МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра общих проблем управления

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

Под редакцией В.М.Тихомирова

Издательство
Московского университета
1984

УДК 519.2

Некоторые вопросы современного анализа: Сборник / Под ред. В.М.Тихомирова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 120 с.

Сборник посвящён памяти профессора кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского университета В.М.Алексеева. Содержит работы по дифференциальным уравнениям, оптимальному управлению, интегральной геометрии, супергеометрии, группам и алгебрам Ли, теории приближения. Авторы статей сборника работали с В.М.Алексеевым, тематика представленных в нём работ в целом соответствует кругу его научных интересов.

Для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов университетов соответствующих специализаций, интересующихся теорией и приложениями современного анализа.

Рецензенты: чл.-корр. АН СССР К.И.Бабенко; доцент А.В.Фурсиков

077(02)-84 – заказная

О ВЛАДИМИРЕ МИХАЙЛОВИЧЕ АЛЕКСЕЕВЕ

В.М.Тихомиров

Этот сборник посвящен памяти Владимира Михайловича Алексеева. Несколько лет его уже нет с нами: первого декабря 1980 года он умер от тяжелой болезни.

Владимир Михайлович Алексеев был неповторимой и многогранной личностью, в которой гармонично сочетались и глубокий интеллект и чистая совесть и отзывчивая душа.

Он родился семнадцатого июня 1932 года. Детство свое провел в поселке Быково по Казанской дороге в доме бабушки. Там же поступил в школу. Потом несколько лет он жил с матерью в поселке Костино под Москвой, но затем снова вернулся в Быково и кончал быковскую школу. Как многие и многие из тех, чье детство пересеклось с войной, Володя Алексеев был "бабушкиным сыном". Свою бабушку Владимир Михайлович очень любил вспоминать.

О школьных годах он сохранил добрые воспоминания. Учился с увлечением, всем интересовался и много читал.

Неподалеку от костинской школы находилась трудовая коммуна, в создании которой принимал некоторое участие Алексей Максимович Горький. В дар коммуне Горький передал библиотеку. Володя перечитал ее всю. Он много потом рассказывал о том, какую большую роль в его детстве сыграла костинская библиотека.

Осенью 1948 года в быковской школе появилась афиша о начале работы кружков на механико-математическом факультете МГУ. Володе захотелось узнать, что это такое, и он поехал в университет. Так впервые он попал на наш факультет. И остался там на всю жизнь. Первая прослушанная им – восьмиклассником – лекция была прочитана П.С.Александровым ("О лемме Шпернера"). Потом он записался в кружок О.В.Локуциевского и Е.А.Морозовой.

Быть может, здесь уместно упомянуть о той несравненной роли, которую довелось сыграть мехмату в истории советской науки. Всем памятны имена великих ученых и организаторов науки, судьбы которых так или иначе связаны с мехматом. И через десятилетия легко будет пополнить этот мысленный список многими первоклассными именами тех, кто находится сейчас в расцвете своего таланта. Убежден, что большинство из них с благодарностью назовет В.М.Алексеева в числе своих друзей или учителей.

Мехмат одарил В.М.Алексеева счастьем творчества, любовью к своей профессии, радостью труда и человеческого общения. Особые чувства восхищения и уважения Владимир Михайлович питал к своему учителю Андрею Николаевичу Колмогорову. В.М.Алексеев находился в близких дружеских отношениях со многими математиками старшего поколения. Иван Георгиевич Петровский очень дорожил мнением В.М.Алексеева. Владимир Михайлович отвечал ему чувством глубокой и почтительной любви.

Владимир Михайлович пользовался очень большой любовью математиков своего и более поздних поколений. Впоследствии он всегда был окружен прекрасной молодежью.

В 1950 году Володя Алексеев стал победителем ХУ московской математической олимпиады и ему было доверено выступить от имени победителей. В том же 1950 году В.М.Алексеев стал студентом мехмата. Сразу же он включился в студенческий конкурс по решению задач (такие конкурсы сейчас не проводятся, они заменились студенческими олимпиадами) и занял там второе место. Он сам стал руководителем школьных кружков, один из которых вел с нынешним деканом нашего факультета О.Б.Лупановым. Со второго курса начинается научная работа В.М.Алексеева, которой он стал заниматься в семинарах А.Н.Колмогорова.

В архиве В.М.Алексеева сохранилась его курсовая работа за третий курс. Она посвящена обзору по так называемой проблеме "финальных движений в задаче трех тел". Основные принципиальные вопросы, относящиеся к этой проблеме, были тогда - в 1954 году не решены, они были открытыми проблемами.

Напомню, что проблема финальных движений в задаче трех тел состоит в описании поведения трех материальных точек, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения Ньютона при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$. Первые примеры "простых невозможностей" в задаче трех тел построены со времен Лапласа. Сама задача была в явной форме поставлена Якоби. Простейшие случаи (когда все расстояния между телами остаются ограниченными или когда, наоборот, все расстояния стремятся к бесконечности в ту и другую сторону) были известны еще Ньютону. Первый нетривиальный случай частичного разбегания, когда в прошлом тела были на ограниченном расстоянии, а в будущем одно из тел уходит в бесконечность, был описан Биркгофом. Кроме всех этих случаев оставались логически возможными следующие: обмена (звезда прилетает и отрывает от другой звезды ее спутника), частичного захвата (три звезды прилет

ют друг к другу из бесконечности, две потом образуют двойную звезду, а третья улетает), полного захвата (двойная звезда захватывает третью, прилетевшую из бесконечности), захвата в осцилляцию (тело прилетает к двойной звезде и начинает затем осциллировать), двусторонней осцилляции (т.е. осцилляции в прошлом и в будущем), перехода ограниченного движения в осцилляцию.

Классификацию всех этих комбинаций дал французский академик астроном Ж.Шази. Он же доказал невозможность осцилляции тел пришедших из бесконечности и исследовал типы односторонних движений. Каждая из оставшихся проблем (обмена, захвата и т.п.) представляла собой задачу большой трудности. Эти задачи, имеющие очевидное принципиальное значение вызвали дополнительный интерес после исследований О.Ю.Шмидта, посвященных его космогонической гипотезе. В 1953 году К.А.Ситников доказал возможность частичного захвата, а в 1959г. - возможность двусторонней осцилляции. Эта тематика была полностью исчерпана работами В.М.Алексеева. Окончательный результат таков: все типы финальных движений, описанные выше, оказались возможны. Можно сказать, что на решение и развитие этой проблемы ушла вся его творческая жизнь.

В 1955 году в дипломной работе В.М.Алексеев решил проблему обмена для систем как с положительной, так и с отрицательной полной энергией. (Отметим, что первые численные эксперименты, показывающие возможность осуществимости обмена были проделаны еще в 1920г.). Далее, В.М.Алексеев показал, что обмен реализуется устойчивым образом, т.е. он построил открытое множество начальных условий, приводящих к обмену. Эти результаты, дополненные рядом частичных результатов, касающихся захвата, составили содержание его кандидатской диссертации, защищенной в 1959г.

Наибольший взлет его творческих сил относится к периоду 1966-1966гг. Статья "Квазислучайные динамические системы", опубликованная в трех номерах математического сборника, занимает около 180 страниц. Тогда же была исчерпана проблематика задачи о финальных движениях. В 1968 году В.М.Алексеевым представлена докторская диссертация, в которой подведены итоги проделанной им огромной работы.

Решение задачи о финальных движениях потребовало разработки новых методов в теории динамических систем. Одно из крупнейших открытий в теории дифференциальных уравнений, сделанных по сути дела в наше время, состоит в том, что во многих динамических системах, несмотря на их полную детерминированность, могут возникать движения, напоминающие случайные процессы. Истоки этого относятся еще к началу века, завершение же процесса осмысления этого явления относится к шестидесятым годам. К числу людей, которым принадлежат классические результаты в этом направлении следует назвать В.М.Алексеева. Этой тематикой - квазислучайными динамическими системами и символической динамикой - В.М.Алексеев занимался до конца своих дней. Значение этих работ В.М.Алексеева, выросших из проблем классической механики, очень велико и по меньшей мере сравнимо с его вкладом в небесную механику.

В последние годы его мысль обращается к медицине. Смерть прервала его работу у самого начала. Он так и остался - только математиком.

После окончания аспирантуры В.М.Алексеев преподает на кафедре математического анализа механико-математического факультета. Последние десять лет своей жизни он работал на кафедре общих проблем управления.

Владимир Михайлович Алексеев служил математике и делу математического просвещения на всех доступных ему поприщах. Я рассказал о его научной работе. Она общепризнана. Он получил приглашение выступить с обзорным докладом на Международном Математическом конгрессе в Ницце в 1970 году. Многие крупнейшие математики выражали восхищение его трудам и научным достижениям.

Перу В.М.Алексеева принадлежит свыше сорока научных статей и две монографии "Символическая динамика" (в сб. II-я летняя математическая школа, Киев, 1976) и "Оптимальное управление" (совместно с С.В.Фоминым и В.М.Тихомировым, М., Наука, 1979г.). В них виден отпечаток его необычайно широкого научного кругозора и педагогического мастерства.

Владимир Михайлович был превосходным лектором. Многие хранят в своей памяти его блистательные лекции по математическому анализу, оптимальному управлению, геометрии и вариационному исчислению, динамическим системам, выпуклым экстремальным задачам. В лекциях ему удавалось совместить наглядность изложения и педантичную строгость.

Он был одним из соруководителей многих семинаров самого широкого профиля. Около двадцати лет он руководил совместно с Я.Г.Синаем научным семинаром по теории динамических систем. Этот семинар сыграл выдающуюся роль в развитии этого раздела математики. С В.А.Егоровым В.М.Алексеев руководил семинаром по небесной механике, с М.И.Зеликиным и В.М.Тихомировым вел семинар по теории экстремальных задач. Он любил преподавать на факультете повышения квалификации, где долгие годы вел семинар с М.А.Крейнесом, любил участвовать в просеминарах для первокурсников (в последние годы с О.В.Локуциевским).

На протяжении многих и многих лет В.М.Алексеев занимался со школьниками, был руководителем кружков и олимпиад, преподавал в физико-математическом интернате (он читал там в 1963-1967гг. курс математического анализа). В.М.Алексеев очень любил читать популярные лекции по математике.

Владимир Михайлович был одним из самых талантливых редакторов своего времени. В некрологе В.М.Алексеева (опубликованном в УМН т. 36, в. 4 (220), 1981г.) приведен впечатляющий список замечательных книг, в издании которых он принял участие как редактор и переводчик.

В.М.Алексеев вел очень большую работу в Московском Математическом обществе. Долгие годы он был секретарем Общества, затем возглавлял от Правления работу по разделу "Сообщения Московского Математического Общества".

Владимир Михайлович был человеком необычайно широких культурных интересов и запросов. Трудно представить себе такую область культуры, в которую он не пытался бы глубоко проникнуть. Он обладал необыкновенной стойкостью и непреклонностью духа.

Огонь зажигается вместе с началом нашей жизни, и дальше от человека зависит - даст ли он ему потухнуть или разгореться. Разгореться, чтобы озарить все окружающее своим духовным богатством, трудом и творчеством. И тогда этот огонь уже не угасает вместе со смертью, он продолжает освещать дорогу оставшимся, одаривает их надеждой и дает им силы жить. Таким огнем освещает нам путь жизнь Владимира Михайловича Алексеева.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ

В.И.Арнольд

§ I. Проблема стационарного кинематического динамо

Уравнение эволюции магнитного поля H дивергенции 0 под действием переноса потоком с полем скоростей v дивергенции 0 и диффузии с коэффициентом диффузии μ имеет вид

$$\dot{H}=\{v, H\}+\mu \Delta H, \tag{I}$$

где $\Delta = -\mathrm{rot\,rot}$ – лапласиан, $\{,\}$ – скобка Пуассона. Мы рассматриваем это уравнение с периодическими граничными условиями (H не меняется при сдвигах на кратные 2π вдоль любой из трех координатных осей). Поле скоростей v – фиксированное поле такой же периодичности, а именно:

$$v=(\cos y+\sin z)\partial/\partial x + (\cos z+\sin x)\partial/\partial y+(\cos x+\sin y)\partial/\partial z . \tag{2}$$

Нас будет интересовать зависимость инкремента $\gamma = \mathrm{Re}\,\lambda$ наиболее быстро растущей моды $H=e^{\lambda t}H_0(x,y,z)$ от магнитного числа Рейнольдса $1/\mu$. Поле v называется динамо (при данном числе Рейнольдса), если существует растущая мода ($\gamma>0$) . Динамо называется сильным, если инкремент остается ограниченным снизу положительной постоянной при уменьшении магнитной вязкости, т.е. если

$$\lim \gamma>0 \qquad \text{при} \quad \mu\to 0 .$$

Существует ли сильное динамо – неизвестно. Двумерное течение не может быть сильным динамо, так как в таком течении нет экспоненциального растяжения частиц.

Специальное течение (2) было выбрано для исследования по следующим соображениям. При $\mu=0$ уравнение (I) означает вмороженность поля H в жидкость. Если фазовый поток поля v экспоненциально растягивает частицы жидкости (т.е. если наибольший характеристический показатель Ляпунова положителен на множестве положительной меры), то вмороженное поле H экспоненциально растет (растягивается потоком). Поле (2) является одним из простейших полей, обладающих экспоненциальным растяжением частиц (насколько можно судить по данным численных экспериментов, ср. [I]). Растяжение частиц течением "общего положения" происходит предположительно примерно так же, как в этом течении. Поскольку течение растягивает частицы неравномерно, растущее поле H со временем становится изрезанным. Вязкость быстро гасит высшие гармоники. Будет ли работать динамо (будет ли $\gamma>0$) зависит от того, какой процесс идет быстрее: рост вмороженного поля или вязкое затухание.

§ 2. Результаты численного эксперимента

Зависимость инкремента γ от магнитного числа Рейнольдса $1/\mu$ исследовалась численно при помощи галеркинских приближений Е.И.Коркиной. Искалось собственное число оператора A_R, $A_R H=R\{v,H\}+\Delta H$ с наибольшей вещественной частью. Собственный вектор H раскладывался в ряд Фурье и высшие гармоники отбрасывались. Вычисления были доведены до числа Рейнольдса $R=19$, что потребовало учета гармоник $e^{(k,r)}$ с $k^2\leq 169$: таким образом, порядок матрицы, собственное число которой искалось, был около 20 000. Вычисления контролировались несколькими способами: изменением порядка учитываемых гармоник, сохранением бездивергентности эволюционирующего поля и выполнением условий симметрии, о которых подробно сказано ниже. Оказалось, что необходимо учитывать гармоники с $k^2\lesssim 9R$.

Вычисления были начаты с малых чисел Рейнольдса, чтобы использовать найденный собственный вектор в качестве первого приближения при вычислениях с большими числами Рейнольдса. Однако оказалось, что при малых числах Рейнольдса R собственное число λ оператора A_R не зависит от числа Рейнольдса: оно в точности равно нулю.

Причина этого явления состоит в том, что при большой вязкости решение уравнения (I) выходит при $t\to\infty$ на стационарный режим, определяемый классом когомологий начального поля H (т.е. вектором средних значений поля). Выход на стационарный режим подробно обсуждается в [2] (в более общей ситуации эволюции k – форм на n – мерном многообразии). Чтобы избавиться от этого эффекта мы ограничились рассмотрением полей со средним нуль. Однако и в этом случае вычисления дали не зависящее от числа Рейнольдса собственное число $\lambda=-1$ оператора A_R, пока число Рейнольдса R остается меньшим критического значения $R_1\approx 2,3$.

Причина здесь состоит в том, что $\{v,v\}=0$, а в силу (2) $\Delta v=-v$, поэтому само наше поле v является собственным вектором оператора A_R с собственным числом $\lambda=-1$.

При увеличении числа Рейнольдса обнаруживается комплексная пара собственных чисел с $\gamma>-1$, которая движется вправо и пересекает границу динамо $\gamma=0$ при $R_2\approx 9,0$. Наибольшее значение γ на этой ветви достигается вблизи $R_3\approx 12,5$ и равно 0,096. Затем инкремент уменьшается и при $R_4\approx 17,5$ он снова становится отрицательным.

Таким образом, поле v является динамо при $R_2<R<R_4$. Вопрос о том, является ли это поле динамо при $R\to\infty$, остается открытым. Д.Галловей обнаружил динамо при $30<R<100$.

Распределение энергии найденного собственного вектора H по гармоникам обнаружило странную аномалию: при некоторых "пустых" значениях K^2 величина $\sum|H_K|^2$ точно равна нулю, а при некоторых "удивительных" значениях – с точностью вычислений. Пустыми оказались значения $K^2=7, 15, 23, 28, 31, \dots$, а удивительными – значения $K^2=3, 4, 12, 16, 48, 64, \dots$ Пустые значения объясняются просто: это все числа вида $4^a(8b+7)$. Как известно, эти и только эти числа не допускают представлений суммой трех квадратов.

Удивительные значения имеют вид 4^a и $3\cdot 4^a$. Их появление объяснено ниже соображениями симметрии (они связаны с разложением представлений группы вращений куба в пространствах тригонометрических векторных многочленов на неприводимые). Эти соображения позволяют ускорить вычисления в десятки и даже сотни раз. Например, собственный вектор галеркинского приближения с учетом $K^2\le 5$ мы выписываем явно (без учета симметрии потребовалось бы рассмотреть матрицу порядка 112). Мы даже точно находим первую гармонику истинного собственного вектора изучаемой моды при любых числах Рейнольдса:

$$H_1=(\cos y-\sin z)\partial/\partial x+(\cos z-\sin x)\partial/\partial y+(\cos x-\sin y)\partial/\partial z.$$

Однако тот факт, что именно эта мода растет быстрее всех (имеет наибольший инкремент) получен только из численного эксперимента и только при $R\le 19$.

§ 3. Симметрии поля скоростей

Из формулы (2) видно, что поле скоростей v переходит в себя при циклической перестановке координат. Легко доказывается

Теорема. Группа симметрии поля v, сохраняющих Δ, содержит 24 элемента и изоморфна группе вращений куба.

Действительно, легко проверить, что поле v переходит в себя при преобразовании $g_4:(x,y,z)\longmapsto(x+\pi/2, z-\pi/2, \pi/2-y)$. Преобразование g_4 имеет порядок 4 (т.е. $g_4^4=id$). Вместе с циклической перестановкой $g_3:(x,y,z)\longmapsto(y,z,x)$ оно порождает группу G из 24 элементов, изоморфную группе вращений куба. Отметим еще сохраняющее Δ и меняющее знак v преобразование $h:(x,y,z)\longrightarrow(x+\pi, y+\pi, z+\pi)$.

Группа вращений куба имеет 5 неприводимых представлений:

тривиальное одномерное (I);

нетривиальное одномерное (-I) (перестановка двух вписанных тетраэдров);

двумерное (2) (перестановка трех осей координат);

трехмерное (3) (действие на куб);

подкрученное трехмерное (-3) (тензорное произведение (-I) и (3)).

Эта группа G действует на пространстве векторных полей дивергенции 0 на торе.

Действие G коммутирует с действиями операторов $\Delta, \{v,\cdot\}$, а значит и A_R. Поэтому

I) G действует на собственных подпространствах оператора Δ.

2) Оператор A_R распадается в прямую сумму пяти операторов, действующих в пространствах, где представление группы G кратно каждому из пяти неприводимых.

3) Собственный вектор "почти наверное" принадлежит одному из 5 указанных пространств – ведь совпадение собственных чисел двух из 5 операторов прямой суммы "невероятно".

4) Операторы A_{-R} и A_R изоморфны (и следователь-

но, их собственные числа одинаковы, так что характеристическое уравнение четно относительно R).

Свойство 4) следует из того, что h переводит A_R в A_{-R}.

§ 4. Разложение представлений на неприводимые

Рассмотрим представление группы G вращений куба в собственном подпространстве оператора Лапласа, действующего на бездивергентные поля на торе со средним значением нуль. Собственное подпространство состоит из тригонометрических многочленов с векторными коэффициентами, ортогональными волновым векторам

$$\sum H_k e^{i(k,r)}, \quad (k, H_k)=0,$$

с фиксированной суммой квадратов компонент волнового вектора $k_1^2+k_2^2+k_3^2 = k^2 > 0$ (собственное число оператора Лапласа есть $-k^2$). Размерности этих пространств вдвое превосходят числа целых точек на соответствующих сферах, например,

$$d(1)=12, \quad d(2)=24, \quad d(3)=16, \quad d(4)=12,$$
$$d(5)=48, \quad d(6)=48, \quad d(7)=0, \quad d(14)=96.$$

Приведенные в § 3 формулы действия образующих g_3 и g_4 на торе позволяют найти характеры представления группы G в каждом собственном пространстве оператора Лапласа.

Зная характеры, мы раскладываем представление на неприводимые.

Результаты (довольно длинных) вычислений таковы.

Все целые точки на сфере $\sum k_i^2 = k^2$ разобьем на орбиты группы перестановок координат и изменений их знаков. Для каждого из 7 типов орбит, указанных в первой графе следующей таблицы, в следующих графах указаны размерность χ_1 соответствующего собственного подпространства оператора Лапласа (т.е. удвоенно число точек орбиты), затем остальные характеры, затем кратности вхождения неприводимых представлений и наконец, три первые значения k^2, при которых

встречается такая орбита:

орбита	χ_1	χ_{g_3}	χ_{g_4}	$\chi_{g_4^2}$	χ_{g_2}	(I)	(-I)	(2)	(3)	(-3)	k^2		
$(2r,0,0)$	I2	0	0	-4	0	0	0	0	2	2	4	I6	36
$(2r+1,0,0)$	I2	0	0	4	0	I	I	2	I	I	I	9	25
$(a,b,0)$	48	0	0	0	0	2	2	4	6	6	5	I0	I3
$(a,a,0)$	24	0	0	0	-4	0	2	2	4	2	2	8	I8
(a,b,c)	96	0	0	0	0	4	4	8	I2	I2	I4	2I	26
(a,a,c)	48	0	0	0	0	2	2	4	6	6	6	27	36
(a,a,a)	I6	-2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	I2	27

Например, представления в собственных пространствах оператора Лапласа с малыми собственными числами разлагаются так:

$$k^2=1: (1)\oplus(-1)\oplus 2(2)\oplus(3)\oplus(-3),$$
$$k^2=2: 2(-1)\oplus 2(2)\oplus 4(3)\oplus 2(-3),$$
$$k^2=3: 2(2)\oplus 2(3)\oplus 2(-3),$$
$$k^2=4: 2(3)\oplus 2(-3),$$
$$k^2=5: 2(1)\oplus 2(-1)\oplus 4(2)\oplus 6(3)\oplus 6(-3).$$

Из приведенных таблиц вытекает

Теорема. Разложение представления в пространстве полей с данным k^2 на неприводимые имеет вид

$$A\left[(1)\oplus(-1)\oplus 2(2)\oplus 3(3)\oplus 3(-3)\right]\oplus B\left[(1)\oplus(-1)\oplus 2(2)\oplus (3)\oplus(-3)\right]\oplus C\left[(3)\oplus(-3)\right]\oplus D\left[(-1)\oplus(2)\oplus(3)\oplus 2(-3)\right]\oplus E\left[(2)\oplus(3)\oplus(-3)\right],$$

где коэффициенты выражаются через число N целых точек на сфере так:

k^2	A	B	C	D	E
$4n^2, 2n^2, 3n^2$	$N/12$	0	0	0	0
$(2r+1)^2$	$(N-6)/12$	I	0	0	0

$4n^2$	$(N-6)/12$	0	2	0	0
$2n^2$	$(N-12)/12$	0	0	2	0
$3n^2$	$(N-8)/12$	0	0	0	2

Замечание. А.Б.Гивенталь указал мне, что эту теорему можно получить короче при помощи двойственности Фробениуса, примененной к паре (G , стационарная подгруппа волнового вектора). Для нас существенны только приведенные выше таблицы разложений, поэтому мы не останавливаемся на этом подробнее.

§ 5. Симметрия растущей моды

Сопоставим "удивительные значения" K^2 из § 2, соображение 3 из § 3 и таблицу разложений из § 4. Очевидна

Теорема. Амплитуды гармоник искомой моды с данным K^2 будут нулевыми в тех случаях, когда представление, по которому мода преобразуется, не входит в разложение пространства полей с данным K^2 на неприводимые.

Таким образом, "удивительные значения" являются своеобразными отпечатками пальцев, по которым можно найти если не саму моду, то во всяком случае ее симметрию.

Из таблиц § 4 видно, что при $K^2=3,4,12,16,48,64,\ldots$ в разложение не входит нетривиальное одномерное представление (и только оно). Следовательно, мода принадлежит пространству, преобразующемуся по этому представлению. Это пространство полей, удовлетворяющих условиям $g_3H=H$, $g_4H=-H$. Оно распадается в прямую сумму своих пересечений с собственными пространствами оператора Лапласа. Размерности этих пересечений, согласно таблицам § 4, таковы

K^2	I	2	3	4	5	6	8	9	IO	II	I2	I3	I4	I6
dim	I	2	0	0	2	2	2	3	2	2	0	2	4	0

При "удивительных" значениях $K^2=4^a$ и $3\cdot 4^a$ размерность пересечения равна 0. При всех остальных значениях K^2 размерность положительна. Это вытекает из следующих утверждений теории чисел:

I. Квадрат каждого нечетного простого числа допускает нетривиальное представление суммой трех квадратов.

2. Утроенный квадрат каждого простого числа допускает представление суммой трех не равных всех вместе квадратов.

Эти утверждения доказаны уже Гауссом (автор благодарен Ж.-П.Серру за эту информацию).

§ 6. Алгебра четных и нечетных полей

Чтобы найти поля, преобразующиеся по представлению (-I), удобно поступить так. Назовем поле H четным, если $g_3H=H=g_4H$, и нечетным, если $g_3H=H=-g_4H$. Суммы четных и нечетных полей - инвариантные относительно g_3 и g_4^2 поля. Они образуют алгебру Ли.

Наше исходное поле $v=(\cos y+\sin z)\partial/\partial x$ + (циклические перестановки) четно. Нетрудно проверить, что поле

$$H_1=(\cos y-\sin z)\,\partial/\partial x \quad + \text{(циклические перестановки)}$$

нечетно. Кратная скобка Пуассона четных и нечетных полей будет четной или нечетной в зависимости от того, четно или нечетно число участвующих в ней нечетных полей.[ж)] Таким образом, все поля $\{v,H_1\}$, $\{v,\{v,H_1\}\}$, ... нечетны. Если поле четно (нечетно), то его проекция на каждое собственное подпространство оператора Лапласа также четна (нечетна). Мы будем обозначать проекцию поля H на подпространство с собственным числом $-K^2$ (т.е. сумму гармоник поля H с волновым вектором с квадратом длины K^2) знаком $(H)_{K^2}$. Например, $(v)_1=v$. Комбинируя скобки Пуассона и проекции можно получить из v и H_1 много нечетных полей (может быть, все?). Возникающая алгебра довольно запутана. Начальный отрезок ее таков:

ж) Иными словами, алгебра Ли сумм четных и нечетных полей $\mathbb{Z}_2$ - градуирована.

Теорема. Имеют место соотношения

$$\{v, H_1\} = -2H_2, \quad \{v, H_2\} = H_5, \quad (\{v, H_5\})_2 = -\frac{1}{2}H_2 + H_2',$$

$$\{v, H_2'\} = \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_5', \quad (\{v, H_5'\})_2 = -H_2',$$

где явные выражения базисных полей таковы:

$$H_2 = (cxcz + sxsy)\partial_x + \dots,$$

$$H_2' = sycz\,\partial_x + \dots,$$

$$H_5 = (cxs2y - sxs2z - \tfrac{1}{2}c2xcy - \tfrac{1}{2}c2xsz - \tfrac{1}{2}c2ysz - \tfrac{1}{2}cyc2z)\partial_x + \dots,$$

$$H_5' = (cyc2z + c2ysz)\partial_x + \dots.$$

Здесь c и s означают $\cos$ и $\sin$, а ... - циклическую перестановку.

§ 7. Представление колчана, порожденное коммутированием с v

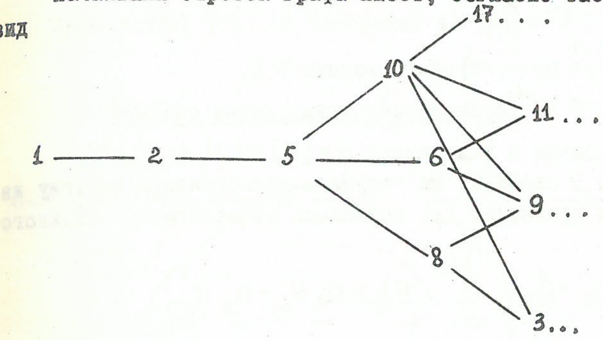
Назовем векторное поле на торе полиномиальным, если его компоненты - тригонометрические многочлены. Назовем полиномиальное поле однородным, если оно является собственным для оператора Лапласа, т.е. если для всех его гармоник $\vec{H}e^{i(\vec{k},\vec{r})}$ величина $\vec{k}^2$ имеет одинаковое значение. Это общее значение k^2 мы назовем степенью однородного поля.

Пространства четных и нечетных полиномиальных полей являются прямыми суммами своих однородных составляющих. Оператор $\{v, \cdot\}$ скобки Пуассона с полем (2) перемешивает однородные составляющие не произвольным образом.

Назовем гармоники $e^{i(\vec{k},\vec{r})}$ и $e^{i(\vec{k}',\vec{r})}$ соседними, если целочисленные вектора $\vec{k}$ и $\vec{k}'$ отличаются лишь на I в одной из трех компонент (у каждой гармоники, таким образом, 6 соседей). Образуем теперь граф, вершинами которого являются степени нечетных однородных полей. Две вершины k^2 и k'^2 соединим ребром, если они являются степенями входящих в нечетные поля соседних гармоник.

Тогда скобка Пуассона нашего поля v с однородным полем степени k^2 имеет составляющими только поля соседних с k^2 в построенном графе степеней (ибо само поле однородно степени I).

Начальный отрезок графа имеет, согласно таблицам § 4, вид



Теорема. Каждая четная вершина соединена только с нечетными, а нечетная только с четными. При этом никаких других отрезков, кроме указанных, к вершинам I,2,5,6,8,IO не подходит. В некоторых случаях полезнее граф с большим числом вершин, соответствующих не степеням k^2, а орбитам действия группы перестановок координат волнового вектора и смен их знаков.

Ограничение A_i оператора $\{v, \cdot\}$ коммутирования с полем v на пространство $\mathcal{F}_i$ однородных нечетных полей степени i представляется в виде конечной суммы однородных слагаемых

$$A_i = \oplus A_{i,j}, \quad A_{i,j} : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_j,$$

где j пробегает всех соседей i в построенном графе.

Если заменить каждое ребро нашего графа парой противоположно направленных стрелок, то получится (бесконечный) колчан. Выше построено представление этого колчана: вершине i сопоставлено конечномерное линейное пространство $\mathcal{F}_i$, стрелке $i \to j$ - линейный оператор $A_{i,j}$.

Теорема. Размерности первых трех пространств $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$

и $\mathcal{F}_5$ равны I,2,2 соответственно, базисы в них образуют приведенные в § 6 поля H_1, H_2 и H_2', H_5 и H_5'. Матрицы операторов $A_{i,j}$ в этих базисах следующие:

$$(A_{1,2})=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix},\quad (A_{2,1})=(0,1/2),\quad (A_{2,5})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1/2\end{pmatrix},$$

$$A_{5,2}=\begin{pmatrix}-1/2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Это – другая формулировка теоремы § 6.

§ 8. Галеркинская пятимодовая система

Отбрасывая в ряду Фурье $H=(H)_1+(H)_2+(H)_5+\dots$ члены выше 5 степени, мы получаем галеркинскую систему из 5 линейных уравнений для компонент нечетного собственного вектора

$$(H)_1=a_1H_1,\quad (H)_2=a_2H_2+a_2'H_2',$$

$$(H)_5=a_5H_5+a_5'H_5'$$

оператора $A_R^{(5)}=\rho^{(5)}[R\{v,\ \}+\Delta]$, где $\rho^{(5)}$ – проекция на $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2\oplus\mathcal{F}_5$. Заметим при этом, что соотношения на уровне $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ получаются в точности такие же, как для полной (не галеркинской) системы, т.к. вершины I и 2 в графе соединены лишь с вершиной 5.

Теорема. Явный вид галеркинской системы пяти нечетных мод таков:

$$(R/2)a_2'=(\lambda+1)a_1,\quad -R(2a_1+a_5/2)=(\lambda+2)a_2,$$

$$R(a_5-a_5')=(\lambda+2)a_2',\quad Ra_2=(\lambda+5)a_5,$$

$$(R/2)a_2'=(\lambda+5)a_5'.$$

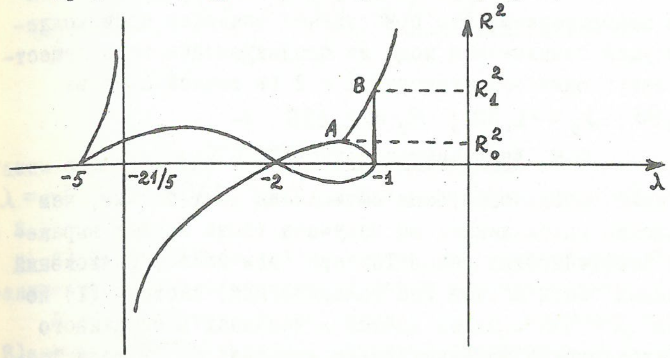
Доказательство формулы § 7.

Решая эту систему мы без труда находим характеристическое уравнение

$$4(\lambda+1)(\lambda+2)^2(\lambda+5)^2+4(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+5)R^2+$$
$$+(5\lambda+21)R^4=0,$$

$$R^2=\frac{-2(\lambda+2)(\lambda+5)\left[(\lambda+1)\pm2\sqrt{-(\lambda+1)(\lambda+5)}\right]}{5\lambda+21}.$$

График этой функции изображен на рисунке



Если вязкость достаточно велика, то мы можем пренебречь высокими гармониками. Поэтому при малых значениях числа Рейнольдса R можно использовать полученный график для суждения о поведении инкремента быстрее всего растущей (точнее, медленнее всего затухающей) нечетной моды. Сравнение с численным счетом при больших числах Рейнольдса показывает хорошее согласие изучаемого пятимодового галеркинского приближения с точным решением при $R^2\ll 10$.

При нулевом числе Рейнольдса $R=0$ спектр вещественен $(\lambda=-1,-2,-2,-5,-5)$.

Теорема. В галеркинской пятимодовой системе с ростом R два собственных числа ($\lambda=-1$, $\lambda=-2$) начинают двигаться навстречу друг другу. При критическом числе $R_0\approx0,9324$ два вещественных собственных числа сталкиваются (у значения $\lambda_0\approx-1,356$) и сходят в комплексную область. (Точка А на рис. I.) После этого вещественная часть γ родившейся пары комплексных собственных чисел растет с возрастанием числа Рейнольдса (линия АВ на рис. I). Около $R_1\approx2,032$ (точка В) величина γ достигает значения −I, и нечетная мода обгоняет четную моду v (для которой $\gamma=-1$ при всех числах Рейнольдса). Начиная с этого момента изучаемая мода становится ведущей (имеет наименьшее затухание). При дальнейшем росте числа Рейнольдса γ продолжает расти (асимптотически как $R\sqrt{1+\sqrt{5}}/2 \approx 0{,}9R$), переходя через 0 при $R\approx 4{,}32$.

Хотя ясно, что при таких больших числах Рейнольдса отбрасывание гармоник выше 5 степени недопустимо, поведение $\gamma(R)$ при $R<5$ удовлетворительно описывается пятимодовым приближением; это приближение выявляет происхождение растущей комплексной моды из столкнувшейся пары вещественных затухающих мод степеней I и 2 (в точной системе $R_0\approx 0{,}96$; $\lambda_0\approx -1{,}32$; $R_1\approx 2{,}286$).

§ 9. Диаграммная техника

В действительности, наши вычисления дают больше, чем галеркинские приближения: мы получаем также точные выражения для коэффициентов рядов Тейлора (или Пюизе) разложений собственных чисел полной (не галеркинской) системы (I) по степеням $R = 1/\varepsilon$. Ответ дается в терминах построенного выше представления колчана: члены степени n в ряду Тейлора корня, родившегося из $-k^2$, отвечают петлям длины n с началом в вершине k^2.

Для простоты мы начнем с однократного корня $\alpha_0=-1$.

Теорема. [3] Первый ненулевой коэффициент при R^n в разложении собственного числа $\lambda = \alpha_0+\alpha_1 R+\alpha_2 R^2+\dots$, $\alpha_0=-1$ оператора $\Delta + R\{v,\cdot\}$, дается суммой

$$\alpha_n = \sum \frac{A_{i_{n-1},i_0}\dots A_{i_1,i_2}\,A_{i_0,i_1}}{(\alpha_0-\lambda_{i_{n-1}})\dots(\alpha_0-\lambda_{i_2})(\alpha_0-\lambda_{i_1})}, \qquad (3)$$

распространенной на все петли $i_0\to i_1\to\dots\to i_{n-1}\to i_0$ длины n, начинающиеся и кончающиеся в вершине i_0.

В нашем случае $i_0=1$; операторы $A_{i,j}$ введены в § 7. Доказательство формулы (3) несложно и мы покажем лишь, как ею пользоваться.

I) Из формулы (3) следует, что α_1 и вообще все нечетные α_n равны нулю, поскольку длина любой петли в нашем колчане четна.

2) Единственная петля длины 2 с началом I есть $1\to 2\to 1$. Согласно формулам § 7, $A_{2,1}A_{1,2}=0$. Следовательно, $\alpha_2=0$.

3) Единственная петля длины 4 с началом I есть $1\to 2\to 5\to 2\to 1$. Перемножая матрицы, получаем

$$\alpha_4 = \frac{(0,\,1/2)\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}}{1\cdot 4\cdot 1} = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, для полной бесконечномерной системы $\lambda = -1-R^4/4+O(R^4)$, как и для галеркинского приближения § 8.

4) Мы заключаем также, что на α_n влияет только ограниченная часть колчана, и можем оценить какая.

В общем случае, когда корень α_0 кратный, формула (3) определяет не число, а линейный оператор $\alpha_n: \mathcal{F}_{i_0}\to\mathcal{F}_{i_0}$.

При расчете возмущения кратного собственного числа можно заменить бесконечномерное пространство полей конечномерным пространством $\mathcal{F}_{i_0}$ и весь оператор – матрицей $\alpha_0 E + R\alpha_1 + R^2\alpha_2+\dots$.

Например, в вершине 2 начинаются ровно две петли длины 2, $2\to 1\to 2$ и $2\to 5\to 2$. Им соответствуют слагаемые $\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}(0,\,1/2)/-1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}/3 = \begin{pmatrix}-1/6 & 0\\ 1/3 & -1/6\end{pmatrix}$. Итак, $\alpha_0 E + R^2\alpha_2 = \begin{pmatrix}-2-R^2/6 & R^2\\ R^2/3 & -2-R^2/6\end{pmatrix}$; чтобы найти λ с погрешностью $O(R^2)$ нужно знать еще α_4. Для галеркинской системы $\alpha_4=0$, $\lambda=-2+R^2(-1/6\mp\sqrt{1/3})+O(R^4)$ в согласии с формулами § 8.

Литература

1. Henon M. Sur la topologie de lignes de courant dans un cas particulier. – C.R. Acad. Sci, Paris, 1966, v. 262, p. 312–314.
2. Арнольд В.И. Несколько замечаний об антидинамо теореме. – Вестник МГУ, сер. матем., мех., 1982, № 6.
3. Арнольд В.И. Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. – УМН, 1983, т. 38, № 4, с. 189–203.
4. Арнольд В.И., Коркина Е.И. Рост магнитного поля в трёхмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости. – Вестник МГУ, сер. матем., мех, 1983, № 3, с. 43–46.

ГАМИЛЬТОНОВЫ СЕМЕЙСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ КРИВЫХ

С.Г.Гиндикин

В последнее время выяснилось, что многообразия рациональных кривых играют фундаментальную роль в некоторых задачах математической физики и интегральной геометрии [1,2]. Мы хотим обсудить здесь более элементарную и классическую ситуацию, в которой возникают многообразия рациональных кривых. Пусть M – трехмерное многообразие, $H(x,p)$ – однородный (по p) гамильтониан на T^*M. Рассмотрим (трехпараметрическое) семейство траекторий гамильтонова потока на T^*M, отвечающих $H=0$ и семейство $\widetilde{M}_H$ их проекций (лучей) на M. Будем называть $\widetilde{M}_H$ <u>гамильтоновым семейством</u> кривых на M, отвечающим H. Оказывается, что на кривых такого семейства имеется каноническая структура локально проективной прямой, и это в естественном смысле характеристическое свойство гамильтоновых семейств кривых на 3-мерных многообразиях. Напомним, что на двумерном многообразии на кривых любого двухпараметрического семейства индуцируется каноническая локально проективная структура. Мы исследуем вопрос о том, когда локально проективная структура на кривых гамильтонова семейства продолжается до глобальной, в частности, для каких гамильтонианов H семейство $\widetilde{M}_H$ состоит из прямых или из кривых второго порядка. Эти вопросы примыкают к некоторым задачам интегральной геометрии [2-5]. Другой вариант этой задачи: для каких уравнений Гамильтона – Якоби $H(x,u_x)=0$ любое решение является линейчатой поверхностью (или расслаивается на конические сечения).

Двухпараметрические семейства кривых на двумерных многообразиях

Мы начнем с напоминаний о таких семействах, хотя нас и будут интересовать 3-параметрические семейства кривых на 3-мерных многообразиях. Все объекты в дальнейшем предполагаются достаточно гладкими и все рассмотрения ведутся в общем положении.

Пусть $\widetilde{M}$ – двухпараметрическое (локальное) семейство кривых E_λ на двумерном многообразии M. Точкам $x\in M$ отвечают на $\widetilde{M}$ однопараметрические семейства F_x кривых E_λ, проходящих через x $(\lambda\in F_x \Longleftrightarrow x\in E_\lambda)$. Будем интерпретировать F_x как кривые на $\widetilde{M}$. Возникает двойственное семейство M кривых F_x на $\widetilde{M}$. Пусть

$E_\lambda\subset M$, $\lambda\in\widetilde{M}$, – отмеченная кривая. Точкам $x\in E_\lambda$ отвечают кривые F_x на $\widetilde{M}$, проходящие через λ. Пусть τ_x – вектор, касательный к F_x в точке λ. Рассматривая проективизацию касательной плоскости $\pi: T_\lambda\widetilde{M}\setminus 0 \to PT_\lambda\widetilde{M}$, мы при помощи отображения $x\mapsto \pi(\tau_x)$ перенесем на E_λ локально структуру проективной прямой $PT_\lambda\widetilde{M}$. Тем самым на кривых E_λ, $\lambda\in\widetilde{M}$, определены структуры локально проективных прямых (они не зависят от параметризации, а определяются лишь отношением инцидентности).

Фиксируем на $T_\lambda\widetilde{M}$ косое произведение $[\ ,\ ]$. Рассмотрим на $T_\lambda\widetilde{M}$ функцию $C_\lambda(\tau)=[\ddot{\mu}(0),\tau]$, где $\mu(t)$ – параметризация некоторой кривой F_x, $\lambda\in E_x$, для которой $\mu(0)=\lambda$, $\dot{\mu}(0)=\tau$. Если кривая F_x выбрана, то $C_\lambda(\tau)$ не зависит от выбора параметризации, обладающей перечисленными свойствами. Для того чтобы функция C_λ была однозначной надо, чтобы кривые E_λ были настолько малы, чтобы F_x для разных x не могли иметь общей касательной. Однако при переходе к глобальной картине функция C_λ может стать многозначной. Будем называть C_λ <u>функцией Картана</u> семейства $F_x\in M$. Заметим, что C_λ будет однородной функцией по τ 3-й степени однородности. Будем называть семейство M картановским, если C_λ – многочлен 3-й степени по τ. Э.Картан показал, что при выполнении этого условия кривые F_x являются геодезическими некоторой аффинной или проективной связности. Нетрудно проверить, что условие полиномиальности C_λ в точности равносильно тому, что все кривые $F_x\ni\lambda$ распрямляются в окрестности λ с точностью до малых третьего порядка. Условие на семейство $\widetilde{M}$ двойственное условию картановости (для M) носит название инфинитезимальной дезарговости [6]. Оно состоит в том, что кривые E_λ распрямляются в окрестности E_λ с точностью до третьего порядка. Одновременная картановость семейств M и $\widetilde{M}$ является необходимым и достаточным условием диффеоморфности семейства M ($\widetilde{M}$) семейству прямых.

Если M – картановское семейство локальных кривых F_x на $\widetilde{M}$, то оно канонически продолжается (с сохранением картановости) до такого семейства, что из каждой точки λ (в некоторой окрестности) в каждом направлении выходит кривая F_x (автоматически единственная). Соответственно (локальные) кривые E_λ на M из двойственного (инфинитезимально дезаргового) семейства $\tilde{M}$ (для λ из некоторой окрестности на $\tilde{M}$) канонически продолжаются до рациональных кривых (образов проективных прямых $PT_\lambda \tilde{M}$). При условии инфинитезимальной дезарговости в глобальной по x картине возможно лишь тривиальное накрытие кривыми E_λ проективных прямых в том смысле, что существует накрытие $M \to M'$ и $\tilde{M}$ можно рассматривать как семейство рациональных кривых на M' , а E_λ - это поднятия этих кривых на M . Если такая факторизация невозможна, то будем называть семейство $\tilde{M}$ кривых на M <u>неприводимым</u>.

Перейдем теперь к комплексной картине и предположим, что мы имеем дело с аналитическими (алгебраическими) семействами аналитических (алгебраических) кривых. Пусть для семейства M на $\tilde{M}$ из каждой точки в каждом направлении выходит единственная кривая (глобально). Тогда функция Картана C_λ , будучи голоморфной однородной однозначной функцией на $\mathbb{C}^2$, обязательно будет многочленом. Итак, в аналитической картине картановость равносильна тому, что в каждом общем направлении из точки выходит единственная кривая. В этой ситуации двойственное семейство в предположении неприводимости состоит из рациональных кривых. С другой стороны, если на двумерном алгебраическом многообразии имеется двухпараметрическое семейство рациональных кривых, то его инфинитезимальная дезарговость равносильна тому, что нормальный пучок кривых равен $\mathcal{O}(1)$. Грубо говоря, это означает, что инфинитезимально кривые пересекаются не более чем в одной общей точке (строго: индуцированные сечения нормального пучка имеют единственный нуль). В частности, в алгебраической ситуации семейство кривых эквивалентно семейству прямых тогда и только тогда, когда оно и двойственное состоят из рациональных кривых, причем из общей точки в каждом общем направлении выходит единственная кривая. Рассмотрим в качестве примера семейство $\tilde{M}$ окружностей на $M = \mathbb{C}P^2$, которое в неоднородных координатах записывается в виде: $(x_1 - \lambda_1)^2 + x_2^2 - x_2 \lambda_2 = 0$ (окружности касаются прямой $x_2 = 0$). Двойственное семейство M также состоит из рациональных кривых - парабол. При этом семейство M будет картановским в силу указанного выше критерия, а $\tilde{M}$ не будет (в каждой точке любой прямой имеется две касающиеся окружности семейства). Соответственно, $\tilde{M}$ будет инфинитезимально дезарговым, а M - нет, причем ни одно из этих семейств не

эквивалентно семейству прямых.

<u>Гамильтоновы семейства кривых</u>. Как уже отмечалось для трехпараметрических семейств кривых на трехмерных многообразиях, в отличие от рассмотренного выше двумерного случая, локальная проективность кривых - это привилегия гамильтоновых систем. Пусть M - трехмерное многообразие, а $\tilde{M}$ - некоторое трехпараметрическое семейство кривых E_λ , $\lambda \in \tilde{M}$, на M . В каждой точке $x \in M$ рассмотрим конус V_x касательных к кривым $E_\lambda \ni x$. Наложим условие невырожденности на $\tilde{M}$: будем предполагать, что V_x отличен от прямой или плоскости. Последнее исключает, в частности, следующий класс семейств: M локально расслаивается на двумерные подмногообразия, на каждом из которых берется по двухпараметрическому семейству кривых. Пусть опорные гиперплоскости к V_x выделяются условием: $\langle p, dx \rangle = 0$, $H(x,p) = 0$; H будем называть сопутствующим гамильтонианом для семейства кривых $\tilde{M}$. Кривые E_λ являются решениями некоторой системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = f(x,p), \quad \dot{x} \in V_x . \qquad (I)$$

Семейство является гамильтоновым, если в качестве f можно взять $f = -\frac{\partial H}{\partial x}$. Как и в двумерном случае, на $\tilde{M}$ рассматривается двойственное семейство кривых F_x , $x \in M$: $\lambda \in F_x \Longleftrightarrow x \in E_\lambda$. Аналогично определяется распределение конусов $W_\lambda \subset T_\lambda \tilde{M}$ касательных направлений к кривым.

<u>Теорема</u>. Семейство кривых E_λ на M , $\lambda \in \tilde{M}$ является гамильтоновым тогда и только тогда, когда конусы W_λ , $\lambda \in \tilde{M}$ являются плоскостями, причем распределение плоскостей $\{W_\lambda\}$ является неинтегрируемым.

<u>Замечание</u>. Пусть $\Omega_\lambda \subset \tilde{M}$ - множество параметров кривых, пересекающих отмеченную кривую E_λ на M . Основное условие теоремы равносильно тому, что Ω_λ является гладким подмногообразием в точке $\lambda \in \Omega_\lambda$ (а не конусом с вершиной в этой точке). Всегда W_λ - касательный конус к Ω_λ. Подчеркнем, что на языке $\tilde{M}$ условие гамильтоновости формулируется на языке первых инфинитезимальных окрестностей (а не вторых, как на языке M).

<u>Доказательство</u>. Введем локальную параметризацию p ,

отвечающих опорным плоскостям к V_x : пусть $\omega(s)=\langle p(s), dx\rangle=0$, $s\in\mathbb{C}^1$ - их уравнения. В силу условия невырожденности $\omega(s)$ зависит от s существенно нелинейно: $\omega_s''\neq 0$. Тогда уравнения (I) можно переписать так:

$$\omega=0,\ \omega_s'=0,\ ds=\gamma, \tag{2}$$

где γ - некоторая I-форма на M с коэффициентами, зависящими от параметра s, причем существенно лишь ее ограничение на распределение $\{\omega=0,\ \omega'=0\}$. Пусть $M_s=M\times\mathbb{C}^1_s$; тогда (2) задает поле направлений на M_s. Гамильтоновость равносильна тому, что γ удовлетворяет условию

$$(d\omega+\gamma\wedge\omega_s')\wedge\omega=0. \tag{3}$$

Ясно, что из (3) ограничение γ на распределение $\{\omega=0,\ \omega'=0\}$ однозначно определяется. Если обозначить через $\hat d$ внешнее дифференцирование на M_s (т.е. по x, s, а не только по x), то (3) перепишется так:

$$\hat d\omega\wedge\omega\wedge(ds-\gamma)=0. \tag{3'}$$

Пусть $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ параметризуют решения (2) (т.е. $\lambda(x,s)=const$ - решения);

$$\hat d\lambda_i=\lambda_i'(ds-\gamma)+a_i(x,s)\omega+b_i(x,s)\omega'. \tag{4}$$

Пусть $(x,s)\in E_{\lambda_0}$; тогда векторы $\lambda'(x,s), a(x,s), b(x,s)$ из (4) образуют базис в $T_{\lambda_0}\tilde M$. Векторы $\lambda'(x,s)$ при $(x,s)\in E_{\lambda_0}$ образуют конус $W_{\lambda_0}\subset T_{\lambda_0}$. Нам надо исследовать $\hat d\lambda_i'$ вдоль кривой E_{λ_0} (на распределении (2)). Дифференцируя (4) по s и ограничивая результат на распределение (2), получаем

$$\hat d\lambda_i'\equiv-\lambda_i'\gamma'+b_i\omega''. \tag{5}$$

Естественно предположить, что независимость плоскости $\{\lambda', b\}$ от $(x,s)\in E_{\lambda_0}$ равносильна гамильтоновости и что эта плоскость совпадает с W_{λ_0}. Для доказательства надо исследовать $\hat d b$ на распределении (2). Возьмем полный дифференциал ($\hat d$) от обеих частей (4) и внешне умножим обе части на $\omega\wedge(ds-\gamma)$:

$$0\equiv(-\lambda'\hat d\gamma+a\hat d\omega+\hat d b\wedge\omega'+b d\omega)\wedge\omega\wedge(ds-\gamma).$$

Для того чтобы $\hat d b$ при ограничении на распределение (2) лежал в подпространстве $\{\lambda', b\}$ необходимо и достаточно, чтобы $\hat d\omega\wedge\omega\wedge(ds-\gamma)=0$, а в силу (3') это совпадает с условием гамильтоновости. В силу (5) тогда условие гамильтоновости достаточно для того, чтобы подпространство $\{\lambda', b\}$ не зависело от $(x,s)\in E_{\lambda_0}$, а в силу невырожденности оно также и необходимо.

Остается заметить, что если плоскости $W_\lambda=\{\lambda', b\}$ не зависят от $(x,s)\in E_\lambda$, но распределение $\{W_\lambda\}$ интегрируемо, то M распадается на двухпараметрические семейства кривых, принадлежащие однопараметрическому семейству двумерных многообразий (интегральных многообразий распределения $\{W_\lambda\}$). Но тогда аналогичным образом устроено двойственное семейство $\tilde M$ кривых на M , а такую возможность мы исключили требованием невырожденности. Доказательство окончено.

<u>Замечание.</u> В процессе доказательства мы показали, что если для $\xi\in T_\lambda\tilde M$ на прообразе $(d\lambda)^{-1}\xi$ в одной точке $(x,s)\in E_\lambda$ имеем $\omega=0$, то $\omega=0$ и на всех остальных прообразах ξ (если при вариации E_λ в одной точке сохраняется условие $\omega=0$, то оно сохраняется и в любой другой точке E_λ). Это обстоятельство является основным при решении уравнения Гамильтона - Якоби при помощи бихарактеристик.

<u>Следствие.</u> На кривых гамильтонова семейства существует

каноническая структура локально проективных прямых.

Дело в том, что на E_λ локально переносится структура проективизации плоскости W_λ.

Классическим примером гамильтоновой системы кривых является семейство нуль-геодезических метрики сигнатуры (2,1). В этом случае гамильтониан полиномиален (квадратичен) по p или $\omega(\xi)=\xi^2\omega_2+2\xi\omega_1+\omega_0$, где квадратичный конус V_x задается уравнением $\omega_2\omega_0-\omega_1^2=0$. Такие гамильтонианы и соответствующие системы кривых будем называть натуральными. Условие квадратичности конуса V_x влечет рациональность кривых F_x из двойственной системы M.

<u>Дезарговы гамильтоновы системы кривых</u>. Пусть $\tilde M$ – гамильтоново семейство кривых. Введем на $\tilde M$ какую-то локальную систему координат и индуцированное векторное произведение $[\ \ ]$ на $T_\lambda \tilde M$. Назовем отображением Картана отображение на W_λ : $C_\lambda(\tau)=[\tau,\ddot\mu(0)]$, $C_\lambda^{ij}=\tau_i\ddot\mu_j(0)-\tau_j\ddot\mu_i(0)$ где $\mu(t)$ – такая параметризация некоторой кривой F_x, что $\mu(0)=\lambda$, $\dot\mu(0)=\tau$; $C_\lambda^{ij}=-C_\lambda^{ji}$; C_λ определена локально на W_λ, не зависит от выбора указанной параметризации и является однородным степени 3 по τ. Подчеркнем, что отображение Картана определено в предположении гамильтоновости $\tilde M$. Гамильтонова система $\tilde M$ называется <u>дезарговой</u>, если отображение Картана полиномиально по τ. Как и в двумерном случае, это означает, что кривые F_x, $x\in M$, $\lambda\in F_x$ можно распрямить с точностью до 3-го порядка в окрестности λ, а кривые $\tilde M$ с аналогичной точностью в окрестности отмеченной кривой E_λ.

Выясним сколько условий включает в каждой точке λ дезарговость. Пусть $\sum_i a_i(\lambda)\,d\lambda_i=0$ – уравнение распределения $\{W_\lambda\}$. Тогда $\sum a_i\tau_i=0$, откуда $\sum a'_{ij}\tau_i\tau_j+\sum a_i\ddot\mu_i(0)=0$, где $a'_{ij}=\partial a_i/\partial\lambda_j$. Следовательно, $\sum_i a_i C_\lambda^{ij}$ – полином по τ (степени 3) для всех j (это два независимых условия). Откуда достаточно требовать полиномиальность одной функции (скажем C_λ^{12}). Если $a_1(\lambda^0)=a_2(\lambda^0)=0$, то $C_{\lambda^0}^{13}$, $C_{\lambda^0}^{23}$ – полиномы и надо, чтобы функция C_λ^{12} была полиномом. Как и в двумерном случае, имеем:

<u>Предложение</u>. Гамильтоново дезаргово семейство кривых $\tilde M$, заданное в достаточно малой окрестности M, канонически продолжается до семейства рациональных кривых с сохранением дезарговости.

По аналогии с двумерным случаем вводится понятие неприводимого дезаргова семейства (глобального).

<u>Предложение</u>. Для семейства нуль – геодезических (натурального гамильтонова семейства) условие дезарговости совпадает с условием конформной плоскостности метрики.

Итак, если в этом случае ограничить C_λ^{12} на сечение $\tau_2=1$, т.е. $C_\lambda^{12}(t)=C_\lambda^{12}(t,1)$, то $d^4C_\lambda^{12}(t)/dt^4$ – инвариант, отвечающий за конформную плоскостность метрики. Напомним, что конформная кривизна на трехмерном многообразии (в отличии от более высоких размерностей) выражается через четвертую инфинитезимальную окрестность. У нас нуль-геодезические строятся по второй окрестности, а условие дезарговости выражается через вторую инфинитезимальную окрестность геодезической.

<u>Алгебраические гамильтоновы семейства кривых</u>. Предположим теперь, что все объекты комплексны и алгебраичны. Под метрикой будем теперь понимать невырожденную аналитическую метрику (а не эрмитову). Оказывается, что натуральность семейства $\tilde M$ эквивалентна тому, что двойственное семейство M является трехпараметрическим семейством общего положения рациональных кривых с нормальным пучком $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(1)$. Более точно, это условие эквивалентно тому, что конусы инцидентности V_x, $x\in M$, являются квадратичными, а натуральность включает также условие гамильтоновости (W_λ – плоскости). Указанное выше условие на нормальный пучок означает, что инфинитезимально кривые могут пересекаться не более чем в одной точке, а вариации кривой, имеющие неподвижную точку необязательно пропорциональны.

Дадим еще одну интерпретацию этого условия. Пусть F_x, $x\in M$, отмеченная кривая. Через каждую ее общую точку $\lambda\in F_x$ проходит однопараметрическое семейство кривых. В другой точке $\lambda'\in F_x$ возьмем касательную плоскость $\Pi(\lambda',\lambda)\subset T_{\lambda'}\tilde M$ к образуемому ими конусу. Условие заключается в том, что $\Pi(\lambda',\lambda)$, $\lambda\in F_x$ – линейная связка плоскостей (проходящих через касательное направление к F_x в точке λ'). При этом возникает проективное отображение рациональной кривой на эту связку, рассматриваемую как проективная прямая.

Нетрудно проверить, что для любого трехпараметрического подсемейства кривых с нормальным пучком $\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}(1)$ в общем положении (полная размерность семейства таких кривых равна 4) это условие выполнено. Вырождение состоит в том, что $\Pi(\lambda',\lambda)$ не зависит от λ (допустимость). Однако требование гамильтоновости $\tilde{M}$ резко уменьшает запас примеров и, например, среди всех комплексов прямых M общего положения остается лишь линейный комплекс, отвечающий конформно плоской метрике. Уместно привести формулы, относящиеся к этому случаю.

Пусть на $M=\mathbb{C}^3$ задана конформно-плоская метрика $dz_1dz_2-dz_3^2$. Для нее нуль-геодезическими будут прямые

$$\lambda_3 z_1+z_2=\lambda_1\,,\quad \lambda_3 z_2+z_3=\lambda_2\,.$$

На многообразии $\tilde{M}=\mathbb{C}^3_\lambda$ двойственное семейство M выделяется среди всех прямых $\lambda_1=\alpha_1\lambda_3+\beta_1$, $\lambda_2=\alpha_2\lambda_3+\beta_2$ условием $\beta_1=\alpha_2$. Это и есть так называемый линейный комплекс.

Теорема. Пусть на трехмерном алгебраическом многообразии M имеется трехпараметрическое семейство $\tilde{M}$ рациональных кривых. Тогда

I) Гамильтоновость $\tilde{M}$ равносильна тому, что нормальный пучок равен $\mathcal{O}(k)\oplus\mathcal{O}$.

2) Дезарговость $\tilde{M}$ равносильна тому, что нормальный пучок равен $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}$ или что для двойственного семейства M в каждой общей точке в каждом общем направлении выходит единственная кривая.

3) Если семейство $\tilde{M}$ является полным в том смысле, что все сечения нормального пучка продолжаются до глобальных кривых, то $\tilde{M}$ является дезарговым гамильтоновым.

4) Если $\tilde{M}$ – семейство нуль-геодезических, и нормальный пучок равен $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}$, то метрика конформно-плоская.

Замечания. I. Пункт 3) можно обратить, а именно показать, что всякое дезаргово гамильтоново семейство можно реализовать как полное семейство рациональных кривых на некоторой модификации M.

2. Итак, в аналитическом случае конформная плоскостность метрики означает, что нуль-геодезические продолжаются до рациональных кривых, которые инфинитезимально пересекаются не более чем в одной точке (или что то же двойственные кривые не могут иметь общую касательную в общей точке).

Гамильтоновы семейства рациональных кривых. Если мы рассмотрим двумерную механическую систему, ее траектории для фиксированной энергии и их поднятия в пространство-время M, то получится гамильтонова система кривых, натуральная, если исходный гамильтониан был полиномиален по импульсам. По доказанному в предположении натуральности мы получим дезаргову систему лишь если гамильтониан был свободен. Даже если траектории были рациональными (скажем, кривые второго порядка, как в задаче Кеплера) при подъеме в пространство – время может возникнуть ветвление по времени, либо получится недезаргово семейство.

Однако, если выйти за пределы натуральных гамильтонианов, то примеры строить удается, причем имеются даже нетривиальные дезарговы гамильтоновы семейства прямых. Оказывается, что гамильтоновы системы прямых, по другому поводу, уже возникали в геометрии, в частности в интегральной геометрии. Это так называемые допустимые семейства прямых, для которых имеется формула обращения в задаче интегральной геометрии [3], и мы имеем готовое описание:

Предложение. Трехпараметрическое алгебраическое семейство прямых является гамильтоновым тогда и только тогда, когда оно состоит либо из прямых пересекающих некоторую кривую, либо из прямых, касающихся некоторой поверхности. Всякое гамильтоново семейство прямых является дезарговым.

В том случае, если мы имеем кривую 2-го порядка, лежащую на бесконечно удаленной плоскости, мы получаем натуральную систему. В случае произвольной кривой Γ ее точки выберем за параметры и конус V_x огибается плоскостями, проходящими через x и касающимися Γ; в случае поверхности Q надо провести из x касательные плоскости к Q (надо взять еще образы этих плоскостей в касательном пространстве T_xM). Пусть $H_\Gamma(x,\rho)$, $H_Q(x,\rho)$ – соответствующие гамильтонианы.

Следствие. Для уравнений $H_\Gamma(x,u_x)=0$, $H_Q(x,u_x)=0$ всякое решение является линейчатой поверхностью и всякое уравнение Гамильтона – Якоби, решения которого обладают этим свойством, имеют указанный вид.

Доказательство сводится к тому, что условие на уравнение Гамильтона - Якоби эквивалентно тому, что соответствующие лучи (проекции бихарактеристик) должны быть прямыми, но они образуют гамильтонову систему.

Техника, развитая И.Н.Бернштейном и автором, опять-таки в связи с интегральной геометрией, позволяет строить гамильтоновы семейства других рациональных кривых [2]. Рассмотрим, скажем, $M = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1$, где $\mathbb{C}P^2$ можно интерпретировать как пространство, а $\mathbb{C}P^1$ - как время. Рассмотрим графики квадратичных отображений

$$x_i = a_i t_0^2 + b_i t_0 t_1 + c_i t_1^2, \quad i = 0, 1, 2, \tag{6}$$

где (t_0, t_1), (x_0, x_1, x_2) - однородные координаты на $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}P^2$ соответственно. Это 8-параметрическое семейство рациональных кривых (матрица (a, b, c) определяется с точностью до постоянного множителя). Они проектируются на $\mathbb{C}P^2$ в 5-параметрическое семейство (всех) кривых второго порядка, а прообраз кривой - это 3-параметрическое семейство всех ее проективных параметризаций. Для выделения 3-параметрического подсемейства нужно задать 5 условий. Будем называть регулярными условия одного из следующих типов:

(i) кривая должна пересекать некоторую фиксированную кривую Γ ;

(ii) кривая касается фиксированной поверхности Q .

Теорема. Подсемейство кривых (6), выделяемое 5 регулярными условиями, является дезарговым гамильтоновым, причем всякое дезаргово гамильтоново подсемейство общего положения выделяется такими условиями.

Имеющаяся техника позволяет описать все гамильтоновы подсемейства, а не только общего положения, но мы не будем здесь на этом останавливаться. В отличие от случая семейств прямых в квадратичном случае непросто явно указать соответствующие гамильтонианы, однако можно быть уверенными в их алгебраичности.

Следствие. Гамильтонианы, отвечающие регулярным условиям, и только они в общем положении приводят к уравнениям Гамильтона - Якоби, для которых все решения расслаиваются на кривые вида (6).

Аналогично при помощи регулярных условий выделяются гамильтоновы подсемейства рациональных кривых на произвольных трехмерных алгебраических многообразиях.

Многомерные обобщения. Коротко опишем, как переносятся указанные выше трехмерные результаты на n - мерный случай. Пусть $\dim M = n$. Если $H(x, \rho)$ - однородный по ρ гамильтониан на T^*M, то соответствующей гамильтоновой системой кривых будем называть проекции на M траекторий гамильтонова потока, отвечающих $H = 0$. Если $\widetilde{M}$ - произвольное $(2n-3)$ - параметрическое семейство кривых E_λ общего положения, такое, что в каждом направлении выходит не более одной кривой, то через точку $x \in M$ проходит $(n-2)$ - параметрическое семейство кривых E_λ, $x \in E_\lambda$, а их касательные направления образуют $(n-1)$- мерный конус $V_x \subset T_x M$. Его огибающие задают сопутствующий семейству гамильтониан: $\{\langle \rho, dx \rangle = 0\}$ является опорной к V_x тогда и только тогда, когда $H(x, \rho) = 0$. Параметры кривых E_λ, проходящих через $x \in M$ образуют в $\widetilde{M}$ поверхность F_x размерности $(n-2)$; $\Omega_\lambda = \bigcup_{x \in E_\lambda} F_x$ - параметры кривых, пересекающих E_λ ; Ω_λ - это $(n-1)$- мерная поверхность с особенностью в $\lambda \in \widetilde{M}$. Пусть $W_{x,\lambda}$ - касательная плоскость к F_x в $\lambda \in F_x$; $W_\lambda = \bigcup_{x \in E_\lambda} W_{x,\lambda}$ - касательный конус к Ω_λ в точке λ .

Теорема. Система кривых $\widetilde{M}$, обладающая перечисленными свойствами, является гамильтоновой тогда и только тогда, когда $W_\lambda \subset T_\lambda \widetilde{M}$ лежит в плоскости коразмерности .

Семейство рациональных кривых $\widetilde{M}$ на алгебраическом многообразии M является гамильтоновым, если нормальный пучок имеет вид $\mathcal{O}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(k_{n-2}) \oplus \mathcal{O}$. Будем называть дезарговыми системы кривых с пучком $\mathcal{O}(1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}$. Они характеризуются как полные в указанном выше смысле $(2n-3)$ - параметрические семейства кривых общего положения на алгебраическом многообразии размерности n. Чтобы семейство $\widetilde{M}$ стало полным, может потребоваться модификация алгебраического многообразия M .

Пусть M - произвольное алгебраическое многообразие с полным семейством алгебраических кривых (сечения нормального пучка порождаются глобальными кривыми). Будем называть регулярными следующие условия на кривые:

3 - 1864

(i) Γ - подмногообразие в M, $\operatorname{codim} \Gamma > 1$, и рассматриваются кривые, пересекающие Γ;

(ii) Q - подмногообразие в M, $\operatorname{codim} \Gamma = 1$, и рассматриваются кривые, касающиеся Q.

Если наложить достаточное число регулярных условий, чтобы получилось $(2n-3)$- параметрическое подсемейство, то в общем случае получится дезаргово гамильтоново подсемейство, причем все общие подсемейства этого класса получаются такой конструкцией.

Литература

1. Penrose R. Nonlinear gravitons and curved twistor theory.- - Gen. Relat. and Gravit., 1976, v. 7, p. 31-52.
2. Gindikin S. Integral geometry and twistors.- Lect. Not. Math., Springer, 1982.
3. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
4. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Шапиро З.Я. Локальная задача интегральной геометрии. - Функц. анал., 1979, т. 13, № 2, с. 11-31.
5. Гельфанд И.М., Граев М.И. Допустимые n-мерные комплексы в R^n. - Функц. анал., 1980, т. 14, № 4, с. 36-44.
6. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ ЗАДАЧАХ

М.И.Зеликин

Класс задач, линейных по управлению, привлекает к себе в последнее время все большее и большее внимание. Это и не удивительно. С одной стороны, богатство и разнообразие задач этого класса позволяет более выпукло увидеть практически все особенности, которые могут встретиться при исследовании задач с вырожденным условием Лежандра, с другой - многие задачи, возникающие в прикладных областях, таких, как космонавтика, динамика полета, экономика и т.д. относятся к классу задач, линейных по управлению. Отличительной особенностью задач этого класса является наличие в них особых режимов, исследование которых традиционными методами встречает значительные затруднения. Эти затруднения связаны главным образом с тем, что в задачах, линейных по управлению, принцип максимума Понтрягина часто выделяет слишком широкий класс особых экстремалей. Это приводит к необходимости использовать необходимые условия более высокого порядка. К настоящему времени по необходимым условиям высшего порядка получен целый ряд интересных результатов (см., например, [I - 6]). Следует отметить, однако, что все имеющиеся необходимые условия оптимальности особых режимов (кроме принципа максимума Понтрягина, конечно) предназначены не для отыскания особых экстремалей, а только для дальнейшей более строгой проверки на оптимальность конкретных особых траекторий, уже найденных с помощью принципа максимума Понтрягина (или из каких-либо других соображений).

В данной статье для задач, линейных по управлению, получены необходимые условия оптимальности особых траекторий, которые никаким образом не используют принцип максимума Понтрягина и которые позволяют эффективно найти существенно более узкое множество особых экстремалей, содержащее все особые оптимальные траектории.

Под задачей, линейной по управлению, понимается следующая

Задача I. Минимизировать

$$\int_0^T f_0(x,v)\,dt \qquad (I)$$

при условиях

$$\dot{x}_i = f_i(x,v), \quad (i=1,\dots n); \qquad (2)$$
$$x(0)=a,$$

где $x \in R^n$; $v \in V \subset R^r$, V – выпуклый многогранник; T – момент первого достижения фазовой траекторией $x(t)$ некоторого многообразия W, заданного в пространстве R^n; функции $f_i(x,v)$, $(i=0,1,\dots n)$ линейны по v.

В [7] получены необходимые условия оптимальности особых режимов в задаче минимизации криволинейного интеграла.

Покажем как задача I может быть сведена к задаче минимизации криволинейного интеграла. Для этого сведем сначала задачу I к задаче с терминальным функционалом. Введем координату x_0:

$$\dot{x}_0 = f_0(x,v), \quad x_0(0)=0.$$

Тогда функционал (I) заменится на функционал $x_0(T)$, а система (2) примет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x,v), \quad (i=0,1,\dots n). \qquad (3)$$

Обозначим через x n – мерный вектор $x=(x_1,\dots x_n)$, а через $\tilde{x}$ – $(n+1)$– мерный вектор $\tilde{x}=(x_0,x_1,\dots x_n)$.

Аналогичные обозначения будут использоваться для $f_i(x,v)$ и т.д. Пусть $e_1,\dots e_N$ – вершины многогранника V. Обозначим через $\tilde{\varphi}_j(x)$, $(j=1,\dots N)$ $(n+1)$ – мерные векторы с координатами $f_i(x,e_j)$, $(i=0,1,\dots n)$. Точки $\tilde{\varphi}_j(x)=\tilde{f}(x,e_j)$ суть вершины многогранника, являющегося образом V при линейном отображении, задаваемом линейными по v функциями $f_i(x,v)$. Обозначим этот образ через $\tilde{Z}(x)$. Любому значению $v \in V$ можно сопоставить (вообще говоря, неоднозначно) N – мерный вектор u барицентрических координат точки $\tilde{f}(x,v)$ относительно вершин $\tilde{\varphi}_j(x)$

Когда вектор u пробегает N – мерный симплекс $U=\{u \mid u_j \geq 0, \sum_{j=1}^{N} u_j = 1\}$, вектор $\sum_{j=1}^{N} u_j \tilde{\varphi}_j(x)$ пробегает многогранник $\tilde{Z}(x)$. Поэтому система (3) эквивалентна системе

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{j=1}^{N} u_j \tilde{\varphi}_j(x), \qquad (4)$$

где $u \in U$.

Пусть Ω – область в фазовом пространстве R^n.

Предположение I. При всех $x \in \Omega$ среди векторов $\varphi_1,\dots\varphi_N$ существует набор из n линейно независимых векторов. Без ограничения общности можно считать, что это векторы $\varphi_1,\dots\varphi_n$.

Любой из таких наборов определяет некоторую задачу, являющуюся сужением задачи I, где допустимыми управлениями служат такие вектора u, для которых $u_i=0$ при $i>n$. Каждая из таких задач будет приведена к канонической форме – к задаче минимизации криволинейного интеграла.

Для этого рассмотрим $(n+1)\times(n+1)$– матрицу

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{10} & \dots & \varphi_{n0} & 1 \\ \varphi_{11} & \dots & \varphi_{n1} & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \varphi_{1n} & \dots & \varphi_{nn} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Вектор из алгебраических дополнений к элементам последнего столбца этой матрицы обозначим через $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi} = (\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_n).$$

В силу предположения I, $\Phi_0(x) \neq 0$. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\Phi_j(x)}{\Phi_0(x)} dx_j = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) dx_j.$$

Пусть кривая $\tilde{x}(t)$ является решением системы (4) на отрезке $[0,T]$ и отвечает некоторому допустимому управлению $u(t)$. Тогда

$$\int_{x(t)} \omega = -\int_0^T \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_j}{\Phi_0}\, dx_j = -\int_0^T \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_j}{\Phi_0} \sum_{i=1}^n u_i \varphi_{ij}\, dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{\Phi_0} \sum_{j=1}^n \left(-\Phi_j \varphi_{ij}\right) dt .$$

Но $\sum_{j=0}^n \Phi_j \varphi_{ij} = 0$ и поэтому

$$\Phi_0 \varphi_{i0} = -\sum_{j=1}^n \Phi_j \varphi_{ij} . \tag{5}$$

Следовательно,

$$\int_{x(t)} \omega = \int_0^T \sum_{i=1}^n u_i \frac{\Phi_0 \varphi_{i0}}{\Phi_0}\, dt = \int_0^T \sum_{i=1}^n u_i \varphi_{i0}\, dt = x_0(T).$$

Далее, поскольку форма ω линейна, интеграл от нее не зависит от выбора параметра интегрирования на кривой $x(t)$. Поэтому $|\dot{x}(t)|$ можно считать произвольным, и условие $\dot{x} \in Z$[illegible] (где $Z(x)$ – проекция $\tilde{Z}(x)$ на плоскость $\{x_1, \dots x_n\}$) мож[illegible]но заменить на условие $\dot{x} \in K(x)$, где $K(x)$ выпуклый многогранный конус с вершиной в точке x, натянутый на $Z($[illegible] Тем самым, задача I может быть переформулирована следующим образом.

Задача П. Минимизировать

$$\int_{x(t)} \omega$$

при условиях

$$\dot{x}(t) \in K(x(t)), \quad x(0) = a, \quad x(T) \in W, \tag{6}$$

где ω – дифференциальная форма первого порядка $\omega = \sum_{i=1}^n P_i(x) dx_i$, $K(x)$ – заданный в каждой точке $x \in \Omega$ многогранный конус, образующие которого $\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$ гладко зависят от x.

Отметим, что коэффициенты формы ω и образующие конуса K явно выражаются через значения функций $f_i(x,v)$, $(i=0,1,\dots n)$ в вершинах многогранника V.

Замечание. Для сведения задачи I к каноническому виду в достаточно малой области Ω не обязательно требовать выполнения предположения I. В том случае, когда это предположение не выполнено, можно дополнить систему векторов $\varphi_1, \dots \varphi_k$ до линейной независимой системы, выбрав произвольным образом векторы $\varphi_{k+1}, \dots \varphi_n$ и введя соответствующие им фиктивные управления $u_{k+1}, \dots u_n$. После этого сводим полученную задачу к задаче минимизации криволинейного интеграла и рассматриваем только такие решения последней, которые соответствуют нулевым значениям фиктивных управлений.

Введем следующие обозначения: $L(x)$ – грань конуса K, $\varphi_1(x), \dots \varphi_k(x)$ – образующие грани L; $ri\, L(x)$ – относительная внутренность конуса L.

<u>Определение I</u>. Траектория $x(t)$ на интервале (t_0, t_1) будет называться L – особой траекторией, если при всех $t \in (t_0, t_1)$ $\dot{x}(t) \in ri\, L(x(t))$.

Как показано в [7], необходимое условие оптимальности L – особой траектории $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$ дает следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть в задаче П распределение подпространств, порожденных гранью L конуса K, интегрируемо. Тогда необходимым условием оптимальности траектории $x(t)$ L – особой на интервале (t_0, t_1) является условие

$$i_L^* d\omega\,(x(\tau)) = 0 \qquad \text{при } \tau \in (t_0, t_1). \tag{7}$$

Здесь $i_L^* \omega$ – ограничение дифференциальной формы ω на подпространство, порожденное гранью L.

В заключение сравним необходимые условия в форме (7) с необходимыми условиями в форме принципа максимума Понтрягина. Нетрудно показать, что принцип максимума Понтрягина, примененный к исходной задаче, означает в наших терминах, что $\dot{x}(t)$ принадлежит ядру матрицы, определяющей форму $d\omega$. Условие же (7) означает, что этому ядру вместе с $\dot{x}(t)$ принадлежит также все подпространство L. Тем самым условие (7) выделяет существенно более узкий класс экстремалей. Приведем соответствующий пример.

<u>Пример</u>. Рассмотрим задачу быстродействия по траекториям системы

$$\dot{x} = u_1 y, \quad \dot{y} = u_2 z, \quad \dot{z} = u_3 x,$$

$$U = \{u_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{3} u_i = 1\}, \quad \text{т.е. } K = \mathbb{R}^3_+.$$

Применение принципа максимума Понтрягина к этой задаче позволяет вычислить управления на - особых траекториях:

$$u_1 = \frac{x^2 y}{x^2 y + y^2 z + z^2 x}, \quad u_2 = \frac{y^2 z}{x^2 y + y^2 x + z^2 x}, \quad u_3 = \frac{z^2 x}{x^2 y + y^2 z + z^2 x}$$

Тем самым принцип максимума Понтрягина показывает, что через каждую точку фазового пространства проходит K - особая экстремаль.

Применим теперь теорему I. Для рассматриваемой задачи форма ω имеет вид

$$\omega = \frac{dx}{y} + \frac{dy}{z} + \frac{dz}{x}.$$

Очевидно, что форма

$$d\omega = -\left[\frac{dy\,dx}{y^2} + \frac{dz\,dy}{z^2} + \frac{dx\,dz}{x^2}\right]$$

не обращается в нуль ни в одной точке пространства (x, y, z). Тем самым никаких оптимальных K - особых траекторий в данной задаче нет.

Литература

1. Kelley H., Kopp R., Moyer H. Singular extremals. - In : Topics in Optimization. , Acad. Press, N.-Y, London, 1967, p.63-101.
2. Goh B. Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables.-SIAM J.Control, 1966, v.4, p. 716-731.
3. Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями.- УМН, I978, т. 33, вып. 6, с. 85-I49.
4. Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В. Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия.- Матем. сб., I976, I00 (I42), № 4, с. 6I0-643.
5. Дмитрук А.В. Квадратичные условия слабого минимума для особых режимов в задачах оптимального управления.- ДАН СССР, I977, т. 233, № 4, с. 523-526.
6. Krener A. The High Order maximum Principle and its applications to singular Extremal.- SIAM J. Control, 1977, v. 15, № 2, p. 256-293.
7. Зеликин М.И. Условия оптимальности особых траекторий в задаче минимизации криволинейного интеграла.- ДАН СССР, I982, т. 267, № 3, с. 528-53I.

МНОГООБРАЗИЕ A_n СТРУКТУР n-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ

А.А.Кириллов, Ю.А.Неретин

I. Во многих случаях применения групп и алгебр Ли возникает ситуация, когда сама группа или алгебра Ли может зависеть от параметров задачи. В этих случаях полезно знать, как устроено множество всех алгебр Ли заданной размерности (по крайней мере в окрестности заданной точки). Значительный интерес представляет описание возможных предельных переходов между структурами алгебр Ли.

Один из вариантов точной постановки задачи состоит в следующем. Пусть задано n - мерное пространство V над полем К с фиксированным базисом $X_1, \dots, X_n$. Чтобы определить на V структуру алгебры Ли, нужно задать коммутаторы базисных векторов, т.е. константы c_{ij}^k в равенствах:ж)

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k. \qquad (I)$$

Эти константы не произвольны. Они подчиняются двум наборам условий:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \qquad \text{(кососимметричность)} \qquad (2)$$

и

$$c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m = 0 \qquad \text{(тождество Якоби)}. \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) выделяют алгебраическое многообразие в n^3 - мерном аффинном пространстве с координатами c_{ij}^k, $1 \le i, j, k \le n$. Это многообразие мы обозначаем A_n и назовем многообразием структурных констант n - мерных алгебр Ли.

По определению A_n лежит в пространстве тензоров

ж) Мы пользуемся стандартной техникой записи тензорных выражений: по дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование.

типа (I,2) над V, т.е. в $V^* \otimes V^*$. Группа $GL(V) = GL(n,K)$ действует в этом пространстве и переводит многообразие A_n в себя. Орбиты группы $GL(V)$ в A_n соответствуют классам изоморфизма n - мерных алгебр Ли: два набора структурных констант порождают изоморфные алгебры Ли тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга действием группы $GL(V)$. Пространство орбит мы обозначим L_n.

Нас интересует структура алгебраических многообразий A_n, в частности, ответы на следующие вопросы:

I) На какие неприводимые компоненты распадается A_n ?

2) Каковы размерности и степени этих компонент?

3) Каковы их общие точки?

Зная ответы на эти вопросы, мы могли бы сказать, как устроены "типичные" алгебры Ли размерности n.

Многие важные характеристики алгебр Ли (такие, как, например, размерности центра и коммутанта, класс разрешимости или нильпотентности, индекс и т.д.) локально постоянны на A_n и поэтому на каждой компоненте почти постоянны (т.е. постоянны на дополнении к многообразию меньшей размерности). Явное вычисление этих характеристик также представляет большой интерес.

К сожалению, ответы на все перечисленные вопросы в общем случае неизвестны. В этой статье мы дадим описание компонент для малых размерностей $(n \le 6)$ и приведем некоторые соображения и оценки в общем случае. В качестве основного поля дальше всюду выбирается поле C комплексных чисел.ж)

2. Полные ответы на вопросы п. I известны лишь в двух простейших случаях $n=2$ и $n=3$.

При $n=2$ условие (3) выполняется автоматически и остаются только линейные условия (2). Поэтому многообразие A_2 является аффинной плоскостью C^2. Относительно действия группы $GL(2)$ эта плоскость распадается на две орбиты: начало координат $\{0\}$ и дополнение к нему $C^2 \setminus \{0\}$. Таким образом, пространство L_2 состоит из двух точек: "большой" открытой точки, представителем которой является

ж) По поводу классификации вещественных алгебр Ли см. [I] и [2] .

алгебра Ли $\mathfrak{aff}$ (I) группы аффинных преобразований одномерного пространства, и "малой" замкнутой точки, представителем которой является коммутативная алгебра C^2.

При $n=3$ удобно воспользоваться разложением пространства тензоров вида c_{ij}^k с условием (2) в сумму двух неприводимых подпространств относительно действия $GL(3)$.

А именно, введем пространство векторов $a_m = c_{mk}^k$ и пространство симметричных тензоров (точнее, тензорных плотностей) $\mathfrak{z}^{kl} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{ijk} c_{ij}^l + \varepsilon^{ijl} c_{ij}^k)$, где ε^{ijk} — стандартный антисимметричный тензор третьего ранга. Исходный тензор c_{ij}^k восстанавливается по a_m и $\mathfrak{z}^{kl}$:

$$c_{ij}^k = \frac{1}{2}(\delta_j^k a_i - \delta_i^k a_j + \varepsilon_{ijl} \mathfrak{z}^{kl}).$$

Условие (3) в "координатах" a_m и $\mathfrak{z}^{kl}$ принимает простой вид:

$$\mathfrak{z}^{km} a_m = 0. \tag{4}$$

Многообразие A_3, задаваемое системой уравнений (4), распадается на две шестимерные компоненты:

$A_3^{(1)}$: $a_m = 0$, $\mathfrak{z}^{kl}$ — произвольны;

$A_3^{(2)}$: $\det(\mathfrak{z}^{kl}) = 0$, $\mathfrak{z}^{km} a_m = 0$.

Первая компонента задается линейными уравнениями $a_m = 0$ и изоморфна аффинному пространству C^6 (следовательно, оно имеет степень I). Относительно действия $GL(3)$ точки этой компоненты ведут себя как симметричные тензорные плотности и распадаются на 4 орбиты Ω_i, $0 \le i \le 3$ в соответствии с рангом матрицы $\mathfrak{z}^{kl}$.

Размерности этих орбит равны соответственно 0,3,5,7. Представителями могут служить следующие алгебры Ли:

I) в Ω_3 : $\mathfrak{sl}(2)$ — алгебра Ли матриц порядка 2x2 с нулевым следом;

2) в Ω_2 : $m(2)$ — алгебра Ли группы движений эвклидовой плоскости;

3) в Ω_1 : Γ_3 — алгебра Гейзенберга с образующими X, Y, Z и коммутатором $[X,Y]=Z$;

4) в Ω_0 : C^3 — коммутативная алгебра Ли.

Вторая компонента имеет степень 7, поскольку все многообразие A_3 задается в 9-мерном пространстве с координатами a_m, $\mathfrak{z}^{kl}$ тремя независимыми квадратными уравнениями и, следовательно, имеет степень 8.

Таким образом, компонента $A_3^{(2)}$ в 7 раз "массивнее" компоненты $A_3^{(1)}$. Этому утверждению можно двумя способами придать точный смысл (см. [3]). Во-первых, почти любое трехмерное линейное подмногообразие в 9-мерном пространстве с координатами a_m, $\mathfrak{z}^{kl}$ пересекает первую компоненту в одной точке, а вторую – в семи точках.

Во-вторых, относительно естественной формы объема в 8-мерном комплексном проективном пространстве образ первой компоненты имеет объем I, а образ второй – объем 7.

Отметим, также, что компонента $A_3^{(2)}$ не является полным пересечением, т.е. не может быть задана тремя независимыми уравнениями.

Пересечение $A_3^{(1)} \cap A_3^{(2)}$ является объединением орбит $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ группы $GL(3)$.

На дополнении к этому пересечению в A_3^2 группа $GL(3)$ действует, сохраняя инвариант

$$J = \frac{c_{il}^k c_{kj}^l}{c_{ik}^k c_{jl}^l} = \frac{tr(ad\,X_i\, ad\,X_j)}{tr\,ad\,X_i\; tr\,ad\,X_j} \tag{5}$$

(Можно проверить, что это выражение не зависит от выбора индексов i и j.) Поверхность уровня $J=c$ для $c \ne 1/2$ является $GL(3)$ – орбитой, представителем которой является алгебра Ли

$$[X,Y]=\lambda Y, \quad [X,Z]=\mu Z, \quad [Y,Z]=0,$$

где $\dfrac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} = c$. Поверхность $J = 1/2$ распадается на две $GL(3)$ – орбиты.

3. Для многообразий A_n при $4 \le n \le 6$ извест-

но лишь описание неприводимых компонент и их размерностей.ж)
Мы изложим здесь этот результат в виде таблицы. В пяти столбцах этой таблицы указываются соответственно:

I) Обозначение компоненты $A_n^{(k)}$;

2) размерность компоненты;

3) коразмерность общей $GL(V)$ - орбиты (т.е. размерность соответствующей компоненты в L_n;

4) структура нильпотентного радикала, совпадающего с коммутантом $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ общей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ из данной компоненты (в случае, когда эта алгебра разрешима);

5) представитель общей $GL(V)$ - орбиты. Отметим, что число параметров, от которых зависит этот представитель, не всегда выбирается минимально возможным (это минимальное число указано в столбце 3).

Обозначения для нильпотентных алгебр Ли в столбце 4 поясняются в следующем разделе.

Укажем также, как по данной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ найти хотя бы одну из компонент $A_n^{(k)}$, в которой она содержится. Если $\mathfrak{g}$ не разрешима, то она либо фигурирует в столбце 5, либо изоморфна $sl(2) \ltimes \mathbb{C}^3$ и, стало быть, лежит в $A_6^{(1)}$. Если $\mathfrak{g}$ разрешима, то ее максимальный собственный нильпотентный идеал фигурирует в столбце 4.

4. Описание компонент A_n для малых n основано на нескольких свойствах разрешимых и нильпотентных алгебр Ли малых размерностей. Мы изложим необходимые сведения в этом разделе.

Теорема I. а) Существует лишь конечное число попарно неизоморфных нильпотентных алгебр Ли размерности ≤ 6.

б) Каждая такая алгебра Ли допускает невырожденное дифференцирование.

Доказательство утверждения а) получено в [4]. Оказалось, что при $n \leq 6$ все n - мерные нильпотентные алгебры Ли получаются простыми предельными переходами из одной алгебры Ли Γ_n.

Для описания Γ_n рассмотрим градуированную n - мерную алгебру Ли с однородным базисом $\{X_i\}$, где индекс i

---

ж) Для $n=6$ этот результат принадлежит Ю.А.Неретину. Случай $n=5$ разобран в курсовой работе С.Е.Белкина (I976г., неопубликовано).

меняется от I до n при $n \leq 5$ и принимает значения I,2, 3,4,5,7 при $n=6$. Закон коммутирования имеет вид:

$$[X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j}. \tag{6}$$

Тождество Якоби выполняется автоматически при $n \leq 5$, а при $n=6$ сводится к единственному соотношению

$$a_{12} a_{34} + a_{41} a_{52} = 0. \tag{7}$$

Однородное преобразование базиса $X_i \to \lambda_i X_i$ переводит набор $\{a_{ij}\}$ в набор $a_{ij} = \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_{i+j}} a_{ij}$.

Легко проверить, что группа $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ действует транзитивно на множестве тех наборов $\{a_{ij}\}$, для которых $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$. Значит, все такие наборы определяют одну и ту же (с точностью до изоморфизма) алгебру Ли. Это и есть Γ_n. Остальные n - мерные нильпотентные алгебры Ли при $n \leq 5$ получаются, если приравнять нулю некоторые a_{ij} при $i \neq j$.

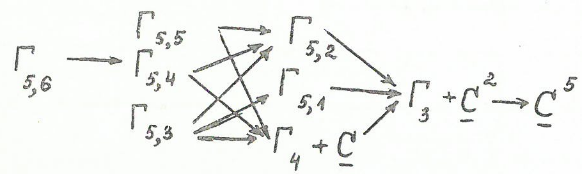
Утверждение б) теоремы при $n \leq 5$ следует из того, что отображение $X_k \to k X_k$ является невырожденным дифференцированием Γ_n и всех прочих алгебр Ли типа (6).

Для $n=6$ это утверждение нам не понадобится и его доказательство мы опускаем.

Приведем здесь описание множества N_n классов изоморфизма нильпотентных алгебр Ли размерности $n \leq 5$ с указанием предельных переходов между ними.

N_3 : $\Gamma_3 \to \mathbb{C}^3$

N_4 : $\Gamma_4 \to \Gamma_3 \oplus \mathbb{C} \to \mathbb{C}^4$

N_5 : 

k	$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$	$\dim A_n^{(k)}$	Общая алгебра (представители общей -орбиты)	Число параметров в $L_n^{(k)}$
A_2				
I	C^2	2	$aff(1)$	0
A_3				
I	–	6	$sl(2,C)$	0
2	C^2	6	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\quad i=1,2$	I
A_4				
I	–	I2	$sl(2,C)\oplus C$	0
2	C^3	I2	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\quad i=1,2,3$	2
3	Γ_3	I2	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ i=1,2,\ [Y_1,Y_2]=Z\,,$ $[X,Z]=(\lambda_1+\lambda_2)Z$	I
4	C^2	I2	$aff(1)\oplus aff(1)$	0
A_5				
I	–	I9	$sl(2,C)\ltimes C^2$	0
2	–	20	$sl(2,C)\oplus aff(1)$	0
3	C^4	20	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\quad 1\le i\le 4$	3
4	Γ_3+C	20	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\quad 1\le i\le 4,\ \lambda_1+\lambda_2=\lambda_3$ $[Y_1,Y_2]=Y_3$	2
5	Γ_4	20	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ \lambda_3=\lambda_1+\lambda_2\,,\ \lambda_4=2\lambda_1+\lambda_2$ $[Y_1,Y_2]=Y_3\,,\ [Y_1,Y_3]=Y_4$	I
6	Γ_3	20	$[X_1,Y_1]=Y_1\,,\ [X_2,Y_2]=Y_2$ $[Y_1,Y_2]=[X_1,Y_3]=[X_2,Y_3]=Y_3$	0
7	C^3	2I	$[X_i,Y_j]=\lambda_{ij}Y_j\,,\quad i=1,2,\ j=1,2,3$	2
A_6				
I	–	30	$sl(2,C)\oplus sl(2,C)$	0
2	–	30	$sl(2,C)\oplus\mathfrak{g}\,,\ \mathfrak{g}\in A_3^{(2)}$	I
3	–	30	$aff(2)=gl(2,C)\ltimes C^2$	0
4	–	30	$sl(2,C)\ltimes\Gamma(3)$	0
5	C^5	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\quad 1\le i\le 5$	4
6	Γ_3+C^2	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ 1\le i\le 5\,,\ \lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ $[Y_1,Y_2]=Y_3$	3
7	Γ_4+C	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ 1\le i\le 5,\ \lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ $\lambda_4=2\lambda_1+\lambda_2\,,\ [Y_1,Y_2]=Y_3\,,\ [Y_1,Y_3]=Y_4$	2
8	$\Gamma_{5,1}$	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ 1\le i\le 5,\ \lambda_1+\lambda_4=\lambda_2+\lambda_3=\lambda_5\,,$ $[Y_1,Y_4]=[Y_2,Y_3]=Y_5$	2
9	$\Gamma_{5,2}$	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ 1\le i\le 5,\ \lambda_1+\lambda_2=\lambda_3\,,$ $\lambda_1+\lambda_4=\lambda_5,\ [Y_1+Y_2]=Y_3\,,\ [Y_1+Y_4]=Y_5$	2
I0	$\Gamma_{5,3}$	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ 1\le i\le 5,\ \lambda_1+\lambda_3=\lambda_4\,,$ $2\lambda_1+\lambda_3=\lambda_5,\ \lambda_2=2\lambda_1,\ [Y_1,Y_3]=Y_4,$ $[Y_1,Y_4]=Y_5,\ [Y_2,Y_3]=Y_5$	I
II	$\Gamma_{5,4}$	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ 1\le i\le 5,\ \lambda_3=\lambda_1+\lambda_2\,,$ $\lambda_4=2\lambda_1+\lambda_2\,,\ \lambda_5=2\lambda_2+\lambda_1\,,$ $[Y_1,Y_2]=Y_3,\ [Y_1,Y_3]=Y_4,\ [Y_2,Y_3]=Y_5$	I
I2	$\Gamma_{5,5}$	30	$[X,Y_i]=\lambda_i Y_i\,,\ 1\le i\le 5,\ \lambda_k=\lambda_2+(k-2)\lambda\,,$ $[Y_1,Y_k]=Y_{k+1}\,,\ k=2,3,4.$	I

I3	$\Gamma_{5,6}$	30	$[X,Y_k]=kY_k,\ [Y_i,Y_j]=Y_{i+j}$ $i,j,k=1,2,3,4,5,\ i<j.$	0
I4	C^4	32	$[X_i,Y_j]=\lambda_{ij}Y_j,\ i=1,2;\ j=1,2,3,4$	4
I5	$\Gamma_3\oplus C$	3I	$[X_i,Y_j]=\lambda_{ij}Y_j,\ [Y_1,Y_2]=Y_3$ $\lambda_{i1}+\lambda_{i2}=\lambda_{i3},\ i=1,2,\ j=1,2,3,4$	2
I6	Γ_4	30	$[X_1,Y_1]=Y_1,\ [X_2,Y_2]=Y_2,$ $[Y_1,Y_2]=Y_3,\ [Y_1,Y_3]=Y_4,\ [X_1,Y_3]=$ $=[X_2,Y_3]=Y_3,\ [X_1,Y_4]=2Y_4,$ $[X_2,Y_4]=Y_4$	0
I7	C^3	30	$aff(1)\oplus aff(1)\oplus aff(1)$	0

Здесь $\Gamma_{5,k}$, $1\le k\le 6$ — неразложимые пятимерные нильпотентные алгебры Ли из списка Диксмье [5] . Все они получаются из $\Gamma_{5,6}\cong\Gamma_5$ так называемой контракцией (сжатием), т.е. обращением в нуль некоторых коэффициентов a_{ij} :

k	Какие из a_{ij} , $i<j$, нужно сделать нулевыми
I	a_{12} и a_{13}
2	a_{13} и a_{23}
3	a_{12} или a_{13}
4	a_{14}
5	a_{23}
6	все $a_{ij}\ne 0$ при $i\ne j$

Аналогичное исследование можно провести и для N_6 (см. [4]). Здесь получается 20 типов алгебр Ли, которые являются сжатиями Γ_6 . При $n=7$ многообразие классов изоморфизма нильпотентных алгебр Ли имеет положительную размерность и состоит из нескольких компонент (см. [6] , [7]). Кроме того, существует семимерная нильпотентная алгебра Ли, все дифференцирования которой нильпотентны [8] .

Пусть теперь $\mathfrak{n}$ — нильпотентная алгебра Ли размерности $n-k$, $\underline{C}^k$ — k - мерная коммутативная алгебра Ли. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется расширением $\mathfrak{n}$ с помощью $\underline{C}^k$, если она включается в точную последовательность

$$0\to\mathfrak{n}\to\mathfrak{g}\to\underline{C}^k\to 0.$$

Подмножество в A_n , соответствующее всем таким расширениям, мы обозначим $L(k,\mathfrak{n})$, а его замыкание — через $R(k,\mathfrak{n})$.

Теорема 2. При $n\le 6$ множества $R(1,\mathfrak{n})$ являются (n^2-n) -мерными компонентами в A_n . Компоненты $R(1,\mathfrak{n})$ и $R(1,\mathfrak{n}')$ совпадают только, если $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}'$ изоморфны.

Доказательство. Поскольку почти все дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{n}$ невырождены, в $L(1,\mathfrak{n})$ открытое множество состоит из таких алгебр $\mathfrak{g}$, для которых производная алгебра $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ имеет размерность $n-1$ и изоморфна $\mathfrak{N}$. Отсюда следует второе утверждение. Для доказательства первого заметим, что размерность пространства $\mathrm{Der}\,\mathfrak{N}$ дифференцирований $\mathfrak{N}$ равна размерности группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{N}$ автоморфизмов $\mathfrak{N}$ (так как $\mathrm{Der}\,\mathfrak{N}$ является алгеброй Ли группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{N}$). Обозначим эту размерность через $\delta(\mathfrak{N})$. Размерность $R(1,\mathfrak{N})$ складывается из 1) размерности многообразия $(n-1)$ - плоскостей в $\underline{\mathbb{C}}^n$ 2) размерности многообразия структурных констант, определяющих алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{N}$ на выбранной $(n-1)$ - плоскости; 3) размерности всех продолжений структуры алгебры Ли с $(n-1)$ - плоскости на n - мерное пространство. Это дает в совокупности число

$$n-1+(n-1)^2-\delta(\mathfrak{N})+\delta(\mathfrak{N})=n^2-n.$$

Остается проверить, что $R(1,\mathfrak{N})$ не может лежать в $R(k,\mathfrak{N}')$ при $k>1$. Но это следует из того, что для $\mathfrak{g}$ из $R(k,\mathfrak{N}')$ $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\le n-k$.

Теорема 3. Любая разрешимая n - мерная алгебра Ли содержит нильпотентный идеал размерности $\ge n/2$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ - максимальный нильпотентный идеал. Приведем присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{N}$ к треугольному виду. Если $\dim\mathfrak{N} < \operatorname{codim}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{N}$, то найдется такой $x\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{N}$, у которого по главной диагонали стоят нули. Это противоречит максимальности $\mathfrak{N}$.

Таким образом, все компоненты A_n, состоящие из разрешимых алгебр Ли, содержатся в объединении $R(k,\mathfrak{N})$, где $k\le n/2$.

Анализ неприводимости $R(k,\mathfrak{N})$ при $k>1$ приводит к интересной задаче о структуре многообразия наборов из k коммутирующих элементов в заданной алгебре Ли. Эта задача обсуждается в следующем разделе.

Результаты, приведенные в таблице, выводятся из теорем этого раздела. Подробное изложение этого вывода будет опубликовано в другом месте.

5. Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли. Рассмотрим многообразие $M_k(\mathfrak{g})$, точками которого являются наборы $x_1,\dots,x_k$ из k попарно коммутирующих элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Ясно, что $M_k(\mathfrak{g})$ - алгебраическое многообразие. Задача состоит в описании неприводимых компонент этого многообразия. Один из важнейших частных случаев возникает, когда в качестве $\mathfrak{g}$ взята алгебра матриц порядка $n\times n$ с обычным определением коммутатора. Соответствующее многообразие мы обозначим $M_{k,n}$. В работе [9] доказана неприводимость $M_{2,n}$ для любых n. Общей точкой этого многообразия является пара $(A,p(A))$, где A - произвольная матрица, а p - произвольный многочлен степени $n-1$.

Для наших целей нужно знать неприводимость многообразия $M_{3,3}$. Она следует из более общего утверждения.

Теорема 4. Многообразие $M_{k,3}$ неприводимо для всех k.

Доказательство опирается на следующий факт.

Лемма. В пространстве матриц третьего порядка максимальные коммутативные подалгебры имеют размерность 3.

В самом деле, пусть $(x_1,\dots,x_k)\in M_{k,3}$. Среди матриц $x_1,\dots,x_k$, 1 не более трех линейно независимы. Поэтому можно считать, что $x_i=\lambda_i x_1+\mu_i x_2+\nu_i\cdot 1$ при $i>2$.

В силу результата Герстенхабера [9] пару (x_1,x_2) можно представить в виде предела пар вида $(y,p(y))$. Тогда наш выбор является пределом наборов вида $(y,p(y),p_3(y),\dots,p_k(y))$, где $p_i(y)=\lambda_i y+\mu_i p(y)+\nu_i\cdot 1$. Значит, $M_{k,3}$ состоит из одной компоненты.

Аналогично доказывается неприводимость $M_{k,2}$ при любом k.

Многообразие $M_{4,4}$ содержит по крайней мере две компоненты: в одной плотное множество состоит из наборов матриц, приводящихся одновременно к диагональному виду, а в другой - к виду $\left(\begin{array}{c|c}\lambda\cdot 1 & A\\ \hline 0 & \lambda\cdot 1\end{array}\right)$ с клетками второго порядка.

6. С ростом n число $z(n)$ компонент многообразия A_n увеличивается довольно быстро.

Теорема 6. Справедливы оценки

$$e^{\sqrt{n}} < z(n) < 2^{n^4/6}.$$

4^{x} - 1864

Оценка сверху получается из тривиального соображения; число компонент не превосходит степени всего многообразия, которая, в свою очередь, не превосходит произведения степеней задающих его уравнений.

Для получения оценки снизу, заметим, что если для $\quad$ -мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вторая группа когомологий $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ обращается в нуль (т.е. $\mathfrak{g}$ не имеет нетривиальных деформаций), то множество $R(0,\mathfrak{g})$ (см. п. 4) представляет собой компоненту в A_n. Примером такой алгебры Ли может служить полупрямое произведение $sl(2,\underline{C})\ltimes \underline{C}^{2n}$, где $\underline{C}^{2n}$ как $sl(2)$ - модуль является суммой четномерных неприводимых подмодулей. (Это связано с тем, что тензорное произведение двух четномерных неприводимых представлений $sl(2)$ разлагается в сумму нечетномерных неприводимых компонент.) Число таких алгебр Ли равно числу разбиений $\rho(N)$ числа N на неупорядоченные слагаемые. По формуле Харди-Рамануджана $\rho(N)\sim \frac{1}{4N\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2N}{3}}}$, что обеспечивает нужную оценку снизу, если учесть, что $n=2N+3$.

Размерности неприводимых компонент с ростом n становятся более разнообразными, чем может показаться при взгляде на таблицу п. 4.

Пример алгебры Ли $\mathfrak{g}=sl(2)\ltimes(\underline{C}^2)^N$ показывает, что в A_n существует компонента с размерностью порядка $\frac{3}{4}n^2$. Можно показать, что нет компонент, размерность которых росла бы медленнее, чем $3/4\,n^2$.

С другой стороны, существуют компоненты множества A_n, размерность которых имеет порядок $\frac{2}{27}n^3$. Это - компоненты вида $R(1,\mathfrak{n})$, где $\mathfrak{n}$ - расширение $\underline{C}^{2N}$ с помощью $\underline{C}^N$. Несложный подсчет показывает, что $\dim R(1,\mathfrak{n})$ имеет порядок $2N^3$ в то время, как размерность $\mathfrak{g}$ равна $3N+1$.

Мы полагаем, что все многообразие A_n имеет размерность порядка $\frac{2}{27}n^3$ при больших n, но пока не получено никакой оценки для порядка $\dim A_n$, лучшей, чем тривиальная оценка $\frac{n^3}{2}$, вытекающая из кососимметричности структурных констант.

7. Отметим некоторые задачи, близкие к описанию многообразия A_n. Во-первых, это задача об описании структур ассоциативных коммутативных алгебр на заданном n -мерном пространстве V.

Эта задача изучена в [10] для $n\leq 5$.

С точки зрения теории представлений симметрической группы структура алгебры Ли двойственна структуре ассоциативной коммутативной алгебры.

Естественным обобщением этих двух структур является структура супералгебры Ли, которая вводится на $\mathbb{Z}_2$ - градуированном пространстве V размерности (p,q).

Описание многообразия таких структур даже в малых размерностях было бы очень интересно, поскольку супералгебры Ли все чаще находят применения в современных исследованиях как по математике, так и по математической физике. В этом направлении сделаны только самые первые шаги.[ж)]

Нерешенной остается задача о вычислении степеней неприводимых компонент $A_n^{(k)}$ при $n\geq 4$. Например, при $n=4$ все 4 компоненты $A_n^{(k)}$ имеют одинаковую размерность. Поэтому ответ на вопрос, какова "типичная" четырехмерная алгебра Ли, зависит от степеней этих компонент.

Попытка вычислить полином Гильберта для этих многообразий методами теории представлений пока не привела к результату.

ж) В дипломной работе А.С.Сергеева (1979г.) исследован случай $p=3$, $q=2$.

Литература

I. Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка. - Изв. ВУЗов, матем., I963, № 3, с. 99-I06.

2. Patera J., Sharp R., Winternitz P., Zassenhans H. Casimir operators of subalgebras of the Poincare-Lie algebra and of real Lie algebras of low dimension.- Lect. Notes in Physiecs, 1976, v. 50, p. 500-515.

3. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. М.:Мир, I979.

4. Морозов В.В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка. - Изв. ВУЗов, матем., I958, № 4, с.I6I-I7I.

5. Dixmier J. Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents.-Canad. J. Math., v. 10, № 3, p. 321--348.

6. Vergne M. Reductibilité de la variété des algebres de Lie nilpotents.-C.R.Acad. Sci, Paries, 1966, v. 263, p. 4-6.

7. Vergne M. Cohomologie des algebres de Lie nilpotents.-Bull. Soc. Math. France, 1970, v. 98, № 2, p. 81-116.

8. Favre G. Une algebre de Lie caracteristicment nilpotent de dimension 7.-C.R. Acad. Sci Paris, 1978, v. 274.

9. Gerstenhaber M. On dominance and varietes of commuting matrices.-Ann. Math., 1961, v. 73, № 2, p. 324-348.

10. Mazzola A. The algebraie and geometric classification of associative algebras of dimension five.- Manuscripta Math., 1979, v.27, № 1, p. 81-1o1.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА $\mathbb{T}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$

Г.Г.Магарил-Ильяев, В.М.Тихомиров

§ I. Постановки задач

Многие задачи теории приближений, связанные с гармоническим анализом, рассматриваются в двух аспектах - для периодического случая (на торе $\mathbb{T}^n$) и для всего пространства (в $\mathbb{R}^n$). Результаты, получающиеся в обоих случаях, как правило, имеют явные черты сходства. Это наталкивает на мысль о создании единой идеологии изучения подобных задач.

В данной работе будет предпринята попытка развить такую идеологию для n -мерных многообразий $\mathcal{M}$, являющихся произведением некоторого числа окружностей и прямых,т.е. $\mathcal{M} = \mathbb{T}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$, $n'+n''=n$ (как известно, любая локально компактная связная абелева группа изоморфна $\mathcal{M}$ при некоторых n' и n'').

Для таких многообразий будут поставлены и разрешены некоторые вопросы традиционные для теории вложения функциональных пространств и теории приближений. А именно, мы рассмотрим следующие задачи (точные определения всех понятий, входящих в формулировки этих задач даны в § 2).

<u>Задача I (о вложении)</u>. Пусть $W^{\alpha}_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{P} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1, \dots, n$, - совокупность функций $x(\cdot) : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, для которых $\mathcal{D}^{\alpha} x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$. Здесь $\mathcal{D}^{\alpha}$ - оператор (дробного) дифференцирования α -ого порядка, а $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ - пространство с так называемой смешанной (или векторной) нормой. Пусть далее $\mathfrak{A}$ - некоторое подмножество в произведении $I^n \times \mathbb{R}^n$, где $I = [0,1]$. Требуется решить следующую общую задачу о вложении: вкладывается ли пространство $W^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M}) = \bigcap \{ W^{\alpha}_{\mathbb{P}}(\mathcal{M}) \mid (1/\mathbb{P}, \alpha) \in \mathfrak{A} \}$ в $W^{\alpha^0}_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M})$? Иначе говоря, мы хотим знать, принадлежит ли α^0 -ая производная функции $x(\cdot)$ пространству $L_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M})$, если нам известно, что ее α -ая производная лежит в $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ для любой пары $(1/\mathbb{P}, \alpha) \in \mathfrak{A}$.

<u>Задача 2 (о неравенствах типа Бернштейна-Никольского и Фавара)</u>. Пусть выделены некоторое подмножество Γ (множество "гармоник") в двойственной группе $\hat{\mathcal{M}} = \mathbb{Z}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$

и конечное множество $\{(1/\mathbb{p}^i, d^i), \ i=0,1,\dots,N\}$ в $I^n \times \mathbb{R}^n$. Требуется выяснить, возможны или нет неравенства вида

$$(1.1) \quad \max_{1\le i\le N} \|\mathcal{D}^{d^i}x\|_{L_{\mathbb{p}^i}(\mathcal{M})} \le A\|\mathcal{D}^{d^0}x\|_{L_{\mathbb{p}^0}(\mathcal{M})}, \quad \operatorname{supp}\hat{x}\subset\Gamma;$$

$$(1.2) \quad \|\mathcal{D}^{d^0}x\|_{L_{\mathbb{p}^0}(\mathcal{M})} \le B\max_{1\le i\le N} \|\mathcal{D}^{d^i}x\|_{L_{\mathbb{p}^i}(\mathcal{M})}, \quad \operatorname{supp}\hat{x}\subset\hat{\mathcal{M}}\setminus\Gamma$$

(где $\operatorname{supp}\hat{x}$ обозначает носитель преобразования Фурье функции $x(\cdot)$) для некоторых положительных констант A и B, зависящих только от параметров задачи, но не от $x(\cdot)$.

Неравенство (1.1) мы называем неравенством типа Бернштейна-Никольского, а (1.2) – неравенством типа Фавара. Необходимость в такого сорта неравенствах возникает, например, при изучении аппроксимативных свойств классов $W^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$, а поскольку эти классы задаются, вообще говоря, многими ограничениями на производные, то это диктует соответствующий вид самих неравенств.

<u>Задача 3 (о приближении подпространствами, порожденными функциями, спектр которых сосредоточен в некотором множестве)</u>. Пусть снова выделено множество $\Gamma\subset\mathbb{Z}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}$. Спрашивается, как будет приближать подпространство функций, гармоники которых сосредоточены в Γ функции из некоторых классов, принадлежащих пространствам $W^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$, введенным выше.

Данная статья посвящена обсуждению этих трех задач. В § 2 собраны необходимые предварительные сведения, в § 3 доказываются дополнительные результаты и в § 4 формулируются и доказываются основные теоремы, а в конце его приводятся краткие комментарии и библиографические указания.

§ 2. Предварительные сведения

<u>2.I. Пространства основных и обобщенных функций</u>

Мы рассматриваем гладкое n – мерное многообразие $\mathcal{M} = \mathbb{T}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}$ (где $n'\geqslant 0$, $n''\geqslant 0$ и $n'+n''=n\geqslant 1$, причем по определению $\mathcal{M}=\mathbb{R}^n$, если $n'=0$ и $\mathcal{M}=\mathbb{T}^n$, если $n''=0$). Оно одновременно является локально компактной связной коммутативной группой. Точки $\mathcal{M}$ обозначаем $\theta=(\tau,t)=(\tau_1,\dots,\tau_{n'},t_1,\dots,t_{n''})$, $\tau_i\in\mathbb{T}^1$; $i=1,\dots,n'$; $t_j\in\mathbb{R}^1$, $j=1,\dots,n''$. На этой группе существует инвариантное интегрирование, инвариантную меру обозначаем $d\theta$. Тор $\mathbb{T}^1$ реализуется как отрезок $[0,1]$ с идентифицированными концами.

Двойственная группа $\hat{\mathcal{M}}$ (группа характеров) к группе $\mathcal{M}$ изоморфна $\mathbb{Z}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}$ и в этом смысле мы пишем, что $\hat{\mathcal{M}}=\mathbb{Z}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}$. Точки $\hat{\mathcal{M}}$ обозначаем $\hat{\theta}=(s,\sigma)=(s_1,\dots,s_{n'},\sigma_1,\dots,\sigma_{n''})$, $s_i\in\mathbb{Z}^1$, $i=1,\dots,n'$; $\sigma_j\in\mathbb{R}^1$, $j=1,\dots,n''$. Инвариантную меру обозначаем $d\hat{\theta}$. Изоморфизм $\mathcal{M}$ и $\hat{\mathcal{M}}$ осуществляется с помощью отображения

$$(s,\sigma)=\hat{\theta}\to e^{2\pi i\langle\hat{\theta},\theta\rangle}=e^{2\pi i\langle s,\tau\rangle+2\pi i\langle\sigma,t\rangle},$$

где $\langle s,\tau\rangle=\sum_{j=1}^{n'}s_j\tau_j$, $\langle\sigma,t\rangle=\sum_{j=1}^{n''}\sigma_j t_j$.

В качестве пространства основных функций $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathcal{M})$ на $\mathcal{M}$ выберем совокупность таких бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\cdot,\cdot):\mathcal{M}\to\mathbb{C}$, для которых конечны величины

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi)=\sup_{(\tau,t)\in\mathcal{M}}|t^\beta\mathcal{D}^\alpha\varphi(\tau,t)|$$

для всех $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{n''})\in\mathbb{Z}_+^{n''}$

($\mathbb{Z}^1_+$ - неотрицательные целые числа). Здесь $t^\beta = t_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot t_{n''}^{\beta_{n''}}$ и

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial\tau_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_{n''}^{\alpha_n}}.$$

Топология в $\mathcal{P}$ задается семейством полунорм $p_{\alpha,\beta}$.

Очевидно, что $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ - это пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ - совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^n$.

Поскольку $\mathcal{P}(\mathcal{M})\subset L_1(\mathcal{M})$, то для функций из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ стандартным образом определено преобразование Фурье

$$(\mathcal{F}\varphi)(\hat\theta) = \hat\varphi(\hat\theta) = \int\limits_{\mathcal{M}} e^{-2\pi i<\hat\theta,\theta>}\varphi(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}} e^{-2\pi i(<s,\tau>+<\sigma,t>)}\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

(где $d\tau$ и dt - лебеговские меры на $\mathbb{T}^{n'}$ и $\mathbb{R}^{n''}$), которое переводит $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ в некоторое подпространство функций на $\hat{\mathcal{M}}$. Обозначим через $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathcal{M}})$ образ при этом отображении. Он состоит из таких бесконечно дифференцируемых по второму аргументу функций $\psi(\cdot,\cdot):\hat{\mathcal{M}}\to\mathbb{C}$, что для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^{n''}_+$ и $\gamma\in\mathbb{Z}^{n'}_+$ конечны величины

$$q_{\alpha,\beta,\gamma}(\psi) = \sup_{(s,\sigma)\in\hat{\mathcal{M}}} |s^\gamma\sigma^\beta(\partial^\alpha\psi(s,\sigma)/\partial^\alpha\sigma)|.$$

Топология в $\hat{\mathcal{P}}$ задается семейством полунорм $q_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Так определенную совокупность функций $\hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathcal{M}})$ выберем в качестве пространства основных функций на $\hat{\mathcal{M}}$.

Отображение $\mathcal{F}:\mathcal{P}\to\hat{\mathcal{P}}$ является изоморфизмом и обратное к нему $\mathcal{F}^{-1}:\hat{\mathcal{P}}\to\mathcal{P}$ есть суперпозиция преобразования Фурье (определенного для суммируемых функций на $\hat{\mathcal{M}}$) и отображения $\psi(\hat\theta)\to\psi(-\hat\theta)$, т.е.

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi)(\theta) = \int\limits_{\hat{\mathcal{M}}} e^{2\pi i<\theta,\hat\theta>}\psi(\hat\theta)\,d\hat\theta =$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{Z}^{n'}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n''}} e^{2\pi i<\sigma,t>}\psi(s,\sigma)\,d\sigma\right)e^{2\pi i<s,\tau>},$$

где $d\sigma$ - лебеговская мера на $\mathbb{R}^{n''}$.

Оператор $\mathcal{F}^{-1}$ обычно называют обратным преобразованием Фурье.

Пусть $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}(\mathcal{M}))'$ и $\hat{\mathcal{P}}' = (\hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathcal{M}}))'$ - сопряженные пространства к $\mathcal{P}$ и $\hat{\mathcal{P}}$ соответственно (пространства обобщенных функций над $\mathcal{P}$ и $\hat{\mathcal{P}}$). Продолжение отображений $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ на обобщенные функции производится стандартным путем.

Если $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_+$, то обобщенная производная $\mathcal{D}^\alpha x$ функции $x\in\mathcal{P}'$ определяется обычным образом

$$<\mathcal{D}^\alpha x,\varphi> = (-1)^{|\alpha|}<x,\mathcal{D}^\alpha\varphi>,$$

где $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Эквивалентное определение через преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{D}^\alpha x = (\mathcal{F}^{-1}\circ E_\alpha\circ\mathcal{F})x.$$

Здесь $E_\alpha : \hat{\mathcal{P}}' \to \hat{\mathcal{P}}'$ - линейный непрерывный оператор умножения на бесконечно дифференцируемую функцию $m_\alpha(\cdot,\cdot) : \hat{\mathcal{M}} \to \mathbb{C}$,

$$m_\alpha(s,\sigma) = (2\pi i s_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (2\pi i s_{h'})^{\alpha_{h'}} (2\pi i \sigma_1)^{\alpha_{h'+1}} \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot (2\pi i \sigma_{h''})^{\alpha_h}.$$

2.2. Дробное дифференцирование

Определение обобщенного производного через преобразование Фурье подсказывает естественный способ распространения этого понятия на произвольный вектор $\alpha \in \mathbb{R}^h$, а именно, нужно умножать на соответствующую функцию $m_\alpha(\cdot,\cdot)$ (мы полагаем $(ia)^\gamma = |a|^\gamma \exp(\frac{1}{2}\pi i \gamma \,\mathrm{sign}\, a)$ для каждых $a, \gamma \in \mathbb{R}^1$). Однако, если $\alpha \notin \mathbb{Z}^h_+$, то $m_\alpha(\cdot,\cdot)$ может быть недифференцируемой и даже разрывной функцией и поэтому умножение ее на обобщенную функцию некорректно. Другими словами, операция умножения функций из $\hat{\mathcal{P}}$ на $m_\alpha(\cdot,\cdot)$ выводит за пределы этого пространства. Выход из положения заключается в том, чтобы рассматривать в качестве пространства основных функций не все $\hat{\mathcal{P}}$ (и соответственно $\mathcal{P}$), а ту его максимальную часть, которая инвариантна относительно операции умножения на $m_\alpha(\cdot,\cdot)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^h$. Перейдем к точным определениям.

Обозначим через Φ подпространство в $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, образованное такими функциями $\varphi(\cdot,\cdot)$, что

$$\int_{\mathbb{T}^1} \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_i,\ldots,\tau_{h'},t)\,d\tau_i = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\tau,t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_{h''})\,t_j^\ell\,dt_j = 0$$

для всех $i = 1,\ldots,h'$, $j = 1,\ldots,h''$ и $\ell = 0,1,2,\ldots$.

Пусть $\Psi = \Psi(\hat{\mathcal{M}})$ - образ Φ при преобразовании Фурье, а Φ' и Ψ' - пространства обобщенных функций над Φ и Ψ соответственно.

Прямое $\mathcal{F} : \Phi' \to \Psi'$ и обратное $\mathcal{F}^{-1} : \Psi' \to \Phi'$ преобразования Фурье введенных обобщенных функций определяется стандартным образом.

Нетрудно проверить, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^h$ и $\psi(\cdot,\cdot) \in \Psi$ функция $m_\alpha(\cdot,\cdot)\psi(\cdot,\cdot)$ снова принадлежит Ψ. Это обстоятельство позволяет корректно определить для каждого $\alpha \in \mathbb{R}^h$ линейный непрерывный оператор $E_\alpha : \Psi' \to \Psi'$ умножения на функцию $m_\alpha(\cdot,\cdot)$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^h$. Отображение $\mathcal{D}^\alpha : \Phi' \to \Phi'$,

$$\mathcal{D}^\alpha x = (\mathcal{F}^{-1} \circ E_\alpha \circ \mathcal{F})\,x$$

называется дробной производной порядка α.

Ясно, что $\mathcal{D}^\alpha$ - линейный непрерывный оператор и

$$\mathcal{D}^{\alpha+\beta} = \mathcal{D}^\alpha \circ \mathcal{D}^\beta = \mathcal{D}^\beta \circ \mathcal{D}^\alpha$$

для каждых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^h$.

Если функция $x(\cdot)$ достаточно гладкая и достаточно быстро убывает на бесконечности, а $\alpha \in \mathbb{Z}^h_+$, то $\mathcal{D}^\alpha x$ - это обычная производная порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_h$.

Если $\mathcal{M} = \mathbb{R}^1$ или $\mathbb{T}^1$, то для "хороших" функций мы получаем соответственно классические определения дробной производной $(\alpha > 0)$ и интеграла $(\alpha < 0)$ в смысле Римана-Лиувилля и в смысле Вейля.

2.3. Смешанная норма

Далее мы используем обозначения: $\mathbb{0} = (0,\ldots,0)$, $\mathbb{1} = (1,\ldots,1)$, $\infty = (\infty,\ldots,\infty)$. Если $\mathbb{P} = (p_1,\ldots,p_h)$, то запись $\mathbb{1} \le \mathbb{P} \le \infty$ означает, что $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1,\ldots,h$. Вектор $(1/p_1,\ldots,1/p_h)$ ($1/p_i = 0$, если $p_i = \infty$) коротко обозначаем $1/\mathbb{P}$.

Пусть $\mathbb{1} \le \mathbb{P} = (p_1,\ldots,p_h) \le \infty$. Совокупность измеримых функций $x(\cdot)$ на $\mathcal{M}$, для которых конечна (смешанная) норма

$$\|x\|_{\mathbb{P}} = \left(\int_{\mathbb{R}^1} dt_{h''} \ldots \left(\int_{\mathbb{T}^1} |x(\tau,t)|^{p_1} d\tau_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots \right)^{\frac{1}{p_h}},$$

обозначаем $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ (если $p_i = \infty$, то вместо интеграла понимается существенная верхняя грань по этой переменной). Это банахово пространство. Когда $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, то $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ становится обычным пространством $L_p(\mathcal{M})$.

Легко проверить, что $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ непрерывно вложено в Φ' и в этом смысле мы будем говорить о функциях из $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ как об обобщенных функциях. Кроме того, можно показать, что образы Фурье пространства $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ как подпространства в $\mathcal{P}'$ и как подпространства в Φ' совпадают. Это позволяет переносить некоторые результаты гармонического анализа (где традиционно функции из $L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ трактуются как обобщенные функции из $\mathcal{P}'$) на рассматриваемую здесь ситуацию.

После всего сказанного в этом параграфе, задачи I и 2 описанные в § I приобретают точный смысл. Уточнение постановки задачи 3 см. в § 4.

§ 3. Вспомогательные результаты

Измеримая функция $m(\cdot,\cdot)$ на $\hat{\mathcal{M}} = \mathbb{Z}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$ называется $(\mathbb{P},\mathbb{P})$ - мультипликатором, где $1 \le \mathbb{P} \le \infty$, если существует такой линейный непрерывный оператор

$$T : L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M}) \to L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M}) \quad , \text{ что}$$

$$\widehat{(T\varphi)}(s,\sigma) = m(s,\sigma)\hat{\varphi}(s,\sigma) \quad \forall \varphi(\cdot,\cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{M}).$$

Пусть $k = (k', k'') = (k'_1, \dots, k'_{n'}, k''_1, \dots, k''_{n''}) \in \mathbb{Z}^n$. Рассмотрим следующее множество в $\hat{\mathcal{M}}$:

$$\Delta_k = \{(s,\sigma) \mid 2^{k'_i - 1} < |s_i| \le 2^{k'_i}, \ i = 1, \dots, n';$$
$$2^{k''_j - 1} < |\sigma_j| \le 2^{k''_j}, \ j = 1, \dots, n''.\},$$

где полагаем $s_i = 0$, если $k'_i < 0$.

Теорема 3.I. Пусть функция $m(\cdot,\cdot)$ на $\hat{\mathcal{M}}$ представляется на каждом Δ_k в виде

$$m(s,\sigma) = \sum_{i_1=-\infty}^{s_1} \dots \sum_{i_{n'}=-\infty}^{s_{n'}} \int_{-\infty}^{\sigma_1} \dots \int_{-\infty}^{\sigma_{n''}} d\mu_k(i_1, \dots, i_{n'}, \eta_1, \dots, \eta_{n''}),$$

где $\mu_k(\cdot)$ - ограниченные меры на $\hat{\mathcal{M}}$, для которых $\sup_k \operatorname{var} \mu_k \le M$. Тогда $m(\cdot,\cdot)$ - $(\mathbb{P},\mathbb{P})$ - мультипликатор при $1 < \mathbb{P} < \infty$ и для нормы соответствующего преобразования T справедлива оценка $\|T\| \le c M$, где c зависит только от $\mathbb{P}$.

Из теоремы 3.I сразу следует, что характеристическая функция $\chi_k(\cdot,\cdot)$ множества Δ_k является $(\mathbb{P},\mathbb{P})$ - мультипликатором. Обозначим через T_k соответствующее преобразование.

Теорема 3.2. (аналог теоремы Литтльвуда-Пэли для $\mathcal{M}$) Пусть $x(\cdot,\cdot) \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ и $1 < \mathbb{P} < \infty$. Тогда существуют такие константы $c_i = c_i(\mathbb{P}) > 0$, $i = 1,2$, что

$$c_1 \|x\|_{\mathbb{P}} \le \Big\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |T_k x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\mathbb{P}} \le c_2 \|x\|_{\mathbb{P}}.$$

В дальнейшем мы постоянно будем пользоваться одним обобщением теоремы 3.2. Для формулировки соответствующего результата понадобятся дополнительные определения.

Пусть $1 \le \mathbb{P} \le \infty$. Положим

$$\Phi'_{\mathbb{P}} = \{x \in \Phi' \mid \exists \alpha : \mathcal{D}^{\alpha} x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})\}, \quad \Phi'_* = \bigcup_{1 < \mathbb{P} < \infty} \Phi'_{\mathbb{P}}.$$

Пусть далее $k \in \mathbb{Z}^n$ и T_k - оператор, введенный выше. Каждому $x \in \Phi'_{\mathbb{P}}$ при $1 < \mathbb{P} < \infty$ можно сопоставить функцию $(\mathcal{D}^{-\alpha} \circ T_k \circ \mathcal{D}^{\alpha}) x$, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ такое, что $\mathcal{D}^{\alpha} x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$. Оказывается, что это соответствие на самом деле не зависит ни от α, ни от $\mathbb{P}$. Точнее говоря, если $x \in \Phi'_{\mathbb{P}} \cap \Phi'_{\mathbb{q}}$, где $1 < \mathbb{P}, \mathbb{q} < \infty$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $\mathcal{D}^\alpha x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{D}^\beta x \in L_{\mathbb{q}}(\mathcal{M})$, то

$$(\mathcal{D}^{-\alpha} \circ T_k \circ \mathcal{D}^\alpha) x = (\mathcal{D}^{-\beta} \circ T_k \circ \mathcal{D}^\beta) x$$

и, кроме того, $(\mathcal{D}^{-\alpha} \circ T_k \circ \mathcal{D}^\alpha) x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$.

Мы не будем здесь останавливаться на доказательстве этого простого факта. Близкие рассуждения содержатся в [5, стр. 8I].

Таким образом, построено продолжение оператора T_k на множество Φ'_*, которое мы по-прежнему будем обозначать через T_k.

<u>Теорема 3.3</u>. Пусть $x \in \Phi'_*$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ и $1 < \mathbb{P} < \infty$. Тогда $\mathcal{D}^\alpha x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, если

$$\Big\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |2^{\langle k, \alpha \rangle} T_k x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\mathbb{P}} < \infty$$

и при этом существуют такие константы $C_i = C_i(\alpha, \mathbb{P}) > 0$, $i = 1, 2$, что

$$C_1 \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{\mathbb{P}} \le \Big\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |2^{\langle k, \alpha \rangle} T_k x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\mathbb{P}} \le C_2 \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{\mathbb{P}}.$$

<u>Теорема 3.4</u>. (аналог неравенства Харди-Литтльвуда для $\mathcal{M}$). Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geqslant \beta$ и $1 < \mathbb{P}, \mathbb{q} < \infty$ таковы, что

$$\alpha - \beta - \frac{1}{\mathbb{P}} + \frac{1}{\mathbb{q}} \in \operatorname{Cone}\{ f^i, i = 1, \dots, n' \},$$

где $f^1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, f^n = (0, \dots, 0, 1)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, а $\operatorname{Cone}\{\dots\}$ – выпуклая коническая оболочка множества $\{\dots\}$ (см. [I2]). Тогда для всех $x \in \Phi'$, для которых $\mathcal{D}^\alpha x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}^\beta x\|_{\mathbb{q}} \le C \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{\mathbb{P}},$$

где $C > 0$ зависит только от α, β, $\mathbb{P}$ и $\mathbb{q}$.

<u>Теорема 3.5</u>. Пусть $\mathcal{N} = \mathbb{R}^1$, либо $\mathbb{T}^1$ и пусть $(\{b_1(k)\}_{k \geqslant 1}, \{b_2(k)\}_{k \geqslant 1})$ – пара числовых последовательностей такая, что $b_2(k) > b_1(k) > 0$ $\forall k \geqslant 1$ и $b_1(k) \asymp b_2(k)$ при $k \to \infty$. Тогда существует последовательность функций $\{y_k(\cdot)\}_{k \geqslant 1}$ на $\mathcal{N}$, что $\mathcal{D}^\alpha y_k \in L_p(\mathcal{N})$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$, $k \geqslant 1$ и при этом

$$\|\mathcal{D}^\alpha y_k\|_{L_p(\mathcal{N})} \asymp b_1^\alpha(k) \big(b_2(k) - b_1(k) \big)^{-\frac{1}{p}}$$

при $k \to \infty$. Кроме того, $\operatorname{supp} \hat{y}_k \subset [b_1(k), b_2(k) + 1]$.

§ 4. Формулировки и доказательства основных теорем

Начнем с уточнения некоторых определений из § I. Напомним, что $\mathcal{M} = \mathbb{T}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$ и n' и n'' – фиксированные числа. Пусть $\mathfrak{A} \subset I^n \times \mathbb{R}^n$. Положим

$$W^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M}) = \{ x \in \Phi' \mid \mathcal{D}^\alpha x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M}), (1/\mathbb{P}, \alpha) \in \mathfrak{A} \}.$$

Это, очевидно, линейное пространство. Семейство полунорм $\{ x \to \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{\mathbb{P}}, (1/\mathbb{P}, \alpha) \in \mathfrak{A} \}$ превращает его в локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Если $\mathfrak{N} = \{(1/\mathbb{P}, \alpha)\}$, то мы пишем $W^{\alpha}_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ вместо $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathfrak{N}'$ – другое множество из $I^n \times \mathbb{R}^n$. Запись $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow W^{\mathfrak{N}'}(\mathcal{M})$ будет обозначать непрерывное вложение $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M})$ в $W^{\mathfrak{N}'}(\mathcal{M})$. Это значит, по определению, что для каждой точки $(1/\mathbb{q}, \beta) \in \mathfrak{N}'$ найдется конечное подмножество $\{(1/\mathbb{P}^i, \alpha^i),\ i = 1, \dots, N\} \subset \mathfrak{N}$ и число $C > 0$ такие, что

$$\|\mathcal{D}^{\beta} x\|_{\mathbb{q}} \le C \max_{1 \le i \le N} \|\mathcal{D}^{\alpha^i} x\|_{\mathbb{P}^i}$$

для всех $x \in W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M})$.

Свяжем с каждым множеством $\mathfrak{N} \subset I^n \times \mathbb{R}^n$ следующее подмножество из $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{N}) = \mathrm{co}\,\mathfrak{N} + \mathrm{cone}\{-e^i - e^{n+i},\ i = 1, \dots, n\} + \mathrm{cone}\{e^i,\ i = 1, \dots, n'\}$$

где $e^1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e^{2n} = (0, \dots, 0, 1)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{2n}$, а $\mathrm{co}\{\dots\}$ и $\mathrm{cone}\{\dots\}$ – выпуклая и выпуклая коническая оболочки соответствующих множеств (см. [12]). Если $n' = 0$, т.е. $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, то последнее слагаемое отсутствует в определении $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$.

Теорема 4.1. Пусть $\{(1/\mathbb{P}^0, \alpha^0)\} \cup \mathfrak{N} \subset \mathrm{int}\, I^n \times \mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{N}$ – непустой компакт. Тогда $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow W^{\alpha^0}_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, если $(1/\mathbb{P}^0, \alpha^0) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$.

Доказательство. Пусть $(1/\mathbb{P}^0, \alpha^0) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$. По условию найдутся такая точка $(1/\mathbb{P}, \alpha) \in \mathrm{co}\,\mathfrak{N}$ и числа $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \dots, n$, и $\mu_j \ge 0$, $j = 1, \dots, n'$, что

$$\left(\frac{1}{\mathbb{P}^0}, \alpha^0\right) = \left(\frac{1}{\mathbb{P}}, \alpha\right) - (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_{n'}, 0, \dots, 0),$$

или

$$\frac{1}{\mathbb{P}^0} = \frac{1}{\mathbb{P}} - (\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_{n'}, 0, \dots, 0),$$

(4.1)

$$\alpha^0 = \alpha - (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

(Здесь для определенности $n' < n$. Если $n' = n$, то последнее слагаемое в правой части первого равенства, очевидно, имеет вид $(\mu_1, \dots, \mu_n)$.)

Поскольку $(1/\mathbb{P}, \alpha) \in \mathrm{co}\,\mathfrak{N}$, то по определению найдутся такие точки $(1/\mathbb{P}^i, \alpha^i) \in \mathfrak{N}$ и числа $\nu_i \ge 0$, $i = 1, \dots, l$, $\sum_{i=1}^{l} \nu_i = 1$, что

$$\frac{1}{\mathbb{P}} = \sum_{i=1}^{l} \nu_i \frac{1}{\mathbb{P}^i}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^{l} \nu_i \alpha^i.$$

Пусть $x \in W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M})$. Тогда ясно, что $x \in \Phi'_*$. Имеем для любого $k \in \mathbb{Z}^n$

$$|2^{\langle k, \alpha \rangle} T_k x|^2 = \prod_{i=1}^{l} |2^{\langle k, \alpha^i \rangle} T_k x|^{2\nu_i}.$$

По неравенству Гельдера для рядов получаем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |2^{\langle k, \alpha \rangle} T_k x|^2 \le \prod_{i=1}^{l} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |2^{\langle k, \alpha^i \rangle} T_k x|^2 \Big)^{\nu_i}.$$

Теперь вследствие неравенства Гельдера для интегралов

$$\Big\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |2^{\langle k, \alpha \rangle} T_k x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\mathbb{P}} \le \prod_{i=1}^{l} \Big\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |2^{\langle k, \alpha^i \rangle} T_k x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\mathbb{P}^i}^{\nu_i}.$$

Так как $\mathcal{D}^{\alpha^i} x \in L_{\mathbb{P}^i}(\mathcal{M})$, $i=1,\dots,l$, то оценивая слева и справа это неравенство по теореме 3.3, будем иметь

$$(4.2)\qquad \|\mathcal{D}^{\alpha} x\|_{\mathbb{P}} \le c \max_{1\le i\le l} \|\mathcal{D}^{\alpha^i} x\|_{\mathbb{P}^i}$$

для всех $x \in W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M})$.

Второе равенство в (4.I) означает, что $\alpha \geqslant \alpha^0$, а вычитая одно равенство из другого, получаем

$$\alpha - \alpha^0 - \frac{1}{\mathbb{P}} + \frac{1}{\mathbb{P}^0} = (\mu_1,\dots,\mu_{n'},0,\dots,0).$$

Следовательно, по теореме 3.4

$$\|\mathcal{D}^{\alpha^0} x\|_{\mathbb{P}^0} \le c_1 \|\mathcal{D}^{\alpha} x\|_{\mathbb{P}}.$$

Это вместе с (4.2) доказывает первую часть теоремы.

Пусть теперь $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M}) \subsetneq W^{\alpha^0}_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M})$. Нужно показать, что $(1/\mathbb{P}^0, \alpha^0) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$. Будем доказывать эквивалентное утверждение: если $(1/\mathbb{P}^0,\alpha^0) \notin \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, то вложение $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M})$ в $W^{\alpha^0}_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M})$ невозможно.

Итак, пусть $(1/\mathbb{P}^0,\alpha^0) \notin \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$. Множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$ выпукло и замкнуто. Действительно, по определению $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$ есть сумма трех выпуклых множеств и поэтому само выпукло. Далее, конусы $cone\{-e^i - e^{n+i},\ i=1,\dots,n\}$ и $cone\{e^i,\ i=1,\dots,n'\}$ порождены конечным числом элементов и, следовательно, замкнуты (см. [II]). Элементарно проверяется, что сумма этих конусов снова замкнутый конус. Так как $\mathfrak{N}$ компакт в $\mathbb{R}^{2n}$, то его выпуклая оболочка также компактна (см. [I2]). Теперь замкнутость $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$ следует из того, что эта сумма компактного и замкнутого множеств.

Таким образом, по теореме Хана-Банаха мы можем строго

отделить точку $(1/\mathbb{P}^0,\alpha^0) = (1/p_1^0,\dots,1/p_n^0,\alpha_1^0,\dots,\alpha_n^0)$ от множества $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$. Иначе говоря, найдется такой ненулевой вектор $(a_1,\dots,a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, что

$$(4.3)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{p_i^0} + a_{n+i}\alpha_i^0\right) > \sup_{\xi\in\mathfrak{M}(\mathfrak{N})} \sum_{i=1}^{n}(a_i\xi_i + a_{n+i}\xi_{n+i}),$$

где $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_{2n})$.

Отсюда вытекает, в частности, что $a_i + a_{n+i} \geqslant 0$, $i=1,\dots,n$. Действительно, если $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_{2n}) \in co\,\mathfrak{N}$, то для любых $\lambda_i \geqslant 0$, $i=1,\dots,n$, вектор $\xi = \eta - (\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$ и так как величина

$$\sup_{\lambda_i\geqslant 0}\sum_{i=1}^{n}(a_i\xi_i + a_{n+i}\xi_{n+i}) = \sup_{\lambda_i\geqslant 0}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i\eta_i + a_{n+i}\eta_{n+i}) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i + a_{n+i})\right)$$

должна быть конечна согласно (4.3), то необходимо $a_i + a_{n+i} \geqslant 0$, $i=1,\dots,n$.

Рассмотрим теперь n пар последовательностей $(\{b_{1i}(k)\}_{k\geqslant 1}, \{b_{2i}(k)\}_{k\geqslant 1})$, $i=1,\dots,n$, где

$$b_{1i}(k) = k^{a_{n+i}},\qquad b_{2i}(k) = k^{a_{n+i}} + k^{-a_i},\qquad i=1,\dots,n.$$

Все последовательности положительны и, очевидно,

$$1 < \frac{b_{2i}(k)}{b_{1i}(k)} = 1 + k^{-(a_i + a_{n+i})} \leqslant 2.$$

Пусть $\{y_{ik}(\cdot)\}_{k\geqslant 1}$, $i=1,\dots,n$, – соответствующие последовательности функций из теоремы 3.5 и пусть функции из первых n' последовательностей определены на $\mathbb{T}^1$, а остальные на $\mathbb{R}^1$.

Рассмотрим следующую последовательность функций на $\mathcal{M}$:

$$z_k(\tau,t) = y_{1k}(\tau_1)\cdot\ldots\cdot y_{n'k}(\tau_{n'})\cdot y_{n'+1,k}(t_1)\cdot\ldots\cdot y_{nk}(t_{n''}).$$

По теореме 3.5 для любых $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{1} < \mathbb{P} = (p_1,\ldots,p_n) < \infty$

$$(4.4)\qquad \|\mathcal{D}^{\alpha} z_k\|_{\mathbb{P}} \asymp k^{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{p_i} + a_{n+i}\alpha_i\right)}$$

при $k \to \infty$.

Пусть, наконец, $(1/\mathbb{P}^j, \alpha^j)$, $j = 1,\ldots,\ell$, – некоторые точки из $\mathfrak{N}$. Из (4.4) следует, что

$$\|\mathcal{D}^{\alpha^0} z_k\|_{\mathbb{P}^0} \Big/ \max_{1\le j\le \ell} \|\mathcal{D}^{\alpha^j} z_k\|_{\mathbb{P}^j} \geqslant C k^{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{p_i^0} + a_{n+i}\alpha_i^0\right) - \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{p_i^j} + a_{n+i}\alpha_i^j\right)}.$$

Показатель степени справа в этом неравенстве – положительное число (см. (4.3)) и, стало быть, левая часть неравенства может быть сделана сколь угодно большой. Поскольку это верно для любого конечного набора точек из $\mathfrak{N}$, то вложение $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M})$ в $W^{\alpha^0}_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M})$ не имеет места. Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний по поводу доказанной теоремы. В первой ее части нигде не использовалась компактность множества $\mathfrak{N}$ и фактически доказано следующее утверждение: если $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}' \subset \operatorname{int} I^n \times \mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, то $W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M}) \subseteq W^{\mathfrak{N}'}(\mathcal{M})$.

Что касается второй части теоремы, то компактность $\mathfrak{N}$ была нужна для доказательства замкнутости $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$. В общем случае, когда $\mathfrak{N}$ – произвольное множество в $\operatorname{int} I^n \times \mathbb{R}^n$, те же рассуждения показывают, что если

$W^{\mathfrak{N}}(\mathcal{M}) \subseteq W^{\alpha^0}_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M})$, то $(1/\mathbb{P}^0, \alpha^0) \in \overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{N})}$ (замыкание множества $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$).

Отметим еще, что из теоремы 4.1 легко следует ряд известных результатов о вложении соболевских пространств, лиувиллевских классов, классов функций с доминирующей смешанной производной и др.

Необходимые и достаточные условия существования неравенств типа Бернштейна-Никольского и Фавара будут даны в этой работе для специальных множеств Γ.

Пусть $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n_+ = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \geqslant \mathbb{0}\}$ и $\gamma > 0$. Положим

$$\sum(\xi;\gamma) = \{(s,\sigma) \mid |s_1|^{\xi_1}\cdot\ldots\cdot|s_{n'}|^{\xi_{n'}}|\sigma_1|^{\xi_{n'+1}}\cdot\ldots\cdot|\sigma_{n''}|^{\xi_n} \le \gamma\}.$$

Если $Q = \{\xi^1,\ldots,\xi^\ell\} \subset \mathbb{R}^n_+$, то по определению

$$\sum(Q;\gamma) = \bigcap_{\xi \in Q} \sum(\xi;\gamma).$$

<u>Теорема 4.2</u>. Пусть $\{(1/\mathbb{P}^i, \alpha^i),\ i = 0,1,\ldots,N\} \subset \operatorname{int} I^n \times \mathbb{R}^n$, $Q = \{\xi^1,\ldots,\xi^\ell\} \subset \mathbb{R}^n_+$, $\gamma > 1$ и $\Gamma = \sum(Q;\gamma)$. Тогда неравенство (I.I) имеет место в том и только в том случае, когда

$$(4.5)\qquad (1/\mathbb{P}^i, \alpha^i) \in \mathfrak{M}((1/\mathbb{P}^0, \alpha^0)) + (\mathbb{0}, \operatorname{cone} Q),\ i = 1,\ldots,N,$$

где $(\mathbb{0}, \operatorname{cone} Q)$ – прямое произведение $\mathbb{0}$ на $\operatorname{cone} Q$. Кроме того, если

$$(4.6)\qquad (1/\mathbb{P}^i, \alpha^i) \in \mathfrak{M}((1/\mathbb{P}^0, \alpha^0)) + (\mathbb{0}, \operatorname{co}\{\mathbb{0}, Q\}),\ i = 1,\ldots,N,$$

то $A = c\gamma$ для всех $\gamma > 1$ и $c > 0$ не зависит от γ.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать неравенство (I.I) лишь для $N = 1$. Обозначим $\alpha^1 = \alpha$; $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}$ и пусть выполнено включение (4.5).
Тогда найдется вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathrm{cone}\, Q$ такой, что

$$\left(\frac{1}{\mathbb{P}}, \alpha - \eta\right) \in \mathfrak{M}\left(\left(\frac{1}{\mathbb{P}^0}, \alpha^0\right)\right).$$

Следовательно, по теореме 4.I

$$(4.7) \qquad \|\mathcal{D}^{\alpha-\eta} x\|_{\mathbb{P}} \le c' \|\mathcal{D}^{\alpha^0} x\|_{\mathbb{P}^0}, \quad x \in W^{\alpha^0}_{\mathbb{P}^0}(\mathcal{M}).$$

Если $\eta = 0$, то (I.I) доказано. Пусть $\eta \ne 0$. По условию $\eta = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \xi^i$, $\lambda_i \ge 0$, $\xi^i \in Q$. Можно считать, что все $\lambda_i > 0$ и $\xi^i \ne 0$.

Рассмотрим множество

$$\tilde{\mathbb{Z}}^n = \{ k \in \mathbb{Z}^n \mid \Delta_k \cap \Sigma(Q; \gamma) \ne \emptyset \}.$$

Легко видеть, что $\tilde{\mathbb{Z}}^n \ne \emptyset$ для любого $\gamma > 1$. Пусть $k \in \tilde{\mathbb{Z}}^n$ и $(s, \sigma) \in \Delta_k \cap \Sigma(Q; \gamma)$. Так как $(s, \sigma) \in \Sigma(Q; \gamma)$, то

$$|s_1|^{\xi^i_1} \cdot \ldots \cdot |\sigma_{n''}|^{\xi^i_n} \le \gamma, \quad i = 1, \dots, l.$$

Возводя i-ое неравенство в степень $\lambda_i > 0$, а затем все их перемножая, получим

$$(4.8) \qquad |s_1|^{\eta_1} \cdot \ldots \cdot |\sigma_{n''}|^{\eta_n} \le \gamma^{\lambda_1 + \dots + \lambda_l}.$$

Поскольку $\eta \ne 0$, то $\eta_i > 0$ для некоторого $1 \le i \le n$. Пусть для определенности $i \le n'$. Тогда

$$2^{k_i' - 1} < |s_i| \le 2^{k_i'}$$

вследствие того, что $(s, \sigma) \in \Delta_k$. Возводя это неравенство в степень η_i, получим

$$2^{(k_i' - 1)\eta_i} < |s_i|^{\eta_i} \le 2^{k_i' \eta_i}.$$

Проделав это для каждой отличной от нуля координаты вектора η и перемножив полученные соотношения (добавив при этом сомножители, равные единице, которые соответствуют нулевым координатам) будем иметь

$$(4.9) \qquad 2^{-\langle \mathbb{1}, \eta \rangle} 2^{\langle k, \eta \rangle} < |s_1|^{\eta_1} \cdot \ldots \cdot |\sigma_{n''}|^{\eta_n} \le 2^{\langle k, \eta \rangle}.$$

Сравнение (4.8) с (4.9) дает следующую оценку для всех $k \in \tilde{\mathbb{Z}}^n$:

$$(4.10) \qquad 2^{\langle k, \eta \rangle} \le 2^{\langle \mathbb{1}, \eta \rangle} \gamma^{\lambda_1 + \dots + \lambda_l}.$$

Пусть теперь $x \in W^{\alpha}_{\mathbb{P}}(\mathcal{M})$ и $\mathrm{supp}\, \hat{x} \subset \Sigma(Q; \gamma)$. Так как $\Sigma(Q; \gamma) \subset \bigcup \{ \Delta_k \mid k \in \tilde{\mathbb{Z}}^n \}$, то $T_k x = 0$, если $k \notin \tilde{\mathbb{Z}}^n$. Учитывая это и оценку (4.I0) получим по теореме 3.3

$$\|\mathcal{D}^{\alpha} x\|_{\mathbb{P}} \le c \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |2^{\langle k, \alpha \rangle} T_k x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbb{P}} =$$

$$=c\Big\|\Big(\sum_{k\in\hat{\mathbb{Z}}^n}|2^{<k,\alpha>}T_kx|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{\mathbb{P}}=c\Big\|\Big(\sum_{k\in\hat{\mathbb{Z}}^n}|2^{<k,\eta>}2^{<k,\alpha-\eta>}T_kx|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{\mathbb{P}}\leq$$

$$\leq c2^{<\mathbb{1},\eta>}\gamma^{\lambda_1+\dots+\lambda_\ell}\Big\|\Big(\sum_{k\in\hat{\mathbb{Z}}^n}|2^{<k,\alpha-\eta>}T_kx|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{\mathbb{P}}\leq$$

$$\leq c2^{<\mathbb{1},\eta>}\gamma^{\lambda_1+\dots+\lambda_\ell}\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|2^{<k,\alpha-\eta>}T_kx|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{\mathbb{P}}\leq$$

$$\leq c_1\gamma^{\lambda_1+\dots+\lambda_\ell}\|\mathcal{D}^{\alpha-\eta}x\|_{\mathbb{P}}.$$

Отсюда и из (4.7) следует неравенство (I.I) и тем самым доказана достаточность условия (4.5). Его необходимость для существования (I.I) доказывается аналогично тому как это было сделано в теореме 4.I, с использованием тех же самых последовательностей функций.

Если выполнено (4.6), то $\eta\in co(\mathbb{0},Q)$ и, следовательно, $\eta=\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\xi^i$, $\lambda_i\geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\leq 1$. Теперь из последней полученной оценки вытекает, что

$$\|\mathcal{D}^{\alpha}x\|_{\mathbb{P}}\leq c_1\gamma\|\mathcal{D}^{\alpha-\eta}x\|_{\mathbb{P}},$$

когда $\gamma>1$. Теорема доказана.

<u>Теорема 4.3</u>. Пусть $\{(1/\mathbb{P}^i,\alpha^i),\ i=0,1,\dots,N\}\subset\subset \operatorname{int} I^n\times\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{A}=\{(1/\mathbb{P}^i,\alpha^i),\ i=1,\dots,N\}$, $Q=\{\xi^1,\dots,\xi^\ell\}\subset\mathbb{R}^n_+$, $\gamma>1$ и $\Gamma=\Sigma(Q;\gamma)$.

Тогда неравенство (I.2) имеет место в том и только в том случае, когда

$$(4.11)\qquad \Big(\frac{1}{\mathbb{P}^0},\alpha^0\Big)\in\bigcap_{i=1}^{\ell}\Big(\mathfrak{M}(\mathfrak{A})-(\mathbb{0},\operatorname{cone}\{\xi^i\})\Big).$$

Кроме того, если

$$(4.12)\qquad \Big(\frac{1}{\mathbb{P}^0},\alpha^0\Big)\in\bigcap_{i=1}^{\ell}\Big(\mathfrak{M}(\mathfrak{A})-(\mathbb{0},\xi^i)\Big),$$

то $B=c\gamma^{-1}$ для всех $\gamma>1$ и $C>0$ не зависит от γ.

<u>Доказательство</u>. Пусть выполнено (4.II). Тогда существуют такие числа $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1,\dots,\ell$, что

$$\Big(\frac{1}{\mathbb{P}^0},\alpha^0+\lambda_i\xi^i\Big)\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}),\quad i=1,\dots,\ell.$$

По теореме 4.I найдутся числа $c_i>0$, $i=1,\dots,\ell$, что для всех $x\in W^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$ справедливы неравенства

$$(4.13)\qquad \|\mathcal{D}^{\alpha^0+\lambda_i\xi^i}x\|_{\mathbb{P}^0}\leq c_i\max_{1\leq j\leq N}\|\mathcal{D}^{\alpha^j}x\|_{\mathbb{P}^j},\quad i=1,\dots,\ell.$$

Если $\lambda_i\xi^i=\mathbb{0}$ для некоторого $1\leq i\leq\ell$, то отсюда сразу следует (I.2). Поэтому далее считаем, что $\lambda_i\xi^i\neq\mathbb{0}$, т.е. $\lambda_i>0$, $\xi^i\neq\mathbb{0}$, $i=1,\dots,\ell$. Покажем, что имеет место неравенство

$$(4.14)\qquad \|\mathcal{D}^{\alpha^0}x\|_{\mathbb{P}^0}\leq c'\sum_{i=1}^{\ell}\|\mathcal{D}^{\alpha^0+\lambda_i\xi^i}x\|_{\mathbb{P}^0}$$

для всех $x \in W^{\mathfrak{r}}(\mathcal{M})$, у которых $\operatorname{supp}\hat{x} \subset \hat{\mathcal{M}} \setminus \Sigma(\varphi;\gamma)$. Тогда отсюда и (4.I3), очевидно, будет следовать (I.2).

Обозначим $E_i = \{(s,\sigma)\in\hat{\mathcal{M}} \mid |s_1|^{\xi_1^i}\cdot\ldots\cdot|\sigma_{n''}|^{\xi_n^i} > \gamma\}$, $i=1,\ldots,\ell$, и

$$\tilde{\mathbb{Z}}^n_i = \{k\in\mathbb{Z}^n \mid \Delta_k\cap E_i \ne\emptyset\},\ i=1,\ldots,\ell;\quad \tilde{\mathbb{Z}}^n = \bigcup_{i=1}^{\ell}\tilde{\mathbb{Z}}^n_i.$$

Легко проверить, что $\tilde{\mathbb{Z}}^n_i \ne\emptyset$ и что

$$\tilde{\mathbb{Z}}^n = \{k\in\mathbb{Z}^n \mid \Delta_k\cap(\hat{\mathcal{M}}\setminus\Sigma(\varphi;\gamma))\ne\emptyset\}.$$

Пусть $k\in\tilde{\mathbb{Z}}^n_i$ и $(s,\sigma)\in\Delta_k\cap E_i$. Тогда, с одной стороны, $|s_1|^{\xi_1^i}\cdot\ldots\cdot|\sigma_{n''}|^{\xi_n^i}>\gamma$, а с другой стороны, как и раньше, получаем, что

$$2^{\langle k,\xi^i\rangle} \ge |s_1|^{\xi_1^i}\cdot\ldots\cdot|\sigma_{n''}|^{\xi_n^i}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$(4.15)\qquad 2^{\langle k,\lambda_i\xi^i\rangle}\ge\gamma^{\lambda_i}$$

для всех $k\in\tilde{\mathbb{Z}}^n_i$.

Пусть теперь $x\in W^{\mathfrak{r}}(\mathcal{M})$ и $\operatorname{supp}\hat{x}\subset\hat{\mathcal{M}}\setminus\Sigma(\varphi;\gamma)$. В этом случае $T_k x = 0$, если $k\notin\tilde{\mathbb{Z}}^n$. Учитывая это обстоятельство, оценку (4.I5) и элементарное неравенство $(\sum_{i=1}^{\ell}a_i)^{1/2}\le\sum_{i=1}^{\ell}a_i^{1/2}$, $a_i\ge 0$, $i=1,\ldots,\ell$, получим по теореме 3.3

$$\|\mathcal{D}^{\alpha^0}x\|_{\mathbb{P}^0} \le C\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|2^{\langle k,\alpha^0\rangle}T_kx|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathbb{P}^0} =$$

$$= C\Big\|\Big(\sum_{k\in\tilde{\mathbb{Z}}^n}|2^{\langle k,\alpha^0\rangle}T_kx|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathbb{P}^0} \le C\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k\in\tilde{\mathbb{Z}}^n_i}|2^{\langle k,\alpha^0\rangle}T_kx|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathbb{P}^0}\le$$

$$\le C\Big\|\sum_{i=1}^{\ell}\Big(\sum_{k\in\tilde{\mathbb{Z}}^n_i}|2^{\langle k,\alpha^0\rangle}T_kx|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathbb{P}^0}\le C\sum_{i=1}^{\ell}\Big\|\Big(\sum_{k\in\tilde{\mathbb{Z}}^n_i}|2^{\langle k,\alpha^0\rangle}T_kx|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathbb{P}^0}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{\ell}\gamma^{-\lambda_i}\Big\|\Big(\sum_{k\in\tilde{\mathbb{Z}}^n_i}|2^{\langle k,\alpha^0+\lambda_i\xi^i\rangle}T_kx|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathbb{P}^0}\le$$

$$\le C\max_{1\le i\le\ell}\gamma^{-\lambda_i}\sum_{i=1}^{\ell}\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|2^{\langle k,\alpha^0+\lambda_i\xi^i\rangle}T_kx|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathbb{P}^0}\le$$

$$\le C_1\max_{1\le i\le\ell}\gamma^{-\lambda_i}\sum_{i=1}^{\ell}\|\mathcal{D}^{\alpha^0+\lambda_i\xi^i}x\|_{\mathbb{P}^0}.$$

Этим доказана достаточность включения (4.II) для существования неравенства (I.2). Необходимость же этого условия снова доказывается также как в теореме 4.I.

Если выполнено (4.I2), то $\lambda_1=\ldots=\lambda_\ell=1$ и требуемая оценка очевидна. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации ограниченного множества в $W^{\mathfrak{r}}(\mathcal{M})$ подпространством функций со спектром, сосредоточенным в заданном множестве вида $\Sigma(\varphi;\gamma)$.

Пусть $\Gamma \subset \hat{\mathcal{M}}$ и $1 \le \mathbb{P} \le \infty$. Положим

$$G_{\Gamma,\mathbb{P}} = \{x \in L_{\mathbb{P}}(\mathcal{M}) \mid \operatorname{supp}\hat{x} \subset \Gamma\}.$$

Если $\mathfrak{A}$ – конечное множество, то $W^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$ – полунормированное пространство. Обозначим через $BW^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$ единичный шар в $W^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$.

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{A} = \{(1/\mathbb{P}^i, \alpha^i)$, $i=1,\dots,N\} \subset \operatorname{int} I^n \times \mathbb{R}^n$ и $1 < \mathbb{P} < \infty$ такие, что $(1/\mathbb{P}, \mathbb{0}) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ и многогранник $S_{\mathbb{P}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n_+ \mid (1/\mathbb{P}, \xi) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})\} \neq \{\mathbb{0}\}$. Пусть далее $Q = \{\xi^1, \dots, \xi^l\}$ – вершины $S_{\mathbb{P}}$. Тогда

$$\sup_{x \in BW^{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})} \inf_{y \in G_{\Sigma,\mathbb{P}}} \|x-y\|_{\mathbb{P}} \asymp \gamma^{-1}$$

при $\gamma \to \infty$, где $\Sigma = \Sigma(Q;\gamma)$.

Доказательство этого результата близко к доказательству предыдущей теоремы и поэтому мы его опускаем.

Комментарии и библиографические указания

Введенные в данной работе пространства основных функций $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $\hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathcal{M}})$ являются естественными обобщениями классических определений для случаев $\mathcal{M}=\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{M}=\mathbb{T}^n$.

Конструкция пространства Φ и соответствующее определение дробной производной для функций на $\mathbb{R}^n$ принадлежит Лизоркину [1]. Для случая, когда $\mathcal{M}=\mathbb{T}^n$ – это многомерный аналог известного определения дробной производной по Г.Вейлю (см., например, [2]).

Теорема 3.1 на $\mathbb{R}^n$ доказана Лизоркиным [3]. Если $\mathcal{M}=\mathbb{T}^n$, то элементарно проверяется, что этот результат эквивалентен теореме Марцинкевича о мультипликаторах [4, стр. 239]. Доказательство общего случая может быть получено на том же пути, что и результат Лизоркина.

Теорема 3.2 на $\mathbb{R}^n$ также принадлежит Лизоркину [3]. Для периодических функций одного переменного – это классическая теорема Литтльвуда-Пэли. Многомерный вариант ее приведен в монографии Никольского [5, с. 56]. Обобщение на случай смешанной нормы см. в [4, с. 238]. Аналог теоремы Литтльвуда-Пэли для многообразий $\mathcal{M}$ доказывается индукцией по размерности многообразия исходя из одномерных вариантов этой теоремы (см. подобные рассуждения в [6]).

Теорема 3.3, когда $\mathcal{M}=\mathbb{R}^n$ доказана в [7]. В периодическом случае она установлена Никольской [8] (случай смешанной нормы рассмотрен в [4, с. 238]). В общей ситуации доказательство фактически не отличается от доказательства в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.4 является несложным обобщением на многообразия $\mathcal{M}$ аналогов известного неравенства Харди-Литтльвуда ([9; с. 348]) в $\mathbb{R}^n$ (см. [7]) и в $\mathbb{T}^n$ ([4, с. 243], см. также [10]).

Теорема 3.5 на окружности доказана в [10] и на прямой в [7].

Теорема 4.1 для конечного множества $\mathfrak{A}$ и для функций на $\mathbb{R}^n$ доказана в [7], а для периодических функций в [10]. В случае, когда $\mathfrak{A}$ произвольно и $\mathcal{M}=\mathbb{R}^n$ этот результат сформулирован в [13].

Варианты теорем 4.2, 4.3 и 4.4, когда $\mathcal{M}=\mathbb{T}^n$ приведены в [10], а когда $\mathcal{M}=\mathbb{R}^n$ они сформулированы в работе [14] (см. также [13]). Подробные доказательства и различные обобщения содержатся в [15].

Литература

1. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L^r_p(E_n)$. – Мат. сб., 1963, 60, № 3, р. 325–353.
2. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976.
3. Лизоркин П.И. Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток в пространствах со смешанной нормой. Приложения. – Изв. АН СССР, Сер. матем., 1970, **34**, 1, 218–247.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975.
5. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977.
6. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойст-

ва функций. М.: Мир, 1973.
7. Магарил-Ильяев Г.Г. Задача о промежуточной производной. - Матем. заметки, 1979, т. 25, № 1, с. 81-96.
8. Никольская Н.С. Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p. - Сиб. матем. ж., 1974, т. 15, № 2, с. 395-412.
9. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
10. Галеев Э.М. Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными. - Матем. заметки, 1978, т. 23, № 2, с. 197-212.
11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
12. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
13. Магарил-Ильяев Г.Г. Обобщенные соболевские классы и неравенства типа Бернштейна-Никольского. - Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 5, с. 1066-1069.
14. Динь Зунг, Магарил-Ильяев Г.Г. Задачи типа Бернштейна и Фавара и средняя ε - размерность некоторых классов функций. - Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 783-786.
15. Магарил-Ильяев Г.Г. Вложение обобщенных соболевских классов и неравенства для производных. Автореф. дис. М., 1980.

ГРАССМАНИАНЫ И ФЛАГИ В СУПЕРГЕОМЕТРИИ

Ю.И.Манин

§ 1. Введение и основные результаты

1. Основная цель этой заметки - построить и начать исследовать некоторый класс однородных супермногообразий: грассманианы и флаги для неисключительных простых супергрупп Ли классического типа [1], [2]. В действительности мы будем работать в категории суперсхем, причем в относительном варианте - над базой, которая сама является суперсхемой. Это совершенно необходимо для приложений к суперсимметричным дифференциальным уравнениям. Однородные суперсхемы мы будем задавать функторами, которые они представляют. Техника доказательств вполне стандартна в алгебраической геометрии гротендиковского стиля [3], поэтому наша главная забота - проследить за спецификой, которая связана с наличием антикоммутирующих координат. Начнем с краткого введения в суперкоммутативную алгебру и геометрию.

2. Элементы супералгебры изложены в [4]. Напомним смысл приставки "супер": она означает, что кольца, модули, гомоморфизмы модулей и т.п. снабжены $\mathbb{Z}_2$ - градуировкой, а аксиомы основных структур отличаются от их обычных версий множителями ± 1, учитывающими эту градуировку. Например, кольцо $A = A_0 \oplus A_1$ (прямая сумма аддитивных групп, $\{0,1\} = \mathbb{Z}_2$) суперкоммутативно, если $ab = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}ba$; в формулах такого типа молчаливо предполагается, что $a, b \in A$ - однородные элементы степеней $\tilde{a}, \tilde{b}$ соответственно. Если $\tilde{a} = 0$ (соотв. 1), a называется четным (соотв. нечетным). Мы считаем, что 2 обратима во всех рассматриваемых кольцах.

Пусть A - суперкоммутативное кольцо. A - модулем $T = T_0 \oplus T_1$ называется градуированный A - бимодуль, у которого правое и левое умножения согласованы: $at = (-1)^{\tilde{a}\tilde{t}}ta$. Любое из двух умножений восстанавливается по другому. Тензорное произведение определяется обычным образом, но стандартные изоморфизмы полилинейной алгебры снабжены знаками: функториальный изоморфизм $\psi_{S,T}: S \otimes T \to T \otimes S$ имеет вид $s \otimes t \to (-1)^{\tilde{s}\tilde{t}} t \otimes s$. A - модули образуют тензорную категорию в смысле Делиня [5] с единичным объектом A; в частности, в ней определены симметрические и внешние степени. В ней имеется также внутренний функтор $\underline{Hom}$: а именно, $\underline{Hom}(S,T)$ состоит из всевозможных гомоморфизмов правых A - модулей. Мы полагаем $S^* = \underline{Hom}(S,A)_T$. Отображение $f \in \underline{Hom}(S,T)$ степени $\tilde{f}$ переводит S_i в $T_{i+\tilde{f}}$; кроме того, $f(as) = (-1)^{\tilde{a}\tilde{f}} af(s)$.

Функтор перемены четности $\Pi : A\text{-}mod \to A\text{-}mod$ определяется на объектах так: $(\Pi T)_0 = T_1$, $(\Pi T)_1 = T_0$, правые умножения на A совпадают в T и ΠT. Иногда удобно обозначать через $\Pi t \in \Pi T$ элемент $t \in T$. Имеется канонический изоморфизм $\Pi T = \Pi A \otimes T$, а также отождествления $\underline{Hom}(S,T)_0 = Hom(S,T)$, $\underline{Hom}(S,T)^A_1 = Hom(S, \Pi T)$.

Свободным A - модулем ранга $d_0|d_1$ называется модуль, изоморфный $A^{d_0} \oplus (\Pi A)^{d_1} = A^{d_0|d_1}$. При тензорном умножении модулей их ранги перемножаются так: $(d_0|d_1)(c_0|c_1) = (d_0c_0 + d_1c_1)|(d_0c_1 + d_1c_0)$.

Подмодуль $S \subset T$ называется прямым, если он выделяется прямым слагаемым. Морфизм $f : S \to T$ называется прямым, если $Ker\, f$ и $Im\, f$ - прямые подмодули S и T соответственно. Билинейная форма на T: $b : T \to T^* = \underline{Hom}(T,A)$ называется прямой, если она прямая как морфизм. Аналогичное определение применяется к нечетной билинейной форме $b : T \to \underline{Hom}(T, \Pi A)$. Если отображение b является изоморфизмом, форма называется невырожденной.

3. Элементы дифференциальной супергеометрии также изложены в [4] . Суперсхемы (и супераналитические пространства) проще всего ввести на базе стандартного определения схемы. Суперсхемой называется пара $(M, \mathcal{O}_M)$, состоящая из топологического пространства M и пучка суперкоммутативных колец $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_0 \oplus \mathcal{O}_1$ на нем со следующим свойством: $(M, \mathcal{O}_0)$ есть схема, а $\mathcal{O}_1$ - квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_0$ - модулей. Все стандартные конструкции алгебраической геометрии переносятся в категорию суперсхем; в частности, конструкции предыдущего пункта локализуются и превращаются в конструкции под квазикогерентными пучками.

Суперкоммутативному кольцу A отвечает аффинная суперсхема $Spec\, A$. Пусть T - некоторый A - модуль, $S_A(T)$ - симметрическая (в смысле супералгебры) алгебра T над A . Тогда $Spec\, S_A(T)$ представляет в категории A - суперсхем (то есть в категории стрелок $\varphi : M \to Spec\, A$) функтор

$(M, \varphi) \to Hom_A(\varphi^*(\tilde{T}), \mathcal{O}_M)$, где $\tilde{T}$ - пучок на $Spec\, A$, ассоциированный с T . Если T свободен ранга $d_0|d_1$, мы будем иногда называть $Spec\, S_A(T)$ аффинным пространством над A (или $Spec\, A$) относительной размерности $d_0|d_1$. Как и обычную схему, суперсхему удобно отождествлять с функтором, который она представляет.

4. Чтобы ввести функторы грассманианов и флагов, фиксируем раз навсегда суперсхему M и локально свободный пучок $\mathcal{T}$ на ней конечного ранга. Пучок этот может быть снабжен одной из следующих дополнительных структур.

Π - симметрия, то есть изоморфизм $p : \mathcal{T} \to \Pi\mathcal{T}$ со свойством $p^2 = id$. (Это возможно, только если ранг $\mathcal{T}$ имеет вид $n|n$; см. § 3).

Четная прямая билинейная форма $b : \mathcal{T} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{T}^*$ со значениями в обратимом пучке $\mathcal{L}$ ранга $1|0$.

Нечетная прямая билинейная форма $b : \mathcal{T} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{T}^*$ со значениями в обратимом пучке $\mathcal{L}$ ранга $0|1$ (подробности о билинейных формах см. в § 4).

Флагом длины K в $\mathcal{T}$ называется последовательность локально прямых подпучков $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \ldots \mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}$ (это означает, что для любых i, j у любой точки M существует окрестность, в которой вложение $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_j$ прямое). Типом флага удобно называть иногда последовательность рангов $rk\,\mathcal{T}_1$, $rk\,\mathcal{T}_2$, ... , иногда последовательность корангов $rk\,\mathcal{T}_1$, $rk\,\mathcal{T}_2 - rk\,\mathcal{T}_1$, ... , или любые данные, по которым эти размерности восстанавливаются. Если на $\mathcal{T}$ задана дополнительная структура из числа описанных выше, то можно рассмотреть также Π - симметричные флаги (те, для которых $p(\mathcal{T}_i) = \Pi\mathcal{T}_i$ при всех i) и b - изотропные флаги (те, для которых $b(\mathcal{T}_i) \subset \mathcal{L} \otimes \mathcal{T}_i^\perp$ ($\mathcal{T}_i^\perp \subset \mathcal{T}^*$ - подпучок функционалов, обращающихся в нуль на $\mathcal{T}_i$).

Наконец, пусть $\varphi : N \to M$ - некоторый морфизм суперсхем. Тогда пучок $\varphi^*(\mathcal{T})$ на N локально свободен того же ранга, что и $\mathcal{T}$, и снабжен структурами $\varphi^*(p), \varphi^*(b)$ того же вида, что и $\mathcal{T}$. Поэтому можно рассматривать флаги в $\varphi^*(\mathcal{T})$ - все, симметричные или изотропные.

Теперь мы можем сформулировать основной результат этой работы. В формулировке используются обозначения и соглашения этого пункта.

5. Теорема. А. В категории M - суперсхем $\varphi : N \to M$

следующие функторы представимы посредством собственных над M суперсхем конечного типа над M (указано название функтора, обозначение и действие на объектах):

Флаги: F_M (тип флага; $\mathcal{T}$): $(N,\varphi)\mapsto$ (флаги данного типа в $\varphi^*(\mathcal{T})^M$;

Π – симметричные флаги: $F\Pi_M$(тип флага; $\mathcal{T}$, ρ): $(N,\varphi)\to(\Pi)$ – симметричные флаги данного типа в $\varphi^*(\mathcal{T})$;

Изотропные флаги: FI_M (тип флага; $\mathcal{T}, b$): $(N,\varphi)\mapsto(\varphi^*(b)$ – изотропные флаги данного типа в $\varphi^*(\mathcal{T})$.

Б. Естественные вложения функторов $F\Pi_M\subset F_M$, $FI_M\subset F_M$ представлены замкнутыми вложениями представляющих суперсхем.

Функторы флагов длины единица – это грассманианы; мы часто будем обозначать их G_M, $G\Pi_M$, GI_M соответственно, а вместо типа будем указывать ранг $\mathcal{T}_1$. На каждом грассманиане $G_M\xrightarrow{\pi}M$ (соотв. $G\Pi_M$, GI_M) имеется тавтологический прямой подпучок $S=S_M$ (ранг, $\mathcal{T}$)$\subset\pi^*(\mathcal{T})$, отвечающий тождественному морфизму G_M (соотв. $G\Pi_M$, GI_M).

В. Грассманиан $G_M(d;\mathcal{T}^{d+c})$ (где $d+c=\operatorname{rk}_M\mathcal{T}$, $d=d_0|d_1$, $c=c_0|c_1$) допускает открытое покрытие относительными аффинными пространствами (над открытыми подсхемами M) относительной размерности cd. Обозначая через $\mathcal{T}G_M$ относительный над M суперкасательный пучок (см. ниже), имеем канонический изоморфизм

$$\mathcal{T}G_M(d;\mathcal{T}^{d+c})=\underline{\underline{Hom}}(S,\pi^*(\mathcal{T})/S)$$

(двойная черта означает пучок внутренних $\underline{\underline{Hom}}$).

Г. Грассманиан $G\Pi_M(d_0|d_0;\mathcal{T}^{d_0+c_0|d_0+c_0},\rho)$ допускает открытое покрытие относительными аффинными пространствами относительной размерности $c_0d_0|c_0d_0$. Пучки S, $\pi^*(\mathcal{T})/S$ на нем снабжены индуцированной Π – симметрией $\pi^*(\rho)$ и имеет место канонический изоморфизм

$$\mathcal{T}G\Pi_M(d_0|d_0;\mathcal{T},\rho)=\underline{\underline{Hom}}^{\rho}(S,\pi^*(\mathcal{T})/S),$$

где справа стоит пучок Π – симметричных внутренних $\underline{\underline{Hom}}$: $f\in\underline{\underline{Hom}}^{\rho}$ означает, что $f\rho=(-1)^{\tilde f}\rho f$.

Д. Предположим, что b – симметричная четная невырожденная расщепимая форма на $\mathcal{T}^{2r|2s}$ (определение расщепимости дано в § 4). Тогда изотропный грассманиан максимального типа $GI_M(r|s;\mathcal{T},b)$ допускает открытое покрытие относительными аффинными пространствами относительной размерности $\left(\frac{r(r-1)}{2}+\frac{s(s+1)}{2}\,\middle|\,rs\right)$, и имеет место канонический изоморфизм

$$\mathcal{T}GI_M(r|s;\mathcal{T},b)=\Lambda^2(S^*)$$

(аналогичное утверждение для $\mathcal{T}^{2r+1|2s}$ см. в § 5).

Е. Предположим, что b – антисимметричная нечетная невырожденная расщепимая форма на $\mathcal{T}^{r+s|r+s}$. Тогда изотропный грассманиан максимального типа $GI_M(r|s;\mathcal{T},b)$ допускает открытое покрытие относительными аффинными пространствами относительной размерности $\left(rs\,\middle|\,\frac{r(r+1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}\right)$, и имеет место канонический изоморфизм

$$\mathcal{T}GI_M(r|s;\mathcal{T},b)=\Pi S^2(S^*).$$

6. План доказательства следующий. Прежде всего устанавливается существование и структура грассманиана G_M. Из его функториальных свойств вытекает представимость функтора флагов F_M любого типа и заодно представимость функторных морфизмов, отвечающих проекциям над подфлаги. После этого одним и тем же приемом устанавливается представимость симметричных и изотропных грассманианов посредством замкнутых подсхем в G_M. Уравнения, выделяющие эти замкнутые подсхемы, в изотропном случае особенно просты для расщепимых форм b, которые мы классифицируем в § 4.

7. Сама представимость функторов флагов является лишь первым шагом в их понимании. Дальнейшие вопросы, которые подлежат исследованию: структура флаговых многообразий для

исключительных и картановских супергрупп; клетки Шуберта и характеристические классы; теоремы типа Бореля-Вейля-Ботта о реализации представлений в когомологиях. Во всех этих сюжетах свойства суперкатегории должны приводить к интересным новым эффектам. Отметим, например, что группа Пикара флагового многообразия может быть не дискретной, как показывают простые примеры. Поэтому для реализации представлений супергрупп на когомологиях открываются новые возможности.

§ 2. Грассманиан и флаги

I. В этом параграфе рассматривается суперсхема M с локально свободным пучком $\mathcal{T}$ ранга $d+c$ на ней и устанавливается существование грассманианов и флагов, в определении которых не учитываются дополнительные структуры на $\mathcal{T}$. Сначала рассмотрим случай, когда $M = \operatorname{Spec} A$ - аффинная суперсхема, $T=\Gamma(M,\mathcal{T})$ - свободный A - модуль ранга $d+c$. Мы хотим представить функтор $G_M : Sch^{\circ}_M \longrightarrow Sets$, который ставит в соответствие любой A - схеме N множество локально прямых подпучков в $\mathcal{O}_N \underset{A}{\otimes} T$ ранга d (и коранга c).

Начнем с того, что выберем в T свободный базис: $T= A^{d_0+c_0} \oplus (\Pi A)^{d_1+c_1}$. Любой элемент T можно представить строкой его левых координат в этом базисе. Такой элемент четен, если первые d_0+c_0 его координат лежат в A_0, вторые d_1+c_1 - в A_1; нечетен, если первые - в A_1, вторые - в A_0.

Предположим, что $S\subset T$ - свободный подмодуль ранга $d_0|d_1$. Тогда у него есть свободная система из d_0 четных и d_1 нечетных образующих строк описанного типа. Вместе они образуют матрицу вида

$$Z = \begin{array}{c|c|c|} & d_0+c_0 & d_1+c_1 \\ \hline d_0 & A_0 & A_1 \\ \hline d_1 & A_1 & A_0 \\ \hline \end{array} \qquad (I)$$

(отмечены ее размеры и четности ее элементов).

То, что S свободен ранга $d_0|d_1$, означает следующее: у каждой точки $\operatorname{Spec} A$ найдется окрестность, для которой существует такое подмножество индексов $I=I_0\cup I_1$, $I_0\subset(1,\ldots,d_0+c_0)$, $I_1\subset(d_0+c_0+1,d_0+c_0+d_1+c_1)$, $|I_{0,1}|=d_{0,1}$, что подматрица Z, состоящая из столбцов с номерами I, обратима в этой окрестности. Умножим Z слева на обратную к этой подматрице; столбцы I будут образовывать единичную матрицу, а строки будут по-прежнему порождать S; такая система образующих S по I определяется уже однозначно.

Это соображение мотивирует следующую конструкцию $G_M(d,\mathcal{T})$.

а) Каждому подмножеству I, описанному выше, поставим в соответствие свободный набор четных x_I^{ab} и нечетных $\xi_I^{\alpha\beta}$ переменных, заполняющих в схеме матрицы (I) все места, кроме столбцов I, где стоит единичная матрица:

$$Z_I = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & c_0 & d_0 & d_1 & c_1 \\ \hline d_0 & x_I & 1\ddots 1 & 0 & \xi_I \\ \hline d_1 & \xi'_I & 0 & 1\ddots 1 & x'_I \\ \hline \end{array} \qquad (2)_I$$

(столбцы d_0, d_1 объединены фигурной скобкой с меткой I)

Положим $\mathcal{U}_I=\operatorname{Spec} A[x_I, x'_I, \xi_I, \xi'_I]$. Это аффинная гладкая над A суперсхема, относительной размерности $(d_0c_0+d_1c_1)|(d_0c_1+c_0d_1)$.

б) Обозначим через B_{IJ} подматрицу Z_I, образованную столбцами с номерами J, где J - подмножество $(1,\ldots,d_0+d_1+c_0+c_1)$ такого же типа, как I. Пусть $\mathcal{U}_{IJ}\subset\mathcal{U}_I$ - открытая подсхема, где B_{IJ} обратима (чтобы ее построить, достаточно обратить два четных элемента - определители левой верхней подматрицы B_{IJ} размера $d_0\times d_0$ и правой нижней размера $d_1\times d_1$.

в) Положим

$$G_M(d;\mathcal{T})=(\bigcup_I \mathcal{U}_I)/R, \qquad (3)$$

где R - отношение эквивалентности, описываемое уравнениями склейки

$$B_{IJ}Z_J=Z_I \quad \text{на } \mathcal{U}_{IJ}. \qquad (4)$$

7 - 1864

Нетрудно убедиться, что G_M - отделимая супергладкая над M, собственная над M суперсхема. Проверка облегчается, если заметить, что $G_M(d;\mathcal{T})=A\otimes G_{\mathbb{Z}}(d;\mathbb{Z}^{d+c})$ (мы пишем для краткости $\mathbb{Z}$ вместо $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ или $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$) и что

$$G_{\mathbb{Z}}(d;\mathbb{Z}^{d+c})_{red}=G_{\mathbb{Z}}(d_0;\mathbb{Z}^{d_0+c_0})\times G_{\mathbb{Z}}(d_1;\mathbb{Z}^{d_1+c_1}),$$

где справа стоят обычные грассмановы схемы.

Канонические морфизмы $\mathcal{U}_I\to G_M(d;\mathcal{T})$ являются открытыми вложениями, так что G_M покрыто аффинными суперпространствами над A.

Проверим теперь, что грассманиан (3) представляет требуемый функтор. Пусть N - некоторая A - суперсхема. Поскольку $\mathcal{U}_I$ аффинная, A- морфизмы $\varphi: N\to\mathcal{U}_I$ однозначно определяются прообразами $\varphi^*(x_I^{a\beta})$, $\varphi^*(\xi_I^{\alpha\beta})\in\Gamma(N,\mathcal{O}_N)$, которые могут быть любыми однородными элементами $\Gamma(N,\mathcal{O}_N)$ той же четности, что и x,ξ соответственно. Поэтому

$$\mathrm{Hom}_M(N,\mathcal{U}_I)=\text{матрицы вида } (2)_I \text{ с элементами из } \Gamma(N,\mathcal{O}_N).$$

Поставим в соответствие такой матрице подпучок в $\mathcal{O}_N\underset{A}{\otimes}\mathrm{T}=\mathcal{O}_N^{d+c}$, порожденный ее строками. Он прямой и изоморфен $\mathcal{O}_N^d$. Разные матрицы порождают разные подпучки.

Пусть теперь $\varphi: N\to G_M$ - произвольный морфизм A-схем. По нему определяется открытое покрытие $N_I=\varphi^{-1}(\mathcal{U}_I)$ и на каждом N_I прямой подпучок в $\mathcal{O}_{N_I}\otimes\mathrm{T}$ ранга d; в силу соотношений (4), на $N_I\cap N_J={}^{I}\varphi^{-1}(\mathcal{U}_{IJ})$ эти подпучки совпадают. Таким образом, определен функторный морфизм, который является инъективным. Для доказательства сюръективности нужно по каждому локально прямому подпучку $\mathcal{F}\subset\mathcal{O}_N^{d+c}$ ранга d построить соответствующий морфизм $\varphi: N\to G_M(d;\mathcal{T})$. С этой целью покроем N такими открытыми подмножествами N_i, что на каждом из них $\Gamma(N_i,\mathcal{F})\subset\Gamma(N_i,\mathcal{O}_{N_i})^{d+c}$ имеет систему образующих, представленных строками матрицы вида $(2)_I$ с подходящими $I=I(i)$, и выберем такие системы образующих. Это определит набор морфизмов $\varphi_i: N_i\to\mathcal{U}_{I(i)}$, индуцирующих $\mathcal{F}|N_i$. Мы опускаем проверку того, что все эти морфизмы склеиваются в нужный морфизм $\varphi: N\to G_M$.

3. Следующие функториальные свойства $G_M(d;\mathcal{T})$ получаются непосредственно:

а) Функториальность по A. Пусть $A\to B$ - гомоморфизм колец; индуцирующий функтор замены базы $Sch_M\to Sch_{M'}$ и морфизм функторов $G_{M'}\to G_M$. Тогда $G_{M'}(d;\mathcal{O}_{M'}\otimes\mathcal{T})$ можно отождествить с $B\underset{A}{\otimes}G_M(d;\mathcal{T})$.

б) Функториальность по $\mathcal{T}$. Любой изоморфизм A - модулей $\mathrm{T}\to\mathrm{T}'$ индуцирует изоморфизм $G_M(d;\mathcal{T})\to G_M(d;\mathcal{T}')$. В частности, группа $GL(\mathrm{T})$ действует на A -точки $G_M(d;\mathcal{T})$ и, более общо, $GL(\mathcal{O}_N\underset{A}{\otimes}\mathrm{T})$ действует на N - точки грассманиана, функториально по N. Следовательно, определено действие соответствующей групповой суперсхемы на грассманиан.

4. Из этих свойств функториальности следует, что для общей суперсхемы M грассманиан можно построить, склеив его из грассманианов $G_{V_i}(d;\mathcal{T}|V_i)$, где $M=\cup V_i$ - достаточно мелкое аффинное покрытие. В коммутативной ситуации подробности описаны в [3], § 9.7. Пусть $\pi: G_M\to M$ - каноническая проекция. Обозначим через $\mathcal{S}\subset\pi^*(\mathcal{T})$ тавтологический пучок на G_M. Построим теперь морфизм пучков $\mathcal{T}G_M\to\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{S},\pi^*(\mathcal{T}),\mathcal{S})$ и покажем, что он является изоморфизмом. Локальные сечения $\mathcal{T}G_M$ суть супердифференцирования структурного пучка G_M, тривиальные на $\pi^*\mathcal{O}_M$; в частности, формула Лейбница имеет вид $X(fg)=Xf\cdot g+(-1)^{\tilde{X}\tilde{f}}f\cdot Xg$. Определим действие X на $\pi^*(\mathcal{T})$ так: если $s=\sum f_i\cdot\pi^*(s_i)$, s_i - сечения $\mathcal{T}$, f_i - сечения $\mathcal{O}_{G_M}$, то $Xs=\sum Xf_i\cdot\pi^*(s_i)$. Это определение корректно. Рассмотрев $\mathcal{S}$ как подпучок $\pi^*(\mathcal{T})$, определим отображение $\bar{X}:\mathcal{S}\to\pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S}$ формулой $\bar{X}(s)=Xs \bmod \mathcal{S}$. Формула Лейбница показывает, что $\bar{X}\in\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{S},\pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S})$ (локально) и что отображение $X\mapsto\bar{X}$ есть (четный) морфизм пучков $\mathcal{T}G_M\to\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{S},\pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S})$. Вычислив этот морфизм в координатах на $\mathcal{U}_I$, отвечающих элементам матрицы Z_I, сразу же получаем, что он является изоморфизмом.

5. Теперь мы можем индукцией по длине флага построить

суперсхему над M, представляющую функтор флагов и тавтологический (универсальный) флаг на ней (флаги разных типов, в частности, разных длин, параметризуются, конечно, разными связными компонентами). Попутно строятся морфизмы проекций на подфлаги. Пусть, скажем, мы хотим параметризовать флаги длины два $\mathcal{T}^{d_1} \subset \mathcal{T}^{d_2} \subset \mathcal{T}$ на M (указаны ранги пучков). Построим сначала грассманиан $N = G_M(d_2;\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi_2} M$ с тавтологическим пучком $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_M(d_2;\mathcal{T})$, а затем грассманиан $G_N(d_1;\mathcal{S}_2) \xrightarrow{\pi_1} N$ с тавтологическим пучком $\mathcal{S}_1 \subset \pi_1^*(\mathcal{S}_2) \subset \pi_1^*\pi_2^*(\mathcal{T})$. Утверждается, что этот последний грассманиан, рассматриваемый как M - схема, $\pi_2\pi_1 : G_N(d_1;\mathcal{S}_2) \to M$, и представляет $F_M(d_1, d_2;\mathcal{T})$, а написанный выше флаг универсален. Подробности мы оставляем читателю. Отметим лишь, что F_M, как и G_M, покрыт относительными аффинными пространствами.

§ 3. Π - симметричные грассманианы

I. В этом параграфе мы докажем утверждения теоремы 5, § I, относящиеся к Π - симметричным грассманианам и флагам. Единственное существенное место - это явные уравнения, выделяющие Π - симметричные подпучки, на стандратных открытых подмножествах G_M, построенных в § 2.

В обозначениях п. I, § 2 пусть $d_0 = d_1$, $c_0 = c_1$, $\rho: T \to T$ - гомоморфизм степени (отождествляющий T и ΠT), причем $\rho^2 = id$. Нетрудно установить, что T имеет базис вида $(e_1, \dots, e_{d_0}; \rho e_1, \dots, \rho e_{d_0})$, где e_i - четные элементы. В таком базисе подмодуль $S \subset T$ симметричен, если и только если вместе с любым элементом вида $x^i e_i + \xi^j \rho e_j$ он содержит элемент вида $-\xi^j e_j + x^i \rho e_i$. Это означает, что подфунктор $G\Pi_M \subset G_M$, $M = \mathrm{Spec}\, A$, покрыт спектрами колец $A[x_I, \xi_I]$, где x_I, ξ_I заполняют свободные места в матрицах вида

$$Z_I^{\Pi} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & c_0 & d_0 & c_0 & d_0 \\ \hline d_0 & x_I & E_{d_0} & \xi_I & 0 \\ \hline d_0 & -\xi_I & 0 & x_I & E_{d_0} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{I_0}} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\quad}_{I_1}} \end{array}$$

2. Есть более инвариантное рассуждение, показывающее, что $G\Pi_M$ замкнуто внутри G_M. Рассмотрим на G_M пучки $\mathcal{S}, \rho(\mathcal{S}) \subset \pi^*(\mathcal{T})$ N - точка $\varphi: N \to G_M$ лежит в ΠG_M, если и только если $\varphi^*(\mathcal{S}) = \varphi^*(\rho(\mathcal{S}))$, то есть если подъем на N гомоморфизма пучков $\mathcal{S} \to \pi^*(\mathcal{T})/\rho(\mathcal{S})$ равен нулю. Так как $\pi^*(\mathcal{T})/\rho(\mathcal{S})$ локально свободен, это условие можно записать локальными уравнениями, которые и порождают пучок идеалов, определяющий ΠG_M (ср. [3], стр. 387 лемма 9.7.9.I).

3. Пусть $i: G\Pi_M \to G_M$ - каноническое вложение, $\mathcal{S}^{\Pi} = i^*(\mathcal{S})$. Построим морфизм пучков $\mathcal{T}G\Pi_M \to \underline{Hom}(\mathcal{S}^{\Pi}, i^*\pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S}^{\Pi})$ в точности так же, как в п. 4 предыдущего параграфа. Прямо из определения следует, что если $\bar{X} \in \underline{Hom}$ - образ локального супердифференцирования X, то $\bar{X}\rho = (-1)^{\tilde{X}}\rho X$. Поэтому в действительности мы имеем отображение $\mathcal{T}G\Pi_M \to \underline{Hom}^{\rho}$, и его вычисление в карте, отвечающей матрице Z_I^{Π}, показывает, что это изоморфизм.

4. Представимость функтора Π - симметричных флагов устанавливается индукцией по длине флага, точно так же, как в конце предыдущего параграфа. Оставив подробности читателю, укажем несколько дополнительных свойств Π - симметрии.

а. Пусть $\rho_S : S \to S$ - Π - симметрия A - модуля, т.е. нечетный гомоморфизм с $\rho_S^2 = id$, T - любой A - модуль. Тогда на $S \otimes T$, $T \otimes S$, $\underline{Hom}(S, T)$ и $\underline{Hom}(T, S)$ можно определить Π - симметрии формулами $\rho(s \otimes t) = \rho(s) \otimes t$, $\rho(t \otimes s) = (-1)^{\tilde{t}}\, t \otimes \rho(s)$, $\rho(f)(s) = (-1)^{\tilde{f}+1} f(\rho s)$, $\rho(f)(t) = \rho f(t)$ соответственно. Если на T тоже задана Π - симметрия, то аналогичную конструкцию можно проделать с помощью T. Произведение двух таких симметрий является уже четным автоморфизмом с квадратом $-id$: $q(s \otimes t) = (-1)^{\tilde{s}} \rho(s) \otimes \rho(t)$, $q^2(s \otimes t) = -s \otimes t$.

б. Пусть T - A - модуль ранга $1|1$, $\rho: T \to T$ - некоторая Π - симметрия, причем $\rho^2 = -id$. Она определяет подмножество $Q \subset T_0$ таких t, что $T = At \oplus A\rho(t)$. На Q действует мультипликативная группа A^* по формуле $(a_0 + a_1) \circ t = a_0 t + a_1 \rho(t)$. Нетрудно видеть, что Q образует главное однородное пространство над A^*. Это позволяет поставить в соответствие любой паре $(\mathcal{L}, \rho)$, где $\mathcal{L}$ - пучок ранга $1|1$ на суперсхеме M, с Π - симметрией P, $P^2=id$, класс когомологий в множестве $H^1(M, O^*_M)$. Это множество представляет собой специфическую версию функтора Пикара для суперсхем.

§ 4. Билинейные формы

1. Пусть A – суперкоммутативное кольцо; T_1, T_2 – A-модули. Билинейной формой называется морфизм A-модулей $b: T_1 \otimes_A T_2 \to A$ или $b: T_1 \otimes_A T_2 \to \Pi A$. В первом случае форма называется четной, во втором – нечетной. Билинейная форма однозначно определяется своими значениями на образующих $b(t_1 \otimes t_2) = b(t_1, t_2)$, которые должны удовлетворять следующим условиям:

а) b биаддитивна и однородна;

б) $b(at_1, t_2) = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} a b(t_1, t_2)$; $b(t_1, t_2 a) = b(t_1, t_2) a$; $a \in A$.

Поставим в соответствие элементу $t_1 \in T_1$ отображение $t_2 \mapsto b(t_1, t_2): T \to A$ (или ΠA). Оно линейно справа по t_2 и однородно степени $\tilde{b} + \tilde{t}_1$ (при однородном t_1). Поэтому оно определяет четное отображение $T_1 \to T_2^* = \underline{Hom}(T_2, A)$, если b четная, или $T_1 \to \Pi T_2^*$ при b нечетной. Это отображение мы тоже обозначаем буквой b. Напомним, что форма b называется невырожденной, если отображение $b: T_1 \to T_2^*$ (или ΠT_2^*) является изоморфизмом.

В дальнейшем мы ограничимся случаем $T_1 = T_2 = T$. Если T свободен, форму можно задавать ее матрицей Грама b^{MN} в свободном базисе (e^M): по определению, $b^{MN} = (-1)^{\tilde{b}\tilde{e}^M} b(e^M, e^N)$. Задавая $t, t' \in T$ соответственно левыми и правыми координатами, находим:

$$b(t, t') = b(t_M e^M, e^N t'_N) = (-1)^{\tilde{b}\tilde{t}_M} t_M b(e^M, e^N) t'_N = (-1)^{\tilde{b}\tilde{t}} t_M b^{MN} t'_N \tag{5}$$

Пусть $\varphi: A \to B$ – гомоморфизм суперкоммутативных колец, b – форма на A-модуле T. Тогда на $T_B = B \otimes_A T$ индуцирована форма b_B. В базис $1 \otimes_A e^M$ она имеет матрицу Грама $\varphi(b^{MN})$. Если b невырождена, то b_B также невырождена. Отметим, что нечетная форма на проективном A-модуле T может быть невырожденной, только если

ранг T равен $n|n$.

Пусть $S \subset T$ – прямой подмодуль проективного A-модуля ранга d и коранга c. Тогда $S^\perp = \{f \in T^* \mid f(S) = 0\}$ является прямым подмодулем в T^*, ранга c и коранга d. Если b невырождена на T и четна (соотв. нечетна), то $S_b^\perp = b^{-1}(S^\perp)$ (соотв. $S_b^\perp = b^{-1}(\Pi S^\perp)$) является прямым подмодулем в T типа (c,d) (соотв. (c^t, d^t)), где $(c_0|c_1)^t = c_1|c_0$. Подмодуль $S \subset T$ называется изотропным относительно b, если $S \subset S_b^\perp$.

Пусть M – суперсхема, $\mathcal{L}$ – обратимый пучок на M, то есть локально свободный пучок ранга $1|0$ или $0|1$. Билинейной формой на когерентном пучке $\mathcal{T}$ на M со значениями в $\mathcal{L}$ называется морфизм $\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T} \to \mathcal{L}$. Все предыдущие определения переносятся на этот случай с помощью локализации.

2. Условия симметрии. Пусть $b: T \times T \to A$ (или ΠA) – билинейная форма.

а) Положим $b^\tau(t, t') = (-1)^{\tilde{t}\tilde{t}'} b(t', t)$. Легко проверить, что b^τ – билинейная форма той же четности, что и b. Форма b называется симметричной (соотв. антисимметричной), если $b^\tau = b$ (соотв. $b^\tau = -b$).

Следующая конструкция показывает, что из четырех возможных комбинаций четности и симметрии существенно разными являются лишь две.

б) Положим $b^\Pi: \Pi T \times \Pi T \to A$ (или ΠA): $b^\Pi(\Pi t, \Pi t') = (-1)^{\tilde{t}} b(t, t')$. Отображение b^Π является билинейной формой той же четности, что и b; вот проверка линейности по первому аргументу:

$$b^\Pi(a\Pi t, \Pi t') = b^\Pi((-1)^{\tilde{a}}\Pi(at), \Pi t') = (-1)^{\tilde{a} + \widetilde{at}} b(at, t') = (-1)^{\tilde{t} + \tilde{a}\tilde{b}} a b(t, t') = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} a b^\Pi(\Pi t, \Pi t').$$

Симметрия же b^{Π} противоположна симметрии b : если $b^{\tau}=\eta b$, $\eta=\pm 1$, то

$$b^{\Pi\tau}(\Pi t,\Pi t')=(-1)^{(\tilde{t}+1)(\tilde{t}'+1)}b^{\Pi}(\Pi t',\Pi t)=$$
$$=(-1)^{\tilde{t}\tilde{t}'+\tilde{t}+1}b(t',t)=(-1)^{\tilde{t}+1}b^{\tau}(t,t')=(-1)^{\tilde{t}+1}\eta b(t,t')=$$
$$=-\eta b^{\Pi}(\Pi t,\Pi t').$$

3. Впредь мы будем рассматривать четные симметричные и нечетные антисимметричные формы. Вычислим матрицу Грама транспонированной формы b^{τ} :

$$(b^{\tau})^{MN}=(-1)^{\tilde{b}\tilde{e}^{M}}b^{\tau}(e^{M},e^{N})=(-1)^{\tilde{b}\tilde{e}^{M}+\tilde{b}\tilde{e}^{N}+\tilde{e}^{M}\tilde{e}^{N}}b^{NM}.$$

Поэтому, если $(b^{MN})=\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$, где R - четно-четная, U - нечетно-нечетная часть, то оператор транспозиции принимает следующий вид:

$$b \text{ четная: } \begin{pmatrix} R^{t} & T^{t} \\ S^{t} & -U^{t} \end{pmatrix} ; \quad b \text{ нечетная: } \begin{pmatrix} R^{t} & -S^{t} \\ -T^{t} & -U^{t} \end{pmatrix}$$

Назовем форму b на пучке расщепимой, если локально по базе она может быть задана матрицей Грама одного из следующих типов; соответствующие базисы сечений назовем стандартными.

Четный симметричный случай:

$$OSp(2r|2s): \left(\begin{array}{cc|c} 0 & E_r & \\ E_r & 0 & 0 \\ \hline & & 0 \quad E_s \\ 0 & & -E_s \quad 0 \end{array}\right) \qquad OSp(2r+1|2s): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0\ldots & 0 & \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & E_r & 0 & \\ \hline & 0 & & \begin{matrix} 0 & E_s \\ E_s & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Нечетный антисимметричный случай:

$$\Pi Sp(r|r): \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_r \\ \hline E_r & 0 \end{array}\right)$$

(указаны обозначения супергруппы автоморфизмов соответствующих форм).

Приведем инвариантную характеризацию расщепимых форм.

4. Предложение. Пусть b - невырожденная форма на пучке $\mathcal{T}$ типов OSp или ΠSp. Следующие условия равносильны:

а) b расщепима.

б) В окрестности каждой точки $\mathcal{T}$ имеет локально прямой изотропный подпучок максимального ранга $r|s$ (для $OSp(2r|2s)$ или $OSp(2r+1|s$), или одного из максимальных рангов $r|s$ (для $\Pi Sp(r+s|r+s)$), или любого из максимальных рангов.

Если эти условия выполнены, то любой прямой изотропный подпучок $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$ локально вкладывается в прямой изотропный подпучок любого максимального ранга, большего ранга $\mathcal{S}$; а также допускает локальный базис сечений, являющийся частью стандартного локального базиса в $\mathcal{T}$ (для формы b).

Доказательство. а) $\Longrightarrow$ б). Если b расщепима, то изотропные прямые подпучки максимальных рангов порождаются частями стандартных базисов.

б) $\Longrightarrow$ а). Эту импликацию и последнее утверждение докажем индукцией по рангу $\mathcal{T}$. Для наименьшего ранга $1|0$ утверждение тривиально; ранг $0|1$ невозможен. Пусть ранг $\mathcal{T}\geq 1|1$ и пусть $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$ - прямой изотропный подпучок ненулевого в окрестности $x\in M$ ранга. Работая локально, выберем прямой подпучок $\mathcal{S}_0\subset\mathcal{S}$ ранга $1|0$ или $0|1$. В силу невырожденности b существует локальный прямой подпучок $\mathcal{S}_0'\subset\mathcal{T}$ (возможно, в меньшей окрестности), такой, что b индуцирует невырожденное спаривание между $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_0'$. Классическое рассуждение (о "гиперболической плоскости") показывает, что сумма $\mathcal{S}_0+\mathcal{S}_0'$ прямая, ограничение b на нее невырождено и допускает стандартный базис. Далее, $\mathcal{T}=\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_0'\oplus(\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_0')^{\perp}_{b}$ (все локально). Положим

$\mathcal{T}'=(\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_0')^{\perp}_{b}$, $\mathcal{S}'=\mathcal{S}\cap\mathcal{T}'$. Тогда $\mathcal{T}'$ - пучок меньшего ранга, чем $\mathcal{T}$, с невырожденной формой того же типа, а $\mathcal{S}'\subset\mathcal{T}'$ - изотропный прямой подпучок. Если $\mathcal{S}$ был максимального ранга, то и $\mathcal{S}$ максимального ранга; по индуктивному предположению, b на $\mathcal{T}'$ расщепима, и, значит, b на $\mathcal{T}$ расщепима. Если $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ не максимального ранга, то по индуктивному предположению подходящий локальный базис $\mathcal{S}'$ дополняется до стандартного в $\mathcal{T}'$ и потому то же верно для $\mathcal{T}$.

§ 5. Изотропные грассманианы

I. Здесь мы докажем оставшуюся часть основной теоремы. Прежде всего, легко установить, что морфизм функторов $GI_M \longrightarrow G_M$ всегда представлен замкнутым вложением, если $b:\mathcal{T}\to\mathcal{T}^*$ (или $\Pi\mathcal{T}^*$) - прямая форма, без каких бы то ни было условий невырожденности или симметрии. Действительно, пучок $\mathcal{S}_b^{\perp}\subset\mathcal{T}$ является тогда локально прямым и, стало быть, $\pi^*\mathcal{T}/\mathcal{S}_b^{\perp}$ локально свободен. Поэтому подфунктор G_M, отвечающий тем морфизмам $N\xrightarrow{\varphi}M$, для которых $\varphi^*(\mathcal{S})\longrightarrow\varphi^*(\pi^*\mathcal{T}/\mathcal{S}_b^{\perp})$ есть нулевой гомоморфизм, замкнут (то же рассуждение, что в п. 2, § 3). Но этот подфунктор и есть GI_M.

Цель последующих вычислений - показать, что если b невырождена и расщепима, то GI_M можно покрыть относительными аффинными пространствами, когда ранг изотропных подпучков максимален. Мы просто пишем уравнения на строки матрицы Z_I (см. $(2)_I$), которые означают изотропность, и показываем, что они явно разрешаются. Подразумеваемый локальный базис $\mathcal{T}$ предполагается стандартным, а выбор единичной подматрицы в Z_I сделан таким, что при нулевых значениях остальных элементов Z_I базис соответствующего изотропного подпучка (строки Z_I) является частью стандартного базиса $\mathcal{T}$. В силу предложения 4, § 3, аффинные пространства, которые мы таким образом получим, действительно покрывают GI_M.

2. Пусть B - матрица Грама формы. Уравнения изотропности для OSp имеют следующий вид (матрицы разбиты на блоки, так, чтобы их было удобно умножать поблочно; $OSp(2r+1|2s)$ и $OSp(2r|2s)$ указаны вместе - часть, отделенная пунктиром, относится к $2r+1$; латинские блоки состоят из

четных элементов, греческие из нечетных)

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & r & r & s & s \\
\hline
r & Y & A & E_r & 0 & \Gamma \\
s & & \Lambda & 0 & E_s & B \\
\hline
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{c|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & E_r & 0 & 0 \\
0 & E_r & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E_s \\
0 & 0 & 0 & -E_s & 0
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{cc}
Y^t & \Xi^t \\
\hline
A^t & \Lambda^t \\
E_r & 0 \\
0 & E_s \\
-\Gamma^t & B^t
\end{array}\right)=0
$$

Вычисляя, находим в случае $OSp(2r|2s)$ условия: $A+A^t=0$, $B-B^t=0$, $\Gamma=\Lambda^t$. Случай $OSp(2r+1|2s)$ немногим сложнее:

$$A+A^t+YY^t=0,\quad \Lambda^t-\Gamma+Y\Xi^t=0,\quad B^t-B+\Xi\Xi^t=0.$$

В качестве независимых координат здесь можно взять элементы Y,Ξ,Γ, элементы A строго ниже диагонали; элементы B ниже и на диагонали.

Для группы $\Pi Sp(r+s|r+s)$ уравнения изотропности подпучка ранга $r|s$ имеют вид:

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & s & r & s & r \\
\hline
r & A & E_r & 0 & \Gamma \\
s & -\Delta & 0 & -E_s & -B \\
\hline
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cc}
0 & E_{r+s} \\
E_{r+s} & 0
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{cc}
A^t & \Delta^t \\
E_r & 0 \\
0 & E_s \\
-\Gamma^t & B^t
\end{array}\right)=0
$$

Замечание о знаках: имеется в виду, что нечетная часть базиса рассматриваемого изотропного подмодуля порождена строками матрицы $(\Delta\, 0\, E_s\, B)$; минус же перед ними отражает $(-1)^{bt}$ в правой части формулы (5). На окончательный вид уравнений он не влияет:

$$\Gamma - \Gamma^t = 0, \quad A + B^t = 0, \quad \Delta + \Delta^t = 0$$

Следовательно, соответствующее открытое подмножество $GI_M(r|s; \mathcal{T}^{r+s|r+s}, b)$ представлено относительным аффинным пространством размерности $\left(rs \,\middle|\, \frac{r(r+1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2}\right)$.

3. Пусть GI_M – один из построенных максимальных изотропных грассманианов, $\pi : GI_M \to M$ – структурный морфизм, $\mathcal{S}$ – тавтологический пучок. Как для двух предыдущих случаев, мы можем построить морфизм $t : \mathcal{T}GI_M \to \underline{Hom}\,(\mathcal{S}, \pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S})$. Теперь, пользуясь формой $\pi^*(b)$ на $\pi^*(\mathcal{T})$, мы можем отождествить $\pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S}$ с $\mathcal{S}^*$ для $OSp(2r|2s)$, или с $\Pi\mathcal{S}^*$ для ΠSp. В случае $OSp(2r+1|s)$ имеется сюръекция $\beta : \pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$ с локально прямым ядром ранга $1|0$. Поэтому имеем три возможных типа морфизмов: $t : \mathcal{T}GI_M \to \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*$, $(1 \otimes \beta) \circ t : \mathcal{T}GI_M \to \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*$ (тип OSp) или $t : \mathcal{T}GI_M \to \mathcal{S}^* \otimes \Pi\mathcal{S}^* = \Pi(\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*)$ (представить $\Pi\mathcal{S}^*$ в виде $\Pi\mathcal{O} \otimes \mathcal{S}^*$ и сделать $\Pi\mathcal{O}$ внешним множителем). Прямые вычисления показывают, что образы суть $\Lambda^2(\mathcal{S}^*)$ и $\Pi S^2(\mathcal{S}^*)$ соответственно. В координатах видно, что получаются изоморфизмы $\mathcal{T}GI_M = \Lambda^2(\mathcal{S}^*)$, $(1 \otimes \beta)^{-1}\Lambda^2(\mathcal{S}^*)$ или $\Pi S^2(\mathcal{S}^*)$ соответственно.

4. Изотропные грассманианы немаксимального типа допускают удобное покрытие, которое строится сначала переходом к флагам длины два, у которых больший подмодуль максимален, и затем применением морфизма, который забывает больший подмодуль. Суперсхемы изотропных флагов строятся такой же индукцией, как в предыдущих случаях.

Литература

1. Kac V. Lie Superalgebras. – Advances in Math., 1977, v. 26, № 1, p. 8–96.
2. Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras.– Springer Lecture Notes in Mathematics, 1979.
3. Grotendieck A., Dieudonné J. Elements de Geometrie Algebrie, Springer, 1971.
4. Лейтес Д.А. Введение в теорию супермногообразий. – УМН, 1980, т. 31, № 1, с. 3–57.
5. Deligne P., Milne J., Ogus A., Shih K. Hodge Cycles, Motives and Shi mura Varieties.– Springer Lecture Notes in Math., 1980.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЫ ДЛЯ ГАЗА ЛОРЕНЦА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИЕЙ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

К.М.Ефимов, Я.Г.Синай

§ I. Определение гидродинамических мод

В неравновесной статистической механике гидродинамические моды определяются как собственные функции линеаризованных уравнений гидродинамики (см., например,[1] ,[2]).Смысл же, который обычно вкладывается в это понятие, состоит в том, чтобы определить такие функции на фазовом пространстве динамической системы большого числа частиц, для которых время релаксации временных корреляционных функций сравнимо с размерами системы. При этом подразумевается, что за единицу длины принято среднее расстояние между частицами, масса каждой частицы принята за единицу массы и среднее значение энергии на одну частицу принято за единицу энергии.

В этой работе строятся гидродинамические моды для газа Лоренца с периодической конфигурацией рассеивателей непосредственно на основе молекулярной динамики системы. Пусть K – периодическая конфигурация дисков на плоскости, про которую предполагается, что длина любого прямолинейного отрезка, не пересекающего K, ограничена некоторой постоянной $C = const$. Диск радиуса ρ с центром в точке $q \in R^2$ обозначается $\tilde{D}_{q,\rho}$. Через $D_{q,\rho}$ обозначается множество единичных векторов с носителями на $\tilde{D}_{q,\rho}$, направленных вне $\tilde{D}_{q,\rho}$. Топологически $D_{q,\rho}$ представляет собой двумерный цилиндр с координатами (s, φ), где s – циклическая координата, $0 \le s \le 2\pi\rho$ вдоль границы $\partial D_{q,\rho}$, а угол φ есть угол между вектором внешней единичной нормали и рассматриваемым вектором, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi/2$. На $D_{q,\rho}$ имеется естественная мера μ, для которой $d\mu = ds\,d\varphi \cos\varphi$.

Введем преобразование T множества $M = \cup D_{q,\rho}$ в себя, индуцированное движением материальной точки вне K с отражением от границы по закону "угол падения равен углу отражения" (см. [3] , [4]). Легко видеть, что T сохраняет меру μ.

Через M_0 обозначим множество рассеивателей в одной ячейке. Теми же буквами μ и T обозначим ограничение меры на M_0, T – преобразование M_0 на себя, индуцированное периодическими граничными условиями.

Рассмотрим квадрат R_Λ, содержащий Λ^2 ячеек периодической решетки, и K_Λ есть множество рассеивателей $D_{q,\rho} \subset K$, для которых $q \in R_\Lambda$. Той же буквой T будем обозначать преобразование множества K_Λ при периодических граничных условиях на R_Λ.

В работе [5] было построено марковское разбиение множества K, периодическое с тем же периодом, что и K. Обозначим это разбиение через ξ и $\xi^- = \bigvee_{k \le 0} T^k \xi$, H_0 есть пространство квадратично-интегрируемых функций, постоянных $mod\ 0$ на элементах разбиения ξ^- и ортогональных к $const$. Введем оператор P, действующий на H_0 по формуле:

$$P f(C_{\xi^-}) = E\left(f(T^{-1}x) / C_{\xi^-}\right),$$

где E – символ условного математического ожидания. Оператор P естественно назвать обобщенным марковским оператором, так как в случае обычных цепей Маркова P соответствует рассматриваемому в теории марковских процессов оператору перехода.

Поскольку мы имеем дело с периодической конфигурацией рассеивателей, то P есть оператор "с периодическими коэффициентами". В таком же смысле, если бы мы рассматривали случайную конфигурацию рассеивателей, то оператор P был бы оператором "со случайными коэффициентами".

Мы будем изучать спектральные свойства оператора P. Поскольку оператор P не является самосопряженным, то вопрос о его собственных функциях является далеко не простым. Гидродинамические моды связаны со спектральными свойствами оператора P в пространстве длинноволновых функций. По аналогии с теорией обычных блоховских функций для уравнения Шредингера с периодическим потенциалом хотелось бы для $\lambda = \frac{p}{\Lambda}$, где p – целочисленный фиксированный вектор, а Λ – целое кратное от периода конфигурации рассеивателей, найти собственную функцию оператора P в виде $e^{i(\lambda,x)}\varphi_\lambda(x)$, где x – номер ячейки, $x \in \cup D_{q,\rho}$, $\varphi_\lambda(x)$ – периодическая функция с тем же периодом, что и конфигурация рассеивателей. Для функции φ_λ получаем уравнение

$$(P_\lambda \varphi_\lambda)(C_{\xi^-}) = \sum_{C'_{\xi^-}} e^{i(\lambda, z)} \cdot$$

$$\cdot P(TC'_{\xi^-}/C_{\xi^-})\, \varphi_\lambda (C'_{\xi^-}) = c_\lambda \varphi_\lambda . \tag{I}$$

Здесь z означает смещение, т.е. разность целочисленных векторов, отвечающих номерам ячеек, содержащих C'_ξ и C_ξ соответственно.

К сожалению, доказать существование решения уравнения (I) не удается, но для анализа предельного диффузионного поведения достаточно приближенного решения (I), а именно, нахождение такой функции φ_λ, что

$$P_\lambda \varphi_\lambda = (1-(B\lambda,\lambda))\varphi_\lambda + o(\lambda^2) \tag{I'}$$

при $\Lambda \to \infty$. Оператор B^{-1} задает матрицу диффузии соответствующего предельного броуновского движения (см. [1,2]). Именно такую функцию φ_λ для (I) мы и будем строить.

Положим $P_\lambda = P + Q_\lambda$, $\varphi_\lambda = 1+\psi_\lambda$, $c_\lambda = 1-d_\lambda$. Тогда

$$P\psi_\lambda + Q_\lambda 1 + Q_\lambda \psi_\lambda + d_\lambda = \psi_\lambda - d_\lambda \psi_\lambda .$$

Мы увидим ниже, что $\psi_\lambda \sim \lambda$, $d_\lambda \sim \lambda^2$. Исходя из этого, составим уравнение I-ого приближения

$$P\psi_\lambda^{(0)} + Q_\lambda 1 + d_\lambda^{0} = \psi_\lambda^{(0)},$$

или

$$\psi_\lambda^{(0)} - P\psi_\lambda^{(0)} = Q_\lambda 1 + d_\lambda^{(0)} . \tag{2}$$

Положим $d_\lambda^{(0)} = EQ_\lambda 1$.

Лемма I. $d_\lambda^{(0)} = (B\lambda,\lambda) + o(\lambda^2)$, где B – некоторый положительно-определенный оператор.

Доказательство. Имеем

$$EQ_\lambda 1 = \int_{M_0/\xi^-} d\mu \sum_{C'_{\xi^-}} (e^{i(\lambda,z)} - 1)\, P(TC'_{\xi^-}/C_{\xi^-}) =$$

$$= \int_{M_0/\xi^-} d\mu \sum_{C'_{\xi^-}} \left(i(\lambda,z) - \frac{(\lambda,z)^2}{2} + O(\lambda^3)\right) P(TC'_{\xi^-}/C_{\xi^-}) .$$

Покажем, что

$$\int_{M_0/\xi^-} d\mu \sum (\lambda,z) P(TC'_{\xi^-}/C_{\xi^-}) = 0 .$$

Ясно, что последний интеграл равен $\int_{M_0} h(x)\,d\mu$, где $h(x)$ определяется следующим образом: если Tx и x лежат в одной ячейке, то $h(x)=0$; если же Tx и x лежат в разных ячейках, то $h(x) = (\lambda, z)$, где z – разность векторов, определяющих эти ячейки. Заметим теперь, что если α – автоморфизм M_0, состоящий в переходе к противоположному вектору, т.е. $\alpha(s,\varphi) = \alpha(s,-\varphi)$, то α сохраняет меру μ и $h(T^{-1}x) = -h(\alpha x)$. Поэтому $\int_{M_0} h(x)d\mu = \int_{M_0} h(T^{-1}x)d\mu = -\int_{M_0} h(\alpha x)d\mu(x) = -\int_{M_0} h(x)d\mu$, т.е. $\int_{M_0} h(\lambda)d\mu = 0$. Лемма доказана.

Разрешимость уравнения (2) исследуется в следующем параграфе. Сейчас мы рассмотрим уравнение для второго приближения. А именно, положим $\psi_\lambda = \psi_\lambda^{(0)} + \psi_\lambda^{(1)}$, $d_\lambda = d_\lambda^{(0)} + d_\lambda^{(1)}$. Будем иметь

$$P\psi_\lambda^{(1)} + P\psi_\lambda^{(0)} + Q_\lambda 1 + Q_\lambda \psi_\lambda^{(0)} + Q_\lambda \psi_\lambda^{(1)} + d_\lambda^{(0)} + d_\lambda^{(1)} =$$

$$= \psi_\lambda^{(0)} + \psi_\lambda^{(1)} - (d_\lambda^{(0)} + d_\lambda^{(1)})(\psi_\lambda^{(0)} + \psi_\lambda^{(1)}) .$$

Отсюда

$$\psi_\lambda^{(1)} - P\psi_\lambda^{(1)} = Q_\lambda \psi_\lambda^{(0)} + d_\lambda^{(1)} . \tag{3}$$

Положим $d_\lambda^{(1)} = -EQ_\lambda \psi^{(0)}$

Лемма 2. $d_\lambda^{(1)} = (B^{(1)}\lambda, \lambda) + o(\lambda^2)$.

Доказательство. Считая, что уравнение (2) разрешимо, можем написать

$$EQ_\lambda \psi_\lambda^{(0)} = \sum_n EQ_\lambda P^n f_\lambda^{(0)} = \sum_n EQ_\lambda \left(U^n Q_\lambda 1 + d_\lambda^{(0)}\right) =$$

$$= \sum_n E\big((\lambda, h) U^n (\lambda, h)\big) + \sum_n E\big(Q_\lambda - (\lambda, h)\big)\left(U^n Q_\lambda 1 + d_\lambda^{(0)}\right).$$

Здесь через U обозначен оператор, сопряженный с T. Первый ряд дает искомую квадратичную форму, а второй ряд имеет порядок λ^3. Лемма доказана.

Обозначим $f_\lambda^{(1)} = Q_\lambda \psi_\lambda^{(0)} + d_\lambda^{(1)}$. Тогда

$$\psi_\lambda^{(1)} - P\psi_\lambda^{(1)} = f_\lambda^{(1)} ,$$

т.е. мы приходим к такому же уравнению, что и выше. Его решение можно записать в виде ряда $\psi_\lambda^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k f_\lambda^{(1)}$, сходимость которого и свойства суммы исследуются в следующем параграфе.

§ 2. Разрешимость уравнений (2) и (3)*)

В этом параграфе исследуется разрешимость уравнений (2) и (3). Приведем вначале необходимые сведения из работ [5], [6].

В работе [5] для периодической конфигурации рассеивателей, удовлетворяющей некоторым условиям типа "общего положения" было построено счетное марковское разбиение. Приведем свойства этого разбиения. Обозначим элементы марковского разбиения через $C_1, C_2, \ldots$. Тогда μ – почти каждой

---

*) Результаты этого и следующего параграфов принадлежат К.М.Ефимову.

точке $x \in M_0$ отвечает последовательность $\omega = \{\omega_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $T^n x \in C_{\omega_n}$. Отображение $\varphi : x \to \omega$ порождает меру $\varphi^* \mu = \mu^*$ в пространстве Ω, инвариантную относительно сдвига T^* в Ω .

Ниже формулируются три нужных нам свойства меры μ^* .

I° Почти-конечность ξ . Каждому элементу C_i можно сопоставить его ранги $r_+(C_i) = r_+(i)$, $r_-(C_i) = \underline{r}(i)$, характеризующие размеры ξ в устойчивом и неустойчивом направлении соответственно. Тогда

$$\mu \left\{ \begin{array}{l} \cup C_i \\ i / r_\pm(i) \geq k \end{array} \right\} \leq \lambda_1^k$$

при некоторой постоянной $\lambda_1 < 1$ и всех достаточно больших k .

2° Скорость аппроксимации конечными цепями Маркова. Для некоторых постоянных λ_{30}, λ_{31}, λ_{32} таких, что $\lambda_{30} < \lambda_{31}$, $0 < \lambda_{30}, \lambda_{31}, \lambda_{32} < 1$, введем множества

$$U_m = \{x \mid \mathrm{dist}\,(x, \partial M_0) < \lambda_{30}^m\}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots ,$$

$$V_n = \{x \mid T^k x \notin U_m,\ m = [n^{\lambda_{31}}],\ |k| \leq n;\ T^k x \notin U_i \ \text{при}\ |i| > n\}$$

$$Z_n = \{x \mid \mu(V_n / C_{\xi^-}(x)) > 1 - \lambda_{32}^{\sqrt{n}}\}.$$

Здесь ∂M_0 – край M_0, $C_{\xi^-}(x)$ – элемент разбиения ξ^-, содержащий x .

Возьмем такие C'_{ξ^-}, $C''_{\xi^-} \in Z_n$, которым отвечают полубесконечные последовательности $\omega_0, \omega_{-1}, \ldots \omega_{-m}, \omega'_{-m-1}, \ldots \ldots \omega'_{-m-2}$ и $\omega_0, \omega_{-1}, \ldots, \omega_{-m}, \omega''_{-m-1}, \omega''_{-m-2}, \ldots$. Тогда

$$\sum_{\omega_1} \left| \mu(C_{\omega_1} / C'_{\xi^-}) - \mu(C_{\omega_1} / C''_{\xi^-}) \right| \leq \lambda_2^{\sqrt{m+1}}$$

3° Условие Деблина. Обозначим $\pi_1(\omega_{3n+1}, \ldots, \omega_{4n}) =$

$$= \mu^*(\omega_{3n+1} \ldots \omega_{4n} / \omega'_{-n+1} \ldots, \omega'_0),$$

$$\pi_2(\omega_{3n+1},\dots,\omega_{4n})=\mu^*(\omega_{3n+1},\dots,\omega_{4n}/\omega''_{-n+1}\dots-\omega''_0).$$

Существует такая постоянная λ_3, $0<\lambda_3<1$, что если $r_\pm(\omega'_i)$, $r_\pm(\omega''_i)\le n$ при $1\le i\le n$, то

$$\operatorname{var}(\pi_1,\pi_2)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_{3n+1},\dots,\omega_{4n}}|\pi(\omega_{3n+1},\dots,\omega_{4n})-$$
$$-\pi_2(\omega_{3n+1}\dots\omega_{4n})|\le\lambda_3.$$

Из 2^0 непосредственно вытекает

Лемма 3. Существуют такие постоянные λ_4, $0<\lambda_4<1$, $C_1>0$, $C_2>0$, что

$$\int d\mu^*\sum_{\omega_1}|\mu^*(\omega_1/\omega_0,\omega_{-1}\dots)-$$
$$-\mu^*(\omega_1/\omega_0\dots\omega_{-m})|\le C_1\lambda_4^{(m+1)^{C_2}}.$$

Введем теперь основное пространство, в котором исследуется разрешимость уравнений (2) и (3).

Определение I. Функция $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu^*)$ принадлежит классу Φ, если можно найти такие положительные числа A_1, A_2, γ, κ и $0<\beta<1$, что для любого существует функция $f_{m+1}(\omega_0,\dots,\omega_{-m})\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu^*)$, для которой

а) $\int|f-f_{m+1}|d\mu^*\le A_1\beta^{(m+1)^\gamma}$

б) $|f_{m+1}(\omega_0\dots\omega_{-m})|\le A_2(m+1)^\kappa$.

Класс функций $f\in\Phi$, для которых $Ef=0$, обозначается Φ_0. При этом аппроксимирующие функции можно также считать имеющими математическое ожидание 0. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема I. Если $g\in\Phi_0$, то существует решение уравнения $f-Pf=g$, представимое в виде ряда $f=g+Pg+P^2g+\dots+P^ng+\dots$ (μ^* - почти всюду), причем $f\in\Phi_0$.

Теорема I вытекает из приводимых ниже теорем 2 и 3. Для любой функции $f\in\Phi_0$ положим

$$\mathcal{H}^n_{m+1}=\sum_{\omega_1\dots\omega_n}\mu^*(\omega_n\dots\omega_1/\omega_0\dots\omega_{-n})f_{m+n+1}(\omega_n\dots\omega_{-m})$$

при $n\le m+1$,

$$\mathcal{H}^n_{m+1}=\sum_{\omega_n\dots\omega_{n-m}}\mu^*(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-n})f_{m+1}(\omega_n\dots\omega_{n-m}).$$

Теорема 2. Найдутся такие постоянные $C_1>0$, $\delta_1>0$, $0<\alpha_1<1$, что

$$\int|P^nf(\omega_0,\omega_{-1},\dots)-\mathcal{H}^n_{m+1}(\omega_0\dots\omega_{-m})|d\mu^*\le C_1\alpha_1^{(m+1)^{\delta_1}}.$$

Теорема 3. Если $f\in\Phi_0$, то найдутся такие постоянные $C_2>0$, $\delta_2>0$, $0<\alpha_2<1$, что при всех достаточно больших n и $m\sim\sqrt{n}$ справедливо неравенство

$$\int|\mathcal{H}^n_{m+1}(\omega_0\dots\omega_{-m})|d\mu^*\le C_2\alpha_2^{n^{\alpha_2}}.$$

Доказательство теорем 2 и 3 проведем в следующем параграфе. Сейчас выведем утверждение основной теоремы.

Положим $m+1=[\sqrt{n}]$. Тогда из теорем 2 и 3 $\int|P^ng(\omega_0,\omega_{-1}\dots)|d\nu\le C_3\alpha_3^{n^{\delta_3}}$ при некоторых $C_3>0,\delta_3>0$, $0<\alpha_3<1$. Рассмотрим функцию $f_0=|g|+|Pg|+|P^2g|+\dots$. Согласно лемме 3 интегралы от частных сумм этого ряда равномерно ограничены. По теореме Лебега о монотонной сходимости $g_0\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu^*)$. Следовательно, и ряд $g+Pg+\dots+P^ng+\dots$ сходится μ^* - почти всюду к некоторой функции f, причем $|f|\le f_0$ и $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu^*)$.

Покажем, что $f\in\Phi_0$. Тот факт, что $Ef=0$, очевиден. Положим $f_{m+1}(\omega_0,\dots,\omega_{-m})=\sum_{i=0}^{m+1}\mathcal{H}^i_{m+i}(\omega_0\dots\omega_{-m})$. Имеем

$$|f_{m+1}|\le A_2(m+1)^\kappa+A_2(m+2)^\kappa+\dots$$
$$\dots+A_2(2m+2)^\kappa\le A_3(m+1)^{\kappa_1}.$$

Далее,

$$\int|f-f_{m+1}|d\mu^* \le \sum_{i=0}^{m+1}\int|P^i g(\omega_0,\omega_{-1},\dots)-\mathcal{H}^i_{m+1}(\omega_0\dots\omega_{-m})|d\mu^* +$$

$$+\sum_{m+2}^{\infty}\int|P^i g(\omega_0,\omega_{-1},\dots)|d\mu^* \le (m+2)\,C_1\alpha_1^{(m+1)^{\delta_1}} +$$

$$+\sum_{m+2}^{\infty} C_3\alpha_3^{n^{\delta_3}} \le \mathrm{const}\;\alpha^{(m+1)^{\delta}} .$$

т.е. $f\in\Phi_0$. Теорема доказана.

Для применения теоремы I к уравнениям (2) и (3) остается установить следующую лемму.

Лемма 4. Если $g\in\Phi$, то $Q_\lambda g - E(Q_\lambda g)\in\Phi_0$.

Доказательство. По определению

$$Q_\lambda g=\sum_{\omega_1}(e^{i(\lambda,z)}-1)\,\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots\omega_{-m}\dots)\,g(\omega_1,\omega_0\dots) .$$

Положим $\rho(\omega_1)=e^{i(\lambda,z)}-1$. В качестве $(m+1)$ -ого приближения возьмем функцию

$$(Q_\lambda g)_{m+1}=\sum_{\omega_1}\rho(\omega_1)\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots\omega_{-m})\,g_{m+1}(\omega_0\dots\omega_{-m}).$$

Имеем на основании леммы 3

$$\int|Q_\lambda g-(Q_\lambda f)_{m+1}|d\mu^*=\int\Big|\sum_{\omega_1}\rho(\omega_1)\mu^*(\omega_1|\omega_0,\omega_{-1},\dots)\,\times$$

$$\times(g(\omega_1,\omega_0,\dots)-g_{m+1}(\omega_1,\dots,\omega_{-m}))\Big|d\mu^* +$$

$$+\int\Big|\sum_{\omega_1}\rho(\omega_1)g_{m+1}(\omega_1\dots\omega_{-m})(\mu^*(\omega_1|\omega_0,\omega_{-1}\dots)\,-$$

$$-\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots\omega_{-m}))\Big|d\mu^* \le 2\int|g(\omega_1,\omega_0,\dots)\,-$$

$$-g_{m+1}(\omega_1\dots\omega_{-m})|d\mu^*+2A_2(m+1)^k\Big[\int_{\bar z_{m+1}}|\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots)\,-$$

$$-\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots\omega_{-m})|d\mu^*+\int_{\bar z_{m+1}}|\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots)\,-$$

$$-\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots\omega_{-m})|d\mu^*\Big]\le 2A_1\beta_1^{(m+1)^{\gamma_1}}+2A_2(m+1)^k\,\times$$

$$\times\big(\mathrm{const}\;\lambda_4^{(m+1)^{\gamma_4}}+2\mu(\bar z_{m+1})\big)\le \mathrm{const}\;\alpha^{(m+1)^{\delta}} .$$

Проверка выполнения б) тривиальна. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теорем 2 и 3

Оператор P имеет представление

$$Pf(\omega_0,\omega_{-1},\dots)=\sum_{\omega_1}\mu^*(\omega_1|\omega_0,\dots\omega_{-1},\dots)\,f(\omega_1,\omega_0,\omega_{-1},\dots) .$$

Обозначим через ξ^- разбиение, элементы которого представляют собой полубесконечные последовательности $(\omega_1,\omega_0,\omega_{-1},\dots)$. Тогда $(T^*)^{-1}\xi^-$ есть разбиение, элементами которого служат полубесконечные последовательности $(\omega_0,\omega_{-1},\dots)$. Пусть $g(\omega)=f(T^{-1}\omega)=f(\omega_1,\omega_0,\omega_{-1},\dots)$. Заметим, что $Pf=E(g)(T^*)^{-1}\xi)$. Функция $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu^*)$ также, как все функции $P_{m+1}f_k$. Заметим теперь, что $\mathcal{H}^n_{m+1}$, введенные в § 2, можно представить в следующем виде

$\mathcal{H}^n_{m+1}=(P_{m+1}P_{m+2}\dots P_{m+n}f_{m+n+1})(\omega_0,\dots,\omega_{-m})$

при $n\le m+1$

$\mathcal{H}^n_{m+1}=(P_{m+1}\dots P_{m+n}f_{m+1})(\omega_0,\dots,\omega_{-m})$ при $n>m+1$,

Допустим, что $f,g\in\mathcal{L}_1(\Omega,\mu^*)$, $\sup|g|<\infty$,

$$g(\omega)=g_k(\omega_0,\dots,\omega_{-k+1}),\qquad 1\le k\le m+2 .$$

Тогда

$$\int|Pf-P_{m+1}g_k|d\mu^*=\int\Big|\sum_{\omega_1}\big[\mu^*(\omega_1|\omega_0,\dots)(f(\omega_1,\omega_0,\dots)\,-$$

$$-g_k(\omega_1,\dots,\omega_{2-k}))+(\mu^*(\omega_1|\omega_0,\omega_{-1},\dots)-\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots\omega_{-m}))\,\times$$

$$\times g_k(\omega_1,\dots\omega_{-n+2})\big]\Big|d\mu^*\le\int|f(\omega_1,\omega_0\dots)-g_k(\omega_1,\omega_0,\dots,\omega_{2-k})|d\mu^* +$$

$$+\sup_{\omega}|g(\omega)|\int\Big|\sum(\mu^*(\omega_1|\omega_0,\omega_{-1}\dots)\,-$$

$$-\mu^*(\omega_1|\omega_0\dots\omega_{-m}))|d\mu^* \le$$

$$\le \int|f-g_k|\,d\mu^* + C\alpha^{(m+1)^\delta}\sup_{\omega\in\Omega}|g(\omega)|\,.$$

Используя последнее неравенство, получаем

$$\int|P^n f - \mathcal{H}^n_{m+1}|\,d\mu^* \le \int|P^{n-1}f - (P_{m+2}\dots P_{m+n} f_{m+1})(\omega_1\dots\omega_{-m})|\,d\mu^* +$$

$$+A_2(m+1)^\kappa C\alpha^{(m+1)^\delta} \le \dots \le \int|f(\omega_n,\omega_{n-1},\dots)-f_{m+1}(\omega_n\dots\omega_{n-m})|\,d\mu^* +$$

$$+A_2(m+1)^\kappa\left(C\alpha^{(m+1)^\delta}+C\alpha^{(m+2)^\delta}+\dots\right)\le \text{const}\,(\bar\alpha)^{(m+1)^{\bar\delta}}.$$

При $n\le m$ аналогичным образом

$$\int|P^n f-(P_{m+1}\dots P_{m+n}f_{m+n+1})(\omega_0\dots\omega_{-m})|\,d\mu^*\le$$

$$\le\int|f(\omega_n,\omega_{n-1},\dots)-f_{m+n+1}(\omega_n\dots\omega_{-m})|\,d\mu^* +$$

$$+A_2(m+n+1)^\kappa\left(C\alpha^{(mn)^\delta}+(\omega_n\dots\omega_{-m})|\,d\mu^* +\right.$$

$$+A_2(m+n+1)^\kappa\left(C\alpha^{(mn)^\delta}+C\alpha^{(m+2)^\delta}+\dots\right)\le \text{const}\,\bar\alpha^{(m+1)^{\bar\delta}}.$$

Теорема 2 доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. При этом мы используем ряд соображений из работы [6] . Введем в рассмотрение следующие множества:

а) $\mathcal{E}_m$ есть множество слов $(\omega_{-m},\dots,\omega_0)$ таких, что

1) $\tau_\pm(\omega_i)\le m+1,\ -m\le i\le 0$;

2) $\mu^*((\omega_{-m}\dots\omega_0)\cap V_{m+1})\ge\left(1-\sqrt{\mu^*(\bar V_{m+1})}\right)\mu^*(\omega_{-m}\dots\omega_0)$,

черта означает переход к дополнению.

Переход $(\omega_{-m},\dots,\omega_0)\to(\omega_{-m+1},\dots,\omega_1)$ называется допустимым, если

$$\mu^*((\omega_{-m},\dots,\omega_1)\cap V_{m+1})\ge$$

$$\ge\left(1-\sqrt{\mu^*(\bar V_{m+1})}\right)\mu^*(\omega_{-m},\dots,\omega_1).$$

б) $\mathcal{B}_{m,n}$ есть множество слов $(\omega_{-m},\dots,\omega_n)$, для которых $(\omega_{i-m},\dots,\omega_i)\in\mathcal{E}_m$ при всех $0\le i\le n$ и все переходы $(\omega_{i-m},\dots,\omega_i)\to(\omega_{1+i-m},\dots,\omega_{1+i})$ допустимы.

Положим $\mu_0^*(\omega_{-m},\dots,\omega_n)=\mu^*(\omega_{-m},\dots,\omega_0)\prod_{j=1}^n\mu^*(\omega_j/\omega_{j-1},\dots,\omega_{j-m})$, $\mu_1^*(\omega_{-m},\dots,\omega_n)=Z^{-1}\mu_0^*(\omega_{-m},\dots,\omega_n)$. Здесь μ_1^* определена лишь на $\mathcal{B}_{m,n}$ и нормирована, т.е. $Z=\sum\mu_0^*(\omega_{-m}\dots\omega_n)$, где сумма берется по $(\omega_{-m}\dots\omega_n)\in\mathcal{B}_{m,n}$.

Лемма А. Найдется такое λ_4, $0<\lambda_4<1$, что для $(\omega_{-m},\dots,\omega_n)\in\mathcal{B}_{m,n}$

$$\exp(-\varepsilon_n)\le\frac{\mu_0^*(\omega_{-m}\dots\omega_n)}{\mu_A^*(\omega_{-m}\dots\omega_n)}\le\exp(\varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_n=n\ln(1+\lambda_4^{m+1})-2n\ln\left(1-\sqrt{\mu^*(\bar V_{m+1})}\right)$.

Доказательство леммы см. в [6] . Непосредственно из нее вытекает

$$\mu^*(B_n)\exp(-\varepsilon_n)\le Z\le\mu^*(B_n)\exp(\varepsilon_n).$$

На основании неравенства Чебышева

$$\mu^*(B_n)\ge 1-2(n+m+1)\sqrt{\mu^*(\bar V_{m+1})}-2(m+n+1)\lambda_1^{m+1}.$$

Теперь мы можем ввести неоднородную цепь Маркова с вероятностями перехода

$$\mu_1^*(\omega_i/\omega_{i-1},\dots,\omega_{i-m})=\mu^*(\omega_i/\omega_{i-1},\dots,\omega_{i-m})\times$$

$$\cdot \frac{\sum\limits_{\omega_{i+1}\dots\omega_n} \prod\limits_{j=i+1}^{n} \mu^*(\omega_j|\omega_{j-1},\dots,\omega_{j-m})}{\sum\limits_{\omega_i\dots\omega_n} \prod\limits_{j=i}^{n} \mu^*(\omega_j|\omega_{j-1},\dots,\omega_{j-m})} .$$

Суммы берутся по таким наборам $(\omega_{j-m},\dots,\omega_j)\in\mathcal{E}_m$, что все переходы допустимы.

Из свойств $\mathcal{E}_m$ легко получить, что обе суммы в последнем соотношении не меньше, чем $(1-\sqrt{\mu^*(\bar{V}_{m+1})})^n$, и не больше I. В дальнейшем полагаем $m+1=\sqrt{n}$. Тогда

$$\frac{1}{a^{(1)}_{m,n}} \leqslant \frac{\mu^*_1(\omega_i|\omega_{i-1},\dots,\omega_{i-m})}{\mu^*(\omega_i|\omega_{i-1},\dots,\omega_{i-m})} \leqslant a^{(1)}_{m,n} ,$$

где $a^{(1)}_{m,n} = (1-\sqrt{\mu^*(\bar{V}_{m+1})})^{-n} \leqslant \text{const}\,\alpha^{n^{\delta}}+1$ при некоторых постоянных const, $\alpha<1$, $\delta>0$.

Аналогичным образом показывается, что сумма

$$\frac{1}{2}\sum|\mu^*_1(\omega_{3(m+1)+n+1},\omega_{4(m+1)+k}|\omega'_{-m},\dots,\omega'_0)-$$
$$-\mu^*_1(\omega_{3(m+1)+n+1},\dots,\omega_{4(m+1)+k}|\omega''_{-m},\dots,\omega''_0)|$$

отличается от аналогичной суммы для μ на число, модуль которого не превосходит $\text{const}\,\alpha^{(4(m+1))^{\delta}}$.

В силу эргодической теоремы для цепей Маркова при достаточно больших

$$\frac{1}{2}\sum|\mu^*_1(\omega_{n-m}\dots\omega_n|\omega_{-m}\dots\omega_0)-\mu^*_1(\omega_{n-m}\dots\omega_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\,(\lambda'_3)^{\frac{n}{3(m+1)}} \leqslant \text{const}\,(\lambda'_3)^{\frac{1}{3}\sqrt{n}} -$$

при некоторой постоянной λ'_3, $0<\lambda'_3<1$. Наконец, из оценки на Z легко следует, что

$$\left|\frac{\mu^*_1(\omega_0\dots\omega_{-m})}{\mu^*(\omega_0\dots\omega_{-m})}-1\right| \leqslant \text{const}\,\alpha_1^{n^{\gamma_1}} .$$

Лемма В. Справедлива оценка

$$\left|\frac{\mu^*_1(\omega_n\dots\omega_{n-m})}{\mu^*(\omega_n\dots\omega_{n-m})}-1\right| \leqslant \text{const}\,\alpha_2^{n^{\gamma_2}} .$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\mu^*_1(\omega_n,\dots,\omega_{n-m})}{\mu^*(\omega_n,\dots,\omega_{n-m})} = \frac{\sum\limits_{(\omega_0\dots\omega_{-m})\in\mathcal{E}_m}\mu(\omega_n,\dots,\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})\mu^*_1(\omega_0\dots\omega_{-m})}{\sum\limits_{(\omega_0\dots\omega_{-m})}\mu^*(\omega_n,\dots,\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})\mu^*(\omega_0\dots\omega_{-m})} \leqslant$$

$$\leqslant(1+\text{const}\,\alpha_1^{n^{\gamma_1}})\cdot\frac{\sum\limits_{(\omega_0\dots\omega_{-m})\in\mathcal{E}_m}\mu^*(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})\frac{\mu^*_1(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})}{\mu^*(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})}\mu^*(\omega_0\dots\omega_{-m})}{\sum\mu^*(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})\mu^*(\omega_0\dots\omega_{-m})} \leqslant$$

$$\leqslant(1+\text{const}\,\alpha_1^{n^{\gamma_1}})(1+\text{const}\,\alpha_3^{n^{\gamma_3}})\times$$

$$\times\left(1-\frac{\sum\limits_{\bar{\mathcal{E}}_m}\mu^*(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})\mu^*(\omega_0\dots\omega_{-m})}{\sum\mu^*(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})\mu^*(\omega_0\dots\omega_{-m})}\right) \leqslant$$

$$\leqslant(1+\text{const}\,\alpha_1^{n^{\gamma_1}})(1+\text{const}\,\alpha_3^{n^{\gamma_3}}) \leqslant 1+\text{const}\,\alpha_2^{n^{\gamma_2}} .$$

Оценка с другой стороны получается аналогично. Лемма доказана.

Пусть I_n есть множество слов $(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)$, для которых найдутся $(\omega'_{-m},\dots,\omega'_{n-m-1})$ такие, что $(\omega'_{-m},\dots,\omega'_{n-m-1},\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\in B_{m,n}$. Легко видеть, что $\mu^*(A_n)\geq\mu^*(B_{m,n})$.

Лемма С. Справедливо неравенство

$$\left|\int_{I_n} f_{m+1}\,d\mu^*\right|\leq \mathrm{const}\,\alpha_5^{n^{\gamma_5}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\int_{I_n} f_{m+1}\,d\mu^*\right|\leq\left|\int f_{m+1}\,d\mu^*\right|+\left|\int_{\bar I_n} f_{m+1}\,d\mu^*\right|\leq$$

$$\leq\left|\int(f_{m+1}-f)\,d\mu^*\right|+\int_{\bar I_n}|f_{m+1}|\,d\mu^*\leq\mathrm{const}\,\alpha_5^{n^{\gamma_5}}.$$

Лемма доказана.

Лемма Д. Справедливо неравенство

$$\int_{I_n}|f_{m+1}|\,d\mu^*\leq\mathrm{const}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{I_n}|f_{m+1}|\,d\mu^*\leq\int|f_{m+1}|\,d\mu^*\leq\int|f_{m+1}-f|\,d\mu^*+$$

$$+\int|f|\,d\mu^*\leq\mathrm{const}.$$

Лемма доказана.

Лемма Е. Справедливо неравенство

$$\left|\sum_{I_n} f_{m+1}(\omega_{n-m}\dots\omega_n)\,\mu_1^*(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\right|\leq$$

$$\leq\mathrm{const}\,\alpha_6^{n^{\gamma_6}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\sum_{I_n} f_{m+1}(\omega_{n-m}\dots\omega_n)\,\mu_1^*(\omega_{n-m}\dots\omega_n)\right|\leq$$

$$\leq\left|\sum_{I_n} f_{m+1}(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\,\mu^*(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\,\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\mu_1^*(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)}{\mu^*(\omega_{n-m},\dots,\omega_n}-1\right)\right|+\left|\sum_{I_n} f_{m+1}(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\mu^*(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\right|\leq\mathrm{const}\,\alpha_6^{n^{\gamma_6}},$$

в силу лемм В, С, Д. Лемма доказана.

Лемма F. Справедливо неравенство

$$\sum_{I_n}\left|f_{m+1}(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\right|\mu_1^*(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\leq\mathrm{const}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы Е с использованием леммы Д.

Лемма G. Справедливо неравенство

$$\sum_{I_n}\left|\mu_1^*(\omega_{n-m}\dots\omega_n|\omega_0\dots\omega_{-m})-\mu_1^*(\omega_{n-m}\dots\omega_n)\right|\times$$

$$\times\left|f_{m+1}(\omega_{n-m},\dots,\omega_n)\right|\leq\mathrm{const}\,\alpha_7^{n^{\gamma_7}}.$$

Доказательство вытекает из предыдущего.

Рассмотрим теперь

$$\int\left|\sum\mu(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})f_{m+1}(\omega_n\dots\omega_{n-m})\right|d\mu^*=$$

$$=\int_{\varepsilon_m}+\int_{\bar\varepsilon_m}\Big(\left|\sum\mu(\omega_n\dots\omega_{n-m}|\omega_0\dots\omega_{-m})\,f_{m+1}\,\times\right.$$

$$\left.\times(\omega_n\dots\omega_{n-m})\right|d\mu^*\Big)=\int_{\varepsilon_m}\left|\sum_{I_n}\right|+\int_{\varepsilon_m}\left|\sum_{\bar I_n}\right|+\int_{\bar\varepsilon_m}.$$

Заметим теперь, что

$$\int_{\bar{\mathcal{E}}_m} \leq A_2 (m+1)^{\kappa} \mu^{*}(\bar{\mathcal{E}}_m) \leq \mathrm{const}\, \alpha_8^{n^{\gamma_8}},$$

$$\int_{\mathcal{E}_m} \Big|\sum_{\bar{I}_n}\Big| \leq A_2 (m+1)^{\kappa} \mu^{*}(\bar{I}_n) \leq \mathrm{const}\, \alpha_9^{n^{\gamma_9}}.$$

Наконец,

$$\Big|\sum_{I_n} \mu^{*}(\omega_n \ldots \omega_{n-m} / \omega_0 \ldots \omega_{-m})\, f_{m+1}(\omega_n \ldots \omega_{n-m})\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{I_n} \left| \frac{\mu^{*}(\omega_n \ldots \omega_{n-m} / \omega_0 \ldots \omega_{-m})}{\mu_1^{*}(\omega_n \ldots \omega_{n-m} / \omega_0 \ldots \omega_{-m})} - 1 \right| \cdot \mu_1^{*}(\omega_n \ldots \omega_{n-m} / \omega_0 \ldots \omega_{-m}) \times$$

$$\times \left| f_{m+1}(\omega_n \ldots \omega_{n-m}) \right| + \Big| \sum_{I_n} \mu_1^{*}(\omega_n \ldots \omega_{n-m} / \omega_0 \ldots \omega_{-m}) \times$$

$$\times f_{m+1}(\omega_n \ldots \omega_{n-m}) \Big| \leq \mathrm{const}\, \alpha_{10}^{n^{\gamma_{10}}}$$

в силу лемм B,E,F ,G . Теорема доказана.

Литература

1. Резибуа П., де Ленер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980.
2. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.:Мир, 1978, т. I – 2.
3. Синай Я.Г. Динамические системы с упругими отражениями. – УМН, 1970, т. 25, № 2, с. 141–192.
4. Gallavotti G. Lecture on the Billiards. Lecture Notes in the physics. 1975, v. 38, p. 236 - 296.
5. Bunimovich L., Sinai Ya. Markov-Partition for Dispersed Billiards. Commun. Math. Phys., 1980, v. 78, p. 247 - 280.
6. Bunimovich L., Sinai Ya. Statistical Properties of Lorents Gas with Periodic Configuration of Scatterers.- Commun. Math. Phys., 1981, v. 78, p, 479 - 497.

СОДЕРЖАНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

Заведующий редакцией С.И.З е л е н с к и й

Редактор Ф.И.Г о р о б е ц

Технический редактор Е.Д.З а х а р о в а

Подписано к печати 28.08.84. Л-79844. Формат 60х90/16.
Бумага офсети. № I. Офсетная печать.
Усл.печ.л. 7,5. Уч.-изд.л. 6,33. Тираж 500 экз.
Заказ 1864 Цена 40 коп. Заказная

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета
103009, Москва, ул.Герцена, 5/7.
Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

Издательство Московского университета • 1984

МГУ

Некоторые вопросы современного анализа