Введение.

Диссертация посвящена изучению двух недавно обнаруженных математических явлений:

I. Пусть G - бесконечномерная группа и пусть G имеет содержательную теорию представлений. Тогда с G жестким образом связана некоторая категория $\mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$, сама группа G выступает в качестве группы автоморфизмов одного из объектов категории $\mathcal{K}$, а любое представление G жестким образом продолжается на $\mathcal{K}$. Это, в сущности, означает, что теория представлений бесконечномерных групп является на самом деле теорией представлений категорий.

2. Возникающие таким образом категории имеют теорию представлений, которая интересна сама по себе, без всякой связи с бесконечномерными группами.

Эти явления были осознаны в 1987 - 1988 гг (см. [83], [38], [39] , [41]), однако неявно математика имела дело с подобными категориями, начиная с 60ых годов. Речь идет о так называемых "теоремах мультипликативности", в этих теоремах обычно появлялись (как мы сейчас понимаем) некоторые подмножества множества морфизмов категории $\mathcal{K}$ и показывалось, что на этих подмножествах существует естественное умножение. Первые теоремы мультипликативности были получены Э.Тома [91] и Р.С.Исмагиловым [17]-[18], и в 70ые годы подобные констркуции стали одним из главных инструментов теории представлений бесконечномерных групп. (см. работы Р.С.Исмагилова [19] ,[20] ,А.Либермана [82] , С.Стратилы, Д.Войкулеску [93] , А.М.Вершика, С.В.Керова, И.М. Гельфанда, М.И.Граева [9] , [7] , наша работа сравнительно далека от этого направления, лишь в п.23.II мы коротко обсудим как из теорем мультипликативности "вырастает" категорная оболочка). В конце 70ых годов Г.И.Ольшанский ([43], [46]) используя эти идеи, ввел понятие полугрупповой оболочки $\Gamma=\Gamma(G)$ бесконечномерной группы G. А именно, оказывается, что с каждой бесконечномерной группой G жестким образом связана некоторая, невидимая невооруженным глазом полугруппа Γ, причем любое представление G продолжается до представления Γ. Используя полугрупповой подход Г.И.Ольшанский в [46] описал все унитарные представления групп $U(p,\infty)$, $O(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$. Однако для других бесконечномерных групп полугрупповую оболочку долгое время не удавалось описать. Наконец, в работе Г.И.Ольшанского, М.Л.Назарова и автора [83], была построена полугрупповая оболочка для представления Вейля, а в работе автора [38] - для спинорного представления. Тогда и стало ясно, что речь идет не о полугрупповой оболочке, а о категорной.

Глава I диссертации основана на работе [40] и посвящена исследованию категорной оболочки представления Вейля. Пусть F_n, F_m - бозонные пространства Фока, с вообще говоря, разным числом степеней свободы (соответственно m, n, см. п. I.I), пусть пока число степеней свободы конечно. Пусть $S=\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}$ - блочная симметричная матрица размера $(n+m)\times(n+m)$, причём $\|S\|\leqslant 1$, $\|K\|<1$, $\|M\|<1$. Рассмотрим оператор

$$B[S]f(z)=\iint \exp\left\{\frac{1}{2}(z\ \bar u)\begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar u\end{pmatrix}\right\} f(u)\,d\mu(u)$$

из F_m в F_n (см. §I). Можно показать, что множество всех таких операторов замкнуто относительно умножения, т.е. если

$B[S]$ - оператор $F_n \to F_m$, а $B[T]$ - оператор $F_m \to F_k$, то $B[T]B[S]$ тоже имеет вид (0.I) с некоторой новой матрицей S. Оказывается, что категория всех операторов $B[S]$ эквивалентна описанной ниже симплектической категории Sp.

Объект этой категории - комплексификация V вещественного линейного пространства $V_{\mathbb{R}}$, снабженного невырожденной кососимметричной билинейной формой λ_V. Форма λ_V может быть продолжена в V как билинейно, так и полуторалинейно. Морфизмом из V в W мы назовем подпространство $P \subset V \oplus W$, удовлетворяющее условиям

а) P - лагранжев (максимальное изотропное) подпространство относительно кососимметричной формы в $V \oplus W$.

б) Если $(v,w) \in P$, то $\Theta_V(v,v) \geq \Theta(w,w)$, где Θ_V, Θ_W - полуторалинейные формы в V и W.

в) Если $(v,0) \in P$, $(0,w) \in P$, то $\Theta_V(v,v) > 0$, а $\Theta_W(w,w) < 0$ (условие б давало бы нестрогие неравенства).

Морфизмы перемножаются как линейные отношения. (см. п.2.I)

Рассмотрим полугруппу $End(V)$, где $\dim V = 2n$. Эта полугруппа является комплексной ограниченной областью (одной из классических областей Картана[62]), а ее обратимые элементы (т.е. группа $Aut(V)$) образуют подмножество половинной размерности, лежащее на границе (Шилова) области $End(V)$, Легко видеть, что $Aut(V) \simeq Sp(2n, \mathbb{R})$. Графики линейных операторов образуют в $End(V)$ открытое плотное множество Γ^0, полугруппа Γ^0 изоморфна открытой подполугруппе в $Sp(2n, \mathbb{C})$ (это одна из полугрупп, изучавшихся в

[10], [44]). Важно заметить, что Γ^0 не исчерпывает всю Γ.

Если же $\dim V \neq \dim W$, то элементы $\mathrm{Mor}(V, W)$ не могут быть графиками операторов.

В §2 мы строим "представление Вейля" категории Sp (определение предсталвения см. в Обозначениях), это функтор, который каждому объекту V ставит в соответствие пространство Фока с $\frac{1}{2}\dim V$ степенями свободы, а каждому морфизму - некоторый оператор вида B [5] из одного пространства Фока в другое. Тем самым, в каждом пространстве Фока F_n мы получаем представление группы $Aut(V) \simeq Sp(2n, \mathbb{R})$. Это представление $Sp(2n, \mathbb{R})$ совпадает с обычным представлением Вейля.

В главе II проводится аналогичная программа для спинорного представления.

В теории бесконечномерных предсталвений полупростых групп наиболее важным способом строить представления является операция индуцирования (с различными обобщениями). В случае бесконечномерных групп индуцирование отодвигается на второй план следующей процедурой. Пус мы хотим построить представление группы G. Для этого мы должны вложить G в бесконечномерную симплектическую или ортогональную группу (т.е. группы автоморфизмов канонических коммутационных соотношений), а затем ограничить соответственно представление Вейля или спинорное представление на G (см. например, [9], [45], [86], [32], [36], [37], "вырожденный вариант" этой процедуры - схема Араки, см, например, [8]).

В случае категорий это свойство "универсальности" представления Вейля и спинорного предсталвения сохраняется. Поэтому представление Вейля и спинорное представление категорий заслуживают того, чтобы быть построенными в максимальной общности (эта общность совсем не нужна в главах IУ и У, но используется в полной мере в главе III). С одной стороны, это приводит к длинным техническим доказательствам теорем 2.3 , 8.I и предложения 8.I, с другой - к содержательному вопросу об ограниченности операторов вида (0.I) и аналогичных операторов в фермионном случае (теоремы 4.I, 4.2, 7.I, 9.I - 9.3) в пространствах Фока с бесконечным числом степеней свободы.

В п. 2.8 - 2.9 и 8.4, 8.I0 объясняется взаимоотношение наших результатов и классических теорем К.О.Фридрихса - И.Сигала - Ф.А. Березина и Ф.А.Березина - Д.Шейла - В.Стайнеспринга об автоморфизмах канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений (см. [4] ,[88] ,[89]), операторы вида (0.I) трактуются как морфизмы канонических коммутационных соотношений.

Глава III посвящена исследованию полугрупповой и категорной оболочек группы $Diff$ диффеоморфизмов окружности. Полугрупповая оболочка Γ группы $Diff$ была построена автором в [35] (и двумя годами позднее Гр.Сигалом [87]). Ее элементом является тройка (R, τ_+, τ_-) , где R - риманова поверхность (одномерное комплексное многообразие) с краем, топологически эквивалентное кольцу, $\tau_+, \tau_-: e^{i\varphi} \to \mathcal{D}$ аналитические параметризации компонент края, причем при обходе контура $\tau_+(e^{i\varphi})$ поверхность остается справа, а при обходе $\tau_-(e^{i\varphi})$ - слева. Умножение в Γ - это склейка (аккуратное определение см. в §I2, см. также рисунок на стр.132).В §I2 подробно объясняется почему Γ следует считать комплексификацией группы диффеоморфизмов окружности. В §I3 показано, что все представления алгебры Вирасосоро ос старшим весом интегрируются до голоморфных представлений полугруппы Γ, в §14 получены явные формулы для этих представлений. Представления Γ строятся с помощью вложений Γ в полугруппы линейных отношений - симплектическую и ортогональную (эти полугруппы были построены в главах I и II). Далее мы ограничиваем соответственно представление Вейля и спинорное представление на Γ.

В §15 определяется категорная оболочка Shtan группы Diff. Объектами Shtan являются неотрицательные целые числа, а морфизмами $m \to n$ - наборы (R, τ_+^i, τ_-^j) где R - риманова поверхность с $m+n$ компонентами края, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $\tau_\pm^\alpha$ - фиксированные параметризации компонент края, причем при обходе контуров $\tau_+^\nu(e^{i\varphi})$ поверхность остается справа, а при обходе $\tau_-^j(e^{i\varphi})$ - поверхность остается слева. Для того, чтобы перемножить морфизмы, нужно склеить римановы поверхности.

Конструкция категории Shtan была сообщена автору в 1987 г. М.Л.Концевичем, который предложил переформулировку конформной квантовой теории поля в терминах представлений категории Shtan. В 1988 г. появился препринт Гр.Сигала, где высказывалась примерно та же точка зрения. Аксиоматика теории поля в смысле М.Л.Концевича и Гр.Сигала налагает на представления Shtan некоторые дополнительные требования, которые, кажется должны выполняться сами собой. С другой стороны, не вполне ясно, до какой степени эти аксиоматики действительно исчерпывают конформную квантовую теорию поля. Обсуждение этих вопросов не входит в нашу задачу. В любом случае, сам факт тесной связи между теорией поля и теорией представлений категории Shtan

не вызывает сомнений (см. [94], [57], [67]), а сама категория **Shtan** является интересным математическим объектом и без какой-либо связи с теорией поля (см §I5).

Представления категории **Shtan** строятся в §I6 с помощью вложений **Shtan** в симплектическую и ортогональную категории.

Результаты главы IIIоснованы на работах автора [38], [39], они были сданы в печать в начале I988 до выхода препринта Гр.Сигала [87] и, тем самым, не зависят ни от этого препринта, ни от последовавших за ним физических работ. Из этих работ мы отметим [67], где аннонсируются теоремы о голоморфном продолжении унитарных представлений алгебры Вирасоро на полугруппу Γ (опубликованную ранее автором в [35]), а также [57], где строятся (путем выписывания явных формул) те же операторы, что и в п.I6.7 (авторов, однако, не интересуют ни существование этих операторов, ни их мультипликативные свойства). Наокнец, нужно отметить работу [92], которая по-видимому "перекидывает мостик" между конформной квантовой теорией поля и теоремами мультипликативности.

Категории линейных отношений (см. главы I,II) изначально были построены для изучения бесконечномерных групп (группы $\mathcal{D}iff$ и бесконечномерных классических групп). Эти категории, однако, оказались интересными и сами по себе. Главы IУ и У посвящены изучению подобных категорий.

Объектом категорий $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{GD}$ мы назовем соответственно:

а) в случае $\mathcal{B}$ - нечетномерное комплексное линейное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой.

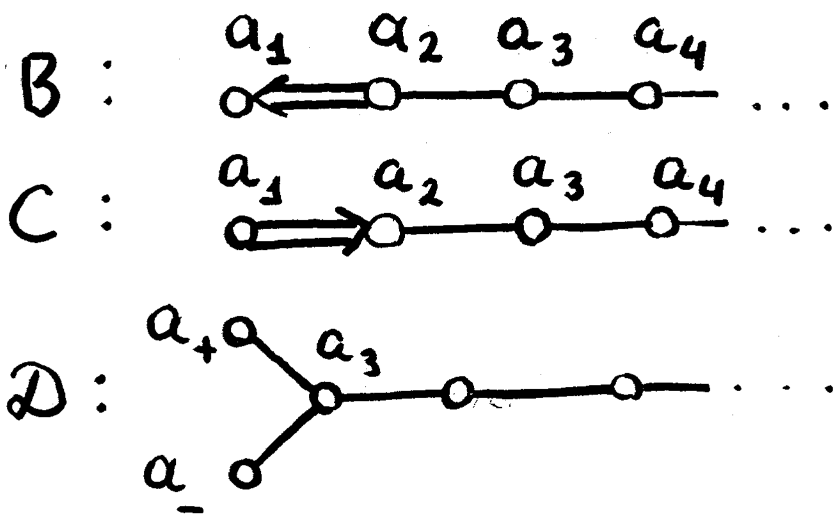
б) в случае $\mathcal{C}$ - конечномерное комплексное линейное пространство, снабженное невырожденной кососимметричной билинейной формой.

в) в случае $G\mathcal{D}$ – четномерное комплексное линейное пространство, снабженное симметричной билинейной формой.

Морфизмы из V в W – это во всех трех случаях максимальные изотропные подпространства в $V \oplus W$. Группами автоморфизмов объектов категорий B, C, $G\mathcal{D}$ являются соответственно группы $B_n = O(2n+1, \mathbb{C})$, $C_n = Sp(2n, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}_n = O(2n, \mathbb{C})$. Вместо ортогональной категории $G\mathcal{D}$ нам будет удобнее рассматривать очень близкую к ней категорию $\mathcal{D}$ (см. §I7), группами автоморфизмов ее объектов являются соответственно группы $SO(2n, \mathbb{C})$.

Если мы имеем, например, представления категории C, то мы имеем сразу представления всех симплектических групп $Sp(2n, \mathbb{C})$ при всех n.

Неприводимые голоморфные проективные представления категорий B, C, $\mathcal{D}$ нумеруются диаграммами вида



где a_j – неотрицательные целые числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Чтобы получить, например, представление группы C_n, отвечающее представлению категории C, нужно "отрезать" от диагарраммы Дынкина начальный кусок длины n.

С серией групп A_n связано много различных категорий (см. п.I7.I, I7.3, I7.4). Дело в том, что диаграммы Дынкина типа B, C, $\mathcal{D}$ можно достраивать до бесконечной диаграммы Дынкина лишь одним способом, в случае же A_n можно поочередно добавлять кружочки с разных концов. Из всех этих вариантов самым интересным является категория GA (см. теорему I7.I).

Классификации представлений категорий GA, B, C, $\mathcal{D}$ посвящена глава IУ. В главе У в дополнение к вещественной симплектической категории Sp (из главы I) вводятся категории линейных отношений U и SO^*. Эти три категории связаны с теорией бесконечномерных представлений групп $Sp(2n,\mathbb{R})$, $U(p,q)$, $SO^*(2n)$ со старшим весом примерно так же, как теория представлений категорий B, C, $\mathcal{D}$ связана с теорией представлений групп B_n, C_n, $\mathcal{D}_n$. В §20 - 2I получена классификация унитарных голоморфных представлений этих категорий. В §22 эти категории интерпретируются как категории морфизмов симметрических пространств.

Основные результаты диссертации

I. Построено представление Вейля симплектической категории. Получены достаточные условия ограниченности операторов вида (0.I)

2. Построено спинорное представление ортогональной категории. Получены условия ограниченности операторов Березина в фермионном пространстве Фока.

3. Построена полугруппа Γ - комплексификация группы диффеоморфизмов окружности. Показано, что все представления алгебры Вирасоро со старшим весом интегрируются до представлений полугруппы Γ. Получены явные формулы для представлений полугруп-

пы Γ , а также формулы для сферических функций и характеров представлений.

4. Построены примеры представлений категории $Shtan$.

5. Получена классификация голоморфных неприводимых представлений категорий GA , B , C , D , а также голоморфных унитарных неприводимых представлений категорий Sp , U , SO^*.

Основные результаты диссертации опубликованы в [34], [35], [37], [38]-[41].

Обозначения и терминология.

1. Матрицы и операторы. Пусть K - матрица. Тогда

k_{ij} - ее матричные элементы.

K^t - транспонированная матрица

$\bar{K}$ - матрица с матричными элементами $\bar{k}_{ij}$.

K^* - сопряженная матрица $(K^* = \bar{K}^t)$

$|K| = \sqrt{K^*K}$, см. [49], УI.4.

$\|K\|$ - евклидова норма матрицы (или норма оператора в гильбертовом пространстве), $\|K\|$ равна $\sup \lambda$ по всем λ из спектра $|K|$.

Конечномерный оператор (матрица) K - оператор конечного ранга ($\dim \operatorname{Im} K < \infty$)

Матрица Гильберта-Шмидта - матрица оператора Гильберта-Шмидта (см. [49] .УI.6), т.е $\sum |k_{ij}|^2 < \infty$ или $\operatorname{tr} K^*K < \infty$

Ядерная матрица - матрица ядерного оператора (см. [49] УI.6), т.е оператора со следом $(\operatorname{tr}|K| < \infty)$

Положительный оператор K $(K \geq 0)$ - оператор, в эвклидовом пространстве, удовлетворяющий условию $(Kx, x) \geq 0$ для всех x (см. [49] IУ.4.).

Полярное разложение см. [49], IУ.4.

$\Lambda^n K$, $S^n K$ - внешние и симметрические степени оператора.

2. Категории. Пусть $\mathcal{K}$ - категория. Тогда

$Ob(\mathcal{K})$ - множество (класс) объектов .

$Mor_{\mathcal{K}}(V,W) = Mor(V,W)$ - множество морфизмов из V в W .

$Aut(V)$ - группа автоморфизмов объекта .

$End(V)$ - полугруппа эндоморфизмов V.

Пусть $\mathcal{K}$ - категория. Представлением $T=(T,\tau)$ категории $\mathcal{K}$ мы назовем функтор, который каждому объекту V категории $\mathcal{K}$ ставит в соответствие линейное пространство $T(V)$, а каждому морфизму $P: V\to W$ - отображение $\tau(P): T(V)\to T(W)$, так, что для любых $V, W, Y\in Ob(\mathcal{K})$ и любых $P\in Mor(V,W)$, $Q\in Mor(W,Y)$ выполнено

$$\tau(Q)\tau(P)=c(Q,P)\tau(QP)$$

где $c(Q,P)$ - ненулевое (!) комплексное число.

Конечно $T=(T,\tau)$ следовало бы называть проективным представлением, но так как на протяжении всей диссертации, линейное представление категории нам встретится лишь один раз (замечание I из п.I7.4), то мы будем считать слова "представление" и " "проективное представление" синонимами.

Если нам дано представление $T=(T,\tau)$ категории $\mathcal{K}$, то в каждом пространстве $T(V)$ действуют полугруппа $End(V)$ и группа $Aut(V)\subset End(V)$, т.е. с каждым представлением $\mathcal{K}$ связан набор представлений полугрупп $End(V)$ (и групп $Aut(V)$). Эти представления мы будем называть ограничениями T на группы $Aut(V)$ (и полугруппы $End(V)$)

Конкретные категории: Определения см.

Sp, $\overline{Sp}$	- §2	$\overline{GD}$	- §8
$\overline{GA}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$	- §I0	SpH	- §5
GA, B, C, D	- §I7	U, SO^*	- §20
$Shtan$, $\widetilde{Shtan}$, ...	- §I5		

3. Пространства. $F(H)$ - бозонное пространство Фока

см. §I, $\Lambda(V)$, $\bar{\Lambda}(V)$, Λ, $\bar{\Lambda}$ - фермионное пространство Фока, см.§6.

$\Lambda^n V$, $S^n V$ - внешние и симметрические степени пространства.

H^2 - пространство Харди.

4. Линейные отношения - см. п.2I.

Преобразование Потапова-Гинзбурга - п.2.2.

5. Алгебра Вирасоро $\mathcal{L}$, $Vect$, L_k, ... - см. §II, $\mathcal{D}iff$ - группа аналитических диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию.

6. Римановы поверхности - см. обозначения к главе III.

7. ■ - конец формулировки теоремы, леммы,...

⊠ - конец доказательства

● - конец замечания.