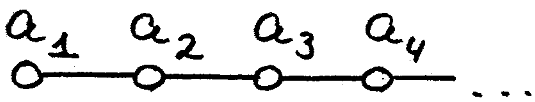


то ограничение нашего представления на $SL(n+1, \mathbb{C})$ нульмерно. В остальных случаях нужно рассмотреть "вырезанный" кусок длины . Полученный набор числовых отметок и является искомым. ■

Замечание. В дальнейшем мы будем использовать другую нумерацию числовых отметок на диаграммах типа $A(\lambda)$. А именно, вместо диаграммы (17.3) мы будем рассматривать диаграмму



17.4. Замечания. Замечание I. Для полного мыслимого списка бесконечных диаграмм Дынкина нам не хватает лишь диаграмм вида



Такими диаграммами нумеруются представления категории линейных пространств и линейных операторов. Кажется, в явном виде такая классификационная теорема не формулировалась. Считать ее неизвестной, однако, также было бы опасным, потому что она легко вытекает из двойственности Шура-Вейля.

Замечание 2. По-видимому, должна существовать категория, связанная с серией групп E_n ($E_3 = A_2 \oplus A_1$, $E_4 = A_4$, $E_5 = \mathcal{D}_5$, E_6, E_7, E_8). Правда, эта категория представляла бы действительный интерес, если бы она не кончалась на E_8 .

Замечание 3. Любое неприводимое представление категорий B , C , $\mathcal{D}$, $A(\lambda)$ является тензорным произведением голоморфного и антиголоморфного представления.

§18. Конструкции представлений.

Эти конструкции похожи на конструкции представлений классических групп ([1]). Сначала мы строим фундаментальные представления $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$, т.е. представления категории $\mathcal{K}$ у которых ровно одна числовая отметка (а именно отметка a_α , где $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, +, -$) равна 1 , а остальные равны нулю. (Категория GA имеет лишь одно фундаментальное представление). Далее, как обычно, любое неприводимое представление содержится в тензорном произведении фундаментальных представлений.

В этом параграфе все представления категорий B , C , $\mathcal{D}$, $A(\lambda)$ будут построены. Когда мы будем говорить, что "мы построили представление с данными числовыми отметками", это следует понимать как то, что ограничение представления на группы A_n, B_n, C_n, $\mathcal{D}_n$ устроено так, как описано в теоремах 17.1-17.3. О единственности таких представлений мы пока (до §19) ничего не знаем.

18.1. Спинорные представления. Спинорному представлению категории $G\mathcal{D}$ посвящена глава II. Подкатегория $\mathcal{D}$ категории $G\mathcal{D}$ действует операторами Березина, ядро которых является четной функцией по ξ, $\bar{\eta}$. Такие операторы переводят четные по η функции в четные, а нечетные в нечетные. Таким образом, спинорное представление при ограничении на категорию $\mathcal{D}$ разлагается в сумму двух представлений. Ограничения этих представлений на группу $SO(2n, \mathbb{C})$ является полуспинорными представлениями группы $SO(2n, \mathbb{C})$ (т.к. ограничение спинорного представления $O(2n, \mathbb{C})$ на $SO(2n, \mathbb{C})$ есть сумма двух полуспинорных (см. [22])), полуспинорные представления неприводимы, а поэтому неприводимы и построенные представления категории $\mathcal{D}$.

Итак, спинорное представление категории $G\mathcal{D}$ при ограничении на $\mathcal{D}$ дает сумму $P_{\mathcal{D}}^{+} \oplus P_{\mathcal{D}}^{-}$.

Ограничивая представления $P_{\mathcal{D}}^{\pm}$ на B мы получаем представление P_B^1 (опять-таки, ограничения P_B^1 на группы $SO(2n+1, \mathbb{C})$ неприводимы, а поэтому неприводимо и P_B^1).

18.2. Фундаментальное представление категории GA. Это представление нам уже встречалось в §10, там оно называлось спинорным представлением. Изложенная в §10 конструкция довольно сложна, но эта сложность связана с тем, что в §10 мы рассматриваем бесконечномерные объекты категории $\overline{GA}$. В случае GA все намного проще, и мы изложим конструкцию P_{GA} на другом языке.

Пространством фундаментального представления $P_{GA}(V)$, где $V\in Ob(GA)$, является внешняя алгебра $\Lambda(V)$ (эта внешняя алгебра есть ни что иное как фермионное пространство Фока $\Lambda(V)$). Пусть $P: V\rightrightarrows W$ - линейное отношение. Тогда по P оче очевидным образом строится линейный оператор $P': \mathcal{D}(P)\to W/\mathrm{Ind}\,P$ (после факторизации W по $\mathrm{Ind}\,P$ подпространство P становится графиком частично опе ределенного линейного отображения. Далее ограничиваем это линейное отображение на область определения P). Оператор $\pi_{GA}(P)$ мы определим как произведение трех операторов $\pi_{GA}(P)=HQR$ где

1. $R:\Lambda(V)\to\Lambda(\mathcal{D}(P))$ - оператор внутреннего умножения на $f_1\wedge\ldots\wedge f_l$, где $f_1,\ldots,f_l$ - базис в пространстве линейных функционалов на V, аннулирующих $\mathcal{D}(P)$.
2. $Q:\Lambda(\mathcal{D}(P))\to\Lambda(W/\mathrm{Ind}\,P)$ - естественное функториальное отображение внешних алгебр, связанное с оператором $P':\mathcal{D}(P)\to W/\mathrm{Ind}\,P$.
3. $H:\Lambda(W/\mathrm{Ind}\,P)\to\Lambda(W)$ - оператор внешнего умножения на $e_1\wedge\ldots\wedge e_k$, где $e_1,\ldots,e_k$ - базис в $\mathrm{Ind}\,P$.

<u>Лемма I8.I</u>. Построенный набор операторов задает представление категории GA.

<u>Доказательство</u>. Для нас самый короткий путь - показать, что наша конструкция совпадает с конструкцией п.I0.2. Пусть $V\in Ob(GA)$. Снабдим его структурой объекта категории $\overline{GA}$, положив $V=V\oplus 0$, обозначим через $\sigma(P)$ оператор, получающийся из морфизма P конструкцией п.I0.2. Нам нужно проверить, что $\sigma(P)=\lambda\pi_{GA}(P)$, где $\lambda\in\mathbb{C}\setminus 0$. Разложим P в произведение $P=AP'C$, где $C\in Mor(V,\mathcal{D}(P))$

$A \in Mor\,(W/\mathrm{Ind}\,P, W)$, причем C - график тождественного вложения $\mathcal{D}(P)$ в V, а A - график проекции $W \to W/\mathrm{Ind}\,P$. Таким образом, наше утверждение сводится к проверке очевидных равенств $\sigma(C)=\mu\pi_{GA}(C)$, $\sigma(P')=\nu\pi_{GA}(P')$, $\sigma(A)=\varkappa\pi_{GA}(A)$, где $\mu,\nu,\varkappa \in \mathbb{C}\setminus 0$

<u>18.3. Фундаментальные представления категории</u> B. Представления $P^{\pm}_{\mathcal{D}}$ и P^{1}_{B} мы уже построили в п.18.1. Все остальные фундаментальные представления для категорий B, C, $\mathcal{D}$ строятся единообразно.

Начнем с категории B. Эта категория, по построению, вложена в категорию GA. Пусть Q - ограничение представления P_{GA} на категорию B. Мы утверждаем, что Q разлагается в прямую сумму счетного числа приедставлений (T_j, τ_j): $Q=\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} T_j$, где $T_j(\mathbb{C}^{2n+1}) = \Lambda^{n+1-j}(\mathbb{C}^{2n+1})$ (так как все $(2n+1)$-мерные объекты категории B изоморфны, мы можем обозначать их через $\mathbb{C}^{2n+1}$). В самом деле, пусть $S \in Mor_B(\mathbb{C}^{2n+1}, \mathbb{C}^{2n+1})\setminus null$. Тогда $\dim S = m+n+1$, поэтому

$$\tau_j\left(\Lambda^{n+1-j}(\mathbb{C}^{2n+1})\right) \subset \Lambda^{m+1-j}(\mathbb{C}^{2m+1})$$

что и следовало проверить.

Ограничения представления T_j на группы $SO(2n+1,\mathbb{C})$ неприводимы, поэтому T_j неприводимы.

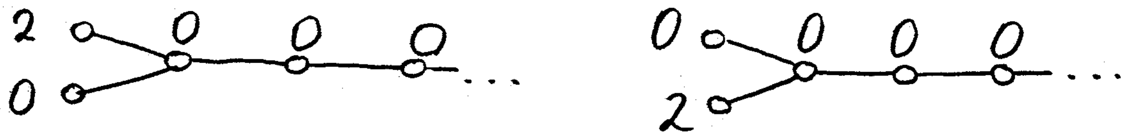
Искомые представления P^{α}_{B} - это ни что иное как представления $T_{\alpha+1}$ $(\alpha>1)$

<u>Замечание</u>. Представление T_0 имеет числовые отметки

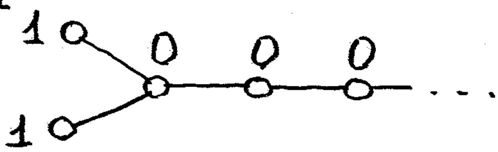
$(2,0,0,\dots)$, а $T_{-j} \simeq T_{j-1}$.

18.4. Фундаментальные представления категории $\mathcal{D}$. Ограничивая представление P_{GA} на категорию $\mathcal{D}$ мы снова получаем прямую сумму представлений $\bigoplus\limits_{j=-\infty}^{\infty} T_j$, где $T_j(\mathbb{C}^{2n}) = \Lambda^{n-j}(\mathbb{C}^{2n})$. Все эти представления, кроме T_0 неприводимы, $P^{\alpha}_{\mathcal{D}} = T_{\alpha-1}$ $(\alpha = 3, 4, \dots)$.

Замечание. Представление T_0 - это сумма представлений с числовыми отметками



Представление T_1 имеет числовые отметки



а $T_{-j} \simeq T_j$

18.5. Фундаментальные представления категории C . Снова возьмем представление P_{GA} и ограничим его на C . Полученное ограничение снова распадается в прямую сумму представлений T_j , где $T_j(\mathbb{C}^{2n}) = \Lambda^{n-j}(\mathbb{C}^{2n})$. Все эти представления, однако, являются приводимыми. Без ограничения общности мы можем считать, что кососимметрическая форма в $\mathbb{C}^{2n}$ устроена следующим образом: $\{e_{2j-1}, e_{2j}\} = 1$, а остальные базисные векторы кософртогональны. Теперь рассмотрим для каждого j оператор $A_n : T_j(\mathbb{C}^{2n}) \to T_{j+2}(\mathbb{C}^{2n})$ такой, что

$$A_n \omega = (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots)\omega$$

Лемма 18.2. Набор операторов A_n задает сплетающее преобразование T_j в T_{j+2} .

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{Mor}(\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^{2m})$. Тогда S представим в виде $S = PQR$, где $R \in Sp(2n, \mathbb{C})$, $P \in Sp(2m, \mathbb{C})$, а $Q \subset \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2m}$ имеет базис

$$(e_1, e_1'),\ (e_2, e_2'), \ldots, (e_{2l}, e_{2l}'),$$

$$(e_{2l+1}, 0), \ldots (e_{2n-1}, 0),\ (0, e_{2l+2}'), \ldots (0, e_{2m}')$$

где e_k, e_k' – канонические базисы в $\mathbb{C}^{2n}$, $\mathbb{C}^{2m}$. Так как $\tilde{\tau}_j(R)$ коммутирует с A_n, а $\tilde{\tau}_j(P)$ коммутирует с A_m, нам достаточно проверить, что

$$A_m \tilde{\tau}_j(Q) = \tilde{\tau}_j(Q) A_n \qquad (18.1)$$

Воспользуемся формализмом пространства Фока

$$A_k f(\xi) = (\xi_1 \xi_2 + \xi_3 \xi_4 + \ldots) f(\xi)$$

$$\tilde{\tau}_j(Q) f(\xi) = \xi_{2l+2} \ldots \xi_{2m} \frac{\partial}{\partial \xi_{2l+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi_{2n-1}} f(\xi)$$

Но $\tilde{\tau}_j(Q)(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \ldots) = 0$ и теперь равенство (I8.I) очевидно. $\boxtimes$

Пусть $\alpha \geqslant 1$. Рассмотрим сплетающее преобразование A : $T_{\alpha-2} \to T_\alpha$. Пусть $\mathrm{Im}\, A$ – образ этого преобразования. Тогда $P_C^{\alpha+1} = T_\alpha / \mathrm{Im}\, A$ (ограничения $T_\alpha / \mathrm{Im}\, A$ на группы $Sp(2n, \mathbb{C})$ – это фундаментальные представления групп $Sp(2n, \mathbb{C})$ (см. [1]).

<u>I8.6. Фундаментальные представления категорий</u> $A(\lambda)$. Это самый простой случай из всех рассматриваемых. Ограничим представление P_{GA} на $A(\lambda)$. Тогда оно распадется в прямую сумму $\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} T_j$, где $T_j(\mathbb{C}^n) = \Lambda^{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) + j}(\mathbb{C}^n)$. Представления

T_j — это в точности все фундаментальные представления категории $A(\lambda)$.

18.7. Конструкции всех неприводимых представлений категорий B, C, $\mathcal{D}$, $A(\lambda)$.

Лемма 18.3. Пусть $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$ — одно из фундаментальных представлений категории $\mathcal{K} = B, C, \mathcal{D}, A(\lambda)$. Пусть $V \in Ob(\mathcal{K})$ и пусть $\mathcal{O}(V)$ — орбита вектора старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V)$ относительно группы $Aut(V)$. Если $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V) \neq 0$, $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(W) \neq 0$, то множество всех векторов $\pi^{\alpha}_{\mathcal{K}}(S)h$, где $S \in Mor(V, W)$, а $h \in \mathbb{C} \cdot \mathcal{O}(V)$ в точности совпадает с множеством $\mathbb{C} \cdot \mathcal{O}(W)$.

Доказательство: перебор.

а) В спинорном представлении орбита старшего вектора состоит в точности из простых спиноров (см. п.8.8). Отсюда сразу вытекает утверждение для $P^{\pm}_{\mathcal{D}}$ и P^{1}_{B}.

б) $A(\lambda)$. Здесь орбита старшего веса состоит из поливекторов, разложимых в произведение векторов. Ясно, что внутреннее умножение, замена переменных и внешнее умножение переводят разложимые поливекторы в разложимые.

в) Представления $P^{\alpha}_{B} (\alpha > 1)$, $P^{\alpha}_{\mathcal{D}} (\alpha \neq \pm)$, P^{α}_{C}. Пусть V_ℓ — объект размерности ℓ одной из этих категорий.

Выберем в V базис e_i так, что $\{e_{2i-1}, e_{2i}\} = 1$, остальные пары векторов ортогональны. Векторы старшего веса имеют вид $e_1 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_{2s-1}$. Пусть W — объект той же категории размерности $\ell + 2k$ с аналогичным базисом e_i. Пусть $Q \subset V \oplus W$ подпространство с базисом

(e_i, e_i), $i \leq 2s$, $(0, e_{2s+2\beta-1})$, $\beta \leq k$, (e_j, e_j), $j \geq 2(s+\beta)$

Тогда $Q \in Mor_{\mathcal{K}}(V, W)$, а оператор

$$\pi^{\alpha}_{\mathcal{K}}(Q)f = (e_{2s+1} \wedge \ldots \wedge e_{2s+2\beta-1})f$$

переводит вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V)$ в вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(W)$. Но то же самое подпространство Q является и элементом $Mor_{\mathcal{K}}(W, V)$. Соответствующий оператор представления - оператор внутреннего умножения-переводит вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(W)$ в вектор старшего веса в $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}(V)$.

Остается применить два соображения. Первое: орбита элемента Q под действием группы $Aut(V) \times Aut(W)$ плотна в $Mor_{\mathcal{K}}(V, W)$. Второе: множества $\mathcal{O}(V)$ и $\mathcal{O}(W)$ замкнуты (они состоят из поливекторов, разложимых в произведение попарно ортогональных векторов). Лемма доказана. $\boxtimes$

Пусть теперь мы хотим построить представление категории $\mathcal{K} = B, C, \mathcal{D}, A(\lambda)$ с числовыми отметками a_{α} . Для каждого α рассмотрим a_{α}-ую симметрическую степень $S^{a_{\alpha}} P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$ фундаментального представления $P^{\alpha}_{\mathcal{K}}$. Далее перемножим эти тензорные степени, и в полученном представлении R в каждом пространстве $R(V)$, где $V \in Ob(\mathcal{K})$ мы возьмем вектор старшего веса v_V . Далее, возьмем в каждом пространстве $R(V)$ циклическую оболочку $T(V)$ вектора v_V .

<u>Лемма I8.4</u>. $T(V)$ - неприводимое представление категории $\mathcal{K}$.

<u>Доказательство.</u> Представление группы $Aut(V)$ в $T(V)$ неприводимо и имеет числовые отметки a_{α} (просто потому, что наша конструкция представления $Aut(V)$ в $T(V)$ совпадает с классической конструкцией представлений с отметками a_{α}). Возьмем какой-нибудь вектор старшего веса и возьмем его циклическую

оболочку. В силу леммы I8.3 эта циклическая оболочка совпадает с $S(V)$. Неприводимость $S(V)$ опять следует из леммы I7.2.

§I9. Доказательства классификационных теорем.

Мы начнем со случая C (п. I9.I – I9.2). Случаи B и $\mathcal{D}$ аналогичны (см. п.I9.3 – I9.4), случай $A(\lambda)$ чуть-чуть сложней (п.I9.5). Потом (п.I9.6) мы доказываем вполне приводимость для случаев $\mathcal{K} = A(\lambda), B, C, \mathcal{D}$. Наконец, знание классификационной теоремы для $A(\lambda)$ позволит нам разобрать случай GA.

I9.I. Морфизмы μ_j, ν_j. Рассмотрим случай категории C. Через V_n мы обозначим n-мерный объект C. Фиксируем вложение $\tau_n : V_n \to V_{n+1}$. Тогда пространство V_{n+1} можно представить в виде прямой суммы $V_{n+1} = V_n \oplus V$, где V – двумерное комплексное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной формой. Важно заметить, что фиксировав вложение τ, мы фиксируем действие группы $C_n = Sp(2n, \mathbb{C})$ в V_{n+1} (Иначе говоря, мы фиксируем вложение $\varkappa : Sp(2n, \mathbb{C}) \to Sp(2n+2, \mathbb{C})$, а также вложение полугруппы $End(V_n)$ в полугруппу $End(V_{n+1})$).

Определим линейное отношение $\mu_n : V_n \rightrightarrows V_{n+1}$, это подпространство в $V_n \oplus V_{n+1} = V_n \oplus V_n \oplus V$ натянуто на график отображения τ и произвольную изотропную прямую ℓ в V.

Далее, определим линейное отношение $\nu_n : V_{n+1} \rightrightarrows V_n$. Это подпространство в $V_{n+1} \oplus V_n = (V_n \oplus V) \oplus V_n$ натянуто на график τ и произвольную изотропную прямую ℓ', отличную от ℓ, в V.

Эти линейные отношения обладают следующими свойствами:

I. μ_n и ν_n коммутируют с действием группы $Sp(2n, \mathbb{C})$, т.е. для любого $g \in Sp(2n, \mathbb{C})$ выполнено

$$\mu_n g = \varkappa(g)\mu_n \ ; \quad g\nu_n = \nu_n \varkappa(g)$$

2. $\nu_n \mu_n$ - единица группы $\mathrm{Aut}\, V_n = Sp(2n, \mathbb{C})$

3. $(\mu_n \nu_n)^2 = \mu_n \nu_n$, при этом полугруппа $\mathrm{End}\, V_{n+1}$ порождена группой $Sp(2n, \mathbb{C})$ и $\mu_n \nu_n$.

Путсь теперь $T = (T, \tau)$ - неприводимое представление категории C. Тогда операторы $\tau(\mu_n) : T(V_n) \to T(V_{n+1})$ и $\tau(\nu_n) : T(V_{n+1}) \to T(V_n)$ являются $Sp(2n, \mathbb{C})$ - сплетающими, и, более того, $\mathrm{End}(V_n)$ - сплетающими. Далее оп оператор $\tau(\mu_n \nu_n)$ является (с точностью до умножения на константу) проектором в $T(V_{n+1})$. Таким образом, сплетающие операторы

$$\tau(\mu_n) : T(V_n) \to \mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n)$$

$$\tau(\nu_n) : \mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n) \to T(V_n)$$

являются взаимно обратными. Итак, доказана

Лемма I9.I. Пусть T - неприводимое представления категории C. Тогда представления полугруппы $\mathrm{End}(V_n)$ в $T(V_n)$ и в $\mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n)$ эквивалентны.

Следствие I. Следующие утверждения эквивалентны

а) $T(V_n) = 0$

б) $\tau(\mu_n \nu_n) = 0$

в) Представление τ тождественно равно 0 на $\mathrm{End}(V_{n+1}) \setminus \mathrm{Aut}(V_{n+1})$

Следствие 2. Пусть T - неприводимое представление категории C. Тогда представление $Sp(2n, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathrm{Im}\, \tau(\mu_n \nu_n)$ неприводимо.

Доказательство. В самом деле, оно эквивалентно неприводимому представлению $Sp(2n, \mathbb{C})$ в $T(V_n)$

Следствие 3. Пусть $T=(T,\tau)$ и $T'=(T',\tau')$ – неприводимые представления категории C, и пусть ограничения T и T' на $End(V_{n+1})$ эквивалентны. Тогда ограничения T и T' на $End(V_n)$ эквивалентны.

Доказательство. В самом деле, оба этих ограничения эквивалентны представлению $End(V_n)$ в $Im\,\tau(\mu_n\nu_n)$.

19.2. Доказательство классификационной теоремы в случае категории C. Пусть T – неприводимое представление категории C. Нам нужно доказать, что T эквивалентно одному из представлений, построенных в §18.

Лемма 19.2. Пусть ρ – неприводимое проективное представление полугруппы $End(V_n)$. Тогда существует неприводимое представление S категории C из числа построенных в п.18.7 такое, что ограничение S на $End(V_n)$ совпадает с ρ.

Доказательство. Мы видели (п.17.2), что существует не более двух продолжений неприводимого представления группы $Sp(2n,\mathbb{C})$ на полугруппу $End(V_n)$, одно равно тождественно 0 на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, другое нет.

Пусть числовые отметки ограничения представления ρ на группу $Aut(V_n)=Sp(2n,\mathbb{C})$ равны $a_1,\dots,a_n$. Рассмотрим два случая. Если ρ равно 0 на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, то в качестве S можно выбрать представление с числовыми отметками $a_1,a_2,\dots,a_n,b,0,0,\dots$, причем $b\neq 0$. Если же ρ не равно 0 на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, то искомое представление S единственно и имеет числовые отметки $a_1,\dots,a_n,0,0,\dots$. Лемма доказана. $\boxtimes$

Итак, пусть $T=(T,\tau)$ – неприводимое представление категории C. Пусть $T(V_{n-1})\neq 0$. Тогда представление $End(V_n)$ в $T(V_n)$ в силу леммы I9.I не является тождественным нулем на $End(V_n)$. Пусть S' представление, из числа построенных в п.I8.7 такое, что ограничения S и T на $End(V_n)$ эквивалентны. Тогда для любого $m<n$ ограничения S и T на $End(V_n)$ эквивалентны. Пусть $k>n$ и допустим, что ограничение θ_k представления T на $End(V_k)$ отлично от ограничения S на $End(V_k)$. Заметим, что θ_k не является тождественным нулем на $End(V_k)\setminus Aut(V_k)$. Пусть тогда S' - представление категории C из числа построенных в п.I8.7 такое, что ограничение S' на $End(V_k)$ совпадает с θ_k. Но ограничения S и S' на $End(V_n)$ совпалают и являются ненулевыми на $End(V_n)\setminus Aut(V_n)$, что может быть лишь в случае $S=S'$.

Итак, ограничения S и T на всевозможные полугруппы $End(V_n)$ совпадают. Теперь заметим, что группоид морфизмов категории C порждён группами $Sp(2n,\mathbb{C})$ и морфизмами μ_n и ν_n. Если нам известны ограничения представления T на все группы $Sp(2n,\mathbb{C})$, то операторы $\tau(\mu_n)$ и $\tau(\nu_n)$ однозначно определены просто как $Sp(2n,\mathbb{C})$ - сплетающие операторы $S(V_n)\to S(V_{n+1})$. (Здесь опять-таки нужно посмотреть на явный вид S. В $S(V_{n+1})$ есть ровно одно неприводимое представление $Sp(2n,\mathbb{C})$, эквивалентное $S(V_n)$). Остается рассмотреть логическую возможность $\tau(\mu_n)=0$ или $\tau(\nu_n)=0$. Но это мгновенно влечет $\tau(\varkappa)=0$ для всех $\varkappa\in End(V_{n-1})$, и, тем самым приводит к противоречию. Итак, теорема полностью доказана.

<u>I9.3. Случай категории B</u>. Обозначим через V_n объект категории B размерности $2n+1$. Фиксируем разложение

V_{n+1} в ортогональную прямую сумму $V_{n+1} = V_n \oplus V$, где V - двумерное пространство, снабженное невырожденной симметричной формой. Пусть τ - тождественное вложение V_n в $V_{n+1} = V_n \oplus V$. Пусть ℓ_1, ℓ_2 - изотропные прямые в V (их всего две), $\ell_1 \neq \ell_2$. Пусть $\mu_n : V_n \rightrightarrows V_{n+1}$ - линейное отношение, порожденное графиком отображения τ и прямой ℓ_1 , а $\nu_n : V_{n+1} \rightrightarrows V_n$ - линейное отношение, порожденное графиком отображения τ и прямой ℓ_2 . Дальнейшие рассуждения буквально повторяют рассуждения п.п. 19.1 - 19.2, нужно лишь группу $Sp(2n, \mathbb{C})$ заменить на $O(2n+1, \mathbb{C})$.

<u>19.4. Случай категории</u> $\mathcal{D}$. Обозначим через V_n объект категории $\mathcal{D}$ размерности $2n$, и, как раньше, фиксируем разложение $V_{n+1} = V_n \oplus V$ и вложение $\tau : V_n \rightarrow V_{n+1}$. Рассмотрим два подпространства P_1, P_2 в $V_n \oplus V_{n+1}$, каждое из них натянуто на график τ и изотропную прямую в V (таких прямых две и подпространства тоже два). Множества

$$Mor(V_n, V_{n+1}) \setminus null \quad \text{и} \quad Mor(V_{n+1}, V_n) \setminus null$$

являются компонентами грассманиана максимальных изотропных подпространств в $V_n \oplus V_{n+1}$, причем (и это важно), разными компонентами. Подпространства P_1 и P_2 тоже лежат в разных компонентах этого грассманиана. Без ограничения общности можно считать, что $P_1 \in Mor(V_n, V_{n+1}), P_2 \in Mor(V_{n+1}, V_n)$. Теперь полагаем $\mu_n = P_1$, $\nu_n = P_2$. Дальнейшее очевидно.

<u>19.5. Случай категории</u> $A(\lambda)$. Пусть V_n - объект категорий $A(\lambda)$ размерности $n+1$ $(Aut(V_n) \simeq A_n)$. Разложим V_{n+1} в прямую сумму $V_{n+1} = V_n \oplus V$, где $\dim V = 1$. Пусть P - график тождественного вложения V_n в V_{n+1} , а Q

натянуто на P и V. Если $\lambda_n = 0$, положим $\mu_n = P$, $\nu_n = Q$, если же $\lambda_n = 1$, положим $\mu_n = Q$, $\nu_n = P$.

При попытке дословно повторить рассуждения п. 19.1 - 19.2 ровно в одном месте возникает затруднение. Дело в том, что в рассуждениях п. 19.2 мы говорим о представлениях полугруппы $End(V)$, ненулевых на $End(V) \setminus Aut(V)$. В случае категорий B, C, $\mathcal{D}$ такие представления однозначно определяются представлением группы $Aut(V)$. В случае же $A(\lambda)$ это не так. Пусть $P_n, Q_n \in Aut(V)$ таковы, что $Ker\, P_n$ и $Ind\, Q_n$ одномерны, $Ind\, P = 0$, $Ker\, Q = 0$.

Лемма 19.3. Пусть среди чисел λ_j число нулей и единиц бесконечно. Пусть $T = (T, \tau)$ - неприводимое представление $A(\lambda)$. Тогда существует n такое, что $\tau(P_n) \neq 0$, $\tau(Q_n) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $T(V_K) \neq 0$. Пусть, для определенности, $\lambda_K = 0$. Пусть $\lambda_K = \lambda_{K+1} = \ldots = \lambda_{S-1} = 0$, $\lambda_S = 1$. Рассмотрим линейное отношение $\theta_S = \mu_S \ldots \mu_K \nu_K \ldots \nu_S \in End\, V_{S+1}$. Тогда $\nu_K \nu_{K+1} \ldots \nu_S \theta_S \mu_S \ldots \mu_K$ - единица полугруппы $End(V_K)$, а поэтому $\tau(\theta_S) \neq 0$. Но $\dim Ker\, \theta_S = S - K + 1 > 0$, $\dim Ind\, \theta_S = 1 > 0$. Если бы хотя бы одно из равенств $\tau(P_{S+1}) = 0$ или $\tau(Q_{S+1}) = 0$ было бы выполнено; это сразу бы повлекло $\tau(\theta_S) = 0$, так как θ_S представимо в виде $\theta_S = P_{S+1} A$ и $\theta_S = B Q_{S+1}$ для некоторых $A, B \in End(V_{S+1})$. Случай $\lambda = 1$ разбирается также. $\boxtimes$

Теперь мы можем повторить доказательство из п. 19.2, только вместо слов "представление R является тождественным нулем на $End(V_n) \setminus Aut(V_n)$" нужно говорить "$\rho(P_n) \neq 0$, $\rho(Q_n) \neq 0$" (или, в терминологии п. 19.6, "ρ - максимальное представление $End(V_n)$).

Замечание. Условие бесконечности числа нулей и единиц в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ было существенно использовано в доказательстве леммы 19.3. Классификационная теорема для представлений категорий $A(\lambda)$ может быть получена и в случае, когда число нулей и единиц конечно, в этом случае каждой диаграмме Дынкина будет отвечать два представления категории $A(\lambda)$. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

19.6 Вполне приводимость в случае $\mathcal{K} = \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, A(\lambda)$. Итак, пусть V_n - объекты перечисленных категорий, занумерованные так же, как в пп. 19.1 - 19.4.

Лемма 19.4. Любое представление $T=(T, \tau)$ категории $\mathcal{K} = A(\lambda), \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ содержит неприводимое подпредставление.

Доказательство. Это, конечно, очевидно, но не настолько, как кажется на первый взгляд. Выберем наименьшее n, такое, что $T(V_n) \neq 0$. Возьмем в пространстве $T(V_n)$ некоторое неприводимое подпредставление M полугруппы $End(V_n)$ и возьмем его циклическую оболочку $S=(S, \sigma)$ под действием категории $\mathcal{K}$. Покажем, что S неприводимо. Выберем в $S(V_m)$, где $m>n$, множество L_m всех векторов ℓ, удовлетворяющих условию: $\tau(R)\ell = 0$ для всех $R \in Mor(V_m, V_n)$. Предположим, что $L_m = S(V_m)$. Но любой элемент $X \in End(V_n)$ представим в виде $X = YZU$, где $U \in Mor(V_n, V_m), Z \in End(V_m), Y \in Mor(V_m, V_n)$. В силу предположения $\sigma(Y) = 0$, а значит и $\sigma(X) = 0$ для всех $X \in End(V_n)$. Противоречие.

Итак, $L_m \neq S(V_m)$. Выберем какое-нибудь $End(V_m)$ - инвариантное дополнение N к L_m в $S(V_m)$ и возьмем его циклическую оболочку N относительно $\mathcal{K}$. Ясно, что эта циклическая оболочка содержит $M = S(V_n)$, и, тем самым, должна совпадать с S. Итак, $S(V_m) = N$, а значит $L_m = 0$ для всех m. Лемма доказана. $\boxtimes$

Пусть теперь T – представление $\mathcal{K}$. Выберем наименьшее n такое, что $T(V_n) \neq 0$. Пусть S – неприводимое подпредставление в T, причем нам удобно считать, что $S(V_n) \neq 0$ (существование таких подпредставлений вытекает из доказательства леммы). Выберем в $T(V_n)$ инвариантное относительно $End(V_n)$ подпространство $R(V_n)$, дополнительное к $S(V_n)$. Пусть R – циклическая оболочка $R(V_n)$. Ясно, что для любого V_m выполнено $R(V_m) \cap S(V_m) = 0$ (обратное противоречило неприводимости S). Может, однако, оказаться, что $R(V_m) \oplus S(V_m) \neq T(V_m)$. Выберем минимальное K, для которого $R(V_K) \oplus S(V_K) \neq T(V_K)$. Выберем в $T(V_K)$ подпространство $R'(V_K)$, инвариантное относительно $End(V_K)$ и содержащее $R(V_K)$. Возьмем циклическую оболочку R' подпространства $R(V_K)$. Покажем, что для любого α выполнено $R'(V_\alpha) \supset R(V_\alpha)$. Это очевидно для всех $\alpha > k$, так как любой элемент $X \in Mor(V_n, V_\alpha)$ представим в виде $X = YZ$, где $Z \in Mor(V_n, V_K)$, $Y \in Mor(V_K, V_\alpha)$. С другой стороны, рассмотрим факторпредставление $(R + R')/R'$. По построению, $[(R + R')/R'](V_K) = 0$, а значит, $[(R + R')/R'](V_\alpha) = 0$ для всех $\alpha < K$, то есть $R(V_\alpha) = R'(V_\alpha)$ при всех $\alpha < K$.

Теперь мы применим к R' ту же процедуру, что и к R и получим представление R'' и т.д. В итоге мы получим возрастающую цепочку подпраедставлений $R, R', R'', \ldots$. Тогда их объединение T', по построению и даст представление дополнительное к S.

Далее применим к T' ту же процедуру, что и к T и т.д. В итоге мы разложим T в прямую сумму неприводимых представлений.

I9.7 Классификационная теорема для категории GA.

Сначала введем дополнительную терминологию. Пусть ρ – неприводимое представление полугруппы $End^*(V_n)$, $V_n \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, пусть P_n, Q_n те же, что в п.I9.5. Мы назовем представление ρ

а) максимальным, если $\rho(P_n) \neq 0$, $\rho(Q_n) \neq 0$

б) операторным, если $\rho(P_n) \neq 0$, $\rho(Q_n) = 0$

в) кооператорным, если $\rho(P_n) = 0$, $\rho(Q_n) \neq 0$

г) минимальным, если $\rho(P_n) \neq 0$, $\rho(Q_n) \neq 0$

Под категориями $A(\lambda)$ в этом и следующем пункте мы будем понимать лишь те категории, для которых число нулей и единиц в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ бесконечно.

Перейдем к доказательству. Мы уже знаем классификационные теоремы для $A(\lambda)$, а группоид морфизмов категории GA порожден группоидами морфизмов всевозможных категорий $A(\lambda)$.

Лемма I9.5. Пусть ограничение неприводимого представления $T = (T, \tau)$ категории GA на полугруппу $End^*(V_n)$ содержит максимальное представление S полугруппы $End^*(V_n)$ с числовыми отметками

$$(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_s, 0, \ldots, 0) \qquad (19.1)$$

$b_1 \neq 0$, $b_s \neq 0$ (число нулей слева и справа здесь и дальше может быть нулевым). Тогда спектр ограничения GA на всевозможные полугруппы $End^*(V_p)$ содержит в точности следующие представления.

а) Максимальные представления с числовыми отметками вида $(0,\dots,0,b_1,\dots,b_s,0,\dots,0)$; $(b_1,\dots,b_s,0,\dots,0)$; $(0,\dots,0,b_1,\dots,b_s)$

б) Операторные представления с числовыми отметками вида $(0,\dots,0,b_1,\dots,b_{s-1})$, $(b_1,\dots,b_{s-1})$

в) Кооператорные представления с числовыми отметками вида $(b_2,\dots,b_s,0,\dots,0)$; $(b_2,\dots,b_s)$

г) Минимальное представление с отметками $(b_2,\dots,b_{s-1})$ ■

<u>Доказательство</u>. Запишем набор (I9.I) в виде $(a_1,\dots,a_n)$, и посмотрим, куда могут перевести S операторы из $\mathrm{Mor}_{A(\mu)}(V_n,V_{n+1})$. Так как классификационная теорема для $A(\mu)$ уже доказана, ответы на подобные вопросы не представляют трудности. Если $\mu_n=0$, то все векторы вида $\tau(P)s$, где $P\in \mathrm{Mor}_{A(\mu)}(V_n, V_{n+1})$, а $s\in S$, содержатся в максимальном представлении полугруппы $\mathrm{End}^*(V_{n+1})$ с числовыми отметками $(0,a_1,\dots,a_n)$, если же $\mu_n=1$ - то в максимальном представлении с числовыми отметками $(a_1,\dots,a_n,0)$.

Посмотрим далее, куда могут перевести S операторы из $\mathrm{Mor}_{A(\mu)}(V_n,V_{n-1})$. Множество всех векторов вида $\tau(P)s$, где $P\in \mathrm{Mor}_{A(\mu)}(V_n,V_{n-1})$, $s\in S$ содержится в неприводимом представлении $\mathrm{End}^*(V)$ с числовыми отметками $(a_2,\dots,a_n)$ если $\mu_{n-1}=1$ и $(a_1,\dots,a_{n-1})$, если $\mu_{n-1}=0$. Если "срезанная" числовая отметка (a_1 или a_n)равна 0, то это неприводимое представление максимально. Если $\mu_{n-1}=1$, $a_1\neq 0$, то мы получаем кооператорное представление. Если же $\mu_{n-1}=0$, $a_n\neq 0$ - то операторное.

Теперь повторим эту процедуру с одним из четырех полученных представлений и т.д. Таким образом, все представления поименованные выше в пп. а), б), в), г) действительно содержатся в спектре.

Осталось проверить, что спектр не содержит ничего больше. Но прямая сумма всех представлений, полученных многократным повторением изложенной процедуры, по построению, инвариантна относительно всех категорий $A(\lambda)$, что завершает доказательство. $\boxtimes$

Далее нам нужно проверить, что ограничение $T=(T,\tau)$ на $SL(n+1,\mathbb{C})$ является однократной суммой представлений с отметками $a_\mu, a_{\mu+1},\dots,a_\nu$ (см. формулировку теоремы). Фиксируем одно неприводимое подпредставление S группы $SL(n+1,\mathbb{C})$ такого вида. Рассмотрим линейную оболочку R множества всех векторов вида $\tau(P)\,s$ таких, что $s\in S$, $P\in End_{GA}(V_n)$, причем $\dim P=n$.

Проверим, что эта линейная оболочка неприводима. Фиксируем λ и ψ так, что $\lambda_n=0$, $\psi_n=1$. Любой морфизм P указанного вида представим в виде произведения $P=RQ$, где $Q\in Mor_{A(\lambda)}(V_n,V_{n+1})$, $P\in Mor_{A(\psi)}(V_{n+1},V_n)$. Множество всех векторов вида $\tau(Q)\,s$, где $Q\in Mor_{A(\lambda)}(V_n, V_{n+1})$, $s\in S$ порождает неприводимое подпредставление $GL(n+2,\mathbb{C})$ в $T(V_{n+1})$, что, в свою очередь, влечет неприводимость R. Остается провести аналогичную проверку для множества всех векторов вида $\tau(Q)\,s$, где $Q\in End_{GA}(V_n)$, $\dim Q=n+2$, $s\in S$.

Итак, мы выяснили, что спектр ограничения представления категории GA на полугруппы $End^*(V)$ может выглядеть лишь так, как указано в теореме I7.I.

Теперь, наконец, мы можем доказать существование всех представлений, описанных в теореме I7.I. Для этого достаточно рассмотреть всевозможные тензорные степени фундаментального представления категории GA и их ограничения на все подгруппы

$\mathrm{End}^*(V)$. Среди этих ограничений содержатся все максимальные представления полугрупп $\mathrm{End}^*(V)$. Но это возможно лишь в том случае, когда все допустимые спектры действительно реализуются.

Остается проверить единственность представления с фиксированным спектром. Рассмотрим все представления (T, τ) с отметками $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_s, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим в $V_q \oplus V_{q+1}$ два подпространства P и Q (обозначения из п.19.5). Пусть $\mu_q : V_q \to V_{q+1}, \varphi_q : V_{q+1} \to V_q$ -морфизмы GA с графиком P, а $\nu_q : V_{q+1} \to V_q, \psi_q : V_q \to V_{q+1}$ - морфизмы GA с графиком P. Все эти четыре морфизма коммутируют с действием $SL(q+1, \mathbb{C})$, а значит, $M_q = \tau(\mu_q), N_q = \tau(\nu_q), \Psi_q = \tau(\psi_q), \Phi_q = \tau(\varphi_q)$ являются $SL(q+1, \mathbb{C})$ - сплетающими операторами. Разложим $T(V_j)$ в прямую сумму неприводимых представлений $SL(j+1, \mathbb{C}) : T(V_j) = \bigoplus_{i=0}^{j-s} T^i(V_j)$, где $T^i(V_j)$ имеет отметки

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ раз}}, b_1, \dots, b_s)$$

Запишем все операторы M_q, N_q, Φ_q, Ψ_q как блочные матрицы. В каждой из этих блочных матриц все ненулевые элементы стоят на одной из диагоналей, а каждый блок $(M_q)_{ij}, (N_q)_{ij}, (\Phi_q)_{ij}, (\Psi_q)_{ij}$ (будучи $SL(n+1, \mathbb{C})$ -сплетающим оператором) определен однозначно с точностью до умножения на константу. Пусть $M'_q, N'_q, \dots$ - другой допустимый набор операторов, пусть

$$(M'_q)_{ii} = m_i^q (M_q)_{ii} \qquad (N'_q)_{ii} = n_i^q (N_q)_{ii}$$

$$(\Phi'_q)_{i,i+1} = f_i^q (\Phi_q)_{i,i+1} \qquad (\Psi'_q)_{i+1,i} = p_i^q (N_q)_{i+1,i}$$

В силу равенств

$$\mu_q \nu_q = 1 \qquad \psi_q \varphi_q = 1$$

$$\mu_{q+1} \varphi_q = \varphi_{q+1} \mu_q \qquad \psi_{q-1} \nu_q = \nu_{q-1} \psi_q$$

числа $m_i^q, n_i^q, f_i^q, p_i^q \in \mathbb{C}^*$ не произвольны. Легко видеть, что они должны иметь вид

$$m_i^q = a_q \alpha_{q+1,i}/\alpha_{q,i} \qquad m_i^q = b_q \alpha_{q,i}/\alpha_{q+1,i}$$

$$f_i^q = c_q \alpha_{q+1,i+1}/\alpha_{q,i} \qquad p_i^q = d_q \alpha_{q,i}/\alpha_{q+1,i+1}$$

для некоторых наборов чисел $\alpha_{q,i}, a_q, b_q, c_q, d_q$. Но это означает, что два представления GA, определяемые набором операторов $M_n, \ldots$ и набором операторов $M_n', \ldots$ эквивалентны: они сплетаются оператором, равным скаляру $\alpha_{q,i}$ в каждом пространстве $T^i(V_q)$. Единственность доказана.

<u>I9.8. Вполне приводимость в случае</u> GA. Пусть $T = (T, \tau)$ - представление GA.

Разложим сначала T в сумму изотипических компонент. Для этого возьмем неприводимое представление T_α категории GA, разложим каждое $T(V)$ в сумму неприводимых $End^*(V_n)$ - представлений, обозначим через $T_\alpha^0(V_n)$ сумму всех тех максимальных неприводимых $End^*(V_n)$ - подпредставлений в $T(V_n)$, которые входят в $T_\alpha(V_n)$. Обозначим через $\mathcal{D}_\alpha$ циклическую оболочку всех пространств $T_\alpha^0(V_n)$.

Лемма I9.6. $T = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{D}_\alpha$

Доказательство. Если бы $\mathcal{D}_\alpha \cap \left(\bigoplus_{\alpha'\neq\alpha} \mathcal{D}_{\alpha'}\right)$ было бы ненулевым, то это пересечение было бы подпредставление в $\mathcal{D}_\alpha$ имеющим недопустимый при ограничении на группы спектр. Противоречие. Лемма доказана. $\boxtimes$

Рассмотрим теперь изотипическую компоненту $\mathcal{D}_\alpha$. Выберем минимальное n такое, что $\mathcal{D}_\alpha(V_n) \neq 0$. Тогда $\mathcal{D}_\alpha(V_n)$ разлагается в прямую сумму $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ одинаковых минимальных представлений полугруппы $\mathrm{End}^*(V)$. Пусть S_1 – циклическая GA - оболочка A_1, а $\tilde{S}$ - циклическая GA - оболочка $A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots$. Тогда $\mathcal{D}_\alpha = S_1 \oplus \tilde{S}$. В самом деле, если пересечение $S_1 \cap \tilde{S}$ - ненулевое, то это пересечение будет подпредставлением в S_1, причем $(S_1 \cap \tilde{S})(V_n) = 0$, а поэтому $S_1 \cap \tilde{S}$ будет иметь недопустимый спектр при ограничении на группы $SL(p+1, \mathbb{C})$. Точно также представление $\mathcal{D}_\alpha / (S_1 + \tilde{S})$ должно быть нулевым (а иначе оно имеет недопустимый спектр). Итак, $\mathcal{D}_\alpha = S_1 \oplus \tilde{S}$. Вполне приводимость доказана.

Глава У. Представления категорий U, Sp, SO^*.

После того, как в главе I было построено представление Вейля категории Sp, естественно задать вопрос о том, как устроены все представления этой категории. Существуют еще две категории - U и SO^*, родственные категории Sp. Естественно рассмотреть их вместе.

§20. Категории U, Sp, SO^* и двойственность Хау.

20.I. Категория U. Категория Sp была определена выше (см. §2). Объект категории U - конечномерное комплексное пространство V, снабженное невырожденной эрмитовой формой Θ_V с индексами инерции p_V, q_V.

Морфизмом $V \to W$ называется линейное отношение $P: V \rightrightarrows W$, удовлетворяющее условиям

а) P "сжимает" форму Θ, т.е. если $(v, w) \in P$, то $\Theta_V(v,v) \geqslant \Theta_W(w,w)$

б) P имеет максимальную возможную размерность, т.е. $\dim P = p_V + q_W$

в) Если $(0, w) \in P$, то $\Theta_W(w,w) < 0$, если $(v, 0) \in P$, то $\Theta_V(v,v) > 0$.

Произведение морфизмов категории U действительно является морфизмом, см. [55]

Группой автоморфизмов объекта V является, очевидно, группа $U(p_V, q_V)$. Фиксируем в каждом объекте V разложение $V = V_+ \oplus V_-$, такое, что эрмитова форма Θ_V положительно определена на V_+ и отрицательно определена на V_-, причем V_+ и V_- ортогональны. Легко видеть, что любой $P \in Mor(V,W)$ является графиком оператора $V_- \oplus W_+ \to V_+ \oplus W_-$, матрицу $S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ этого оператора (преобразование Потапова-Гинзбурга) удовлетворяет условиям

1. $\|S\| \leqslant 1$
2. $\|K\| < 1$, $\|N\| < 1$.

Так же, как в §3 можно построить функтор из категории в категорию матричных шаров и обобщенно дробно-линейных отображений. Используя этот функтор, можно построить все голоморфные представления категории U . Мы, однако, пойдем другим путем.

20.2. Категория SO^* . Объект этой категории - кватернионное пространство V ,снабженное невырожденной антиэрмитовой формой Q_V :

$$Q_V(v_1, v_2) = -\overline{Q(v_2, v_1)}$$

Пусть $V^{\mathbb{C}}$ - пространство V , рассматриваемое как комплексное. Определим в $V^{\mathbb{C}}$ две комплекснозначные формы - эрмитову форму Θ и симметричную форму M - из равенства

$$Q_V(v_1, v_2) = i\,\Theta_V(v_1, v_2) + j\,M(v_1, v_2)$$

Теперь $V^{\mathbb{C}}$ одновременно снабжено структурой объекта категории U и объекта категории GD одновременно. Морфизмом $V \to W$ мы назовем подпространство в $V^{\mathbb{C}} \oplus W^{\mathbb{C}}$, являющееся морфизмом категорий U и GD одновременно.

Группой автоморфизмов n -мерного объекта категории SO^* является классическая простая вещественная группа $SO^*(2n)$

Далее, фиксируем для любого $V \in Ob(SO^*)$ разложение в ортогональную сумму $V^{\mathbb{C}} = V_+^{\mathbb{C}} \oplus V_-^{\mathbb{C}}$, так, что $V_\pm^{\mathbb{C}}$ изотропны относительно формы M, а форма Θ положительно определена на $V_+^{\mathbb{C}}$ и отрицательно определена на $V_-^{\mathbb{C}}$. Теперь мы можем определить преобразование Потапова-Гинзбурга $S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ морфизма $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$, его матрица удовлетворяет условиям:

1. $\|S\| \leqslant 1$
2. $\|K\| < 1, \|N\| < 1$
3. $K = -K^t$, $N = -N^t$, $M = L^t$.

Опять-таки, мы можем определить функтор из категории в категорию матричных шаров и дробно-линейных отображений (мы его не будем использовать).

Замечание. Может показаться, что в выборе наших трех категорий $\mathcal{U}$, Sp, SO^* есть какой-то произвол. На самом деле это не так. В каком-то смысле $\mathcal{U}$, Sp, SO^* единственные в своем роде образования – это категории морфизмов классических комплексных областей (см. также п.22.I – 22.2).

20.3. Унитарные представления. Пусть $P: V \to W$ – морфизм одной из наших категорий. Пусть P^* – ортогональное дополнение к P в $V \oplus W$ относительно эрмитовой формы

$$\Theta_{V \oplus W}((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \Theta_V(v_1, v_2) - \Theta_W(w_1, w_2)$$

Легко видеть, что во всех случаях P^* есть морфизм из W в V. Отметим также, что $(PQ)^* = Q^* P^*$.

Представление $T = (T, \tau)$ категории $\mathcal{K} = \mathcal{U}$, Sp, SO^* мы назовем унитарным, если пространства $T(V)$ гильбертовы, все операторы $\tau(P)$ ограничены и для любого морфизма P выполнено условие $\tau(P^*) = \tau(P^*)$. Если $P \in \mathrm{Aut}(V)$, то это условие влечет унитарность оператора $\tau(P)$.

Заметим, что во всех трех случаях множество $\mathrm{Mor}(V,W)$ является областью с непустой внутренностью в некотором комплексном грассманиане. Унитарное представление $T=(T,\tau)$ мы назовем голоморфным, если функция $\tau(P)$ голоморфна внутри $\mathrm{Mor}(V,W)$ и слабо непрерывна вплоть до границы.

В каждой из полугрупп $\mathrm{End}_{\mathcal{K}}(V)$ мы выделим множество $\mathrm{End}^{0}_{\mathcal{K}}(V)$ морфизмов, являющихся графиками операторов, Полугруппы $\mathrm{End}^{0}_{\mathcal{K}}(V)$ изучались в [44], там было доказано, что ограничение любого неприводимого представления полугруппы $\mathrm{End}^{0}_{\mathcal{K}}(V)$ сжимающими операторами на $\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(V)$ является представлением со старшим весом, обратно любое представление группы $\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(V)$ со старшим весом однозначно продолжается по голоморфности на $\mathrm{End}^{0}_{\mathcal{K}}(V)$. Нас теорема Ольшанского([44]) чуть-чуть не устраивает: для нас неприятны слова "сжимающими" операторами

<u>Лемма I9.I</u>. Ограничение любого неприводимого голоморфного унитарного проективного представления полугруппы $\mathrm{End}^{0}_{\mathcal{K}}(V)$ на группу $\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(V)$ является неприводимым представлением $\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(V)$ со старшим весом. ■

Доказательство мы отложим до п.20.3.

С другой стороны, полугруппа $\mathrm{End}^{0}_{\mathcal{K}}(V)$ плотна в $\mathrm{End}_{\mathcal{K}}(V)$, поэтому ограничение неприводимого представления $\mathrm{End}_{\mathcal{K}}(V)$ на $\mathrm{End}^{0}_{\mathcal{K}}(V)$ неприводимо.

<u>20.4. Минимальные представления категорий</u> U, Sp, SO^*.

Минимальное представление We_{Sp} категории Sp - представление Вейля, хорошо нам знакомое.

Опишем минимальное представление категории $\mathcal{U}$. Для этого мы построим функтор $i_{\mathcal{U}}$ из $\mathcal{U}$ в Sp. Объекту категории $\mathcal{U}$ с индексами инерции p q (все такие объекты изоморфны) мы поставим в соответствие $2(p+q)$-мерный объект категории Sp. Отображение морфизмов мы определим на уровне преобразований Потапова-Гинзбурга с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} K^t & K & L & M^t \\ \hline L^t & M & N & N^t \end{array}\right)$$

Минимальное мпредставление $We_{\mathcal{U}}$ категории $\mathcal{U}$ - это композиция функтора $i_{\mathcal{U}}$ и представления Вейля.

Далее определим функтор i_{SO^*} из SO^* в Sp. Если $V \in Ob(SO^*)$, то пространство $V^{\mathbb{C}}$, снабженное формой Θ_V - объект $\mathcal{U}$ и мы, таким образом, получаем функтор $j: SO^* \to \mathcal{U}$. Функтор i_{SO^*} - это композиция $i_{SO^*} \circ j$, а минимальное представление We_{SO^*} категории SO^* - это композиция функтора i_{SO^*} и представления Вейля.

Позже мы увидим, что все унитарные голоморфные представления категорий $\mathcal{U}$, Sp, SO^* реализуются в тензорах над минимальными представлениями. Пока же мы лишь заметим, что n-ная степень минимальных представлений могут быть описаны на другом языке. Для этого заметим, что если V объект категории $\mathcal{K} = \mathcal{U}$, Sp, SO^*, то n-кратная сумма $V \oplus \ldots \oplus V = V^{(n)}$ тоже естественным образои снабжена структурой объекта категории $\mathcal{K}$ и мы таким образом получаем естественный функтор $S_n: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Легко видеть, что

$$We_{\mathcal{K}}^{\otimes n} \simeq We_{\mathcal{K}} \circ S_n$$

Наше изучение тензорных степеней $We_{\mathcal{K}}^{\otimes n}$ будет основано на том, что в пространстве $We_{\mathcal{K}}^{\otimes n}$ действует большая категория: в обозначениях следующего пункта - это категории $Sp \times O(n)$, $U \times U(n)$, $SO^{\times} \times Sp(n)$.

20.4. Произведение группы и категории. Пусть $\mathcal{K}$ - категория, G - группа. Через $\mathcal{K} \times G$ мы обозначим категорию, объекты которой совпадают с объектами категории $\mathcal{K}$, а морфизмы $V \to W$ - это пары (P, g), где $P \in Mor(V,W)$, а $g \in G$. Произведение морфизмов определяется покомпонентно.

Если у нас есть (проективное) представление ρ группы G в пространстве R и представление $T = (T, \tau)$ категории $\mathcal{K}$, то определено (проективное) представление $T \otimes \rho$ категории $\mathcal{K} \times G$, а именно $(T \otimes \rho)(V) = T(V) \otimes R$, $(\tau \otimes \rho)(P, g) = \tau(P) \otimes \rho(G)$.

Если G - компактная группа, а H - не очень патологическая группа (например, группа типа I), то, как известно, (см. [15], 13.1.8) любое неприводимое унитарное представление группы $H \times G$ является тензорным произведением представления группы H и предствления группы G. Более того, любое представление T группы $H \times G$ представимо в виде

$$T \simeq \bigoplus_{R \in \widehat{G}} \left[\mathrm{Hom}_G(R, T) \otimes R \right] \qquad (20.1)$$

где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям группы G. (Если $A \in \mathrm{Hom}_G(R, T)$, $\tau \in R$, то вектору $A \otimes \tau$ из правой части соответствует вектор

$A\tau\in T$, это и задает изоморфизм (20.I)).

Мы имеем дело с проективными представлениями, поэтому при обобщении формулы (20.I) на категории $\mathcal{K} = U$, Sp , SO^* требует некоторой осторожности. Пусть $\mathcal{K}^\sim$ - какое-нибудь центральное расширение одной из перечисленных категорий. Пусть T - голоморфное линейное (не проективное) представление категории $\mathcal{K}^\sim\times G$, где G - компактная группа. Тогда

$$T=\bigoplus_{R\in\hat G}\left[\mathrm{Hom}_G(R,T)\otimes R\right] \qquad (20.2)$$

Переход от групп к категориям здесь происходит автоматически.

Замечание. Сформулируем аккуратно определение представления $\mathrm{Hom}_G(R,T)$, где $T=(T,\tau)$ - представление $\mathcal{K}\times G$. Пусть $V\in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$. Поставим ему в соответствие линейное пространство $\mathrm{Hom}_G(R,T(V))$. Если $P\in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(V,W)$, а $f\in \mathrm{Hom}_G(R,T)$, то $\tau(P)f\in \mathrm{Hom}_G(R,T(W))$. Искомый функтор построен.

20.5. Теорема двойственности для Sp . Рассмотрим построенный в п.20.3. функтор $S_n: Sp\to Sp$. На уровне преобразований Потапова-Гинзбурга он задается формулой

$$S:\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}K\otimes 1_n & L\otimes 1_n\\ L^t\otimes 1_n & M\otimes 1_n\end{pmatrix}$$

где 1_n- единичная матрица размера $n\times n$. Его можно продолжить до функтора $Sp\times O(n,\mathbb{R})\mapsto Sp$, положив

$$\tilde S:\left(\begin{pmatrix}K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}, g\right)\mapsto\begin{pmatrix}K\otimes 1_n & L\otimes g\\ L^t\otimes g^t & M\otimes 1_n\end{pmatrix}$$

Таким образом композиция $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ задает проективное представление категории $Sp \times O(n,\mathbb{R})$. Из явной формулы для коцикла (см. теорему I.I) вытекает, что

$$(We_{Sp} \circ \tilde{S}_n (P,1))(We_{Sp} \circ \tilde{S}_n(e_V, g)) =$$
$$= (We_{Sp} \circ \tilde{S}_n(e_W, g))(We_{Sp} \circ \tilde{S}_n(P,1))$$

где $P \in Mor_{Sp}(V,W)$, $g \in O(n,\mathbb{R})$, e_V, e_W – единицы полугрупп $End_{Sp}(V)$, $End_{Sp}(W)$. Это означает, что $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ – не просто проективное представление категории $Sp \times O(n,\mathbb{R})$, но линейное представление некоторой категории $Sp^{\sim} \times O(n,\mathbb{R})$, где $Sp^{\sim}$ – центральное расширение Sp.

Теорема 20.I. а) Разложение $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ в сумму неприводимых представлений имеет вид

$$\bigoplus_{\lambda \in \widehat{O(n,\mathbb{R})}} (T^n_\lambda \otimes R_\lambda)$$

где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям R_λ группы $O(n,\mathbb{R})$, а T^n_λ – неприводимые ненулевые представления Sp. Если $n \neq n'$ или $\lambda \neq \lambda'$, то T^n_λ и $T^{n'}_{\lambda'}$ – неэквивалентны.

б) Любое неприводимое голоморфное унитарное представление категории Sp имеет вид T^n_λ при некотором $n = 0,1,2,\ldots$ и при некотором $\lambda \in \widehat{O(n,\mathbb{R})}$. ∎

20.6. Теорема двойственности для $\mathcal{U}$. Рассмотрим функтор $i_{\mathcal{U}} \circ S_n : \mathcal{U} \to Sp$. На уровне преобразования

Потапова-Гинзбурга этот функтор задается формулой

$$\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} & K\otimes 1_n & L\otimes 1_n & \\ K^t\otimes 1_n & & & M^t\otimes 1_n \\ \hline L^t\otimes 1_n & & & N^t\otimes 1_n \\ & M\otimes 1_n & N\otimes 1_n & \end{array}\right)$$

Этот функтор продолжается до функтора $\tilde{S}_n : \mathcal{U}\times\mathcal{U}(n)$

а именно

$$\tilde{S}_n : \left(\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}, g\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} & K\otimes 1_n & L\otimes g & \\ K^t\otimes 1_n & & & M^t\otimes \bar{g} \\ \hline L^t\otimes \bar{g} & & & N^t\otimes 1_n \\ & M\otimes g & N\otimes 1_n & \end{array}\right)$$

где $g\in\mathcal{U}(n)$ - унитарная матрица.

Теорема 20.2. а) Разложение представления $We_{sp}\circ\tilde{S}_n$ категории $\mathcal{U}\times\mathcal{U}(n)$ в сумму неприводимых представлений имеет вид

$$\bigoplus_{\lambda\in\widehat{\mathcal{U}(n)}} \left(T^n_\lambda\otimes R_\lambda\right)$$

где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям R_λ группы $\mathcal{U}(n)$, а T^n_λ - ненулевые неприводимые представления категории $\mathcal{U}$. Если $n\neq n'$ или $\lambda\neq\lambda'$, то T^n_λ и $T^{n'}_{\lambda'}$ не эквивалентны.

б) Любое неприводимое голоморфное представление категории $\mathcal{U}$ имеет вид T^n_λ при некотором $n=0,1,2,\dots$, $\lambda\in\widehat{\mathcal{U}}(n)$. ■

<u>20.7. Террема двойственности для</u> SO^* . Сейчас мы покажем, что в пространстве представления $We^{\otimes n}_{SO^*}$ действует категория $SO^*\times Sp(n)$. Рассмотрим функтор

$$\widetilde{S}_n:\ SO^*\times Sp(n)\to Sp \quad .$$

Морфизмы категории SO^* он преобразует по формуле.

$$\begin{pmatrix} K & L\\ L^t & M\end{pmatrix}\mapsto\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} K_{K\cdots}\\ + \\ {-K}_{-K\cdots}\end{matrix} & \begin{matrix} L_{L\cdots}\\ + \\ L_{L\cdots}\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} L^t{}_{L^t\cdots}\\ + \\ L^t{}_{L^t\cdots}\end{matrix} & \begin{matrix} {-N}_{-N\cdots}\\ + \\ N_{N\cdots}\end{matrix}\end{array}\right)$$

где каждая из диагональных блочных матриц имеет размеры $n\times n$. Пусть g -унитарная матрица размера $2n\times 2n$, сохраняющая кососимметричную форму $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, множество всех таких матриц образует компактную классическую группу $Sp(n)\simeq U(n,\mathbb{H})$. Рассмотрим матрицу $g^{(K)}$ - это блочная матрица размера $2n\times 2n$ с блоками размера $K\times K$, причем ij -ый блок - это скалярная матрица $g_{ij}\cdot 1_K$. Пусть группа $Sp(n)$ действует в $\widetilde{S}_n(V)$, где V - K -мерный объект SO^* с помощью преобразований вида

$$g \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & g^{(k)} \\ \hline (g^{(k)})^t & 0 \end{array}\right), \quad g \in Sp(2n)$$

Функтор $\tilde{S}_n$ из категории $SO^* \times Sp(n)$ в категорию Sp определен.

Теорема 20.3. а) Представление $We_{Sp} \circ \tilde{S}_n$ категории $SO^* \times Sp(n)$ разлагается в прямую сумму вида

$$\bigoplus_{\lambda \in \widehat{Sp(n)}} \left(T^n_\lambda \otimes R_\lambda\right)$$

. где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям R_λ группы $Sp(n)$, T^n_λ - неприводимые ненулевые представления категории SO^* , причем, если $n \neq n'$ или $\lambda \neq \lambda'$, то .

б) Любое унитарное голоморфное представление категории SO^* имеет вид T^n_λ . ■

§21. Доказательство теорем двойственности.

Доказательства очень просты и основаны на трех типах аргументов:

1. Классическая двойственность Хау.

2. Рассужденя типа п.19.1–19.2

3. Классификация представлений со старшим весом ([65]).

21.1. Двойственность Хау. Рассмотрим канонические вложения $SU(p,q) \to Sp(2(p+q), \mathbb{R})$ (группа $SU(p,q)$

сохраняет эрмитову форму, а значит и ее мнимую часть - симплектическую форму) и $SO^*(2\ell)\to U(\ell,\ell)\to Sp(4\ell,\mathbb{R})$ (группа $SO^*(2\ell)$ сохраняет две формы, из них одна эрмитова). Представлением Вейля We_H групп $SU(p,q)$ и $SO^*(2\ell)$ мы назовем ограничение представления Вейля группы $Sp(2(p+q))$ (или соответственно $Sp(4\ell)$) на $SU(p,q)$ или $SO^*(2\ell)$. Все эти представления, по построению, проективны. Все они, однако, линеаризуются на двулистной накрывающей $\widetilde{H}$ группы $H=$ $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SU(p,q)$, $SO^*(2\ell)$. Теорема двойственности Хау (идея принадлежит Хау [75], в окончательном виде она содержится в объединении статей [75], [81], [78], [65]) состоит в следующем:

Пусть H и $G(n)$ - одна из следующих пар групп

$$H=Sp(2k,\mathbb{R}) \qquad G(n)=O(n,\mathbb{R})$$
$$H=SU(p,q) \qquad G(n)=U(n)$$
$$H=SO^*(2k) \qquad G(n)=Sp(n)$$

Тогда

а) Рассмотрим n-ную тензорную степень представления We_H. Это представление канонически продолжается до представления группы $H\times G(n)$ (эти продолжения нами построены в §20), полученное представление $H\times G(n)$ разлагается в сумму вида

$$\bigoplus_{\lambda\in A(n,H)\subset\widehat{G(n)}} \left(T^n_\lambda\otimes R_\lambda\right)$$

где суммирование ведется по некоторому подмножеству в множестве всех неприводимых представлений $G(n)$, а T^n_λ - неприводимые представления H со старшим весом. Если $n \neq n'$, или $\lambda \neq \lambda'$, то представления T_λ^n и $T_{\lambda'}^{n'}$ различны.

б) Любое неприводимое линейное (!) представление группы $\tilde{H}$ со старшим весом имеет вид T_λ^n.

в) Известен явный вид соответствия $(n,\lambda) \leftrightarrow T_\lambda^n$ (в случае $H = Sp(2k,\mathbb{R})$, $U(p,q)$, см. [81], в случае $SO^*(2k)$ он, кажется, нигде явно не написан).

21.2. Доказательство теорем 20.1 а) – 20.3 а). Эти утверждения почти мгновенно следуют из теоремы двойственности Хау. Нужно использовать лишь два дополнительных соображения.

а) Если ограничение представления T_λ^n на все группы $\tilde{H}$ (H пробегает серии $Sp(2k,\mathbb{R})$, или $U(p,q)$ или $SO^*(2k)$) неприводимо, то H неприводимо (см. п.17.0).

б) Нужно, все-таки, проверить, что суммирование ведется по всем $\lambda \in \widehat{G(n)}$, а не по подмножеству в $\widehat{G(n)}$, как в теореме Хау.

Для этого посмотрим, как группа $G(n)$ действует в пространстве представления $We_H^{\otimes n}$. Это представление равно

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k\Big(\bigoplus_{j=1}^{m} \rho_0\Big)$$

где ρ_0 – тождественное представление в случае $G(n) = O(n,\mathbb{R})$, в случае $U(n)$ представление $\rho_0 = \varkappa_0 \oplus \overline{\varkappa}_0$, где $\varkappa_0$ – тождественное представление $U(n)$, наконец, в случае $Sp(n)$ представление ρ_l – это $2n$-мерное представление $Sp(2n)$.

Число m равно l в случае $Sp(2l,\mathbb{R})$, $p+q$ в случае $SU(p+q)$, $2l$ в случае $SO^*(2l)$. Через S^k, как обычно обозначены симметрические степени. Но $\rho_0^{\otimes m}$ входит в качестве подпредставления в $S^m\Big(\bigoplus_{j=1}^{m} \rho_0\Big)$, а любое представление $G(n)$ содержится в тензорных степенях $\rho_0^{\otimes m}$, см. [22] .17.2.

21.3. Представления со старшим весом. Пусть ρ - унитарное представление простой линейной группы Ли G, пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли группы G. Представление ρ называется представлением со старшим весом, если существует вектор v в пространстве представления и борелевская подалгебра $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ такие, что вектор v является собственным относительно подалгебры $\mathfrak{b}$.

Как показал Хариш-Чандра, группа G имеет бесконечномерные представления со старшим весом в том и только том случае, когда максимальная компактная подгруппа $K \subset G$ имеет одномерный центр. Это выполнено в случае, когда $G = SU(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$, $SO(n,2)$, $E\,\mathrm{III}$, $E\,\mathrm{IV}$. Нас интересуют представления со старшим весом универсальных накрывающих групп $SU(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$. Такие представления со с старшим весом определяются доминантным весом универсальной накрывающей группы K (подробности см., например, [81], [65]).

Доказательство леммы 20.I. Мы разберем случай $\mathcal{K} = Sp$, два других случая разбираются точно также. Пусть V_n - объект Sp размерности $2n$ и пусть $\Gamma_n = \mathrm{End}^0_{Sp}(V_n)$. Полугруппа Γ_n реализуется как полугруппа блочных комплексных матриц размера $(n+n)\times(n+n)$, сохраняющих симплектическую форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и "сжимающих" эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Компактная подгруппа $K \subset Sp(2n,\mathbb{R})$ изоморфна $U(n)$ и состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} g & \\ & \bar{g} \end{pmatrix}$, где $g \in U(n)$.

Ее центр состоит из матриц вида

$$a_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1_n & \\ & \lambda^{-1} \cdot 1_n \end{pmatrix} \qquad (21.1)$$

где $|\lambda| = 1$. Рассмотрим также полугруппу $A_{\mathbb{C}} \subset \Gamma$, состоящую из всех матриц вида (2I.I) с λ, удовлетворяющими условию $0 < |\lambda| \leq 1$.

Итак, пусть ρ - неприводимое унитарное голоморфное проективное представление Γ_n. Ограничим его на $Sp(2n,\mathbb{R})$. Из соображений голоморфности ограничение неприводимо. Известно, что все проективные представления полупростой группы линеаризуются на ее универсальной накрывающей (см. [59]). Мы обозначим эту накрывающую через $\widetilde{G}_n$. Прообраз $\widetilde{A}$ группы A в $\widetilde{G}_n$ изоморфен аддитивной группе $\mathbb{R}$ (см. [81]), в частности $\widetilde{A}$ - по-прежнему абелева группа, и ограничение ρ на $\widetilde{A}$ разлагается в прямую сумму одномерных представлений вида

$$Q_s : \lambda \mapsto e^{-s \ln \lambda}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Полезно иметь в виду, что функция $\ln \lambda$ однозначна на $\widetilde{A}$. Но отсюда следует, что ограничение ρ на $A_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму одномерных представлений вида

$$Q_s : \lambda \mapsto e^{-s \ln \lambda}$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя матрица оператора $\rho(a_\lambda)$ имеет спектр $e^{s_j \ln \lambda}$, где s_j - набор вещественных чисел. Нам нужно, чтобы матрица $\rho(a_\lambda)$ была ограниченной, т.е. нужно, чтобы числа s_j были ограничены сверху. Но все разности $s_\alpha - s_j$ должны быть целыми (в силу неприводимости ρ, элементы центра $Sp(2n,\mathbb{R})$ действуют скалярными операторами, а этот скаляр равен $e^{2\pi i s_j}$). Поэтому существует наибольшее возможное s. В соответствующем собственном пространстве T_s действует группа $SU(n)$ (так как A - центр в T_s $U(n)$). Пусть v - какой-нибудь старший вектор. Он старший, поэтому он аннулируется всеми повышающими операторами, соответствующими компактным положительным корням алгебры $sp(2n,\mathbb{R})$. Но s - максимально, а поэтому v аннулируется и всеми операторами, соответствующими некомпактным положительным корням. Итак, v - старший вектор, что и требовалось доказать. $\boxtimes$

<u>21.4. Классификация представлений со старшим веосм.</u> Эта классификация потребовала усилий не одного десятка математиков. Последние пробелы были заделаны в работе [65] (В содержательном отношении основные шаги - это двойственность Хау и формула Янцена для определителей, обббщающая формулу Шаповалова на случай модулей, индуцированных с параболических подгрупп. Существует также альтернативный подход, основанный на базисах Гельфанда-Цетлина, но он был аккуратно реализован лишь для $SU(p,q)$ см.[42])

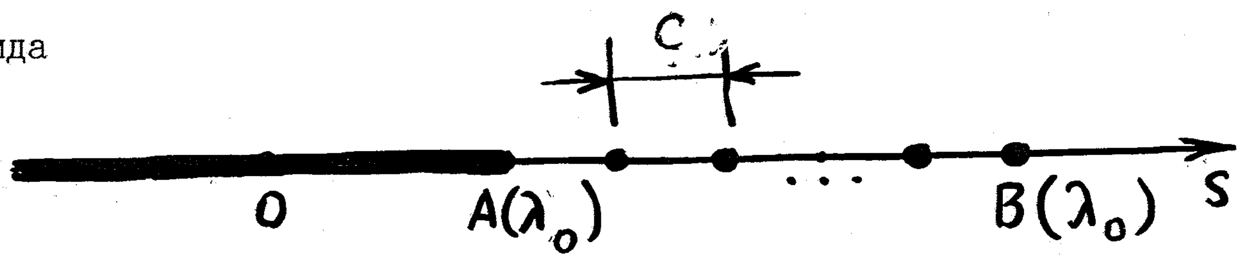
Все, не обязательно унитаризуемые, неприводимые представления со старшим весом нумеруются доминантными весами λ универсальной накрывающей группы K. Переберем отдельно интересующие нас случаи.

а) Случай $Sp(2n,\mathbb{R})$, $K=U(n)$, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_j-\lambda_i$ при $j>i$ - неотрицательные целые числа. Обозначим через ζ сигнатуру $(1,1,\dots,1)$.

б) Случай $SU(p,q)$, $K=S(U(p)\times U(q))$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p,\lambda_{p+1},\dots,\lambda_q)$, где $\lambda_j-\lambda_i$ при $j>i$ – неотрицательные целые числа, в случае, если одновременно $i,j\le p$ или одновременно $i,j>p$. (Прибавление одинаковых констант сразу ко всем λ_j, по определению, не меняет сигнатуру). Обозначим через ζ сигнатуру ($q/n,\dots,q/n,-p/n,\dots,-p/n$) с p экземплярами q/n и с q экземплярами $-p/n$ $(n=p+q)$.

в) Случай $SO^*(2n)$, $K=U(n)$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, где $\lambda_j-\lambda_i$ при $j>i$ – неотрицательные целые числа. Пусть $\zeta=\frac{1}{2}(1,1,\dots,1)$.

Во всех случаях нас интересуют лишь вещественные сигнатуры (потому что лишь они могут отвечать унитарным представлениям). Мы видим, что множество всех возможных вещественных сигнатур распадается на прямые вида $\lambda_0+s\zeta$, $s\in\mathbb{R}$. Унитаризуемые представления на каждой такой прямой образуют множество вида



т.е. замкнутую полупрямую от $-\infty$ до $A(\lambda_0)$ ("непрерывная серия") и конечный дискретный набор точек, идущих через равные промежутки c от $A(\lambda_0)$ до $B(\lambda_0)$ ("особые представления")

Замечание. Следуя традиции (см. [65]) мы нормируем λ_0 так чтобы 0 был предельной точкой дискретной серии. При всех $s<A(\lambda_0)$ представления невырожденны, т.е. совпадают с обобщенными модулями Верма, индуцированными с конечномерного представления параболической подалгебры. ●

Итак, для каждой серии мы должны указать нормировку λ_0, точки $A(\lambda_0)$, $B(\lambda_0)$ и шаг c.

а) $Sp(2n, \mathbb{R})$

Нормировка: $\lambda_1 = -n$. Шаг: $c = 1/2$. Пусть $\lambda = (a, \ldots, a, b, \ldots, b, d, \ldots)$, где $a \neq b \neq d$, причем a встречается $q+1$ раз, а b встречается $r-q+1$ раз. Тогда $A(\lambda_0) = \frac{1}{2}(r+1)$; $B(\lambda_0) = \frac{1}{2}(q+r)$

б) $SU(p, q)$

Нормировка: $\lambda_1 - \lambda_{p+q} + p + q - 1 = 0$. Шаг $c = 1$. Пусть a - число тех λ_i $(i \leq p)$, которые равны λ_1. Пусть b - число тех λ_j $(j > p)$, которые равны λ_{p+q}. Тогда $A(\lambda_0) = \max(a, b)$, а $B(\lambda_0) = a + b - 1$.

в) $SO^*(2n)$

Нормировка: $\lambda_1 + \lambda_2 = -2n + 3$. Шаг $c = 2$. Далее различаются два случая : 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть q - число λ_j, равных λ_2. Тогда $A(\lambda_0) = B(\lambda_0) = q$. 2) $\lambda_1 = \lambda_2$. Пусть p - число λ_j, равных λ_1. Тогда $A(\lambda_0) = p - 1$, если p четно, и $A(\lambda_0) = p$, если p - нечетно. Наконец, $B(\lambda_0) = 2p - 3$.

Важно заметить, что представление с сигнатурой λ линеаризуется на двулистной накрывающей группы $G = Sp(2n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$, $SO^*(2n)$ лишь в том случае, когда $\lambda = \lambda_0 + cn\zeta$, где $n \in \mathbb{Z}$.

<u>21.5. Отсев лишних представлений.</u>

<u>Лемма 21.1.</u> Пусть ρ - проективное унитарное представление группы $G = Sp(2n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$, $SO^*(2n)$ со старшим весом, которое не линеаризуется на двулистной накрывающей группы G. Тогда существуют числа $N > n$ (в случае

$G=Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$) или числа $P>p$, $Q>q$ (в случае $SU(p,q)$) такие, что ρ не может входить в ограничение проективного унитарного представления со старшим весом группы G, равной соответственно $Sp(2N,\mathbb{R})$, $SO^*(2N)$, $SU(P,Q)$.)

Доказательство. Начнем со случая $Sp(2n,\mathbb{R})$. Пусть $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ - старший вес некоторого унитарного представления. Все остальные веса ρ получаются из λ последовательными прибавлениями сигнатур вида $(\ldots,0,1,-1,0,\ldots)$ и $(\ldots,0,-1,-1,0,\ldots)$ (так как ρ, как $sp(2n,\mathbb{R})$-модуль является фактормодулем Верма). Рассмотрим ограничение нашего представления на подгруппу A_p всех матриц вида

$$q_\mu=\begin{pmatrix} e^{i\mu}\cdot 1_p & & & \\ & 1_{n-p} & & \\ & & e^{-i\mu}\cdot 1_p & \\ & & & 1_{n-p}\end{pmatrix}$$

где $\mu\in\mathbb{R}$. Это ограничение является прямой суммой одномерных представлений вида $\sigma_t: q_\mu\mapsto e^{it\mu}$, где t пробегает множество $t_0=\lambda_1+\ldots+\lambda_p$, t_0-1, $t_0-2,\ldots$

Наибольшее возможное значение t_0 по всем представлениям непрерывной серии равно $-np+\frac{1}{2}np=-\frac{1}{2}np$.

Фиксируем p и устремим n к бесконечности. Тогда $t_0\to-\infty$. Теперь утверждение очевидно.

Случай $SO^*(2n)$. Снова фиксируем в компактной подгруппе $K=U(n)$ подгруппу A_p всех матриц вида

$\begin{pmatrix} \mu\cdot 1_p & \\ & 1_{n-p} \end{pmatrix}$. Наибольшее возможное значение t_0 равно $-p(n+3/2)+\frac{1}{2}np=-\frac{1}{2}p(n+3)$ что тоже стремится к $-\infty$ при $n\to\infty$.

Остался случай $SU(p,q)$. Фиксируем в группе $SU(p,q)$ подгруппу A_k, состоящую из всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \mu\cdot 1_k & & & \\ & 1_{p-k} & & \\ \hline & & \bar\mu\cdot 1_k & \\ & & & 1_{q-k} \end{array}\right)$$

(мы считаем, что $SU(p,q)$ сохраняет стандартную индефинитную эрмитову форму $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$). Наибольшое возможное значение t_0 по всем унитарным представлениям $SU(p,q)$ со старшим весом равно $-k(p+q-1)+\max(p,q)k$. Если мы фиксируем k, а p и q одновременно устремим к ∞, то t_0 будет стремиться к $-\infty$. $\boxtimes$

<u>21.6. Доказательство теорем 20.1.б - 20.3.б.</u> Для доказательства подобных утверждений у нас есть общая схема, см. пп.19.1 - 19.2. Сначала нам нужно указать морфизмы μ_j и ν_j. Мы напишем явные формулы для их преобразований Потапова-Гинзбурга.

В случае категорий Sp и SO^* преобразования Потапова - Гинзбурга для μ_j равно.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 1 & & & 0 \\
 & 0 & & & & 1 & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & 1 & 0 \\
\hline
1 & & & & & & & \\
 & 1 & \ddots & & & 0 & & \\
 & & & 1 & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & & & &
\end{array}\right)$$

а $\nu_j = \mu_j^*$.

В случае категории U мы обозначим через $V_{p,q}$ объект с с индексами инерции . Построим морфизмы $\mu^1_{p,q} : V_{p,q} \to V_{p+1,q}$ и $\mu^2_{p,q} : V_{p,q} \to V_{p,q+1}$. Их преобразования Потапова-Гинзбурга суть

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}
 & & & 1 & & & 0 \\
 & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & 1 & 0 \\
\hline
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{array}\right); \quad
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1 \\
\hline
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
0 & \dots & & 0 & & &
\end{array}\right)$$

Положим $\nu^j_{p,q} = (\mu^j_{p,q})^*$.

Далее, для определенности, мы можем говорить про категорию $\mathcal{K} = Sp(2n, \mathbb{R})$. Пусть $T = (T, \tau)$ – ее неприводимое представление. Стандартным образом показываем, что ограничение T на $Sp(2n, \mathbb{R})$ является подпредставлением в ограничении T на $Sp(2n+2, \mathbb{R})$. Отсюда и из леммы 21.1 следует, что ограничение T на $Sp(2n, \mathbb{R})$ линеаризуется на двулистной накрывающей $Sp(2n, \mathbb{R})$. Теперь мы, наконец, можем дословно повторить рассуждения п.19.2 с одной лингвистической поправкой: вместо того, чтобы говорить "представления нулевые (ненулевые) $End(V)\setminus Aut(V)$ " нужно говорить "представления нулевые (ненулевые) на $End(V)\setminus End^{\circ}(V)$".

§22. Обобщенные дробно-линейные отображения как морфизмы симметрических пространств.

В этом параграфе речь пойдет о симметрических пространствах серии $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$. Эти результаты, однако, легко переносятся, по-существу, на все серии римановых некомпактных пространств, связанных с классическими группами: $U(p,q)/U(p)\times U(q)$, $SO^{*}(2n)/U(n)$ (эрмитов случай), $GL(n,\mathbb{R})/O(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})/U(n)$, $GL(n,\mathbb{H})/Sp(n)$, $O(p,q)/O(p)\times O(q)$, $Sp(p,q)/Sp(p)\times Sp(q)$, $O(n,\mathbb{C})/O(n,\mathbb{R})$, $Sp(2n,\mathbb{C})/Sp(n)$ (неэрмитов случай). Возможность обобщения связана с тем, что любое из перечисленных пространств может быть реализовано как матричный шар, т.е. как множество матриц (вещественных, комплексных или кватернионных) фиксированного размера с нормой <1, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию (симметричность, кососимметричность, эрмитовость, антиэрмитовость, дополнительное условие может и отсутствовать)

<u>22.I. Пространства</u> $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$. В §3 мы встретились с двумя реализациями:

I) $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$ реализуется как множество Z_n комплексных симметрических матриц размера $n\times n$ с нормой <1.

2) Пусть $V_{\mathbb{R}} \in Ob(Sp)$ и V - его комплексификация, снабженная (см. §2) кососимметричной билинейной формой Λ и эрмитовой формой Θ. Рассмотрим в лагранжевом грассманиане область Ω, состоящую из всех подпространств, на которых форма Θ отрицательно определена. Как однородное комплексное $Sp(2n, \mathbb{R})$ - пространство область Ω изоморфна $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n)$.

Переход из одной модели в другую очень прост: пусть $T \in \mathcal{Z}_n$. Тогда ей можно поставить з соответствие график $\gamma(T)$ оператора $V_- \to V_+$ с матрицей T.

Симметрические пространства обычно определяются через риманову метрику и симметрии. Обобщенно дробно-линейные отображения "не уважают" симметрии, они впрочем, "сжимают" риманову метрику (см §3); но это не очень интересно, потому что отображений, "сжимающих" риманову метрику очень много. Геометрия симметрических пространств, однако, несравненно богаче римановой метрики и симметрии. Среди геометрических структур на симметрических пространствах мы упомянем сложное расстояние (это, безусловно, наиболее важная структура, она является аналогом углов между подпространствами), проективную стуктуру (см. [63]), стуктуру "соседства" ([16]) (или целое расстояние, см. [90]), структуру инцидентности в грассманиане, обобщенно конформную структуру ([69]).

22.2. Сложное расстояние. Мы уже определяли (§3) сложное расстояние между точками T_1, T_2 как набор собственных чисел матрицы

$$(1-T_1^*T_1)^{-\frac{1}{2}}(1-T_1^*T_2)(1-T_2^*T_2)^{-1}(1-T_2^*T_1)(1-T_1^*T_1)^{-\frac{1}{2}}$$

все эти числа $\geqslant 1$, мы будем считать, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$. Ясно, что эти же числа являются сингулярными числами матрицы.

$$(1-T_1^*T_1)^{-\frac{1}{2}}(1-T_1^*T_2)(1-T_2^*T_2)^{-1/2} \qquad (22.1)$$

Далее заметим, что отображение

$$R_{T_j}: x \mapsto ((1-T_j^*T_j)^{-1/2}x, T_j(1-T_j^*T_j)^{-1/2}x)$$

из V_- в $V=V_-\oplus V_+$ переводит V_- в $\gamma(T_j)$ и является унитарным, как отображение $V_- \to \gamma(T_j)$. Но матрица полуторалинейной формы $-\Theta(R_{T_1}x, R_{T_2}y)$ на V_-

совпадает с матрицей (22.I). Таким образом мы получаем еще одно описание сложного расстояния. Выберем в $\gamma(T_1)$ ортонормальный базис e_i, а в $\gamma(T_2)$ - ортонормальный базис f_j . Тогда сложное расстояние - это сингулярные числа матрицы с матричными элементами $\Theta(e_i, f_j)$. Иначе говоря, это сингулярные числа полуторалинейной формы $\Theta: \gamma(T_1)\times\gamma(T_2)\to\mathbb{C}$

Вспомним об экстремальных свойствах сингулярных чисел (см. [28]). Рассмотрим K-мерные подпространства $L_1\subset\gamma(T_1)$, $L_2\subset\gamma(T_2)$ и пусть Θ_{L_1,L_2} - эрмитова форма Θ , рассматриваемая как полуторалинейное отображение $L_1\times L_2\to\mathbb{C}$. Тогда

$$\lambda_K = \min_{\substack{L_1\subset\gamma(T_1)\\ L_2\subset\gamma(T_2)}} \Big[\max_{\substack{h_1\in L_1, h_2\in L_2\\ \Theta(h_1,h_1)=\\ =\Theta(h_2,h_2)=1}} |\Theta(h_1,h_2)| \Big] \qquad (22.2)$$

22.3. Поведение сложного расстояния при обобщенно дробно-линейном отображении

Теорема 22.1. Пусть $P \in Mor_{sp}(V,W)$, $\dim V = 2n$, $\dim W = 2m$. Пусть $\zeta(P)$ соответствующее обобщенно дробно-линейное отображение $\mathcal{Z}_n \to \mathcal{Z}_m$. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$ – сложное расстояние между T_1 и T_2, а $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots$ – сложное расстояние между $\zeta(P)T_1$ и $\zeta(P)T_2$. Тогда $\lambda_1 \geqslant \mu_1$, $\lambda_2 \geqslant \mu_2, \dots$.

Доказательство. Пусть $\lambda_k \neq 1$. Прежде всего заметим, что минимакс в выражении (22.2) можно брать лишь по таким векторам h_1, h_2, что $|\Theta(h_1,h_2)| \geqslant 1$. Если $|\Theta(h_1,h_2)| > 1$, то форма Θ является индефинитной на плоскости A_1 проходящей через h_1 и h_2.

Пусть теперь (h_1, g_1), $(h_2, g_2) \in P$, $|\Theta(h_1,h_2)| > 1$. Нам достаточно показать, что

$$\frac{|\Theta(g_1,g_2)|^2}{|\Theta(g_1,g_1)\Theta(g_2,g_2)|} \leqslant |\Theta(h_1,h_2)|^2 \qquad (22.3)$$

Если форма Θ на плоскости A_2, проходящей через g_1, g_2 знакоопределена (неположительно определена) или если g_1 и g_2 коллинеарны, то левая часть (22.3) не превосходит 1 и неравенство (22.3) очевидно. Остается рассмотреть случай, когда Θ индефинитна на A_2. Линейное отношение P является Θ -сжимающим отображением A_1 в A_2. Без ограничения общности можно считать, что ограничение P на A_1 является оператором, Осталось доказать следующую лемму.

Лемма 22.I. Пусть A - плоскость, снабженная невырожденной индефинитной формой J. Пусть P - некоторый J-сжимающий оператор в A. Если $J(f_1, f_1)<0$, $J(f_2, f_2)<0$, то

$$\frac{|J(Pf_1, Pf_2)|^2}{J(Pf_1, Pf\ )J(Pf_2, Pf_2)} \leq \frac{|J(f_1, f_2)|^2}{J(f_1, f_1)J(f_2, f_2)}$$

Доказательство. Среди всех J - сжатий на $\mathbb{C}^2$ плотны те, которые диагонализируются в некотором базисе (см., например, [44]), пусть e_1, e_2 - этот базис, λ_1, λ_2 - собственные числа. Пусть $J(e_1, e_1)>0$, $J(e_2, e_2)<0$, а значит $\lambda_1 \leq 1$, $\lambda_2 \geq 1$. Теперь (22.3) переписывается в виде

$$\frac{\left||\lambda_1|^2 x_1\bar{y}_1 - |\lambda_2|^2 x_2\bar{y}_2\right|^2}{(|\lambda_1 x_1|^2 - |\lambda_2 x_2|^2)(|\lambda_1 y_1|^2 - |\lambda_2 y_2|^2)} \leq$$

$$\leq \frac{|x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2|}{(|x_1|^2-|x_2|^2)(|y_1|^2-|y_2^2)}$$

при условии, что $|x_1|^2 \leq |x_2|^2$, $|y_1|^2 \leq |y_2|^2$. Достаточно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$. Пусть например, $\lambda_2 = 1$. Можно считать, что $x_2 = y_2 = 1$ вещественно. Итак, достаточно проверить, что

$$0<\lambda<1,\ 0<x<1,\ 0<y<1$$

влечёт

$$\frac{(1-\lambda xy)^2}{(1-\lambda x^2)(1-\lambda y^2)} \leq \frac{(1-xy)^2}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Вычмсляя производную по λ от левой части неравенства, получаем выражение

$$\frac{(1-\lambda^2)(x-y)^2}{(1-\lambda x^2)^2(1-\lambda y^2)^2}$$

Мы видим, что производная положительна. Лемма доказана.

22.4. Проективная структура. Определим в $\Omega_n = Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$ семейство одномерных подмногообразий которые мы назовём прямыми. Пусть $H_1, H_2 \in \Omega_n$ и пусть $H_1 \cap H_2$ имеет коразмерность 1 в H_1 и H_2. Прямой $l = l_{H_1 \cap H_2}$ мы назовём множество всех $H \in \Omega_n$ таких, что $H \supset H_1 \cap H_2$

Ясно, что обобщённо дробно-линейфйное отображение переводит прямые в прямые.

22.5. Замечания. Естественно задать вопрос о том, любое ли голоморфное отображение Q, области Ω_n в область Ω_m прижимающее сложное расстояние к 1 (т.е. удовлетворяющее заключению теоремы

22.I) является обобщенно дробно-линейным? Оказывается, что это почти верно, но в случае, когда образ отображения Q содержится в прямой (и только в этом случае), это все-таки не так. Причина в том, что в случае $n=m=1$ условие $\lambda_1 \geqslant \mu_1$ означает в точности то, что отображение не увеличивает расстояния (и это условие очень слабое).

Далее возникает вопрос, нельзя ли в данном случае сформулировать аналог "основной теоремы проективной геометрии" (см.[16]) Верно ли, что отображение переводящее любую прямую в прямую, имеет вид $S(P)$, где $P \in \mathrm{Mor}(V, W)$. Это тоже не совсем так, и ровно потому, что "основная теорема проективной геометрии" отсутсвует в размерности 1. Т.е. отображение переводящее прямые в прямые или обобщенно дробно-линейно или переводит все пространство в одну прямую.

§23. Категорные оболочки бесконечномерных групп и представления категорий.

В этом параграфе обсуждаются некоторые простые обобщения результатов диссертации. Кроме того, обсуждаются некоторые категории, теория представлений которых на сегодняшний день не доведена до конца, а также перевод на категорный язык некоторых известных теорий.

<u>а) Категории линейных отношений.</u>

<u>23.I. Вещественные полупростые группы.</u> Существует единообразная процедура, которая с каждой серией вещественных классических групп ($GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{H})$, $U(p,q)$, $O(p,q)$, $Sp(p,q)$, $O(n,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$) связывает

некоторую категорию линейных отношений, для групп $U(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ эти категории изучались в главе У (Эти линейные отношения должны "сжимать" индефинитную эрмитову форму и (быть может) сохранять еще одну форму). Во всех случаях известна полная классификация унитарных представлений , в случае категорий U, Sp, SO^* (когда множество морфизмов имеет комплексную структуру) известна также полная классификация голоморфных (не обязательно унитарных)предствавлений.

С другой стороны, теорема о тривиальности слабого замыкания из [77], видимо, ставит препятствие для категорных продолжений неприводимых бесконечномерных представлений полупростых групп,

23.2. Морфизмы симметрических пространств. Конструкция §22 обобщается на все категории п.22.I. Для каждой из категорий предыдущего пункта существует канонический функтор, который каждому объекту ставит в соответсвие симметрическое пространство, а каждому морфизму - некоторое отображение одного симметрического пространства в другое.

23.3. Алгебраические группы. Пусть $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнутое поле характеристики $p>2$. Над $\mathbb{F}$ можно определить категории GA, B, C, D. Все теоремы и все рассуждения главы IУ дословно переносятся на этот случай.

23.4. Группы Шевале: модулярные представления. Категории GA, B, C, D можно определить и над конечным полем $\mathbb{F}_{p^n}$ (в случае B и D нужно ограничиться квадратичными пространствами, отвечающими одному элементу группы Витта). Теория модулярных представлений (т.е. представлений над алгебраическим замыканием $\mathbb{F}_{p^n}$) этих категорий очень проста; а именно, теорема Стейнберга о тензорном произведении (см., например, [51]) легко переносится на категории (представление категории соответственно задается n диаграммами Дынкина с числовыми отметками $< p$).

23.5. Группы Шевалле: комплексные представления. Здесь легко строится конструкция представления Вейля категории C . По-видимому, все представления категорий GA , B , C , D должны описываться с помощью теорем двойственности типа §20.

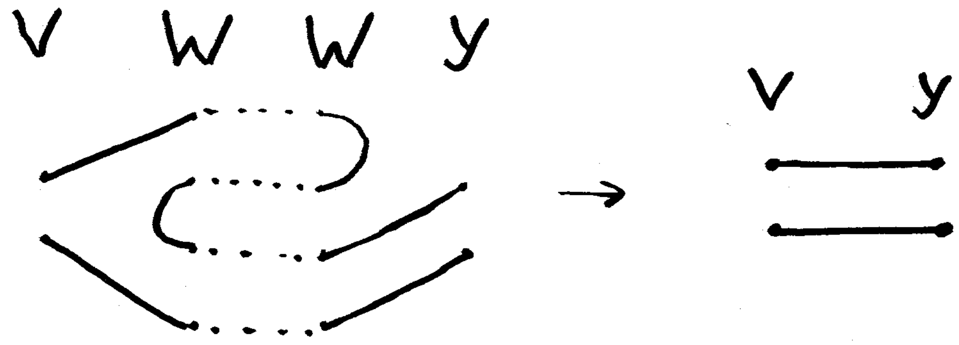
23.6. p -адические группы. Здесь роль линейных отношений играют $\mathcal{O}_p$ -подмодули в линейных пространствах над $\mathbb{Q}_p$ (Назаров, см. [83]), через $\mathcal{O}_p$ мы обозначили кольцо целых p -адических чисел.

23.7. Неполупростые группы. Содержательный пример категории, связанной с неполупростыми группами - SpH (см §5). Существуют ли другие интересные примеры, неизвестно (хотя примеров, конечно, можно придумать много, скажем, существует категории, похожие на SpH , но связанные не с Sp , а с U и SO^*). Любопытно также, существуют ли категории, связанные с неклассическими однородными комплексными областями (см. [11])

б) Категории, связанные с симметрической группой.

23.8 Категория частичных биекций . Объекты категории - конечные множества, а морфизмы из V в W - это биекция некоторого подмножества в V на подмножество в W . Классификацию представлений этой категории легко вывести из [84].

23.9. Категория Брауэра Br . Объект - множество из четного числа элементов, морфизм из V в W - разбиение $V \cup W$ на пары. Как определяется умножение ясно из картинки



Полугруппы $End(V)$ - полугруппы Брауэра ([61] в последнее время довольно популярны . Описание представлений Br - задача довольно простая.

Существуют также различные вариации категории Брауэра.

в) Теоремы двойственности.

23.10. Двойтсвенность Брауэра. Пусть V - тождественное представление $O(k, \mathbb{C})$ или $Sp(2n, \mathbb{C})$. тогда в тензорной алгебре над V действует сплетающими операторами категория Брауэра (ср. с [61]).

23.11. Двойственность Хау. Для категорий C и GD существуют теоремы двойственности типа §20. Роль представления Вейля играет спинорное представление. Вопрос о теоремах двойственности для категорий B и GA остается открытым (так же как и аналогичные вопросы пп.22.3 - 22.7).

г) Категорные оболочки бесконечномерных групп.

23.12. Абстрактная конструкция категорной оболочки. Для многих бесконечномерных групп G существует цепочка подгрупп $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$ обладающая следующими свойствами.

1. Пусть ρ - унитарное представление G в V . Пусть V_j - множество векторов, инвариантных относительно K_j . Тогда $\bigcup V_j$ плотно в V .

2. Пусть mor_{ij} - двойной класс смежности

$K_i \backslash G / K_j$. Если $\gamma \in mor_{ij}$, то корректно определен оператор $\rho(\gamma) : V_i \to V_j$. В самом деле, если $g \in G$, $k_1 \in K_i$, $k_2 \in K_j$, то $\rho(k_1 g k_2)|_{V_i}$ не зависит от k_1 и k_2.

3. Если $\gamma_1 \in mor_{ij}$, $\gamma_2 \in mor_{jk}$, то существует элемент $\gamma_3 \in mor_{ik}$ такой, что $\rho(\gamma_3) = \rho(\gamma_1 \gamma_2)$. Таким образом мы получаем возможность определить умножение морфизмов (именно это замечательно и именно в этом состоят теоремы мультипликативности).

Теперь объектом категории $\mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$ является число j, морфизмами-множества mor_{ij}. Функтор, который каждому j ставит в соответствие пространство V_j, а каждому морфизму γ - оператор $\rho(\gamma)$ является представлением $\mathcal{K}$.

Эта конструкция не является универсальной (скажем, она не применима для $\mathcal{D}iff$ [37], для p-адической группы диффеоморфизмов, пока непонятно также, что делать с некоторыми представлениями групп токов). Однако во многих случаях она применима. По-существу, именно на этой процедуре основаны работы [19], [84], [82], [47], во всяком случае, эти работы хорошо переводятся на наш язык. После того, как было построено представление Вейля симплектической категории, стала ясна структура категорий, связанных с бесконечномерными классическими группами (Не следует думать, что это категории GA, B, C, $\mathcal{D}$).

Так или иначе, для тех бесконечномерных групп, для которых изложенная процедура применима, проблема классификации всех унитарных представлений сводится к конечномерным задачам. Эти проблемы не выглядят особенно сложными и, по-видимому, их решение - дело ближайших лет.

23.13. Бистохастические меры и представления Вершика-Гельфанда-Граева. Объектом категории марковских операторов $\mathcal{P}$ мы назовем набор чисел $a=(a_1,\ldots,a_k)$ таких, что $a_j>0, \sum a_j=1$. Морфизмом из a в $b=(b_1,\ldots,b_m)$ мы назовем матрицу Q размера $k\times m$, матричные элементы которой удовлетворяют условиям $\sum_i q_{ij}=a_j$, $\sum_j a_{ij}=b_i$. Если $P:a\to b$ и $Q:b\to c$ - морфизмы, то их произведение R вычисляется по формуле $R=QB^{-1}P$, где B - диагональная матрица с собственными числами $b_1^{-1},\ldots,b_k^{-1}$. На самом деле, правильнее рассматривать не дискретные, непрерывные разбиения в сумму положительных чисел, иными словами, объекты категории - это пространства с вероятностной мерой (см. [6]).

Один из самых содержательных разделов в теории представлений бесконечномерных груп - это представления Вершика - Гельфанда - Граева (см. [7], [8]) группы измеримых функкий на пространстве с мерой со значениями в группе G. Связанная с ними категория похожа на категорию марковских операторов, только элементами матрицы Q являются положительные меры μ_{ij} на G, удовлетворяющие условиям

$$\sum_i \mu_{ij}(G)=a_j \qquad \sum_j \mu_{ij}(G)=b_i$$

(см. также, не очень явно относящиеся к этому сюжету работы [5], [6]).

г) "Топологические теории поля"

23.14. Объектом категории $\mathcal{M}_n$ мы назовем компактное ориентированное многообразие. Если A и B - объекты $\mathcal{M}_n$, то морфизм $A\to B$ - это компактное ориентируемое многообразие Q с краем, причем край Q - это несвязное объединение B и $-A$ (с учетом ориентаций). Два морфизма $Q, Q' : A \to B$ считаются одинаковыми, если существует диффеоморфизм $Q \to Q'$, который индуцирует на A и B диффеоморфизмы, изотопные тождественному (см. [87]).

Легко построить примеры представлений $\mathcal{M}_n$. Пусть поле $\mathbb{K}$ – это $\mathbb{F}_p$ или $\mathbb{C}$. Фиксируем k. Поставим в соответствие каждому объекту A группу гомологий $H_k(A, \mathbb{K})$. Далее любому морфизму $Q : A \to B$ мы поставим в соответствие подпространство $h(Q) \subset H_k(A, \mathbb{K}) \oplus B_k(B, \mathbb{K})$, состоящее из всех пар (v, w), таких, что v гомологично w в Q. Таким образом мы получили функтор из категории $\mathcal{M}_n$ в категорию линейных отношений над полем $\mathbb{K}$. Далее возможны различные варианты.

ЛИТЕРАТУРА

I. Адамс Дж. Лекции о группах Ли. М.:Наука, I979.

2. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, I986.

3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, I974.

4. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, I965.

5. Вершик А.М. Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп // ДАН СССР.- I974. Т.2I8, №4.- С.749-752.

6. Вершик А.М. Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские процессы // Зап. научн. семин. ЛОМИ. - I977. Т.72.- С.26 -62.

7. Вершик А.М., Гельфанд И.М., Граев М.И. Представления $SL_2(R)$, где R - кольцо функций // Успехи мат. наук.- I974. Т.28, вып 3.- С.3 - 4I.

8. Вершик А.М., Гельфанд И.М., Граев М.И. Коммутативная модель представлений группы токов $SL_2(\mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой // Функцион.анализ и прил. - I983. Т.I7, вып.2. - С.70 - 72.

9. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры и факторпредставления бесконечномерной унитарной группы // ДАН СССР. - I973. Т.2I2, №2.- С.288 - 290.

I0. Винберг Э.Б. Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли // Функцион.анал и прилож. - I980. Т.I4, вып.I - С.I - I3.

II. Винберг Э.Б., Гиндикин С.Г., Пятецкий-Шапиро И.И. О классификации и канонической реализации комплексных однородных областей. // Труды Моск. матем. общ-ва. - I963. Т.I2. - С.359 - 388.

I2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, I966.

I3. Граев И.М. Унитарные представления вещественных полупростых групп Ли. // Труды Моск. матем. общ-ва. - I958. Т.7. - С. 335 - 389.

I4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, I968.

I5. Диксмье Ж. C^* - алгебры и их представления. М.: Наука, I974.

I6. Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. М.: Мир, I974.

I7. Исмагилов Р.С. О линейных представлениях группы матриц с элементами мз нормированного поля.// Изв. АН СССР, сер. матем. - I969. Т. 33, №6. - С.I269 - I323.

I8. Исмагилов Р.С. Сферические функции над нормированным полем, поле вычетов кторого бесконечно. // Функцион. анал. и прилож.- I970. Т.4, №I. - С. 42 - 5I.

I9. Исмагилов Р.С. Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности. // Функцион. анал. и прилож. - I97I. Т.5, вып.3. - С.43 - 53.

20. Исмагилов Р.С. Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности. // Изв. АН СССР, сер. матем. - I972. Т. 36, №I. - С. I80 - 208.

2I. Картан Э. Теория спиноров. М.: ИЛ , I947.

22. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, I972.

23. Кириллов А.А. Кэлерова структура на K - орбитах группы диффеоморфизмов окружности.// Функцион. анал. и прилож. - I987. Т.2I, вып.2. - С. 42 - 45.

24. Кириллов А.А., Юрьев Д.В. Кэлерова геометрия пространства $M = \mathcal{D}iff_+(S^1)/Rot(S^1)$ .// Функцион. анал.

и прилож. - 1987. Т.-№, вып.2, С. 78 - 79.

25. Кричевер И.М., Новиков С.П. Алгебры типа Вирасоро и структуры теории солитонов.//I.Функцион. анал. и прилож.- 1987.Т.27, вып. 2, С.46 - 63. III.Функцион. анал. и прилож.- 1989.Т.23, вып. I, С. I - 14.

26. Крейн М.Г., Шмульян Ю.Л. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами.// Математические исследования., Кишинев, Штиница - 1967. Т.2, вып. 3., С.

27. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.

28. Лидский В.Б. Неравенства для собственных и сингулярных чисел. // Добавление к Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, изд 4^{oe}, М.: Наука, 1988. - С. 502 - 525.

29. Маклейн С. Алгебра аддитивных отношений. // Математика. Сб. переводов. - 1963. Т.7, №6 - С.3 - 12.

30. Неретин Ю.А. Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмов окружности.// Успехи мат. наук. - 1982. Т.37, №2. - С.213 - 214.

31. Неретин Ю.А. Бозонные представления группы диффеоморфизмов окружности.// ДАН СССР. - 1983. Т.272, вып.3. - С.528 - 531.

32. Неретин Ю.А. Унитарные представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом. // Функцион. анал. и прилож. - 1983. Т.17, вып.3. - С.85 - 86.

33. Неретин Ю.А. Унитарные представления алгебры Вирасоро со старшим весом. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1983.

34. Неретин Ю.А. О спинорном представлении $O(\infty, \mathbb{C})$ .// ДАН СССР. - 1986. Т.289, №2. - С.282 - 285.

35. Неретин Ю.А. О комплексной полугруппе, содержащей группу диф-

феоморфизмов окружности. //Функцион. анал. и прилож. - 1987. Т.21, вып.2. - С.82 - 83.

36. Неретин Ю.А. Почти инвариантные структуры и конструкции унитарных представлений группы диффеоморфизмов окружности.// ДАН СССР. - 1987. Т.294, №1 - С.37 - 41.

37. Неретин Ю.А. Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр. // Совр. пробл. матем. Фундам. направления. - М.: ВИНИТИ, 1988. - С.163 - 224.

38. Неретин Ю.А. Спинорное представление бесконечномерной ортогональной полугруппы и алгебра Вирасоро. // Функцион. анал и прилож. - 1989. Т.23, вып.3. - С. 32 - 44.

39. Неретин Ю.А. Голоморфные продолжения представлений группы диффеоморфизмов окружности.// Матем. сб. - 1989. Т.180, №5 - С.635 - 657.

40. Неретин Ю.А. Об одной полугруппе операторов в бозонном пространстве Фока.// Функцион. анал. и прилож. - 1990. Т.24, №2 - С. 63 - 73.

41. Неретин Ю.А. Об операторах, связывающих представления разных групп. // ДАН СССР, - 1990. Т.312, №6 - С.

42. Ольшанский Г.И. Описание унитарных представлений со старшим весом для групп $U(p,q)^{\sim}$ .// Функцион. анал. и прилож. - 1980. Т.14, вып.3.- С. 32 - 44.

43. Ольшанский Г.И. Новые "большие" группы типа I. // Совр. пробл. матем. М.: ВИНИТИ - 1980. Т.16. - С.31 - 51.

44. Ольшанский Г.И. Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфная дискретная серия.// Функцион. анал.и его прилож. - 1981. Т.15, вып. 4.- С.53 - 66.

45. Ольшанский Г.И. Унитарные представления бесконечномерных (G, K) -пар и формализм Р.Хау.// ДАН СССР. - 1983.

Т.269. №I. - С.33 - 36.

46. Ольшанский Г.И. Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений.// Функцион. анал. и его прилож. - I984.Т.I8, вып.I. - С.28 - 42.

47. Ольшанский Г.И. Унитарные представления (G, K) - пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ // Алгебра и анализ. - I989.Т.I, вып.4. - С.I78 - 209.

48. Пятецкий-Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматгиз, I96I.

49. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики., Т.I., М.: Мир, I977.

49. Сато М., Дзимбо М., Мива Т. Голономные квантовые поля. I// Сато М., Дзимбо М., Мива Т. Голономные квантовые поля. М.: Мир, I983. - С.22 - 65.

5I. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, I975.

52. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Кососимметричные инвариантные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро.//Функцион. анал. и прилож. - I982. Т. I6,№ 2. - С. 47 - 63.

53. Хацкевич В.А. Обощенная метрика Пуанкаре на операторном шаре. // Функцион. анал и прилож. - I983. Т.I7, №4. - С.93 - 94.

54. Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь.Интеграл, мера, производная на линейных пространствах. М.: Наука, I967.

55. Шмульян Ю.Л. Теория линейных отношений и пространства с индефинитной метрикой.// Функцион. анал и прилож. - I976, Т.I0, вып.I. - С.67 - 72.

56. Шмульян Ю.Л. Общие дробно линейные преобразования операторных шаров.// Сиб.мат. ж. - I978. Т.I9, №2. - С.4I9 - 425.

57. Alvarez - Gaume L., Gomes G., Moore G., Vafa C. Strings in operator formalism // Nuclear Phys. - 1988. B.303, N3, - P. 455-521.

58. Bargmann V. On unitary ray representations of continuous groups // Ann. Math. - 1954. V.59, N1. - P.1 - 46.

59. Bargmann V. On a hilbert space of analitic functions and associated integral transform // Commun. Pure and Appl.Math.- 1961. V14, N3. - P.187 - 214.

60. Birman J.S. The algebraic structure of surface mapping class groups// Discrete groups and automorphic functions. Acad. Press. - 1977. - P.163 - 198.

61. Brauer R. On algebres which are connected with semisimple continuous groups // Ann. Math. - 1937. V.38, N4.- P.857 - 872.

62. Cartan E. Sur les domains borne homogenes de l'espace de n variables complexes // Abhandl. mats. Semin. Univ. Hamburg.- 1936. V.2. - P.116 - 132.

63. Chow. On the geometry of algebraic homogeneous space // Ann. Math. - 1949. V.50, N1. - P.32 - 67.

64. Duren P.L. Univalent functions N.Y.: Springer, 1983.

65. Enright T., Howe R., Wallach N.A. Classification of unitary highest weight modules // Representation theo y of reductive groups. Boston.: Birkhäuser, 1983.

66. Friedan D., Qiu Z., Shenker S. Conformal invariance, unitarity and two-dimensional critical exponents // Vertex operators in mathematics and physics.N.Y.: Springer - 1984.- P.419 - 450.

67. Gawędzki K. Conformal field theory // Seminaire Bourbaki,

41 e annee, 1988 - 89, n.704.

68. Goddard P., Kent A., Olive D. Unitarisable representations of Virasoro algebra and super Virasoro algebra // Commun. Math. Phys. - 1986. V.103, N1. - P.105 - 119.

69. Goncharov A.B. Generalized conformal structures on manifolds // Selecta Math. Sov. - 1987. V.6, N.4. - P. 306 - 340.

70. Goodman R. Holomorphic representations of nilpotent Lie groups // J.Funct. Anal. - 1979. V. 31, N1. - P.115 - 137.

71. Goodman R., Wallach N.R. Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle.// J. Reine Angew.Math. - 1984. V. 347 - P. 69 - 133.

72. Goodman R., Wallach N.R. Projective unitary positive - energy representations of Diff (S^1) // J. Funct. Anal. - 1985. V63, N3. - P.299 - 321.

73. Grunsky H. Koeffizenten bedingungen for schilicht ablildende meromorphe funktionen // Math Z. - 1939. V.45, N1. - P.29-61.

74. Guichardet A. Symmetric Hilbert space and related topics // Lect. Notes. Math. - 1972. V. 261.

75. Howe R. Remark on classical invariant theory. // Preprint Yale Univ., 1976.

76. Howe R. The oscilator semigroup // Proc. symp. in Pure Math.- 1988. V.48. - P.61 - 132.

77. Howe R.E., Moore C.C. Asymptotic properties of unitary representations // J.Funct. Anal. - 1979. V.32, N1. - P.72 - 96.

78. Jakobsen H. On singular holomorphic representations // Inv. Math. - 1980. V.62, N1. - P.67 - 78.

79. Kac V.G. Contravariant form for infinitedimentional Lie algebras and superalgebras // L ct. Notes. Math. Phys. - 1979. N 94. - P.441 - 445.

80. Kac V.G. Infinite-dimentional Lie algebras. Boston.: Birkhauser, 1984.

81. Kashiwara M., Verghe M. On the Segal-Shale-Weil representation and harmonic polinomials.// Invent. Math.- 1978. V.44, N1. - P.1 - 47.

82. Lieberman A. The structure of certain unitary representations of infinite symmetric group.// Trans. Amer. Math. Soc. - 1972. V.164. - P.189 - 198.

83. Nazarov M., Neretin Yu., Olshanskii G. . Semigroupes engendres par la representation de Weil du group symplectique de dimension infinie // Compt. Rend. Acad. Sci., Paris - 1989. V.309, N7. P.

84. Olshansky G.I. Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach.// Representations of Lie groups and Lie algebras. Budarest: academia Kiado. - 1985. - P.181 - 197.

85. Rudin W. Analityc functions of class H_p// Trans. AMer. Math. Soc. - 1955. V.78, N1. - P.44 - 66.

86. Segal Gr. Unitary representations of some infinitedimentional groups.// Commun.Math.Phys. - 1981. V.80, N3. - P.301 -342.

87. Segal G. The definitions of conformal field theory //MPI7 87 - 58, preprint - 1988.

88. Shale D. Linear symmetries of free boson fields// Trans. Amer.Math. Soc. - 1962. V.103, N1. - P.149 - 167.

89. Shale D., Stinespring W.F. Spinor representations of infinite dimentional orthonal groups // J.Math, and Mech. - 1965. V.14, N2. - P.315 - 322.

90. Takeuchi M. Basicitransformations of symmetric R - spaces // Osaka J. Math. - 1988. V.25, N2. - P.259 - 297.

91. Thoma E. Die unzerlegbaren, positive definiten Klassen - funktionen der abzdhbar unendlichen symmetrischen Gruppe// Math. Zeitchr. - 1964. V.85. - P. 40 - 61.

92. Verlinde E. Fusion rules and modular transformations in 2d conformal field theory // Nucl, Phys. - 1988, - B 300.- P.360 - 376.

93. Voiculescu D. Representations factorislles de type II_1 de $U(\infty)$ // J. Math pures et appl. - 1976. V.55, N1. - P.1 - 20.

94. Witten E. Quantum field theory, grassmanians and algebraic curves // Commun. Math. Phys. - 1988. V.113, N4. - P.529-600.