Ю. А. Неретин

ДРОБНЫЕ ДИФФУЗИИ, ГРУППА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ И ГРУППЫ ПЕТЕЛЬ

Введение

Будет построен некоторый набор мер, квазиинвариантных относительно группы Diff диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Диффеоморфизмы приятнее считать бесконечно гладкими (мы так и будем делать). То, что рассматривается окружность, а не прямая или не луч, не очень существенно, но по общей традиции и своей привычке я буду говорить про окружность.

Предварительно — два замечания.

1. Пусть есть группа G, действующая на пространстве X с мерой μ, причём это действие оставляет меру квазиинвариантной.

Напомню, что *квазиинвариантность* означает, что любой элемент $g \in G$ переводит любое множество A меры нуль в множество gA меры нуль. Более конструктивное определение: для преобразования g существует такая измеримая функция $g'(x)$, что для любого измеримого множества A имеет место равенство $\mu(gA) = \int_A g'(x)\,d\mu(x)$. Напомню, что эта функция $g'(x)$ называется *производной Радона—Никодима*. В реальных примерах, о которых пойдёт речь, X будет бесконечномерное пространство функций. В этом случае производная Радона—Никодима является аналогом якобиана, который в данной ситуации, формально говоря, отсутствует (а на самом деле присутствует — в виде производной Радона—Никодима).

Итак, пусть есть квазиинвариантное действие группы G на пространстве X. По этому действию строится каноническое представление $T(g)$ этой же группы в пространстве функций на X:

$$T(g)f(x) = f(g(x))g'(x)^{1/2}. \tag{1}$$

На производную Радона—Никодима в степени $1/2$ умножают для того, чтобы операторы были унитарными в пространстве $L^2(X)$. Действительно, посмотрим на скалярное произведение

$$\langle T(g)f_1,\, T(g)f_2\rangle = \int f_1(g(x))g'(x)^{1/2}\overline{f_2(g(x))}g'(x)^{1/2}d\mu(x),$$

далее берём $y = g(x)$ в качестве новой переменной и получаем

$$\int f_1(y)\overline{f_2(y)}\,d\mu(y) = \langle f_1,\, f_2\rangle$$

Отсюда видно, что наш оператор $T(q)$ унитарен.

Таким образом, если мы имеем квазиинвариантное действие, то мы автоматически имеем унитарное представление, которое задаётся формулой (1).

Это замечание общеизвестно. Второе (которое будет сейчас сказано) — кажется, нет.

2. Пусть ρ — унитарное представление бесконечномерной группы G (далее группа G будет группой диффеоморфизмов окружности.) Возьмём множество всех операторов вида $\rho(g)$, где $g \in G$. Обозначим это множество через $\rho(G)$. Рассмотрим слабое замыкание множества $\rho(G)$, т. е. замыкание в слабой операторной топологии.

Напомню, что последовательность операторов A_j сходится к оператору A в *слабой операторной топологии*, если

— последовательность норм $\|A_j\|$ ограничена и

— для любых двух векторов v, w последовательность $\langle A_j v, w\rangle$ сходится к $\langle Av, w\rangle$.

Вообще-то первое условие следует из второго, но обычно бывает приятнее первое условие оставить, а второе заменить на условие сходимости всех матричных элементов в некотором фиксированном базисе.

Множество всех операторов с нормой меньшей 1 *компактно в слабой операторной топологии* (это доказывается так же, как слабая компактность шара).

Поэтому (вернёмся к нашим рассуждениям) какую бы группу G мы ни замкнули, из неё обязательно получится компактное множество. Несложное прослеживание показывает, что это множество — полугруппа.

Соответственно, если мы замкнём группу диффеоморфизмов, то и из неё автоматически получится компактное множество. А так как группа диффеоморфизмов не производит впечатления компактного множества, то тем самым то, что из неё получится, будет сильно на неё не похоже.

Лет 20 назад вопрос о таких замыканиях был задан Г. И. Ольшанским. Довольно долго было бы объяснять, почему он был задан. Надеюсь, что дальше будет ясно, что это вопрос по делу.

Также замечу, что есть конечномерная версия того же самого вопроса для обычных групп Ли. Пусть есть конечномерное представление ρ

какой-нибудь группы, например, группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Если мы просто замкнём $\rho(\mathrm{GL}_n)$ в пространстве всех операторов, то ничего интересного не получится, потому что само множество (почти что) замкнуто. Но если мы предварительно умножим наши операторы на ненулевые комплексные числа, т. е. рассмотрим множество $\mathbb{C}^* \cdot \rho(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$, а потом замкнём, то получается вполне нетривиальная операция. На всякий случай, если кто слышал соответствующие слова: будут «complete collineations» Сэмпля (Semple), они же — компактификация де Кончини—Прочези (De Concini, Procesi), они же, с точностью до неточностей в филологии, — компактификация Сатаке (Satake).

На этом кончаю затянувшееся введение и начинаю готовиться к конструкции дробных диффузий.

Подготовка: инвариантная мера на гильбертовом пространстве

Расширение гильбертова пространства. Пусть есть вещественное гильбертово пространство H. Возьмём в нём ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots$ Как известно, пространство H состоит из линейных комбинаций вида $\sum x_j e_j$, где $\sum |x_j|^2 < \infty$.

Рассмотрим новое пространство $\widehat{H}$, которое состоит из всевозможных линейных комбинаций вида $\sum x_j e_j$, где $x_j \in \mathbb{R}$ — произвольны.

Я сейчас начал описывать некую конструкцию, и всё время будет казаться, что она зависит от выбора базиса e_j. Но в конце концов получится, что она от выбора базиса не зависит, вопреки всякому здравому смыслу.

Итак, мы рассматриваем множество произвольных формальных линейных комбинаций $\sum x_j e_j$. Дальше о векторах e_j можно забыть и просто рассматривать пространство всех вещественных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$.

Рассмотрим прямую $\mathbb{R}$ с координатой x и рассмотрим стандартную гауссову меру $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ на прямой $\mathbb{R}$. Пространство последовательностей есть не что иное, как $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ На каждом экземпляре $\mathbb{R}$ мы вводим гауссову меру. Тем самым мы получаем гауссову меру на произведении бесконечного числа прямых $\mathbb{R}$, т. е. на пространстве последовательностей. Полученное пространство с мерой мы и обозначим $\widehat{H}$.

Итак, мы рассматриваем не просто пространство формальных линейных комбинаций, а пространство формальных линейных комбинаций с введённой на нём гауссовой мерой.

Как легко сообразить, само *пространство H имеет в $\widehat{H}$ меру нуль*. Действительно, если мы возьмём все последовательности, которые удовлетворяют, например, неравенствам $|x_1| < 77$, $|x_2| < 77$, ..., то мера множества всех таких последовательностей равна нулю. В самом деле, вероятность того, что $|x_1| < 77$ — это какое-то число $1-\delta$. Неважно, какое; важно лишь, что оно меньше 1. Дальше нужно воспользоваться тем, что $(1-\delta)^\infty = 0$. Если заменить 77 на 78, то ничего не изменится. По этой причине множество всех ограниченных последовательностей имеет меру нуль, а значит, пространство H имеет меру нуль и подавно.

Действие ортогональной группы. Теперь рассмотрим произвольную ортогональную матрицу $A \in O(\infty)$. Ортогональная матрица — это вещественная матрица, для которой $AA^t = 1$ и $A^tA = 1$. Можно ещё сказать, что матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ ортогональна, если сумма квадратов элементов каждой строки равна 1 и строки попарно ортогональны; то же самое выполняется для столбцов. Итак, рассмотрим ортогональную матрицу без каких бы то ни было условий финитности. Конечно, она имеет полное право быть финитной, но, вообще говоря, таковой не является. Применим эту матрицу к произвольному вектору из пространства $\widehat{H}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

В результате мы получаем в правой части столбец из произвольных рядов. Произвольный ряд имеет полное право не сходиться и, как правило, не сходится. Тем не менее, верен следующий факт:

Теорема 1. *При фиксированной матрице A ряды $\sum a_{ij}x_j$ сходятся почти всегда по той мере в $\widehat{H}$, которую мы ввели.*

Это высказывание является частным случаем теоремы Колмогорова—Хинчина о том, что *ряд $\sum \xi_j$ независимых случайных величин, имеющих нулевые математические ожидания, сходится почти всюду тогда и только тогда, когда сходится ряд дисперсий.*

У нас ряд дисперсий — это в точности ряд $\sum\limits_j a_{ij}^2$, т. е. сумма квадратов по строкам. Сумма квадратов по строкам равна 1, значит, ряд из дисперсий сходится, поэтому ряд $\sum a_{ij}x_j$ сходится почти всюду. Теорема Колмогорова—Хинчина действительно является теоремой, т. е. она неочевидна (если не знать доказательства). Но из неё уже очевидным образом следует нужный факт.

Тем самым, матрицу A можно применить к произвольному элементу пространства $\widehat{H}$.

Конечно, для разных матриц A подмножества, на которых ряды сходятся, будут разными, и если пересечь эти подмножества по всем A, то получится l_2 (которое как мы видели имеет меру 0).

Теперь второе высказывание, которое уже не удивительно: *преобразование $x \mapsto Ax$ сохраняет гауссову меру.*

Третье высказывание: *для любых операторов A и B равенство $(AB)x = A(Bx)$ верно почти всюду.*

В итоге у нас получается действие бесконечномерной ортогональной группы $\mathrm{O}(\infty)$ на пространстве $\widehat{H}$.

Некоторое время назад я сказал, что конструкция не зависит от базиса. Наличие действия ортогональной группы как раз и означает, что конструкция не зависит от базиса.

В общем, есть такая конструкция, то ли аналитическая, то ли теоретико-вероятностная. Не знаю точно, кто её первый придумал. Думаю, что Ирвинг Сигал (Segal) в 1953 г. Он хотел построить функциональную модель для бозонного пространства Фока. И пространство $L^2(\widehat{H})$ как раз и является одной из функциональных моделей бозонного пространства Фока. Потом придумали модели, которые в каких-то отношениях удобнее. Но для нас сейчас будет нужна именно эта модель.

Ещё одно замечание. Мы получили действие полной ортогональной группы на пространстве с мерой. Но оно не является действием группы на множестве! Потому что преобразования определены лишь почти всюду. Можно пытаться подправлять наши преобразования на множествах меры нуль. Но есть теорема о том, что наше действие всё равно неисправимо («не индивидуально», «non-specific»).

И замечание к замечанию. Во всех ситуациях, рассмотренных ниже, действие всё-таки будет действием группы на множестве.

Действие группы GL. Естествен вопрос, для каких ещё матриц, кроме ортогональных, мера остаётся квазиинвариантной. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2 (Фельдман—Гаек). *Пусть C — бесконечная обратимая матрица (точнее, оператор в гильбертовом пространстве), представимая в виде $C = A(1+T)$, где $A \in \mathrm{O}(\infty)$ и T — оператор Гильберта—Шмидта, Тогда преобразование $C\colon x \mapsto Cx$ оставляет гауссову меру квазиинвариантной. Верно и обратное: если преобразование оставляет гауссову меру квазиинвариантной, то матрица C представима в таком виде.*

Я напомню, что *оператор Гильберта—Шмидта* — это такой оператор, что сумма квадратов его матричных элементов сходится, т. е. $\sum\limits_{ij} |t_{ij}|^2 < \infty$. Можно давать и другие определения, но это самое короткое.

Операторы Гильберта—Шмидта компактны, но они составляют лишь часть множества компактных операторов.

Производная Радона—Никодима преобразования $C = A(1+T)$ вычисляется следующим образом. Изначально мера имела, грубо говоря, вид $e^{-\langle x,x\rangle/2}dx$. Здесь несуществующая мера Лебега dx умножается на несуществующую функцию $e^{-\langle x,x\rangle/2}$ (скалярное произведение $\langle Cx, Cx\rangle$ понимается в смысле l_2). Если быть совсем формальным, эта функция существует, но почти всюду равна нулю. Но этот нуль нами умножается на нечто, похожее на бесконечность.

Чтобы получить производную Радона—Никодима, нужно поделить образ этой меры на её саму:

$$\frac{e^{-\langle Cx,Cx\rangle/2}dCx}{e^{-\langle x,x\rangle/2}dx} = \exp\{-\langle x, Tx\rangle - \langle Tx, Tx\rangle/2\}\det(1+T)$$

В левой части и числитель и знаменатель смысла не имеют, но если сократить всё то, что сокращается, то получается осмысленное (сиречь, сходящееся) выражение, которое и является производной Радона—Никодима. Кстати, сходимость выражения в правой части тоже не совсем очевидна: там стоят два сомножителя, и может случиться, что они оба расходятся. Но само произведение сходится.

Урезание пространства. Теперь ещё одно замечание по поводу этой конструкции. Мы определяли пространство $\widehat{H}$ сначала как множество, а потом как пространство с мерой. Но это множество довольно большое. Его легко урезать так, что оно станет более ручным, а при этом изменится лишь на множество меры нуль.

В самом деле, рассмотрим на пространстве $\widehat{H}$ ряд $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}x_n^2$. Он сходится почти всюду (это следует из теоремы Беппо Леви и теоремы о мажорируемой сходимости). Поэтому мы можем изначально определять меру на пространстве таких последовательностей; здесь ε может быть любым положительным числом.

Основная конструкция

Конструкция Сигала в приложении к соболевским пространствам. Теперь скажу, к каким пространствам эта конструкция будет применяться.

Рассмотрим пространство вещественных функций на окружности. Напишем разложение функции на окружности в ряд Фурье: $f(\varphi) = \sum a_k e^{ik\varphi}$. Для каждого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ обозначим через H_s пространство функций f, для которых ряд

$$\|f\|^2 := a_0^2 + \sum |k|^{2s} |a_k|^2 < \infty$$

сходится.

Это — соболевское пространство с каким-то номером. Если $s = 0$, то это просто L^2 на окружности. Если s растёт, то функции $f \in \widehat{H}_s$ становятся всё более дифференцируемыми. А если s уменьшается, то эти функции становятся всё более обобщёнными.

Можно ли понять, что такое пространство $\widehat{H}_s$? Согласно первому формальному определению придётся рассматривать всевозможные формальные ряды вида $\sum a_k e^{ik\varphi}$, где $a_k \in \mathbb{C}$. Но как было замечено, это пространство можно урезать. Если эту операцию урезания применить к пространству $\widehat{H}_s$, то получится, что в качестве пространства $\widehat{H}_s$ можно рассматривать пространство $H_{s-1/2-\varepsilon}$. Таким образом, сигаловское расширение соболевского пространства может рассматриваться как соболевское пространство с другим номером.

При двух значениях $s = 0$ и $s = 1$ наша конструкция даёт вполне стандартные объекты.

А именно, пространство $\widehat{L}^2$ может рассматриваться как соболевское пространство $H_{-1/2-\varepsilon}$, т. е. как некоторое пространство обобщённых функций. Пространство $\widehat{L}^2$ принято называть *белым шумом*.

А если мы возьмём пространство H_1, т. е. пространство функций, у которых производная лежит в L^2, то тогда то, что получится, называется *броуновским движением*. Какое это имеет отношение к броуновскому движению? Мы строим меру на пространстве функций, а броуновским движением называется некоторая мера на пространстве непрерывных функций. То что у нас получается, совпадает с так называемым «винеровским мостом» (т. е. периодическим броуновским движением, последнее с физической точки зрения несколько противоестественно).

Здесь стоит на минуту остановиться. Я ввёл соболевские пространства, так, чтобы определение было покороче, и чтобы оно работало сразу при всех s. Но это не всегда удобно.

Например при $-1/2 < s < 1/2$ скалярное произведение в H_s лучше подправить и заменить на баргманновское выражение (1947)

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin[(\varphi_1 - \varphi_2)/2]|^{-1-2s} f_1(\varphi_1) f_2(\varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \qquad (2)$$

Тогда оно станет $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-инвариантным (кто чуть-чуть знаком с теорией представлений, знает и эту формулу; положительная определённость такого скалярного произведения не очевидна, а при $|s| > 1/2$ и не верна). Соответственно, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ действует на $\widehat{H}_s$, сохраняя меру. Конечно, новая мера на $\widehat{H}_s$ будет отлична от старой, но отличаться они будут на функциональный множитель, что с нашей точки зрения не существенно.

Да, чтобы избежать двусмысленности: группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ действует на окружности мёбиусовскими преобразованиями,

$$e^{i\varphi} \mapsto \frac{ae^{i\varphi}+b}{\overline{b}e^{i\varphi}+\overline{a}}, \qquad |a|^2-|b|^2=1$$

Действие Diff. А теперь добавим группу диффеоморфизмов окружности.

Пусть $q \in \mathrm{Diff}$ — диффеоморфизм окружности. Рассмотрим в пространстве H_s оператор

$$T_s(q)f(\varphi)=f(q(\varphi))q'(\varphi)^{1/2-s}.$$

Теорема 3. *Оператор $T_s(q)$ удовлетворяет условию Фельдмана—Гаека в соболевском пространстве H_s.*

А раз оператор $T_s(q)$ удовлетворяет условию Фельдмана—Гаека в пространстве H_s, то автоматически получается квазиинвариантное действие группы Diff на пространстве $\widehat{H}_s$. Теперь я расскажу то немногое, что известно об этом действии.

Перестройки

Начало. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < s < 1/2$ (не хочу останавливаться на $s=0$, там скучно).

Утверждение 1. *Пусть $0 < s < 1/2$. Тогда*:

а) *Действие группы Diff на $\widehat{H}_s$ эргодично, т. е. нет инвариантных множеств, мера которых отлична от 0 и ∞.*

б) *Более того, действие группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}$ на $\widehat{H}_s$ эргодично.*

в) *Более того, гиперболический элемент $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ действует эргодично. Параболический элемент $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ тоже действует эргодично. А эллиптический элемент $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ действует не эргодично.*

Это утверждение очень простое. Подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ сохраняет меру, определённую баргманновским скалярным произведением (2). Поэтому эргодичность эквивалентна отсутствию единицы в спектре оператора в L^2, а отсутствие единицы в спектре оператора в L^2 в нашем случае легко проследить.

Гипотеза. *Представление группы* Diff *в* $L^2(\widehat{H})$ *разлагается в прямую сумму двух неприводимых представлений, одно реализуется в чётных функциях, другое в нечётных.*

В точке первого перелома. Мы дошли до точки 1/2. В этой точке происходит много разных событий.

По-видимому, самое главное из этих событий, — это то, что так называемые представления со старшим весом связаны с этой точкой. О самих представлениях со старшим весом я не хочу много говорить и ограничусь отговорками.

В точке $s = 1/2$ можно рассматривать $L^2(\widehat{H})$, а ещё можно рассматривать голоморфные функции на $\widehat{H}$ (если правильно сказать, что это такое) и рассматривать действие группы диффеоморфизмов там. Тогда получается стандартная конструкция представления со старшим весом. А само $L^2(\widehat{H})$ — это некоторое представление со старшим весом, умноженное на некоторое представление с младшим весом. На всякий случай я скажу, о каких представлениях идёт речь (в стандартных обозначениях, которые я не буду пояснять). Одно представление — сумма модулей $\bigoplus\limits_n L(n^2, 1)$, а второе — контргредиентное.

Полугруппа трубок. Теперь вернусь к вопросу Ольшанского о том, как устроено слабое замыкание бесконечномерной группы в представлении. Возьмём пространство $L^2(\widehat{H})$, возьмём унитарное представление группы Diff в нём, и слабо замкнём множество операторов, как было раньше описано.

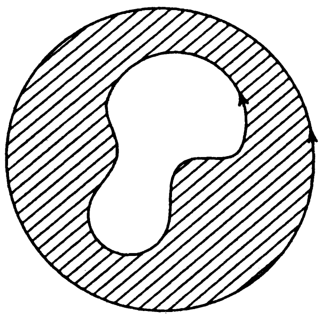

Рис. 1. Ориентации краёв кольца

Тогда получится следующий известный объект (введённый докладчиком в 1986 г). Элемент *полугруппы трубок* есть риманова поверхность, конформно эквивалентная кольцу, при этом фиксирована параметризация одного края, и фиксирована параметризация другого края. Стрелочки стоят так, как на рис. 1.

Две такие римановы поверхности эквивалентны, если они конформно отображаются одна на другую, так, что параметризации краёв переходят в параметризации краёв.

Умножение осуществляется склейкой: у нас есть параметризация, поэтому два края можно склеить. Получается полугруппа.

Теперь я сформулирую утверждение, которое не вполне доказано. Оно доказано на матфизическом уровне, но с формальной точки зрения в рассуждениях есть лакуна, которая, наверное, убирается, но попыток её убрать не было. Утверждение упирается в некоторую экзотическую оценку коэффициентов однолистных функций.

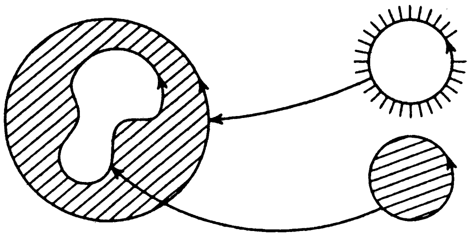

Рис. 2. Подклейка дисков

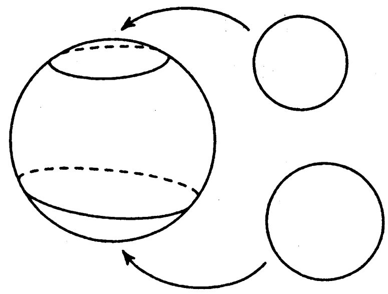

Рис. 3. После склейки

Утверждение 2. *Замыкание группы диффеоморфизмов окружности в обсуждаемом представлении содержит полугруппу трубок, т. е. элементы полугруппы трубок можно аппроксимировать добропорядочными диффеоморфизмами окружности.*

Это сразу не очевидно и даже довольно странно. Поэтому я должен объяснить, как такое может получиться.

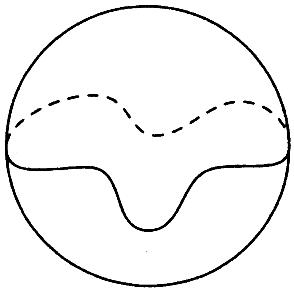

Рис. 4. Диффеоморфизм

У нас есть два отображения параметризованных окружностей. Мы считаем эти окружности границами дисков, и подклеиваем диски к сфере, используя параметризации, см. рис. 2. После склейки по этим отображениям получается риманова поверхность — сфера Римана (с двумя шапочками), см. рис. 3. Итак, элементы полугруппы можно рассматривать как сферы Римана с двумя шапочками. Диффеоморфизму соответствует бесконечно узкое кольцо, т. е. это отвечает случаю, когда шапочки покрывают всю сферу (рис. 4).

Теперь осталось построить пример, когда последовательность картинок 3 может сходиться к картинке 4 в каком-нибудь естественном смысле слова «сходимость».

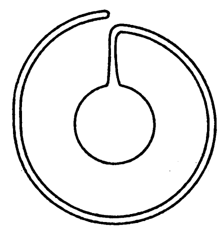

Рис. 5. Сфера с экватором

Шапочки параметризованы, поэтому есть пара голоморфных отображений. Рассмотрим последовательность сходящихся сфер Римана с экватором, изображённых на рис. 5, у которых перемычка уменьшается и полоска утончается (сама сфера изображена как плоскость; точка ∞ находится на бесконечности). Каждая шапка определяется голоморфной функцией в круге. Сходимость картинок мы понимаем, как сходимость голоморфных функций в открытом круге, равномерную на компактах.

В пределе получится сфера с двумя шапочками.

В итоге мы получаем элемент полугруппы трубок как предел последовательности элементов Diff.

После первой перестройки и до $s = 3/2$. Как я говорил, при проходе точки $1/2$ происходит много разных событий.

В частности, ломается эргодичность. Если до точки $1/2$ были одинокие элементы, действующие эргодично, то после этой точки уже вся группа действует неэргодично.

Это происходит по следующей причине.

Утверждение 3. *Почти любая функция* $f \in \widehat{H}_s$, *где* $1/2 < s < 3/2$, *удовлетворяет следующему гёльдеровскому условию*:

$$|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)| < |\varphi_1 - \varphi_2|^{s-1/2}(\big|\ln|\varphi_1 - \varphi_2|\big|^{1/2} + \varepsilon + C).$$

При $s = 1$ это — классическая теорема Леви о том, что броуновская траектория удовлетворяет гёльдеровскому условию с логарифмом. Остальные случаи к ней можно свести. В частности, получается, что пространство $\widehat{H}_s$ при $s > 1/2$ состоит из непрерывных функций.

Выше выписывался оператор

$$T_s(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))q'(\varphi)^{1/2-s}.$$

Из этой формулы видно, что положительные функции под действием $T(q)$ переходят в положительные.

Пусть Ω_+ — множество положительных функций, Ω_- — множество отрицательных функций, Ω_0 — множество функций, имеющих нуль.

Можно проверить, что все эти три множества действительно существуют в том смысле, что все они имеют ненулевую меру. Тем самым мы получаем три инвариантных подмножества, и эргодичности уже нет.

Легко заметить, что на Ω_+ действие имеет первый интеграл

$$I_s(f) = \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)^{\frac{1}{s-1/2}}}.$$

Такая величина является константой при действии операторов $T_s(q)$. Поэтому множество Ω_+ расслаивается на поверхности уровня. Дальше возникает естественное подозрение, что на каждой поверхности уровня есть своя собственная мера.

Есть известная теорема Рохлина об условных мерах, которая гласит, что на почти каждой поверхности уровня есть условная мера. Теперь спрашивается, есть ли она на всех поверхностях. Шавгулидзе говорил, что в случае броуновского движения ($s = 1$), на каждой поверхности уровня эта мера есть и что на каждой поверхности уровня мера эргодична. Но, по-моему, это доказательство нигде не опубликовано.

Написать похожий интеграл для Ω_0 нельзя, потому что он разойдётся.

Написать такой интеграл для Ω_- можно, но он не даст ничего нового.

Лирическое отступление. Теперь ещё одно замечание, хотя и не очень содержательное. Рассмотрим поверхность уровня интеграла I_s в пространстве непрерывных функций. Эта поверхность легко идентифицируется с однородным пространством $\mathrm{Diff}^{(1)}/\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — группа вращений. Соответственно, на таких пространствах мы получаем меры, квазиинвариантные относительно действия группы диффеоморфизмов окружности.

Понятно, что группа вращений — это совсем маленькая вещь по сравнению с самой группой Diff. Поэтому чуть-чуть пошевелив конструкцию, $\mathbb{T}$ можно убрать и получить меры на группе диффеоморфизмов окружности, инвариантные с одной стороны относительно диффеоморфизмов окружности. В том виде, как я это сказал, это утверждение производит впечатление самопротиворечивого, потому что есть теорема, которая это запрещает.

Но дело в том, что мера строится на группе $C^{(1)}$-диффеоморфизмов, а действуют на них бесконечно дифференцируемые диффеоморфизмы $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$. Во всяком случае, на группе диффеоморфизмов окружности есть что-то вроде меры Хаара, только этих мер Хаара много, и они односторонне инварианты.

Вопрос о неприводимости. Здесь начинается полу-теорема полуфольклор с довольно странной историей. Берётся точка $s=1$; ей соответствует просто броуновское движение. Здесь всё много проще, чем в общей ситуации.

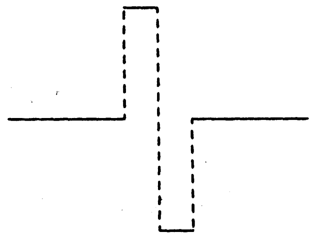

Рис. 6. Ступенька

Есть работа Косяка, опубликованная в Journal of Functional Analysis, в которой доказано, что представление в L^2 неприводимо. Косяк берёт диффеоморфизмы, близкие к тождественному, и рассматривает их малое возмущение. Малое возмущение устроено примерно так. Рассматривается маленькая ступенька (рис. 6), у которой подходящим образом выбраны высота и ширина. Берётся диффеоморфизм с такой производной. Затем берётся соответствующая последовательность операторов $T_1(q)$ и вычисляется слабый предел этих операторов. Оказывается, что эта последовательность операторов с заменой переменной слабо сходится к оператору умножения на $f(a)$

$$SF(f)=F(f)\cdot f(a).$$

Итак предъявляется много операторов умножения, которые коммутируют с любым оператором, коммутирующим с представлением. После этого доказательство неприводимости становится делом техники.

Всё было бы хорошо, но Шавгулидзе говорит, что в доказательстве есть дырка. Он предложил новое доказательство в том же духе, усложнив конструкцию функций q_j. Пирогов выслушал это доказательство, и сходу указал ошибку. Я ещё более усложнил начальную функцию и соответственно получил очередное доказательство. Но оно не опубликовано.

В общем, ситуация такая: утверждение как будто верно, способ доказательства как будто ясен, доказательство нигде не написано.

Опять слабое замыкание. В этом месте снова всплывает наш вопрос о слабом замыкании. Как я уже говорил, в точке $s=1/2$ это слабое замыкание, по-видимому, содержит полугруппу трубок. Соответственно, встаёт вопрос о том, как устроено слабое замыкание в других точках. Достоверно, что оно устроено иначе.

Вроде бы, естественно думать, что при сдвиге с $s=1/2$ понятие римановой поверхности во что-то деформируются. Получается что-то похожее на риманову поверхность, но не риманова поверхность. Но что там происходит на самом деле, не известно. Первое, что приходит в голову — желание угадать дополнительную геометрическую структуру на римановой поверхности. Но у меня не получилось.

Доказательство (или квазидоказательство) неприводимости, которое сейчас обсуждалось основано на предъявлении некоторых операторов в этом слабом замыкании. Но от этого ещё бесконечно далеко до полного описания замыкания.

Меры на пространстве канторовских множеств

Пока $1/2<s<3/2$.

Множества нулей. Мы обсудили поверхности уровня. Обратимся теперь к Ω_0, т. е. к пространству траекторий, пересекающих горизонтальную ось. Рассмотрим функцию из множества Ω_0. Есть такой несложный факт: если у этой функции есть нуль, то в любой окрестности этого нуля тоже есть нуль. То есть для функции общего положения множество нулей есть канторовское множество. Это классический факт в случае броуновского движения и относительно несложный факт в случае общих пространств $\widehat{H}_s$.

Сопоставим функции f множество её нулей. Получим отображение из множества Ω_0 в множество канторовских множеств окружности. На Ω_0 есть какая-то мера. Можно рассмотреть прямой образ этой меры.

Надо напомнить, что такое *образ меры*. Пусть A — пространство с мерой α, а φ — отображение из A в множество B. Тогда мера подмножества $C\subset B$ по определению равна $\alpha(\varphi^{-1}(C))$.

Итак, мы получим какую-то меру на множестве канторовских множеств (как образ меры на Ω_0). Исходная мера была квазиинвариантна. Из этого легко выводится, что полученная мера тоже квазиинвариантна.

Итак получена квазиинвариантная мера на множестве канторовских подмножеств окружности.

Когда-то давно, когда эта конструкция пришла мне в голову, я испытал удивление и сомнение в разумности такого рода построений. Но потом оказалось, что в случае броуновского движения, такие меры — это вполне классический теоретико-вероятностный сюжет, восходящий к Полю Леви. Они допускают явное конструктивное описание, и есть много явных формул с ними связанных.

Я понимаю, что многим покажется странным рассматривать меры на множестве канторовских множеств. Но сейчас я хочу построить некое семейство мер на множестве канторовских множеств. При этом в точке $s=1$ (т. е. в случае броуновского движения) это будет та же самая конструкция, и есть недоказанная гипотеза, что это вообще та же самая конструкция для всех значений s.

Розыгрыш канторовских множеств. Введём параметр α, $0<\alpha<1$. Для простоты сменим окружность на полупрямую. Наша цель — построить меру на множестве канторовских подмножеств полупрямой.

Первый вопрос: как на множестве канторовских подмножеств ввести хоть какие-нибудь координаты? Множество канторовских подмножеств кажется чем-то скользким; нужно как-то за него взяться.

Координаты вводятся так. Возьмём некоторую точку $a>0$. Пусть есть канторовское множество. Тогда точка a почти наверняка в нём не содержится. Соответственно, есть дополнительный к канторовскому множеству интервал (u, v), который покрывает точку a. Тем самым, есть два числа u и v. Итак, каждой точке a полупрямой мы можем поставить в соответствие два числа u и v, а именно, концы интервала, дополнительного к канторовскому множеству, который покрывает эту точку.

Начинаю определять меру. Первое её свойство такое: u и v распределены по закону

$$\left(\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha}\right)\frac{du\,dv}{u^{1-\alpha}(v-u)^{1+\alpha}}. \tag{3}$$

Следующий шаг в построении меры состоит в том, что берётся произвольный конечный набор точек $a_1<a_2<\ldots$ полупрямой. Возьмём точку a_1 и возьмём интервал (u, v), который её покрывает. Мы требуем, чтобы u и v были распределены по закону (3).

Может случиться, что этот интервал не задевает никаких других точек a_i, а может случиться, что задевает. В обоих случаях возьмём первую из точек набора, которая не покрыта интервалом (u, v). Например, если точка a_2 покрыта, а точка a_3 не покрыта, то берём точку a_3. Затем берём интервал (u_1, v_1), дополнительный к канторовскому множеству и покрывающий точку a_3. Концы этого интервала должны быть распределены по тому же самому закону, только за начало отсчёта вместо нуля берётся точка v.

Теперь снова берём первую непокрытую точку и рассматриваем интервал, её покрывающий, и т. д. В результате получается корректно определённая вероятностная мера на множестве канторовских подмножеств (это — неочевидная теорема).

Устойчивые процессы. Может быть, Вы помните из курса теории вероятностей, есть такие устойчивые случайные процессы. Сейчас я говорю для тех, кто помнит.

Иногда эти устойчивые случайные процессы бывают возрастающими (так называемые subordinator'ы). Формула (3) — это распределение прыжка устойчивого subordinator'a, покрывающего данную точку. Формула для прыжка была написана Дынкиным в 1953 году. А вся конструкция вместе может быть получена так. Мы берём траекторию устойчивого случайного процесса, проектируем на вертикальную ось. В проекции получается некоторое множество на вертикальной оси. Это и есть множество концов дополнительных интервалов канторовского множества.

Квазиинвариантность.

Теорема 4. *Построенная мера квазиинвариантна относительно группы диффеоморфизмов полупрямой с некоторыми условиями на асимптотику на бесконечности. Производная Радона—Никодима задаётся явной формулой*

$$\mathfrak{R}_p(L) = C \prod \frac{p(v_j) - p(u_j)}{(v_j - u_j)p'(u_j)}, \tag{4}$$

где (u_j, v_j) — дополнительные интервалы к канторовскому множеству L, а p — диффеоморфизм; $C = C(p)$ — явно выписываемая постоянная.

Следующая перестройка

Теперь продолжим движение вправо по вещественной оси (см. рис. 7). Была точка 0; была точка 1/2 — переломная точка, где сидит представление со старшим весом. Была точка 1, соответствующая классической диффузии.

Теперь точка 3/2. После этой точки функции пространства $\widehat{H}_s$ становятся гладкими. И чем больше s, тем более гладкими они становятся.

Рис. 7.

Дальше можно рассмотреть множества Ω_0, Ω_+ и Ω_-. С множеством Ω_+ всё будет примерно так же.

Для функции из Ω_0 множество нулей почти наверняка конечное, соответственно нули будут изолированными, потому что добропорядочной функции не положено иметь канторовского множества нулей.

На множестве Ω_0 тоже есть интегралы (они пишутся той же формулой, только надо отследить их сходимость п. в.), и дальше всё более или менее одинаково (в том смысле, что больше перестроек не известно), только гладкость функций $f \in \widehat{H}_s$ будет расти.

Можно идти и влево от точки $s=0$. Я почти ничего не знаю про свойства полученного действия. Но можно показать, что на уровне представлений есть симметрия $s \leftrightarrow -s$, поэтому новых представлений мы не получим.

Нерешённые вопросы

Отмечу, что точно такие же конструкции есть для групп петель, только там картинка немножко поскучнее. Но в общем всё примерно то же самое.

В своё время люди много занимались изобретением представлений групп диффеоморфизмов окружности и групп петель. Наиболее модна и на данный момент наиболее развита теория представлений со старшим весом. Есть ещё несколько теорий разной степени содержательности. Картинка, которую я описал, все эти теории представлений в каких-то точках цепляет.

Естественен вопрос о существующих нерешённых задачах.

Неприводимость построенных представлений. Думаю, что эта задача дожимается, например тем способом, который сказан выше. Правда ни в одном случае она не дожата.

Но решение этого вопроса не достаточно для получения собственно теории представлений.

Вопрос о вычислениях. Грубо говоря, если есть действие группы, то должны быть явные вычисления. Поэтому есть неформальный вопрос о явных вычислениях. Группа симметрий уж больно велика, поэтому можно надеяться на положительное решение.

Относительно оптимистичной кажется мне ситуация с канторовскими множествами. Устойчивые процессы производят впечатление фундаментального предмета, который однако оказывается неожиданно тяжёлым. Проблемы начинаются с плотностей устойчивых распределений, они задаются формулами типа

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \exp(-x^\alpha - tx)\,dx$$

известными со времён Коши. Этот незамысловатый на вид интеграл однако оказывается тяжёлой спецфункцией, имеющей устойчивую дурную репутацию.

Тем не менее набор нетривиальных явных формул, связанный с устойчивыми процессами науке известен (кстати две таких формулы приведены выше).

Один из возможных вопросов — попытаться вычислить сферическую функцию $\langle T(q)1, 1\rangle$ для нашего представления в L^2 на пространстве канторовских множеств, т. е., интеграл

$$\int \mathfrak{R}_q(L)^{1/2}\,dL$$

где функция $\mathfrak{R}_p$ задана формулой (4), а интегрирование ведётся по пространству канторовских множеств.

Замыкание. Кроме того, есть вопрос о слабом замыкании. Для произвольного значения параметра s мы берём группу диффеоморфизмов окружности и слабо замыкаем в этом представлении. Что получится? В одной точке получается очень красиво; что получается в других точках — неизвестно.

Можно надеяться получить в ответе то, что в матфизике называется геометрическими теориями поля.

Возможная точка обзора. Пародия на группу диффеоморфизмов. Для понимания любого математического объекта бывает полезно найти его родственников. Обсуждаемую теорию представлений не удаётся продвинуть с размерности 1 в размерность 2 (т. е. не удаётся заменить окружность на какой-либо объект вещественной размерности > 1).

Теория однако имеет p-адически-комбинаторный аналог. Соответствующая p-адическая группа — группа всех локально аналитических диффеоморфизмов p-адической прямой.

Попытаюсь описать очень похожий комбинаторный объект — «группу шароморфизмов», она же «группа иерархоморфизмов» Hier_2 — не употребляя p-адических чисел. Рассмотрим диадическое канторовское множество C такое, как описывается во вводных учебниках анализа, см. рис. 8. Назовём *шаром* подмножество в C, состоящее из точек лежащих в каком-либо *чёрном* интервале. Каждый шар канонически распадается в объединение двух чуть меньших шаров (см. рис. 8), назовём их нижними соседями.

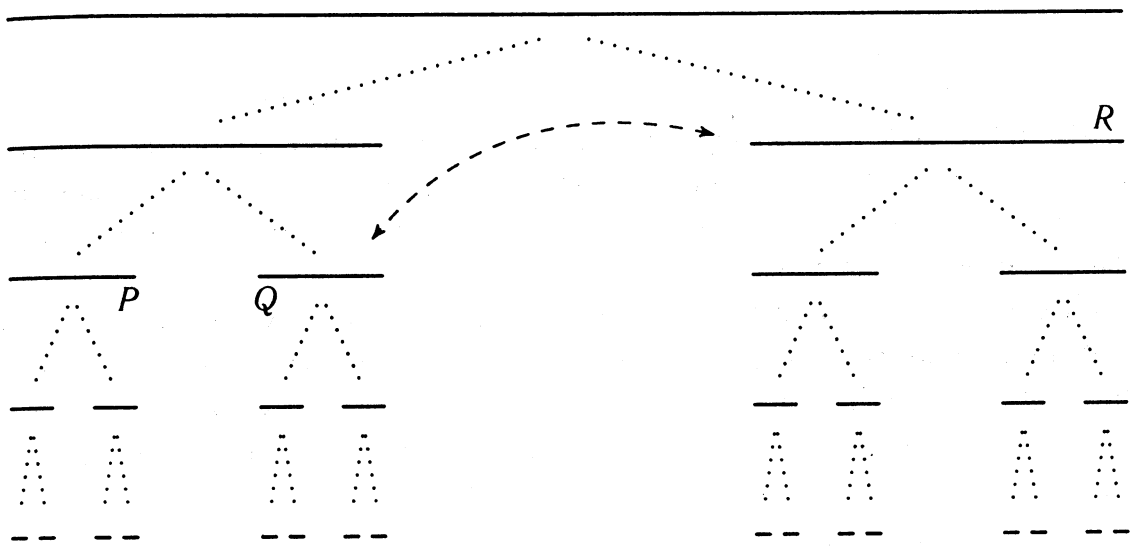

Рис. 8. Канторовское множество. Иерархия шаров.

Пусть q — гомоморфизм $C \to C$. Мы говорим, что q — иерархоморфизм, если у любой точки $x \in C$ есть окрестность, в которой наше отображение переводит любой шар в шар, и при этом отношение соседства сохраняется.

На рис. 8 присутствует дерево с выделенной вершиной (соответствующей самому большому шару). Любому автоморфизму этого дерева соответствует иерархоморфизм множества C.

Другой пример иерархоморфизма (см. рис. 8): мы оставляем на месте шар P, см. рисунок, и переставляем шары Q и R.

Бóльшая часть сказанного выше о группе Diff без помех переносится на группу иерархоморфизмов Hier, при том что последняя явно проще. Но простым объектом и она не является.

Ссылки. На тему лекции у меня есть обзор в Трудах МИРАН, Т. 217, другие ссылки есть по адресу `http//www.itep.ru/~neretin/qdiff.htm`.

22 февраля 2001 г.