# АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ ХИНЧИН

Александр Яковлевич Хинчин родился 19 июля 1894 г. в селе Кондрово Медынского уезда Калужской губернии (ныне город Кондрово, центр Дзержинского района Калужской области). Его отец был главным инженером на Кондровской бумажной фабрике и среди специалистов бумагоделательного производства пользовался известностью и авторитетом. В Кондрово прошли детские годы Александра Яковлевича, там же он проводил позднее каникулярное время как в период обучения в реальном училище, так и во время университетской жизни. Он обладал живым и общительным характером, дружил со своими сверстниками из среды рабочей молодежи. Увлечение театром передалось его товарищам. Оно было настолько велико, что ими был создан в Кондрово любительский театр. Из устных воспоминаний Александра Яковлевича мне известно, что сам он выполнял обязанности режиссера и актера. Иногда они ставили платные спектакли. На вырученные деньги им удалось организовать несколько поездок в Москву с целью посетить спектакли Художественного театра.

Одновременно годы ранней юности были годами увлечения литературой. Результатом чего было несколько томиков стихов, изданных в период с 1912 по 1917 год. Литературные интересы долго боролись в нем с математическими. Увлечение математикой окончательно победило только в последнем классе реального училища, когда Александр Яковлевич познакомился с основами математического анализа. В значительной мере на окончательный выбор оказало влияние то, что его преподавателем по реальному училищу был один из лучших школьных математиков М. Ф. Берг, задачники которого в ту пору пользовались большой известностью. Несомненно, что увлечение театром и литературой не прошло бесследно и сказалось не только на формировании гражданских качеств Александра Яковлевича, но и на формировании его как одного из самых блестящих лекторов и авторов математической литературы. Как в устном, так и в письменном изложении он умел мастерски сочетать превосходную литературную форму с научной глубиной и строгостью трактовки материала, сохраняя при этом исключительную ясность и отчетливость изложения. Я вспоминаю, что на заседаниях Московского математического общества на его доклады можно было ходить безбоязненно, так как все детали доказательства и основная мысль, которую он желал оттенить, были ясны даже тем, кто совершенно не занимался специальными вопросами, о которых рассказывал Александр Яковлевич.

После окончания реального училища Хинчин поступил в 1911 г. на физико-математический факультет Московского университета. В ту пору профессора Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин начали разработку проблем теории функций действительного переменного и ими были получены в этой области основополагающие результаты. Ряд студентов увлеклись этой теорией и начали с энтузиазмом работать под руководством Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина. Среди них был и А. Я. Хинчин. Первый его самостоятельный научный шаг был вызван работами А. Данжуа о примитивных функциях. В докладе, прочитанном 6 ноября 1914 г. на студенческом математическом кружке, Хинчин предложил естественное для всего духа идей метрической теории функций обобщение понятия производной. Это понятие прочно вошло в арсенал современной науки под наименованием асимптотической производной.

Говорят, что если в точке $x_0$ существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

когда $x$ при стремлении к $x_0$ пробегает значения, принадлежащие некоторому множеству $\varepsilon$, имеющему в точке $x_0$ плотность 1, то этот предел называется асимптотической производной функции $f(x)$ в точке $x_0$. В указанном докладе было показано, что так определенное понятие инвариантно относительно выбора множества $\varepsilon$. Иными словами, если какие-либо два множества $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ имеют в точке $x_0$ плотность 1 и предел (1) существует как для $\varepsilon_1$, так и для $\varepsilon_2$, то оба они равны между собой.

Одновременно А. Я. Хинчин работал с успехом и в других областях математики. Об этом можно судить хотя бы по решению Ученого совета физико-математического факультета от 25.XI 1915 г., в пункте 30 которого говорится: «За сочинение «Бесконечные ряды функций, их сходимость, почленное интегрирование и дифференцирование» золотая медаль присуждена студенту Хинчину».

Понятие асимптотической производной и ее использование для целей обобщения понятия интеграла Лебега было предметом первых научных статей Хинчина. Позднее основная идея этого понятия была широко использована им для всестороннего изучения локального поведения измеримых функций.

Говорят, что некоторое свойство осуществляется в данной точке асимптотически, если оно имеет место после удаления множества, имеющего в ней плотность 0. Хинчин предложил называть функцию $f(x)$ асимптотически направленной в точке $x_0$, если она становится асимптотически убывающей, возрастающей или постоянной. Функция $f(x)$ асимптотически направлена на данном множестве положительной меры, если она направлена асимптотически почти во всех его точках. Основной результат Хинчина, выясняющий строение асимптотически направленных функций, дается следующей теоремой: *чтобы функция $f(x)$ была асимптотически направлена на данном множестве, необходимо и достаточно, чтобы ее значения в этом множестве с точностью до множества произвольно малой меры совпадали со значениями непрерывной функции, обладающей лишь конечным числом максимумов и минимумов.*

Важность понятия асимптотической направленности подчеркивается тем, что функции, обладающие этим свойством, имеют почти всюду на рассматриваемом множестве асимптотическую производную. Условие существования асимптотической производной почти всюду на отрезке было найдено А. Я. Хинчиным еще в заметке [2], напечатанной в 1917 г. Для этого необходимо и достаточно, чтобы данная функция совпадала с непрерывной функцией ограниченной вариации на всем отрезке за исключением, быть может, множества сколь угодно малой меры. Общая структура измеримых функций выявляется следующим предложением А. Я. Хинчина: *всякая измеримая функция, за исключением, возможно, множества меры нуль, либо имеет асимптотическую производную, либо оба ее верхних асимптотических производных числа равны* $+\infty$, *а оба нижних асимптотических производных числа равны* $-\infty$.

Вскоре после опубликования в журнале «Математический сборник» работы «Исследования о строении измеримых функций» редакция журнала «Fundamenta Mathematica» опубликовала ее полный перевод на французский язык. Именно в этой работе и производился только что указанный анализ свойств измеримых функций.

Увлечение исследованием глубоких свойств измеримых функций не прошло бесследно ни для математики, ни для выбора последующих направлений работы Хинчина: развитие идей Хинчина, особенно для функций многих переменных, осуществляется рядом ученых и в наши дни; дальнейшие работы самого Хинчина как в теории чисел, так и в теории вероятностей в значительной степени проводились под влиянием идей и методов теории функций действительного переменного.

Своевременно мы не сказали, что способности Александра Яковлевича были замечены в университете, и после окончания университета в 1916 г. он был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Его педагогическая работа началась в 1918 г. преподаванием в Московском женском политехническом институте. Через год его пригласили профессором в Политехнический институт, который был организован М. В. Фрунзе в Иваново-Вознесенске. Вскоре был создан Иваново-Вознесенский педагогический институт и деканом физико-математического факультета был избран А. Я. Хинчин. Он уделял много внимания приему студентов, организации педагогического процесса, популяризации научных знаний. Его публичные лекции на разнообразные темы — математика, психология, литература — пользовались огромным успехом. В тридцатые годы в Иваново-Вознесенске мне об этом с увлечением рассказывали те, кто стремился не пропускать публичных лекций Александра Яковлевича.

В 1922 г. в МГУ был организован Научно-исследовательский институт математики и механики. С момента его организации А. Я. Хинчин был приглашен в качестве научного сотрудника. Некоторое время он совмещал эту работу с работой в Иваново-Вознесенске. Потом он заведовал кафедрой математики в Педагогическом институте им. Либкнехта. С 1927 г. Александр Яковлевич получил профессуру в Московском университете и окончательно перешел туда на работу. С тех пор его деятельность неразрывными узами связана с университетом: он заведовал кафедрой теории вероятностей, затем кафедрой математического анализа, был директором НИИ математики и механики МГУ (1932—1934). В Московском университете А. Я. Хинчин заслуженно пользовался славой одного из самых блестящих лекторов. И действительно, его лекции отличались не только высокими научными качествами, но также литературной отточенностью, исключительной доходчивостью и изяществом изложения. Немудрено, что лекции Александра Яковлевича привлекали к нему многочисленных слушателей. Ряд математиков Советского Союза счастливы сознавать себя его учениками и проводить в жизнь его научные и методические принципы. Я также счастлив тем, что мне довелось быть одним из самых близких, если не ближайшим учеником А. Я. Хинчина. Навсегда в моей памяти сохранится та теплота, с которой он относился к людям, и то постоянное желание оказать действительную помощь тем, кто работал и подавал надежды.

Для формирования дальнейших научных интересов А. Я. Хинчина исключительно большое значение имеют годы 1922—1925. Именно в этот период им была начата разработка двух направлений исследований широкого математического значения. Одновременно это означало распространение интересов московской школы теории функций действительного переменного на новые разделы математической мысли. С одной стороны — на метрическую теорию чисел, а с другой — на теорию вероятностей. В зачаточной форме оба эти направления — использование идей, понятий и методов теории множеств и теории функций для изучения метрических свойств различных классов иррациональных чисел, а также в теории вероятностей — можно найти в работах Э. Бореля, относящихся к 1909—1917 гг. Вся дальнейшая собственно математическая деятельность Хинчина является в значительной мере синтезом этих двух направлений исследований: зачастую теоретико-вероятностные идеи наводили на мысли теоретико-числового характера, так же как и идеи метрической теории чисел приводили к результатам в области теории вероятностей.

Чтобы составить представление о характере теоретико-числовых результатов А. Я. Хинчина, приведем несколько формулировок доказанных им теорем. В работе [27], относящейся к 1926 г., содержится доказательство следующего факта: *пусть* $\varphi(t)$ *положительная функция с монотонно убывающим произведением* $t^2\varphi(t)$. *Неравенство*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leqslant \varphi(q)$$

*для почти всех* $\alpha$ *имеет бесконечное число решений в целых числах* $p$ *и* $q$ *тогда и только тогда, когда расходится интеграл*

$$\int_0^\infty t\ \varphi(t)\ dt.$$

Ряд законченных изящных результатов А. Я. Хинчина относится к метрической теории непрерывных дробей. Мы ограничимся здесь формулировкой двух таких теорем [75] и [77]. Пусть $a_1$, $a_2$,... неполные частные разложения иррационального числа $\alpha$ в непрерывную дробь, а $q_1$, $q_2$,... — знаменатели подходящих дробей этого разложения. Тогда *для почти всех* $\alpha$ *существуют пределы*

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_n}$$

и

$$D = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n},$$

где $C$ и $D$—*абсолютные постоянные* ($C$=2,6...; как позднее нашел П. Леви, $\ln D = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}$). С точки зрения теории вероятностей эти теоремы можно трактовать как асимптотические свойства для сумм членов последовательностей слабо зависимых величин. К этому же кругу идей относится и известный результат Хинчина под названием закона повторного логарифма. Именно в 1923 г. [10] ему удалось уточнить одну оценку частоты распределения нулей и единиц в двоичном разложении действительных чисел, которая была получена в 1914 г. Харди и Литтльвудом. Если через $\mu(n)$ обозначить уклонение числа единиц, находящихся на первых местах разложения, от $\frac{n}{2}$, то, как они обнаружили, для почти всех чисел $\mu(n)=O(\sqrt{n \ln n})$. В работе [10] удалось доказать, что эту оценку можно заменить на более точную: для почти всех чисел $\mu(n)=O(\sqrt{n \ln \ln n})$. Через год появилась статья [14], в которой Хинчин трактовал эту задачу как задачу теории вероятностей. В терминах теории чисел мы можем сформулировать этот окончательный результат так: *для почти всех чисел $\alpha$ имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mu(n)}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1.$$

Это равенство и составляет знаменитый закон повторного логарифма, которому позднее было посвящено большое число превосходных исследований многих ученых. Я хочу сейчас напомнить лишь об одном результате, уточняющем закон повторного логарифма в духе первой из приведенных мной теорем теории чисел. Этот результат был получен уже в начале сороковых годов Эрдешем [1] и Феллером [2] на основе предшествовавшей работы И. Г. Петровского [3], посвященной граничным задачам для уравнения теплопроводности.

Вопрос можно поставить так: найти все те функции $\varphi(n)$, для которых неравенство

$$\mu(n) < \varphi(n)$$

[1] P. Erdös, On the law of the iterated logarithm, Ann. of Math, 43, 419—436, 1942.

[2] W. Feller, The general form of the so-called law of the iterated logarithm, Trans. Amer. Math. Soc. 54, N 3, 373—402, 1943.

[3] I. Petrowsky, Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Compos. Math. 1. 383—419, 1935.

выполняется для почти всех чисел $\alpha$ при всех $n$, за исключением, быть может, конечного их числа. Из результата Хинчина вытекает лишь, что условие

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{2n \ln\ln n}} > 1$$

достаточно, а условие

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{2n \ln\ln n}} \geqslant 1$$

необходимо. Необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $\varphi(n)$, состоит в сходимости интеграла.

$$\int_{A}^{\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) e^{-\frac{\varphi^2(t)}{2}} dt,$$

$A > 0$ любое.

Если говорить об исследованиях А. Я. Хинчина в области неметрических задач теории чисел, то в первую очередь следует указать на его работы по теории диофантовых приближений и на теорему о сложении последовательностей целых чисел [53], [99], [105]. Эта последняя теорема состоит в следующем: *пусть $\varphi$ — последовательность натуральных чисел, $\varphi(n)$ — число членов этой последовательности, которые не превосходят $n$.* Назовем плотностью последовательности $\varphi$ и обозначим через $D(\varphi)$ нижнюю грань чисел $\frac{\varphi(n)}{n}$. Суммой последовательностей $(\varphi_1)$, $(\varphi_2)$,..., $(\varphi_k)$ называется последовательность чисел $a_1+a_2+...+a_k$, где каждое $a_i$ есть либо нуль, либо число последовательности $\varphi_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Хинчин доказал, что *если*

$$\sum_{i=1}^{k} D(\varphi_i) \leqslant 1,$$

то

$$D\left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} D(\varphi_i)$$

для случая последовательностей с равными плотностями. Опубликование этого результата привлекло внимание многих математиков и вызвало многочисленные попытки распространить его на последовательности с разными плотностями. Долгое время, однако, проблема не поддавалась усилиям. И лишь в 1942 г. Манну, а через год Артину и Шерку удалось найти полное ее решение.

Среди достижений А. Я. Хинчина в теории диофантовых приближений укажем на принадлежащий ему важный принцип переноса, который связывает решение линейных неравенств в целых числах с диофантовыми приближениями коэффициентов аппроксимирующих линейных форм. Говоря о работах Александра Яковлевича в области теории чисел, нельзя не упомянуть превосходные популярные книги, написанные им в различные годы. Среди них я хотел бы особо отметить небольшие книжки «Цепные дроби» [73] и «Три жемчужины теории чисел» [120], переведенные на многие языки мира.

Как ни значителен вклад А. Я. Хинчина в теорию функций и теорию чисел, все же основная его роль в прогрессе математики связана с теорией вероятностей. Оттолкнувшись первоначально от задач, связанных с теорией чисел (закон повторного логарифма), и теории функций (сходимость рядов из независимых случайных величин), он постепенно включал в орбиту своих интересов все больший и больший круг проблем теории вероятностей. Более того, он привлек к разработке ее проблем многих молодых московских математиков, положив тем самым начало московской школе теории вероятностей.

Вслед за работами, посвященными закону повторного логарифма и суммированию рядов со случайными членами, последовали труды А. Я. Хинчина, посвященные классическим проблемам суммирования независимых случайных величин. Среди полученных результатов я хотел бы выделить исключительно прозрачное условие применимости закона больших чисел в случае независимых одинаково распределенных слагаемых, которое сводится к существованию конечного математического ожидания [44]. Далее нужно отметить плодотворное понятие относительной устойчивости сумм [74], которое оказалось в самой близкой связи с формулировкой окончательных условий сходимости нормированных сумм независимых слагаемых к нормальному распределению. Для случая одинаково распределенных слагаемых А. Я. Хинчину удалось одновременно с П. Леви и В. Феллером и независимо от них найти необходимые и достаточные условия сходимости к нормальному закону [79]. Особо нужно отметить работы, которые можно считать началом современной проблематики «больших отклонений» [47] и [48]. К этому же кругу идей мы должны отнести построение А. Я. Хинчиным общей теории предельных распределений для сумм независимых случайных величин [91]. Основное предложение развитой им теории может быть сформулировано так: *класс предельных распределений для сумм независимых, бесконечно малых случайных величин совпадает с классом безгранично делимых распределений.* Доказательство этого факта, а также других предложений теории суммирования потребовало развития и приведения в порядок теории безгранично делимых распределений, незадолго перед тем введенных в рассмотрение Бруно де Финетти и А. Н. Колмогоровым.

Теория суммирования трижды вдохновляла А. Я. Хинчина на написание монографий. Первая монография на эту тему была им издана в 1927 г. [35], после того как он прочел в Московском университете специальный курс на эту тему. Вторая монография [65] связала классические проблемы суммирования с теорией марковских процессов и исследованиями, незадолго до того законченными А. Н. Колмогоровым и И. Г. Петровским. Третья монография [92] давала стройное изложение общих предельных теорем для сумм независимых слагаемых и их применение к классической задаче о сходимости нормированных сумм к нормальному закону. Созданию этой книги также предшествовало чтение специального курса в Московском университете. Этот курс привлек тогда к теории суммирования интересы А. А. Боброва, Б. В. Гнеденко, Д. А. Райкова.

В непосредственной связи с теорией суммирования находятся работы Хинчина по арифметике законов распределения, в которых исследуются вопросы представления распределений в виде композиции (произведения) распределений. Среди полученных Хинчиным результатов отметим следующие: *каждое распределение разлагается в произведение безгранично делимого и сходящегося произведения конечной или счетной последователь-*

*ности неразложимых распределений; деление функций распределения, вообще говоря, неоднозначно* (в силу одного примера Б. В. Гнеденко). К последнему предложению примыкают работы М. Г. Крейна по продолжению эрмитово-определенных функционалов. Исследования А. Я. Хинчина по арифметике законов распределения вызвали к жизни ряд работ П. Леви, Д. А. Райкова, Дюге и в последнее время Ю. В. Линника.

Интерес к философским и методологическим вопросам, который А. Я. Хинчин проявлял еще в период школьного обучения, привел его к ряду публикаций по философским вопросам математики [30], [38], [43], [50], [141], [152]. В то же время размышления о роли математики в деле познания закономерностей природы ввели его в проблематику физической статистики [51]. Вопросы статистической физики с этого времени заняли большое место в творчестве А. Я. Хинчина. И, собственно, все, чем он ни занимался позднее в теории вероятностей, так или иначе находило отклик в его исследованиях по статистической физике. Это относится и к его занятиям предельными распределениями для сумм независимых случайных величин, и случайными процессами марковского типа, и к развитой им теории стационарных случайных процессов. В личных беседах он постоянно подчеркивал, что именно размышления над вопросами статистической физики натолкнули его на идею рассмотрения того класса случайных процессов, которые теперь получили наименование стационарных.

Несомненно, что в развитии теории вероятностей за последние пятьдесят лет мысль об изучении случайных процессов является одной из самых плодотворных и оказавших наибольшее влияние не только на структуру всей этой ветви математики, но и на установление многочисленных глубоких связей с самыми разнообразными естественнонаучными и техническими дисциплинами. Идея рассмотрения стационарных процессов оказалась исключительно важной, а роль А. Я. Хинчина в оформлении начал теории стационарных случайных процессов исключительно большой. В некоторой мере необходимость рассмотрения такого класса процессов начала уже широко ощущаться в науке. При изучении задач геофизики такие ученые, как Б. Тейлор и Келлер, приблизились к понятию стационарного процесса. Е. Е. Слуцкий на почве анализа статистических рядов пришел к мысли о том, что определенного типа процессы (являющиеся частным случаем стационарных) способны в известном смысле имитировать поведение периодических и почти периодических процессов. В работе [52], а позднее в [60] Хинчиным был установлен ряд теорем типа закона больших чисел для стационарных последовательностей. В 1933 г. им были даны упрощенные доказательства теорем статистической динамики (также типа закона больших чисел), ранее найденных Купманом и Дж. фон Нейманом. Основные его успехи в теории стационарных процессов связаны, однако, с двумя другими его статьями. В первой было дано широкое обобщение известной теоремы Г. Биркхофа, доказанной с использованием многочисленных специальных допущений лишь для динамических систем с фазовым пространством в виде конечно-мерного многообразия. Именно в [58] была дана формулировка и приведено полное доказательство теоремы, которая теперь заслуженно получила название теоремы Биркхофа—Хинчина. В случае дискретного времени она звучит так: *если последовательность случайных величин*

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ldots$$

*стационарна и математическое ожидание* $\xi_n$ *конечно, то с вероятностью единица существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ .\ \ .\ \ .\ + \xi_n).$$

В статье [67] были заложены основы современной спектральной теории стационарных процессов. Здесь же были даны определения стационарных (в широком и узком смыслах) случайных процессов. Указанные результаты А. Я. Хинчина продолжают играть в теории стационарных процессов центральную роль, несмотря на то, что со дня их получения прошло более двадцати пяти лет.

Начиная с 1929 г. А. Я. Хинчин неоднократно возвращался к рассмотрению проблем статистической физики. Только что говорилось о том, как эти его интересы повлияли на занятия теорией стационарных случайных процессов. С другой стороны, его исследования в области предельных теорем для сумм привели к разработке метода получения основных теорем статистической физики. Начиная с 1941 г. он систематически развивал ту идею, что основные математические задачи статистической физики могут быть сведены к хорошо разработанному аппарату предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Особую роль при этом играют локальные предельные теоремы. В значительной степени под влиянием этого убеждения Хинчина в последние 15 лет так оживился интерес к локальным предельным теоремам. Эти его идеи широко известны по прекрасным монографиям [113], [132], [136], первые две из которых переведены и изданы в ряде стран, в том числе в Германии и США.

Последний период творческой деятельности Хинчина падает на годы 1953—1956. Два типа задач занимали его в это время. С одной стороны, он увлекся новой областью — теорией информации, возникшей в трудах в первую очередь К. Шеннона. Здесь его привлекли вопросы логического упорядочения доказательств, данных творцами теории информации без достаточно строгих обоснований. Эти работы Хинчина [143] и [150] благодаря немецкому и английскому переводам сделались легко доступными для ознакомления не только советским читателям.

С другой стороны, он много внимания уделял вопросам теории очередей или, как предложил ее называть Хинчин, теории массового обслуживания. Интерес к стоящим здесь проблемам возник у него еще в начале тридцатых годов, когда он в результате общественной деятельности в качестве депутата Моссовета оказался тесно связан с работниками московской телефонной сети. Именно к этому времени относятся его исследования «Математическая теория стационарной очереди» [57] и «О среднем времени простоя» [59], достаточно хорошо известные специалистам.

В последних работах его увлекали не отдельные частные задачи теории обслуживания, а изучение общих проблем, в первую очередь построение теории входящего потока требований[1]. В значительной мере именно этой задаче посвящена его последняя монография [146] и две

[1] Если не считать работы [155].— *Б. Г.*

последние математические работы [148], [149]. Нужно заметить, что это направление исследований имеет далеко не только теоретический интерес. Рассмотренные Хинчиным вопросы имеют непосредственное отношение к широкому спектру важнейших технических и научных применений.

Облик ученого будет обеднен, если мы не дополним его еще одной чертой: постоянным интересом к вопросам преподавания как в высших учебных заведениях, так и в средней школе. Свои педагогические взгляды он излагал в учебниках, монографиях, популярных книгах, специальных статьях, в рецензиях на книги других авторов. Неоднократно он выступал с докладами по наиболее животрепещущим методическим, воспитательным и общепедагогическим вопросам перед учительской общественностью, на заседаниях Учебно-методического Совета Наркомпроса РСФСР, в Кабинете математики Научно-исследовательского института школ Наркомпроса РСФСР, а позднее в Академии педагогических наук РСФСР.

В течение 1938—1940 гг. Александр Яковлевич руководил физико-математической секцией Учебно-методического совета Наркомпроса РСФСР и Кабинетом математики в НИИ школ Наркомпроса РСФСР. Позднее, с момента организации Академии педагогических наук РСФСР, он вошел в число ее действительных членов и был избран членом Президиума. Он принял живое и деятельное участие в ее работе путем привлечения к работе квалифицированных ученых — математиков и методистов, — разработки планов и осуществления издательской деятельности, организации и проведения «Педагогических чтений». Нельзя также обойти молчанием активную работу Александра Яковлевича по организации авторского коллектива для создания настольной книги по математике «Энциклопедия элементарной математики». Известно, что в вышедших томах ему принадлежит не только роль редактора, но и роль автора превосходной статьи «Элементы теории чисел».

Судьбы математического образования в советской средней школе сильно волновали Александра Яковлевича. Видя некоторые недостатки школьного математического образования, он не считал возможным ограничиваться только беспощадной их критикой, но стремился делом помочь их искоренению. С большими докладами по этим вопросам он выступал еще в 1938 г. на заседании Московского математического общества, а затем в 1943 г.— на Ученом совете Математического института им. В. А. Стеклова. Тогда же им была подготовлена большая докладная записка, позднее переданная в Наркомпрос РСФСР. В этой записке вскрывались недостатки программ, дефекты учебников, пороки в подготовке учителей и намечались важные мероприятия по их устранению. Она не устарела до сих пор и может считаться в некотором смысле программным документом.

Основные методические принципы, которых придерживался Александр Яковлевич, нашли, пожалуй, наиболее полное выражение в двух его произведениях — брошюре «Основные математические понятия математики и математические определения в средней школе» и в книге «Восемь лекций по математическому анализу». В несколько суммарной форме эти принципы можно сформулировать так:

1. Математические знания должны излагаться в соответствии с их пониманием и трактовкой современной наукой. В соответствии с возрастными особенностями учащихся, возможно, необходимо давать эти представления в несколько упрощенном виде, но школьная трактовка не должна искажать научную трактовку, придавать ей черты, противоречащие научному пониманию.

2. Замена отчетливых и точных определений, формулировок и рассуждений расплывчатыми, не имеющими точного смысла и при последовательном использовании неизбежно приводящими к логическим неувязкам, ни в коем случае не может способствовать облегчению понимания. «Мыслить расплывчато не может быть делом более легким, чем мыслить четко».

3. Обычное построение школьного курса изобилует такими понятиями, которых не знает математическая наука или которые она давно отвергла. В подавляющем большинстве случаев введение этих, изобретенных специально для школы и неупотребительных в науке, понятий не имеет за собой ничего, кроме слепой традиции; вызываемое ими ненужное обременение курса методически ничем не оправдано и приносит только вред.

4. Преподавание должно быть построено так, чтобы не сковывать творческие силы учащихся, а помогать

развитию инициативы как в разыскании методов доказательств, так и способов решения задач.

5. При изложении не следует размениваться на мелочи и стремиться излагать со всеми подробностями второстепенные детали. В то же время при освещении какого-либо понятия, метода или идеи, имеющих ведущее принципиальное значение, не следует жалеть времени, стараясь всеми средствами, путем самых разнородных описаний, наглядных образов возможно полнее и ярче внедрить основополагающие моменты в сознание слушателей и читателей.

Такой подход даст возможность воспитать в учащемся способность впоследствии при самостоятельной работе отделять главное от второстепенного и малозначащего.

Как часто случается, учащийся за деталями теряет общее представление о курсе, о содержании и назначении науки, переставая видеть лес за деревьями. А между тем всякий знает, «как полезно иногда оторваться от деревьев и поглядеть на лес».

Тот, кто хотя бы раз слышал в изложении Александра Яковлевича либо полный математический курс, либо даже научный доклад, помнит ту исключительную тщательность формулировок, исключительное внимание к описанию того места, которое занимает излагаемый предмет в системе математических знаний. И слушатель невольно забывал, что ему до последнего момента были чужды эти идеи. Он начинал чувствовать важность и значительность того, о чем рассказывал А. Я. Хинчин и уже не был способен потерять ни руководящей идеи, ни нити изложения, ни особенностей применяемого метода. Слушатель начинал жить услышанным. Он испытывал удовлетворение от того, что ему удалось подняться еще на ступень в научном познании и разобраться в сложном взаимоотношении понятий, идей и методов. Быть может, отчасти, в этом успехе А. Я. Хинчина как педагога и создателя научного направления и в теории вероятностей, и в теории чисел, и в теории функций действительного переменного, и в педагогике.

В жизни Хинчин был исключительно требователен к себе. Он много внимания уделял научному воспитанию учеников, поощряя всякое проявление разумной инициативы. Я счастлив, что за время пребывания в аспирантуре и позднейшей совместной работы мне довелось наблюдать его в служебной и домашней обстановке. Лучшим отдыхом для Александра Яковлевича была прогулка в лес. Но и в это время он не переставал думать о любимом деле. Так, я помню, что в летние месяцы 1936 и 1937 гг. во время совместных прогулок у него появились интересные идеи в вопросах арифметики законов распределения. Тогда же мы много беседовали о педагогических проблемах.

Он не признавал недоделанных дел и никогда не позволял себе перекладывать на плечи других порученную ему работу. Александр Яковлевич не стремился к внешним почестям и, будучи ученым с мировым именем, членом-корреспондентом Академии наук СССР, академиком и членом Президиума Академии педагогических наук РСФСР, продолжал вести скромный образ жизни, уважая людей за их внутренние качества, а не за занимаемое ими положение. Он искренне радовался каждому крупному успеху науки, появлению каждого нового молодого дарования. Я вспоминаю, как он гордился тем, что в Москве у В. В. Степанова появился блестящий молодой ученик М. В. Бебутов, а во Франции — талантливый представитель теории вероятностей В. Дёблин, и как он переживал их преждевременную гибель [1].

18 ноября 1959 года Хинчин скончался после тяжелой и продолжительной болезни. Советская математика понесла тяжелую утрату.

Академик АН УССР
*Б. В. Гнеденко*

---

[1] М. В. Бебутов погиб в 1941 г. на фронте; В. Дёблин был повешен гитлеровцами 22.VI 1940 г. за вооруженную борьбу с гитлеризмом.

# СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ А. Я. ХИНЧИНА[1]

**1916**

1. Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **162**, 287—290.

**1917**

2. Sur. la dérivationasymptotique, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **164**, 142—145.

**1918**

3. О процессе интегрирования Denjoy, Матем. сб. **30**, 548—557.

**1921**

4. Sur la théorie de l'intégrale de M. Denjoy, Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та **3**, 49—51.

**1922**

5. Новое доказательство основной теоремы метрической теории множеств, Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та **6**, 39—41.
6. Об одном свойстве непрерывных дробей и его арифметических приложениях, Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та **5**, 27—41.
7. К вопросу о представлении числа в виде суммы двух простых чисел, Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та **5**, 42—48.

**1923**

8. Sur les suites des fonctions analytiques bornées dans leur ensemble. Fund. Math. **4**, 72—75.
9. Das Stetigkeitsaxiom des Linearkontinuus als Induktionsprinzip betrachtet, Fund. Math. **4**, 164—166.
10. Ueber dyadische Brüche, Math. Zeitschr **18**, 109—116.
11. Ein Satz über Kettenbrüche mit arithmetischen Anwendungen, Math, Zeitschr. **18**, 289—306.

**1924**

12. О последовательностях аналитических функций, Матем. сб. **31**, 147—151.
13. Исследования о строении измеримых функций, гл. 1, Матем. сб. **31**, 265—285.
14. Sur un théorème général relatif aux probabilitités dénombrable. Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **178**, 617—619.
15. Ueber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. **6**, 9—20.
16. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Ann. **92**, 115—125.

---

[1] В сборнике «Математика в СССР за сорок лет» сверх этого списка указаны под номерами (108), (113), (115), (132), (142) резюме докладов в Московском математическом обществе, содержание которых вошло в последующие более полные публикации, и работа (1933) «Теория вероятностей», Сборник «Математика в СССР за 15 лет», М.—Л., (1933).

**1925**

17. Об одном вопросе теории диофантовых приближений. Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та 8, вып. 2, 32—37.
18. Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron, Math. Zeitschr. **22**, 274—284.
19. Исследования о строении измеримых функций, гл. 2, Матем. сб. **32**, 377—433.
20. Ueber die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen. Матем. сб. **32**, 203—219.
21. Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Матем. сб. **32**, 277—288.
22. Bemerkungen zur metrischen Theorie der Kettenbrüche, Матем. сб. **32**, 326—329.
23. Bemerkung zu meiner Abhandlung "Ein Satz über Kettenbrüche mit arithmetischen Anwendungen", Math. Zeitschr. **22**, 316.
24. О петербургской игре, Матем. сб. **32**, 330—341.
25. Ueber Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Матем. сб. **32**, 668—677 (совм. с А. Н. Колмогоровым).
26. Ueber die Anwendbarkeitsgrenzen des Tschebycheffschen Satzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Матем. сб. **32**, 678—688.

**1926.**

27. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z. **24**, 706—714.
28. Ueber das Gesetz der grossen Zahlen, Math, Ann. **96**, 152—158.
29. Ueber eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Rend. Circ. Mat. Palermo **50**, 170—195.
30. Идея интуиционизма и борьба за предмет в современной математике; Вестник Комм. Акад. **16**, 184—192.

**1927**

31. Recherches sur la structure des fonctions mesurables, Fund. Math. **9**, 212—279.
32. Ueber diophantische Approximationen höheren Grades, Матем. сб. **34**, 109—112.
33. Диофантовы приближения, Труды Всероссийского матем. съезда, 131—137.
34. Великая теорема Ферма, Госиздат, 1927; 2-е изд., М.—Л., ГТТИ, 1932, 1—52.
35. Основные законы теории вероятностей, Ассоц. ин-тов физмат. ф-та МГУ, 1927; 2-е изд., М—Л., ГТТИ, 1932, 1—82.

**1928.**

36. Sur la loi forte des grands nombres, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **186**, 285—287.
37. Objection á une note de M. M. Barzin et Errera, Bull. Acad. Royale de Belgique, class de Sc., 5 sér. **14**, 223—224.
38. Усиленный закон больших чисел и его значение для математической статистики, Вестник статистики **29**, 123—128.
39. Begründung der Normalkorrelation nach der Lindebergschen Methode, Изв. Ассоц. научно-исследов. ин-тов МГУ **1**, 37—45
40. Ueber die Stabilität zweidimensionaler Verteilungsgesetze, Матем. сб. **35**, 19—23.
41. Ueber die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen, Матем. сб. **35**, 31—33.

42. Теория чисел; очерк развития за 1917—1927 гг., Матем. сб. **35**, доп. выпуск, 1—4.

**1929**

43. Роль и характер индукции в математике, Вестн. Комм. Акад. **1**, 5—7.
44. Sur la loi des grands nombres, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 188, 477—479.
45. Sur une généralisation des quelques formules classiques, C. R. Acad. Sci. (Paris) **188**, 532—534.
46. Über ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. **29**, 746—752.
47. Ueber die positiven und negativen Abweichungen des arithmetischen Mittels, Math. Ann. **101**, 381—385.
48. Ueber einen neuen Grenzwersatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. **101**, 745—752.
49. Ueber Anwendbarkeitskriterien für das Gesetz der grossen Zahlen, Матем. сб. **36**, 78—80.
50. Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики, УФН **9**, 141—166.

**1930**

51. Die Maxwell-Bolzmannsche Energieverteilung als Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Труды семинара по теории вероятн. и матем. статистике при МГУ **1**, 1—11.

**1932**

52. Sulla successioni stazionarie di eventi, Giorn. Ist. Ital. d. Attuari, Anno **III**, 3, 267—272.
53. Zur additiven Zahlentheorie, Матем. сб. **39** : 3, 27—34.
54. Ueber eine Ungleichung, Матем. сб. **39** : 3, 35—39.
55. Sur les classes d'événements équivalents. Матем. сб. **39** : 3, 40—43
56. Remarques sur les suites d'événements obéissants á la loi des grands nombres, Матем. сб. **39**, 115—119.
57. Математическая теория стационарной очереди, Матем. сб. **39** : 4, 73—84.
58. Zur Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, Math. Ann. **107**, 485—488.

**1933**

59. О среднем времени простоя станков. Матем. сб. **40**, 119—123.
60 Ueber stazionäre Reihen zufälliger Variablen. Матем. сб. **40**, 124—128.
61. Ueber ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Матем. сб. **40**, 180—189.
62. Zur mathematischen Bergründung der statistischen Mechanik, Zeitschr. für angew. Math. und Mech. **13**, 101—103.
63. Детерминанты Грама для стационарных рядов., Учен. зап. МГУ, **1**, 3—5 (совместно с А. О. Гельфондом).
64. The method of spectral reduction in classical dynamics, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **19**, 567—573.
65. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, 1933; ОНТИ, 1936.

**1934**

66. Zur mathematischer Begründung der Maxwell—Boltzmannschen Energieverteilung, Учен. зап. МГУ **2**, 35—38.

67. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Ann. **109**, 604—615; УМН, вып. V, 42—51 (1938).
68. Eine Verschärfung des Poincaréschen "Wiederkehrsatzes", Comp. Math. **1**, 177—179.
69. Fourierkoeffizienten längs Bahn im Phasenraum, Матем. сб. **41**. 14—16.
70. Теория вероятностей в дореволюционной России и в Советском Союзе, Фронт науки и техники **7**, 36—46.
71. Eine arithmetische Eigenschaft summierbaren Funktionen. Матем. сб. **41**, 11—13.
72. Случай, и как наука с ним справляется, ОНТИ.

**1935**

73. Цепные дроби, ОНТИ, 1935; 2-е изд. ГТТИ, 1949, 3-е изд. Физматгиз, 1961; чешское изд. 1952.
74. Su una legge die grand nümeri generalizzata, Giornale Ist. Ital. Attuari **6**, 371—393.
75. Metrische Kettenbrüchproblem, Comp. Math. **1**, 361—382.
76. Neuer Beweis und Verallgemeinerung eines Hurwitzschen Satzes. Math. Ann. **111**, 631—637.

**1936**

77. Zur metrischen Kettenbrüchtheorie, Comp. Math. **3**, 276—285.
78. Ein Satz über lineare diophantische Approximationen, Math. Ann. **113**, 398—415.
79. Sul dominio di attrazione della legge di Gauss, Giornale Ist, Ital. Attuari **7**, 3—18.
80. Метрические задачи теории иррациональных чисел, УМН, вып. I, 7—32.

**1937**

81. Новый вывод одной формулы П. Леви, Бюлл. МГУ **1**. вып. 1, 1—5.
82. Об арифметике законов распределения. Бюлл. МГУ **1**, вып. 1, 6—17.
83. Об одном признаке для характеристических функций, Бюлл. МГУ **1** : 5, 1—3.
84. Инвариантные классы законов распределения, Бюлл. МГУ **1** : 5, 4—5.
85. Примеры случайных величин, подчиняющихся устойчивым законам распределения, Бюлл. МГУ **1** : 5, 6—9.
86. Sur les lois stables. Compt. Rend. Akad. Sci. (Paris) **202**, 374—376 (совм. с P. Lévy).
87. Ueber die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen, Acta Arithm. **2**, 161—172.
88. Ueber singuläre Zahlensysteme, Compos. Math. **4**, 424—431.
89. Abschätzungen beim kroneckerschen Approximationensatz, Bull. Inst. Math Tomsk **1**, 263—265.
90. Ueber Klassenkonvergenz von Verteilungsgesetzen, Bull. Inst. Math., Tomsk **1**, 258—262.
91. Zur Theorie der unbeschränktteilbaren Verteilungsgesetze, Матем. сб. **2** (44), 79—119.

**1938**

92. Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ГОНТИ, 1—116.

93. Две теоремы о стохастических процессах с однотипными приращениями, Матем. сб. **3** (45), 577—584.
94. Zur Methode der willkürlichen Funktionen, Матем. сб. **3** (45), 585—589.
95. Об унимодальных распределениях, Изв. Томск, матем. ин-та **2**, 1—7.
96. Теория затухающих спонтанных эффектов, Изв. АН, сер. матем. **3**, 313—332.
97. Введение иррациональных чисел, Материалы к совещанию учителей, Наркомпрос РСФСР, 9—12; Матем. в школе, № **3**, 1939, 32—34.
98. Комплексные числа (совместно с П. Я. Дорф); Материалы к совещанию учителей, Наркомпрос РСФСР, 39—47.

**1939**

99. О сложении последовательностей натуральных чисел, Матем. сб. **6** (48), 161—166.
100. О локальном росте однородных стохастических процессов без последействия, Изв. АН, серия матем., 487—508.
101. О преподавании математики, Молодая Гвардия **9**, 142—150. Матем. в школе **6**, 1—7.
102. Основные понятия математики в средней школе. Математика в школе **4**, 4—22, **5**, 3—10.
103. Всестороннее, реальное образование советской молодежи; Математика в школе **6**, 1—7.

**1940**

104. Основные математические понятия и определения в средней школе, Учпедгиз, 1—51.
105. О сложении последовательностей натуральных чисел, УМН, вып. VII, 57—61.

**1941**

106. О математических определениях в средней школе, Матем. в школе **1** (1941), 1—10.
107. О понятии отношения двух чисел, Матем. в школе **2** (1941), 13—15
108. Об аналитических методах статистической механики, ДАН **33**, 438—441.
109. Средние значения сумматорных функций в статистической механике, ДАН **33**, 442—445.
110. О межмолекулярной корреляции, ДАН **33**, 487—490.

**1942**

111. Законы распределения сумматорных функций в статистической механике, ДАН **34**, 61—63.

**1943**

112. Sur un cas de corrélation a posteriori, Матем. сб. **12** (54), 185—196.
113. Математические основания статистической механики, Гостехиздат, 1—126, США, 1950.
114. Об эргодической проблеме квантовой механики, Изв. АН, сер. матем. **7**, 167—184.
115. Конвексные функции и эволюционные теоремы статистической механики, Изв. АН, сер. матем. **7**, 111—122.

116. Восемь лекций по математическому анализу. Гостехиздат; 2-е изд., 1946; 3-е изд., 1948; украинское изд., 1948; румынское изд., 1948.

**1946**

117. О задаче Чебышева, Изв. АН, сер. матем. **10**, 281—294.
118. Элементарное введение в теорию вероятностей, Гостехиздат; 2-е изд., 1950; 3-е изд., 1952; 4-е изд., 1957; 5-е изд. 1961; польские изд., 1952, 1954; румынское изд., 1953; чешское изд., 1954; венгерское изд., 1954; немецкое изд., 1955; китайское изд., 1958; французское изд., 1960; аргентинское изд., 1960; американское изд. 1961 (совместно с Б. В. Гнеденко).
119. О формализме в школьном преподавании математики. Советская педагогика, № **11—12** (1944), 21—27, Изв. Акад. пед. наук РСФСР, № **4** (1946), 7—20.

**1947**

120. Три жемчужины теории чисел, Гостехиздат; 2-е изд., 1949; украинское изд,. 1949; немецкое изд., 1950; японское изд., 1956.
121. Две теоремы, связанные с задачей Чебышева, Изв. АН, сер. матем. **11**, 105—110.
122. Об одном предельном случае аппроксимационной теоремы Кронекера, ДАН **56**, 563—565.
123. Об одной общей теореме теории линейных диофантовых приближений, ДАН **56**, 679—681.

**1948**

124. Теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнении, ДАН **59**, 217—218.
125. К теории линейных диофантовых приближений, ДАН **59**, 865—867.
126. Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений, УМН III, вып. 3, 1—28.
127. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера, Изв. АН, серия матем. 12, 113—122.
128. О некоторых приложениях метода добавочной переменной, УМН III, вып. 6, 188—200.
129. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева, Изв. АН, серия матем. **12**, 249—258.

**1949**

130. О дробных частях линейной формы. Изв. АН, сер. матем. **13**, 3—8.
131. Простейший линейный континуум, УМН **IV**, вып. 2, 180—197.

**1950**

132. Об аналитическом аппарате физической статистики, Труды Матем. ин-та им. Стеклова **33**.
133. Статистическая механика как задача теории вероятностей, УМН V, вып. 3, 3—46.
134. О суммах положительных случайных величин, ДАН **71**, 1037—1039.
135. Предельные теоремы для сумм положительных случайных величин, Украинск. матем. журнал **2**, № 4, 3—17.

**1951**

136. Математические основания квантовой статистики, Гостехиздат.
137. О некоторых общих теоремах статистической физики, Труды Матем. ин-та им. Стеклова **38**, 345—365.
138. О законах распределения «чисел заполнения» в квантовой статистике, ДАН **78**, 461—463.

**1952**

139. О классах эквивалентных событий, ДАН **85**, 713—714.
140. Элементы теории чисел. Энциклопедия элементарной математики, т. 1, 255—353.
141. Метод произвольных функций и борьба против идеализма в теории вероятностей, Сб. «Философские вопросы современной физики», изд. АН, 522—538; французский перевод: Questions scientifiques, V. Paris, Editions de la nouvelle critique, v.**1**, 7—24, 1954.
142. Советская школа теории вероятностей, Китайский математический журнал, 1—7.

**1953**

143. Понятие энтропии в теории вероятностей, УМН **VIII**, вып 3, 3—20; румынское изд., 1955.
144. Краткий курс математического анализа, Гостехиздат; китайское изд., 1955.
145. Андрей Николаевич Колмогоров (к пятидесятилетию со дня рождения), УМН **VIII**, вып. 3, 177—200 (совместно с П. С. Александровым).

**1955**

146. Математические методы теории массового обслуживания, Труды Матем. ин-та им. Стеклова **49**, 1—123; китайское изд., 1958; английское изд., 1960.
147. Симметрические функции на многомерных поверхностях, Сб. памяти А. А. Андронова, М., 541—574.

**1956**

148. Потоки случайных событий без последействия. Теор. вероятн. и ее прим. **1**, 3—18.
149. О пуассоновских потоках случайных событий. Теория вероятн. и ее прим. **1**, 320—327.
150. Об основных теоремах теории информации, УМН **XI**, вып. 1, 17—75.

**1959**

151. Первое знакомство с теорией вероятностей, Детская энциклопедия, т. 3, Изд. АПН РСФСР, 211—220 (совм. с А. М. Ягломом).

**1961**

152. Частотная теория Мизеса и современные идеи теории вероятностей, Вопросы философии, № 1, 92—102; № 2, 77—89.
153. О воспитательном эффекте уроков математики, Математическое просвещение, вып. 6, 7—28; Математика в школе **3**, 1962, 30—44.
154. О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики, Математическое просвещение, вып. 6, 29—36.

**1962**

155. О формулах Эрланга в теории массового обслуживания, Теория вероятн. и ее примен. **7**, вып. 3, 330—335.