МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра теории функций и функционального анализа

На правах рукописи

НЕРЕТИН Юрий Александрович

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ВИРАСОРО СО СТАРШИМ ВЕСОМ

01.01.01.- математический анализ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических
наук, профессор А.А.Кириллов

Москва - 1983

ВВЕДЕНИЕ

I. Пусть $Diff_0$ – группа диффеоморфизмов окружности S^1, сохраняющих ориентацию. Её алгеброй Ли естественно считать алгебру Ли $Vect$ векторных полей на окружности.

Обозначим через e_k векторное поле $e^{ik\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$. Легко видеть, что

$$(1)\qquad [e_k, e_n] = (n-k)\, e_{k+n}$$

И.М.Гельфанд и Д.Б.Фукс [9] показали, что эта алгебра имеет единственное нетривиальное центральное расширение V. Позднее это расширение было заново открыто физиками и получило название "алгебра Вирасоро". В канонических обозначениях она записывается следующим образом:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &[p_k, p_n] = (n-k)p_{k+n} + \frac{1}{12}(n^3-n)\, z\, \delta_{n+k,0} \\ &[p_k, z] = 0 \end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $\delta_{\alpha,\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\delta_{\alpha,\alpha} = 1$.

Р.Ботт [29] построил центральное расширение группы $Diff_0$ соответствующее V. Пусть

$$c(p,q) = \int_0^{2\pi} \ln p'(q(x))\, d \ln q'(x)$$

где $p, q \in Diff_0$, $c(p,q) \in H^2(Diff_0, \mathbb{R})$, тогда формула

$$(p_1, d_1)(p_2, d_2) = (p_1(p_2),\ d_1 + d_2 + c(p_1, p_2))$$

задаёт на пространстве $Diff_0 \oplus \mathbb{R}$ структуру группы, которая является центральным расширением $Diff_0$.

Простейшие унитарные представления группы $Diff_0$ реализуются в пространстве $L^2(S^1)$ по формуле

$$(3)\quad K_s(f(\varphi)) = f(g(\varphi))\, g'(\varphi)^{\frac{1}{2}+is}$$

где $g(\varphi) \in Diff_0$, $s \in \mathbb{R}$. Аналогичная конструкция имеет место для групп диффеоморфизмов любых конечномерных многообразий. А.А.Кириллов в работе [I5] исследовал наиболее простой класс унитарных представлений групп диффеоморфизмов - представления конечной функциональной размерности / т.е. представления, которые реализуются в пространствах функций от конечного числа переменных/.

Следующим этапом развития теории представлений групп диффеоморфизмов было построение примеров представлений бесконечной функциональной размерности. Одна из основных конструкций унитарных представлений - следующая: пусть группа G действует на пространстве Ω с мерой μ, причём μ квазиинваринтна относительно G. Тогда в пространстве $L^2(\Omega,\mu)$ возникает серия унитарных представлений группы G

$$(4)\quad Q_\omega(g)f(x) = f(xg)\left(\frac{dg(\mu)}{d\mu}(x)\right)^{\frac{1}{2}+i\omega}$$

где $\frac{dg(\mu)}{d\mu}$ -производная Радона-Никодима преобразования $g \in G$. В частности этим способом получаются представления K_s /см. формулу [I] /, $\Omega = S^1$, μ -мера Лебега на S^1. Таким образм встаёт задача о построении мер, квазиинвариантных относительно групп диффеоморфизмов.

А.М,Вершик, И.М.Гельфанд и М.И.Граев [5] показали, что этим свойством обладают естественные меры Пуассона на пространстве счётных множеств точек некомпактного многобразия, причём соответствующие унитарные представления неприводимы /см. также [37] / Р.С.Исмаягилов [14] построил примеры квазиинваринтных мер на пространстве сходящихся последовательностей точек компактного многообразия / в частности, случай окружности разобран в [13]/

В этих конструкциях группа диффеоморфизмов окружности не играет какой-либо исключительной роли среди других групп диффеоморфизмов. Интерес к представлениям группы диффеоморфизмов окружности и её центрального расширения вырос в конце семидесятых годов по двум причинам: в связи с развитием теории аффинных алгебр / см. например [41], [34], ~~42~~ [43]/ и в связи с теорией квантования релятивистской струны / см., например, [35], [36], [49]/

Алгебра Вирасоро не является аффинной алгеброй, но является градуированной алгеброй Ли конечного роста. В частности, оказывается, что теории модулей Верма над аффинными алгебрами и алгеброй Вирасоро во многом параллельны.

С другой стороны, группа диффеоморфизмов окружности является калибровочной группой в теории релятивистской струны. Было выяснено, что алгебры векторных полей на окружности / см. коммутационные соотношения (1) / недостаточно для построения непротиворечивой модели квантовой релятивистской струны, и для этого необходимо перейти к одномерному центральному расширению алгебры $Vect$ - алгебре Вирасоро. При этом были обнаружены примеры унитаризуемых модулей над алгеброй Вирасоро со старшим весом / вчастности, модули $L(n^2/4, 1)$, обозначение см. ниже/

После этого появился ряд работ, посвящённых модулям Верма над алгеброй Вирасоро. Среди них следует отметить статьи В.Г.Каца, в которых решена проблема приводимости для модулей Верма [39], [40] В.Г.Каца и И.Б.Френкеля [33] , Б.Л.Фейгина и Д.Б.Фукса [24], [25] описавших структуру подмодулей приводимых модулей Верма.

Г.Сигал [46] построил первые примеры унитарных проекитивных представлений группы $\mathcal{D}iff_0$, соответствующие представлениям со старшим весом алгебры Вирасоро $/L(n^2/4, 1)/$

2. Автором в работах [19], [20], [21], был введён ряд конструкций унитарных / вообще говоря проективных / ~~представле~~-ний $\mathcal{D}iff_0$, которые в точках вырождения дают унитарные представления со старшим весом. Введём некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{HS}(L)$ - пространство вещественно-линейных операторов Гильберта-Шмидта /вещественного или комплексного/гильбертова пространства L. Для вещественного гильбертова пространства H введём группу $GL_0(H)$ обратимых операторов, представимых в виде $A(1+T)$, где A - ортогональный, а $T \in \mathcal{HS}(H)$. Для комплексного гильбертова пространства K со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$ введём две группы вещественно-линейных операторов $O_0(K)$ и $Sp_0(K)$. Оини состоят из операторов, представимых в виде $\mathcal{U}(1+T)$, где $\mathcal{U}$ -унитарный, а $T \in \mathcal{HS}(K)$, и сохраняющих соответственно $Re<\cdot,\cdot>$ и $Im<\cdot,\cdot>$. Группа Sp_0 есть группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений / см. [1] / и имеет унитарное представление - представление W Шейла-Вейля - в бозонном пространстве Фока. Оно является естественным аналогом представления Вейля конечномерной группы $Sp(2n)$. Аналогично O_0 есть группа автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений / см. [1] / и имеет представление $Spin$ в фермионном пространстве Фока / $Spin$ - естественный аналог спинорного представления $O(2n)$/.

Заметим, что $GL_0(H)$ канонически вкладывается в $Sp_0(H_{\mathbb{C}})$: если $Q \in GL_0(H)$, то

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q^{t-1} \end{pmatrix} \in Sp_0(H_{\mathbb{C}})$$

Ограничение представления W на подгрупу GL_0 мы обозначим через Exp / Существует более прямой способ построения Exp : группа GL_0 действует в некотором линейном пространстве Ω с гауссовой мерой μ, причём μ ~~квази~~-инвариантна относительно GL_0 / см. [II], теорема Фельдмана -Гаека, и [28] /, формула (4) даёт унитарное представление GL_0, при $\omega=0$ мы получаем представление Exp /.

Пусть $W=W_+\oplus W_-$, $Spin=Spin_+\oplus Spin_-$ и $Exp=Exp_+\oplus Exp_-$ – разложение представлений W, $Spin$ и Exp на неприводимые подпредставления, которые реализуются в чётных и нечётных функциях. Отметим также, что W продолжается до проективного унитарного неприводимого представления аффинной группы $Sp_0(K)\ltimes K$ – полупрямого произведения $Sp_0(K)$ и группы параллельных переносов в K / подробнее об этих группах и их представлениях см. §2, см. также [I] /. Ниже группа $Diff_0$ реализуется различными образами как подгруппа GL_0, O_0, Sp_0, $Sp_0(k)\ltimes K$, что позволяет получать унитарные представления $Diff_0$.

А. Бозонные представления.

Рассмотрим пространство H_λ вещественных функций на окружности со скалярным произведением

$$(5)\quad \langle f_1,f_2\rangle_\lambda=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{-\lambda} f_1(\varphi_1)f_2(\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2$$

$0<\lambda<1$, группа $Diff_0$ действует в H_λ по формуле

$$(6)\quad T_\lambda(g)f(\varphi)=f(g(\varphi))\,g'(\varphi)^{1-\lambda/2}$$

где $g\in Diff$.

ТЕОРЕМА BI. $T_\lambda(g)\in GL_0(H_\lambda)$

Таким образом, формула $Exp(T_\lambda(g))$ задаёт унитарное представление группы $Diff_0$. Теперь заметим, что ограничение T_λ на $PSL_2(\mathbb{R})$ есть унитарное представление $PSL_2(\mathbb{R})$ дополнительной серии /см., например, [8] /. Обозначим его через $\mathcal{D}_\lambda$.

ТЕОРЕМА В2.а/ Ограничение $Exp(T_\lambda(g))$ на $PSL_2(\mathbb{R})$ представимо в виде $I\oplus\left(\bigoplus_{k\lambda<1}\mathcal{D}_{k\lambda}\right)\oplus Q$, где I - одномерное представление /"вакуумный вектор"/, а Q разлагается лишь по представлениям $PSL_2(\mathbb{R})$ основной и дискретных серий.

б/ В $Exp(T_\lambda(g))$ существуют неприводимые подпредставления $Exp'_+(T_\lambda)$ и $Exp'_-(T_\lambda)$ такие, что

$$Exp_+(T_\lambda(g))\supset Exp'_+(T_\lambda)\supset I\oplus\left(\bigoplus_{2k\lambda<1}\mathcal{D}_{2k\lambda}\right)$$

$$Exp_-(T_\lambda(g))\supset Exp'_-(T_\lambda)\supset\bigoplus_{(2k+1)\lambda}\mathcal{D}_{(2k+1)\lambda}$$

В частности, $Exp'_+(T_\lambda)$ есть циклическая оболочка вакуумного вектора.

Пусть теперь $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Тогда формула (5) задаёт вообще говоря индефинитную эрмитову форму, один из индексов инерции которой конечен / интеграл (5) в этом случае определён в смысле аналитического продолжения по λ, см. [10] /

ТЕОРЕМА В3. Пусть $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, тогда существует функция $d\in C^\infty(S^1\times S^1)$ такая, что скалярное произведение

$$(7)\quad \langle f_1,f_2\rangle_\lambda=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left|\sin\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|^{-\lambda}+d(\varphi_1,\varphi_2)\right)f_1(\varphi_1)f_2(\varphi_2)d\varphi_1\ldots$$

знакоопределено. Тогда $T_\lambda(g)\in GL_0$ / T_λ задаётся фрмулой (6)/ и класс эквивалентности представлений $Exp(T_\lambda)$ не зависит от выбора d.

Наконец отметим, что при $\lambda=0,1,2$ также существуют естественные регуляризации формулы (5):

$$<f_1, f_2>_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\varphi_1-\varphi_2) f_1(\varphi_1) f_2(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) f_2(\varphi) d\varphi$$

$$<f_1, f_2>_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) f_1(\varphi_1) f_2'(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$

при $\lambda = 2$ пространство H_2 необходимо профакторизовать по пространству констант. Теорема BI при этом остаётся верной. Случай $\lambda = 0$ подробно изучен ниже /см. теоремы 0.I-0.2/.

Б.Фермионные представления.

Пусть двулистная накрывающая группы $Diff_0$ действует в пространстве L^2 комплексных нечётных функций на по формуле

$$(8) \qquad S_\tau(g) f(\varphi) = f(g(\varphi))\, g'(\varphi)^{\frac{1}{2}+is}$$

Овеществим наше пространство и введём в нём новую комплексную структуру при помощи оператора

$$(9) \qquad Hf(\varphi) = \frac{1}{2\pi\Gamma(2is)} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{f(\psi)}\, sgn(\sin(\varphi-\psi)\, d\psi}{|\sin(\varphi-\psi)|^{1+2is}}$$

$H^2 = -1$, H - ортогональный оператор, $HS(g) = S(g)H$ тогда и только тогда, когда $g \in SL_2(\mathbb{R})$. Обозначим полученное гильбертово пространство через L.

ТЕОРЕМА B4. $S_\tau(g) \in O_0(L)$

Таким образом мы полчили серию унитарных представлений $Spin(S_\tau(g))$ группы $Diff_0$.

Ограничение $S_\tau(g)$ на $SL_2(\mathbb{R})$ есть представление P_τ нечётной основной серии / см.[8]/.

ТЕОРЕМА B5. Ограничение $Spin(S_\tau(g))$ на $SL_2(\mathbb{R})$ есть (при $\tau \neq 0$) $I \oplus P_\tau \oplus Q$, где I одномерно, а Q разлагается в прямой интеграл по основным и дискретным сериям и не содержит неприводимых подпредставлений основной серии. Циклические оболочки подпространств I и P_τ неприводимы и различны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти конструкции имеют также p-адические аналоги. В этом случае могут быть построены унитарные представления некоторых групп преобразований деревьев Брюа-Титса / об автоморфизмах деревьев Брюа-Титса см. [22] , [3I] /. На возможность обощения конструкций работы [20] на p-адический случай указал автору И.М.Гельфанд.

Структура представлений $Exp(T_\lambda)$ и $Spin(S_\tau)$ во многом остаётся невыясненной. Однако в точках вырождения / $\tau=0$, $\lambda=0$, $\lambda=2$ / эти конструкции позволяют получать унитарные представления $\mathcal{D}iff_0$ со старшим весом, которым и посвящена настоящая диссертация.

3. Модуль R над V называется модулем со старшим весом $(h,c)\in\mathbb{C}^2$, если в R существует вектор v такой, что

I. $\rho_{-k}(v)=0$ / при $k>0$ /

2. $\rho_0(v)=hv$, $z(v)=cv$

3. Модуль R порождается v .

Хорошо известно /см. §I/, что среди всех модулей со старшим весом (h,c) существует универсальный модуль $M(h,c)$ - так называемый модуль Верма - такой, что любой модуль со старшим весом (h,c) представим в виде $M(h,c)/P$, где P некоторый подмодуль в $M(h,c)$.

Кроме того, среди всех модулей со старшим весом (h,c) существует "минимальный"модуль $L(h,c)$ - фактор $M(h,c)$ по максимальному подмодулю. Это единственный неприводимый модуль со старшим весом (h,c) .

Если (h,c) - точка общего положения, то модуль $M(h,c)$ неприводим, в частности, $L(h,c)=M(h,c)$. Однако существует счётное семейство квадратичных многочленов $\varphi_{\alpha,\beta}(h,c)$, где $\alpha,\beta\in N$ таких, что для (h,c), удовлетворяющих хотя бы одному условию $\varphi_{\alpha,\beta}(h,c)=0$ модуль $M(h,c)$ приводим.

Если для пары (h,c) лишь для одного многочлена $\varphi_{\alpha,\beta}(h,c)=0$ то в $M(h,c)$ существует единственный подмодуль, причём он изоморфен $M(h+\alpha\beta,c)$. Тогда

$$L(h,c)=M(h,c)/M(h+\alpha\beta,c)$$

Если же через точку (h,c) проходит хотя бы две квадрики $\varphi_{\alpha,\beta}=0$, то через неё проходит бесконечное множество таких квадрик. На рисунке I /стр. II/ приведены несколько типичных / и существенных в дальнейшим / примеров структуры подмодулей в этом случае.

$$L(0,1)=M(0,1)/M(1,1)$$

$$L(0,0)=M(0,0)/(M(1,0)+M(2,0))$$

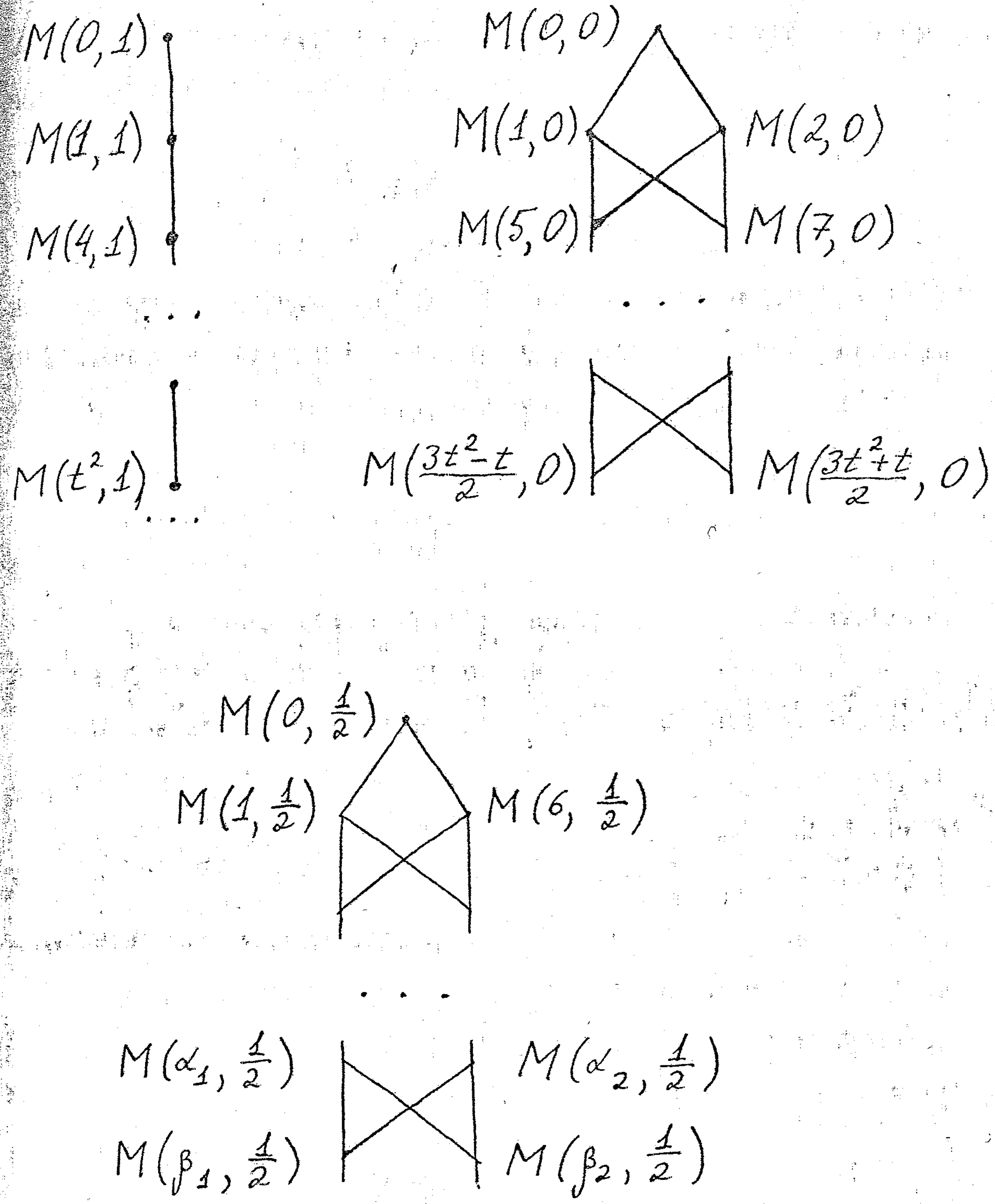
$$L(0,\tfrac{1}{2})=M(0,\tfrac{1}{2})/(M(1,\tfrac{1}{2})+M(6,\tfrac{1}{2}))$$

Подробнее о структуре подмодулей см.[25].

На модуле $M(h,c)$ при $(h,c)\in\mathbb{R}^2$ существует и единствена / с точностью до пропорциональности / инвариантная эрмитова форма / аналог формы Шаповалова /. Модуль $M(h,c)$ унитаризуем тогда итолько тогда, когда эта форма положительно определена.

Семейство квадрик $\varphi_{\alpha,\beta}=0$ довольно сложным образом разбивает плоскость. Одноко известно, что ни одна из квадрик не проходит через квадрант $C=\{h>0,\ c>1\}$. Как показано в настоящей работе, именно эта область соответствует унитаризуемым модулям Верма.

Точка $(0,1)$ лежит в замыкании C, поэтому модуль



$\alpha_1 = (3t+1)(4t+1)$ $\qquad$ $\beta_1 = (12t+11)(t+1)$

$\alpha_2 = (3t+2)(4t+3)$ $\qquad$ $\beta_2 = (12t+13)(t+1)$

Рис. 1

$L(0,1)$ унитаризуем / см. рис. I /. Кроме того, в этом случае унитаризуемы все неприводимые подфакторы

$$M(t^2,1)/M((t+1)^2,1)=L(t^2,1)$$

В случае $M(0,\frac{1}{2})$ унитаризуем лишь модуль $L(0,\frac{1}{2})$, все остальные подфакторы не унитаризуемы. Наконец $L(0,0)$ – одномерный модуль, и он унитаризуем по тривиальным причинам. / доказательство унитаризуемости $L(0,\frac{1}{2})$ см. в §4 /

4. Основные результаты настоящей диссертации следующие:

I. Получена классификация унитаризуемых модулей Верма над алгеброй Вирасоро.

2. Построены новые проективные унитарные представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом.

3. Показано, что существует не более счётного числа особых вырожденных унитаризуемых модулей над алгеброй Вирасоро со старшим весом. Построены примеры таких модулей и доказана их интегрируемость до проективных унитарных представлений группы диффеоморфизмов окружности.

5. Изложим основные результаты диссертации более подробно.

Рассмотрим гильбертово пространство K вещественных функций на S^1 с нулевым средним / $\int f\,d\varphi=0$ / со скалярным произведением

$$\langle f_1,f_2\rangle=-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|f_1(\varphi_1)f_2(\varphi_2)\,d\varphi_1\,d\varphi_2$$

Введём в K комплексную структуру при помощи преобразования Гильберта

$$Hf(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)f(\psi)\,d\psi$$

Пусть $Diff_0$ действует в K по формуле

$$T(g)f(\varphi)=f(g(\varphi))g'(\varphi)$$

где $g\in Diff_0$.

ТЕОРЕМА 0.1. Операторы $T(g)$ лежат в $Sp_0(K)$.

Формула

$$Z_{\alpha,\beta}(g)f(\varphi)=T(g)f(\varphi)+\alpha(g'-1)+\beta\, g''/g'$$

задаёт аффинное действие группы $Diff_0$ в K. Таким образом, мы имеем серию вложений $Diff_0$ в $Sp_0(K)\ltimes K$ и, следовательно, /см. стр. 6 / серию унитарных проективных представлений $N_{\alpha,\beta}$ группы $Diff_0$.

ТЕОРЕМА 0.2. Представление $N_{\alpha,\beta}$ есть унитарное представление $Diff_0$ со старшим весом

$$(h,c)=\left(\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2),\ 1+12\beta^2\right)$$

При $(h,c)\neq(n^2/4,1)$, $n\in\mathbb{Z}$, $N_{\alpha,\beta}$ неприводимы.

Рассмотрим пространство L^2 вещественных функций на S^1. Пусть $Diff_0$ действует в пространстве $M=L^2\oplus\mathbb{R}$ по формуле

$$S(g)(f(\varphi),c)=\left(f(g(\varphi))g'(\varphi)^{1/2},\ c\right)$$

Комплексная структура в M вводится при помощи оператора I

$$I(f(\varphi),c)=\left(c+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)f(\psi)d\psi,\ -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi\right)$$

ТЕОРЕМА 0.3. $S(g)\in O_0(M)$

Эта теорема позволяет построить изолированные вырожденные представления $Diff_0$ со старшим весом.

ТЕОРЕМА 0.4. Представления $L(0,1/2), L(1/16,1/2), L(1/2,1/2)$ унитаризуемы и интегрируемы до унитарных проективных представлений группы $Diff_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 0.4 была независимо обноружена Р.С.Исмагиловым для $L(0,1/2)$, $L(1/16,1/2)$ и автором для $L(0,1/2)$ и $L(1/2,1/2)$

ТЕОРЕМА 0.5.МодульВерма $M(h,c)$ унитаризуем тогда и только тогда, когда

$$(h,c)\in\{h>0,\ c\geqslant 1\}\setminus\{h=n^2/4,\ c=1,\ n\in\mathbb{Z}\}$$

СЛЕДСТВИЕ I.При $h\geqslant 0$, $c\geqslant 1$ модули $L(h,c)$ унитаризуемы.

Рассматривая тензорные произведения представлений из теорем 0.2 и 0.4, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.Следующие $L(h,c)$ интегрируемы до представлений группы $Diff_0$:

I. $L(h,c)$ при $(h,c)\in(h\geqslant 0,\ c\geqslant 1)\setminus\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k$

где A_k - открытый треугольник с вершинами

$$(0,\ k/2),\ (0,\ (k+1)/2),\ (1/48,\ (k+1)/2)$$

2. $L(0,0)$

3. $L(0,1/2)$, $L(1/16,1/2)$, $L(1/2,1/2)$

В частности, эта область содержит множество

$$\{h\geqslant 1/48,\ c\geqslant 1\}$$

/см. рисунок 2/

ГИПОТЕЗА. Представления $L(h,c)$ унитаризуемы тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

I. $h\geqslant 0,\ c\geqslant 1.$

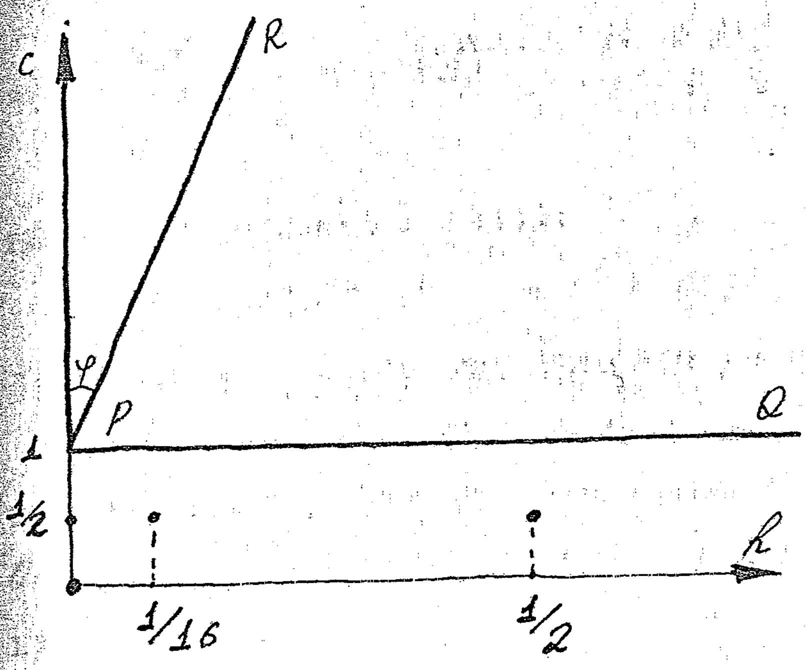


Рис. 2а.Унитаризуемые модули Верма лежат в области $\{k>0, c\geq 1\}$ Представления $N_{\alpha,\beta}$ заполняют замкнутый угол RPQ, $tg\,\varphi = \frac{1}{24}$

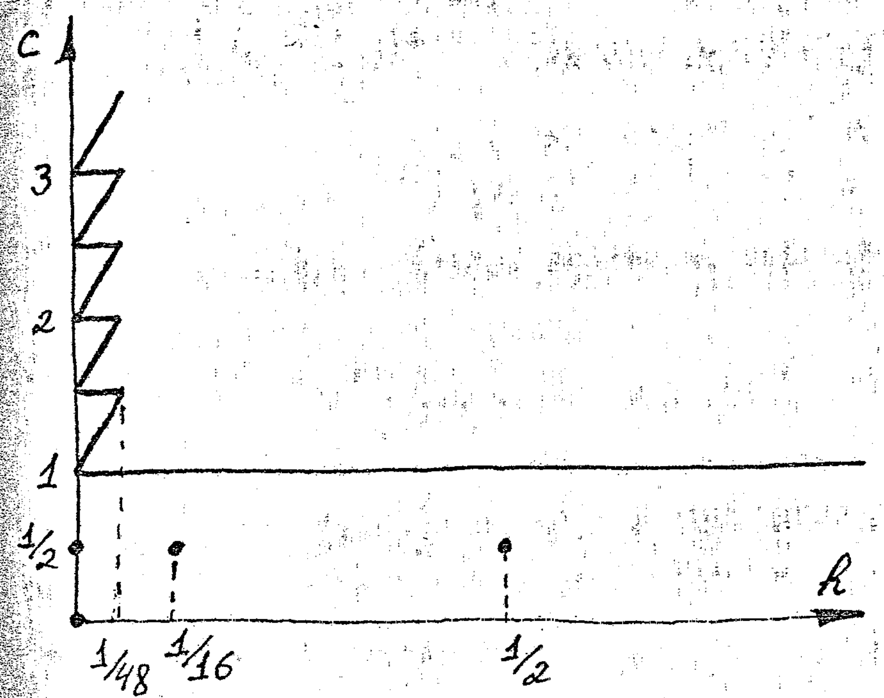


Рис.2б.Известные унитарные неособые представления $Diff_0$ со старшим весом заполняют область между прямой $c=1$ и "пилообразной" ломаной. Кроме того известно четыре особых представления.

2. $c = 1 - \dfrac{6}{p(p+1)}$, $p \geq 2$

$$h = \frac{r^2 - 1}{4p(p+1)}$$

где r представимо в виде

$$\alpha p - \beta(p+1), \quad 1 \leq \alpha \leq p, \ 1 \leq \beta \leq p-1$$

Теорема 7.I. показывает, что это условие необходимо.

Случай I даёт все невырожденные представления. Представления второго типа образуют дискретное множество в полуполосе $h \geq 0$ $0 \leq c < 1$. В некотором смысле это наиболее вырожденные представления.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Пусть ρ -унитарное представление группы G в пространстве H. Рассмотрим функцию $c: G \to H$ Отображение $Q: G \times H \to H$

$$Q(g)(h) = \rho(g)h + c(g)$$

является аффинным действием G, ассоциированным с линейным действием ρ тогда и только тогда, когда

$$c(g_1 g_2) = \rho(g_1) c(g_2) + c(g_1)$$

Нетривиальные аффинные действия, ассоциированные с ρ нумеруются элементами группы $H^1(G, H)$. В большинстве случаев $H^1(G, H) = 0$. Как показано в [6] нетривиальность группы $H^1(G, H)$ связана с тем, что представление ρ неотделимо от единичного представления / в топологии двойственного объекта к группе G, см., например, [I7] /. В нашем случае коциклы возникают в представлении T_λ /см. (6)/ при $\lambda = 0$, когда от T_λ отщепляется единичное представление.

При ограничении на подгруппу $PSL_2(\mathbb{R}) \subset Diff_0$ оба коцикла дают коцикл Вершика-Гельфанда-Граева [4] / с точностью до умножения на i /

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\lambda=2$ в бозонном случае / см.(6) / имеет место аналог теоремы 0.1. Фактически эта конструкция в несколько других терминах была также обнаружена Г.Сигалом [46]. Однако представления $W(T_0(\psi))$ и $W(T_2(\psi))$ эквивалентны и равны $\bigoplus_{n=0}^{\infty} L(n^2,1)$. Поэтому ниже случай $\lambda=2$ не рассматривается.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Опишем взаимосвязь между представлениями, описание которых дано в теоремах B1-B5 и представлениями со старшим весом, изучаемыми в диссертации. Обозначим через ρ^* представление, контраградиентное к ρ. Тогда

$$Exp(T_0) \simeq N_{0,0} \otimes N_{0,0}^*$$

$$Spin(S_0) \simeq \left(L(0,\tfrac{1}{2}) \oplus L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\right) \otimes$$

$$\otimes \left(L(0,\tfrac{1}{2}) \oplus L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\right)^*$$

см. также [20] и заметку И.М.Гельфанда и М.И.Граева о "корне квадратном"из представления [7], см. также замечание в конце §4 настоящей работы. Отметим в этой связи ещё один факт, по--видимому, не имеющий конечномерных аналогов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ B6. Пусть $L(0,c)$ и $L(h,d)$ интегрируемы до проективных унитарных представлений $Diff_0$, причём $0 \le h \le 1/2$. Тогда $L(0,c) \otimes L(h,d)^*$ неприводимо.

В частности при $c \ne d$ мы получаем пример проективного унитарного представления $Diff_0$, не имеющего старшего веса.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Унитарные представления $Diff_0$ со старшим весом являются естественным аналогом представлений полупростых групп со старшим весом. ~~Эта~~ задача классификации решена лишь для некоторых групп / для $\widetilde{U(p,q)}$ см. [23] /. Однако нетрудно проследить аналогии между результатами для Diff_0 и для конечномерных полупростых групп / см, [44], [23], [52]/.

6. Изложим содержание диссертации по параграфам.

Работа состоит из трёх глав, 7 параграфов. Глава I носит вводный характер. В §I вводятс необходимые обозначения и рассматриваются простейшие свойства алгебры Вирасоро и модулей Верма над ней. Параграф 2 посвящён каноническим коммутационным и антикоммутационным соотношениям и их автоморфизмам. В нём изложены необходимые факты о представлении Шейла-Вейля бесконечномерной симплектической группы и спинорном представлении бесконечномерной ортогональной группы.

Глава II посвящена конструкциям унитарных представлений группы диффеоморфизмов окружности. В §4 унитарные представления Diff_0 со старшим весом в бозонном пространстве Фока, в §5 - в фермионном пространстве Фока.

Наконейц, в главе III проблема унитаризации исследуется на инфинитизимальном уровне. В §5 исследуются свойства формы Шаповалова на модулях Верма над алгеброй Вирасоро, в §6 решается вопрос об унитаризации модулей Верма, в §7 получено необходимое условие унитаризуемости для вырожденных модулей со старшим весом.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [19] - [21].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проффессору А.А.Кириллову за помощь в работе.

Глава I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§1. Алгебра Вирасоро.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ - множества натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел. Через $p(k)$ обозначим число неупорядоченных разбиений числа $k\in\mathbb{N}$ на натуральные слагаемые. Пусть $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\gamma,\delta\}$ - две неупорядоченные пары чисел. Мы пишем $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma,\delta\}$ если $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$ или $\alpha=\delta$, $\beta=\gamma$.

Все гильбертовы пространства в данной работе сепарабельны, $\mathcal{HS}(K)$ обозначает пространство вещественно-линейных операторов Гильберта-Шмидта в гильбертовом пространстве K, S^nK обозначает n-ую гильбертову симметрическую степень K, Λ^nK - n-ую гильбертову внешнюю степень, $\Lambda(K)=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\Lambda^nK$, $Exp(K)=\bigoplus S^nK$ / прямая сумма в обоих случаях гильбертова/. Каноническую нормировку скалярного произведения в S^nK и Λ^nK см. в §2. Пусть $\mathcal{U}(K)$ - группа унитарных операторов комплексного гильбертова пространства, $O(K)$ - группа ортогональных операторов пространства K, если K - вещественное гильбертово пространство, и соответственно группа операторов, сохраняющих $Re\langle\cdot,\cdot\rangle$, если K - комплексное. Группу ограниченных операторов в комплексном пространстве K, сохраняющих $Im\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим через $Sp(K)$. Группы $O_0(K)$, $Sp_0(K)$, $Sp_0(K)\ltimes K$ введены на стр. 5 введения. Через I мы будем обозначать оператор умножения на i в комплексном гильбертовом пространстве, вещественно-линейный оператор A комплексно-линеен, если $AI=IA$ и антилинеен, если $AI=-IA$. Пусть A^t оператор в K, сопряжённый вещественно-линейному оператору

A в K относительно формы $Re\langle\cdot,\cdot\rangle$, если A комплексно-линейный, то $A^t=A^*$, где A^* - эрмитово сопряжённый оператор. Комплексификацию пространства H мы будем обозначать через $H_{\mathbb{C}}$. Иногда мы будем писать $\mathcal{H}S$, $\mathcal{O}$, Sp_0 вместо $\mathcal{H}S(K)$, $\mathcal{O}(K)$, $Sp_0(K)$ и т.д.

Все унитарные представления, с которыми мы будем иметь дело являются проективными (см. [17])

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли, тогда $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ - её комплексификация, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ - универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $Diff_0$ - группа диффеоморфизмов окружности гладкости C^∞, сохраняющих ориентацию. Если $p(\varphi)$, $q(\varphi)$ - два диффеоморфизма, то их произведение определяется по формуле $p\circ q=q(p(\varphi))$. Алгебра Ли группы $Diff_0$ - алгебра Ли $Vect$ векторных полей на S^1. Выберем в $Vect_{\mathbb{C}}$ базис $e_n=e^{in\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$. Легко видеть, что

$$[e_n, e_k]=(k-n)e_{n+k}$$

Рассмотрим алгебру Ли V над $\mathbb{C}$ с базисом $p_n\ (n\in\mathbb{Z})$ и z и соотношениями коммутации / алгебра Вирасоро /:

$$[p_n, p_k]=(k-n)p_{n+k}, \quad \text{при} \quad n+k\neq 0$$

$$[p_{-k}, p_k]=2kp_0+\frac{1}{12}(k^3-k)z, \quad [p_k, z]=0$$

Очевидно, что $V/\mathbb{C}z=Vect_{\mathbb{C}}$, то есть V - одномерное центральное расширение $Vect_{\mathbb{C}}$. Нетрудно доказать, что это единственное нетивиальное центральное расширение $Vect_{\mathbb{C}}$ / [9], [20]/ Рассмотрим в V вещественную подалгебру $V_{\mathbb{R}}$, состоящую из элементов $(\sum c_k p_k+\alpha z)$ таких, что $i\alpha\in\mathbb{R}$, $c_k=\bar{c}_{-k}$. Очевидно, что $V_{\mathbb{R}}$ - центральное расширение $Vect$.

Пусть $Diff_0'$ - подгруппа группы диффеоморфизмов прямой, $\rho(x) \in Diff_0'$, если $\rho(x+2\pi)=\rho(x)+2\pi$. Центр $Diff_0'$ - подгруппа A, состоящая из диффеоморфизмов $g_k(x)=x+2\pi k$ /$k \in \mathbb{Z}$/. Тогда $Diff_0'/A=Diff_0$. Коцикл Ботта /см. стр. 2/ на $Diff_0'$ по-прежнему определён:

$$c(\rho,g)=\int_k^{k+2\pi} \ln(\rho'(g(x)))\, d\ln g'(x)$$

Так как $\rho'(x)$ и $g'(x)$ периодичны, $c(\rho,g)$ не зависит от k. Обозначим соответствующее центральное расширение группы $Diff_0$ через $Diff_0^{\sim}$.

Благодаря наличию у группы $Diff_0$ расширения $Diff_0^{\sim}$, у $Diff_0$ существуют унитарные проективные представления. Более того, любое унитарное/не проективное/ ~~ее~~ представление собственно группы $Diff_0$ со старшим весом одномерно.

Алгебра Вирасоро V обладает естественной градуировкой: $\deg \rho_k = k$, $\deg z=0$. Модули над V полагаются градуированными. Введём в V подалгебры: V_-, порждённую $\rho_k (k>0)$ и z, и N_+, порождённую ρ_k /$k>0$/

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. I.Модуль R над V называется <u>модулем со старшим весом</u> $(h,c)\in \mathbb{C}^2$, если в R сущесвует вектор w такой, что

а/ $U(V)w=R$

б/ $\rho_k w=0$ при $k<0$, $\rho_0 w=hw$, $zw=cw$.

Вектор w называется вектором старшего веса.

2.Пусть Q - модуль над V. Вектор $u\in Q$ называется <u>особым</u>, если существуют такие числа τ, d, что $\rho_k u=0$, при $k<0$, $p_0 u = \tau u$, $z u = d u$.

3.Пусть $\chi_{h,c}$ -следующий характер V_- : $\chi_{h,c}(p_k)=0$ при $k<0$, $\chi(p_0)=h$, $\chi(z)=c$. Тогда <u>модуль Верма</u> $M(h,c)$ есть модуль над V , индуцированный с характера $\chi_{h,c}$ алгебры V_- .

Как линейное пространство и как N_+ -модуль, $M(h,c)$ изоморфен $\mathcal{U}(N_+)$. В частности, размерность k -ой однородной компоненты $M(h,c)$ равна $p(k)$.

Очевидно, $M(h,c)=\mathcal{U}(V)\otimes_{\mathcal{U}(V_+)}\mathbb{C}$,где $\mathcal{U}(V_+)$ -модуль $\mathbb{C}$ определяется линейной формой $\chi_{h,c}$. Вектор $v=1\otimes 1$ есть вектор старшего веса. Модуль $M(h,c)$ является универсальным объектом среди модулей со старшим весом (h,c) : любой такой модуль имеет вид $M(h,c)/P$, где P - некоторый подмодуль в $M(h,c)$.

Среди подмодулей $M(h,c)$ существует максимальный P_{max} /см. [I2]/. Фактормодуль $M(h,c)/P_{max}$ обозначим через $L(h,c)$. Это единственный неприводимый модуль со старшим весом (h,c) .

Отметим ещё, что z на модуле $M(h,c)$ действует скалярным оператором cE .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I.а/Модуль $M(h,c)$ приводим тогда и только тогда, когда в нём существует особый вектор, отличный от $1\otimes 1$.

б/ Любой подмодуль $M(h,c)$ содержит особый вектор.

в/ Пусть $\mu: M(\ell,c_1)\to M(h,c_2)$- морфизм V-модулей. Тогда $\operatorname{Ker}\mu=0$, $c_1=c_2$, $\ell \geqslant h$.

г/ $\dim \operatorname{Hom}(M(\ell,c), M(h,c)) \leq 1$

д/ Любые два подмодуля в $M(h,c)$ пересекаются.

Пункты а/, б/, в/ очевидны / их доказательство ничем не отличается от доказательства соответствующих конечномерных утверждений, см.,например,[I2],[38] /, доказательство г/ см.[25]. Докажем д/. Пусть M_1, M_2 – подмодули в $M(h,c)$, $v_1 \in M_1$, $v_2 \in M_2$ – особые вектора, пусть их степени однородности соответственно k_1 и k_2. Допустим, что M_1 и M_2 не пересекаются. Тогда /по пункту в/

$$p(n) \geq p(n-k_1)+p(n-k_2) \geqslant 2p(n-k_2) \quad \text{при } k_2 \geq k_1$$

для всех n. Итерируя это неравенство, получаем

$$p(sk_2) \geqslant 2^{s-1}$$

т.е. $p(n)$ имеет экспоненциальный рост. Но это противоречит теореме Харди-Рамануджана $/p(n) \sim e^{\sqrt{n}}$, см., например, [26]/

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Модуль R называется унетаризуемым, если на нём существует положительно определённая эрмитова форма, которая инвариантна относительно подалгебры $V_{\mathbb{R}}$.

$$\langle Qa, b\rangle + \langle a, Qb\rangle = 0 \quad \text{для } Q \in V_{\mathbb{R}}$$

или, что эквивалентно,

$$\langle p_k a, b\rangle = \langle a, p_{-k} b\rangle \qquad \langle z a, b\rangle = \langle a, z b\rangle$$

Если модуль R имеет старший вес (h,c), то, действуя элементами p_0 и z получаем $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

§2. Пространство Фока.

В этом параграфе изложены необходимые результаты об автоморфизмах канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений. Теоремы 2.1,2.2 были обнаружены К.О.Фридрихсом [32] и доказаны И.Сигалом / бозонный случай / и Ф.А.Березиным /фермионный случай/ Большинство фактов, сформулированных в этом параграфе содержится в книге Ф.А.Березина [1] . О представлении Шейла-Вейля см. также [47],[2],[50], [42], о спинорном представлении - [48],[3]. Между спинорным представлением и представлением Вейля существует глубокая аналогия, которая послужила / Ф.А.Березин / одной из главных отправных точек развития теории супералгебр, супермногообразий, супергрупп и т.д.

Разберём сначала бозонный случай. Пусть H - комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим пространство Ω с гауссовой мерой μ - расширение H , соответствующее характеристической функции $e^{-\langle z, z\rangle}$, см.[11] . Пусть z_1 , z_2 , ... - комплексные координаты в H . Пусть $Exp(H)$ - пополнение пространства полиномов от z_1 , z_2 , ... по норме $L^2(\Omega,\mu)$ Пространство $Exp(H)$ "голоморфных функций на H " называется <u>бозонным пространством Фока</u>. Легко видеть, что $Exp(H)=\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k$ - гильбертова прямая сумма пространств $\mathcal{P}_k \simeq S^k H$ полиномов степени k ./Эта реализация пространства Фока обнаружена В.Баргманом и Ф.А.Березиным, см.[2]/

<u>Группой коммутационных соотношений</u> Γ называется группа, элементы которой суть пары (u, c) , $u\in H$, $c\in\mathbb{R}$ с законом умножения

$$(u_1, c_1)(u_2, c_2) = (u_1 + u_2,\ c_1 + c_2 + Im\langle u_1, u_2\rangle)$$

Рассмотрим проективное представление π аддитивной группы H в $Exp(H)$ по формуле

$$(1) \qquad \pi(u)f(z) = f(z+u)e^{-\langle z, u\rangle}e^{-\frac{1}{2}\langle u, u\rangle}$$

Это проективное представление H является обычным представлением её цетнрального расширения - группы Γ / мы его будем также обозначать через π /. Построенное представление группы Γ называется фоковским.

Дадим описание этого представления на уровне алгебры Ли. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ - генератор однопараметрической подгруппы $(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots) \in H$. Тогда

$$(2) \qquad T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)f = \sum_k \left(\alpha_k \partial/\partial z_k - \overline{\alpha_k}\, z_k\right) f$$

Выражение $Im\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть симплектическая форма на H. Пусть $(e_1, e_2 \ldots)$ - базис H, тогда $H_{\mathbb{R}}$ - овеществление H имеет базис $(e_1, e_2, \ldots, ie_1, ie_2 \ldots)$. Форма $Im\langle\cdot,\cdot\rangle$ в этом базисе записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $A \in Sp(H)$, тогда формула ~~определяет~~

$$\sigma(A)(u, c) = (Au, c)$$

определяет автоморфизм $\sigma(A)$ группы Γ. Определим действие Sp на $\hat{\Gamma}$ - множестве неприводимых унитарных представлений группы Γ - по формуле $(A\pi)(h) = \pi(\sigma(A)h)$ где $h \in \Gamma$, $\pi \in \hat{\Gamma}$, $A \in Sp$. Если H конечномерно, то по классической теореме Стоуна-фон Неймана $\pi \in \hat{\Gamma}$ полностью определяется значением на центре /центр Γ состоит из пар вида $(0,c)$ / и, таким образом, $A\pi=\pi$.

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть π - фоковское представление Γ, $A\in Sp$. Для того, чтобы $A\pi=\pi$ необходимо и достаточно, чтобы $A\in Sp_0$.

Пусть $A\in Sp_0$ и $W(A)$ - такой унитарный оператор, что

$$\pi(\sigma(A)k)=W(A)^{-1}\pi(k)W(A)$$

где π - фоковское представление Γ. Операторы $W(A)$ определены однозначно с точностью до умножения на скаляр и

$$W(AB)=\rho(A,B)W(A)W(B)$$

где $|\rho(A,B)|=1$. Итак, $W(A)$ - проективное унитарное представление группы Sp_0. Оно называется <u>представлением Шейла-Вейля</u>. Если H конечномерно, $W(A)$ можно выбрать так, что $\rho(A,B)=\pm 1$, см., например 42. Если $\dim H=\infty$ это становится неверным.

Из конструкции очевидно, что представление Шейла-Вейля продолжается до проективного унитарного представления аффинной группы $Sp_0\ltimes H$ - полупрямого роизведения $Sp_0(H)$ и H, аддитивная группа H при этом действует по формуле (I). Это так называемые не однородные канонические преобразования, см. [I].

Нам понадобятся явные формулы для представления Вейля алгебры Ли sp_0 группы Sp_0. Алгебра Ли sp группы Sp состоит из матриц вида

$$Q=\begin{vmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{vmatrix}$$

где $B=B^t$, $C=C^t$. Алгебра $sp_{\mathbb{C}}$ состоит из комплексных матриц того же вида. Пусть

$$K = \begin{vmatrix} E & iE \\ iE & E \end{vmatrix}$$

Тогда преобразование Кэли $Q \to K^{-1} Q K$ переводит Q в матрицу вида

$$\begin{vmatrix} L & M \\ N & -L^t \end{vmatrix} \qquad M = M^t, \; N = N^t$$

при этом матрицы ~~ихз~~ образа sp удовлетворяют дополнительно условию $L = -\overline{L}^t$, $M = \overline{N}$, а матрицы из sp_0 также: $M, N \in \mathcal{HS}$. Тогда представление Шейла-Вейля на уровне алгебры Ли задаётся формулой

$$T\left(\begin{vmatrix} L & M \\ N & -L^t \end{vmatrix}\right) = \sum l_{ij} z_i \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2} \sum m_{ij} z_i z_j +$$

(3)

$$+ \frac{1}{2} \sum n_{ij} \partial/\partial z_i \, \partial/\partial z_j$$

где l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} - матричные коэффициенты L, M, N.

Эти операторы корректно определены на пространстве конечных линейных комбинаций $\sum \alpha_k v_k$ элементов $v_k \in S^k H$. Если $L = L^*$, $M = N^*$, то оператор T в существенном самосопряжён, см.[1]. Формулы представления $Sp_0(H) \ltimes H$ легко получаются объединением формул [2] и [3].

Пусть $A_1 = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ N_1 & -L_1^t \end{vmatrix}$, $A_2 = \begin{vmatrix} L_2 & M_2 \\ N_2 & -L_2^t \end{vmatrix}$. Тогда

$$(4) \quad [T(A_1), T(A_2)] = T([A_1, A_2]) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(N_2 M_1 - N_1 M_2)$$

Так как $M_i, N_i \in \mathcal{HS}$ последний член корректно определён. В конечномерном случае заменой

$$(5) \quad T'(A) = T(A) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} L$$

коцикл $\frac{1}{2} \operatorname{tr}(N_2 M_1 - N_1 M_2) \in H^2(sp_0, \mathbb{R})$ тривиализуется.

однако в бесконечномерном случае выражение $tr\, L$ не имеет смысла.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы не уточняли, что такое алгебра Ли sp_0. Дело в том, что в содержательных случаях оператор L не является ограниченным. Ниже в §3 встретится случай, когда L будет неограниченным оператором, самосопряжённым в существенном на пространстве $\mathcal{D}$ финитных линейных комбинаций базисных векторов и переводящий $\mathcal{D}$ в себя. В этом случае формула (3) задаёт при $M=N^*$ неограниченный оператор, смамосопряжённый в существенном на пространстве финитных многочленов от переменных z / подробнее см. главу III книги [I], там используется несколько иная, более инвариантная,запись опреаторов (3)/ Формула (4) без дополнительных ограничений / в случае неограничиченых операторов/ имеет лишь формальнний смысл. Однако в ситуации §3 / M и N конечномерны и переводят $\mathcal{D}$ в себя/ она также имеет место. Наконец, во избежание недоразумений, заметим, что t в этом случае обозначает обычное транспонирование матриц /сопряжение относительно ортогональной формы в комплексифицированном пространстве/.

Перейдём к фермионному пространству Фока.

Представлением <u>канонических антикоммутационных соотношений</u> называется множество линейных ограниченых операторов / / в гильбертовом пространстве, удовлетворяющих следующим соотношениям

$$\{a_k, a_j\} = \{a_k^*, a_j^*\} = 0 \tag{6}$$
$$\{a_k, a_l^*\} = \delta_{kl}$$

где $\{A, B\} = AB + BA$ обозначает антикоммутатор.

Рассмотрим грассманову алгебру Λ от бесконечного числа переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ /соотношения $\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$ /. Пусть Λ^k – пространство элементов Λ степени k. Введём в Λ^k скалярное произведение:

1. $\|\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k}\| = 1$ / i_α попарно различны /

2. Непопорпиональные элементы вида $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k}$ попарно ортогональны.

Пусть $\overline{\Lambda_k}$ – пополнение Λ_k по этому скалярному произведению, $\overline{\Lambda} = \bigoplus\limits_{k=0} \overline{\Lambda_k}$ – гильбертова прямая сумма. Тогда операторы

$$(7) \quad a_k \mathcal{P}(\xi) = \xi_k \mathcal{P}(\xi_k) \qquad a_k^* \mathcal{P}(\xi) = \partial/\partial\xi_k \, \mathcal{P}(\xi)$$

задают представление антикоммутационных соотношений. Оно называется <u>фоковским</u>. Пространство $\overline{\Lambda} = \Lambda(H)$, где $H \simeq \overline{\Lambda^1}$ называется <u>фермионным пространством Фока</u>

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $\partial/\partial\xi_k$ определяется следующим образом: пусть $\mathcal{P}(\xi)$ не содержит ξ_k. Тогда

$$\partial/\partial\xi_k \, \mathcal{P}(\xi) = 0, \quad \partial/\partial\xi_k \, \xi_k \mathcal{P}(\xi) = \mathcal{P}(\xi)$$

Введём новые антикоммутирующие переменные

$$(8) \quad \begin{aligned} \omega_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k + a_k^*) \\ \nu_k &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(a_k - a_k^*) \end{aligned}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям клиффордовой алгебры

$$(9) \quad \begin{aligned} &\{\omega_k, \omega_l\} = \{\nu_k, \nu_l\} = 0 \quad \text{при } k \neq l \\ &\{\omega_\alpha, \nu_\beta\} = 0, \quad \nu_k^2 = \omega_k^2 = 1 \end{aligned}$$

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство K с ортонормальным базисом $\omega_1, \omega_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ Преобразование $a_k \to i a_k$, $a_k^* \to -i a_k^*$ индуцирует комплексную структуру в K :

$$I\omega_k = \nu_k \qquad\qquad I\nu_k = -\omega_k$$

Рассмотрим линейный оператор A в K , сохраняющий соотношения (9) . Очевидно, что это эквивалентно $A \in O(K)$. Пусть $\pi(x)$ $(x \in K)$ - фоковское представление антикоммутационных соотношений. Тогда $\pi(Ax)$ - тоже представление антикоммутационных соотношений. Если K конечномерно, то соответствующая клиффордова алгебра изаморфна некоторой полной матричной алгебре / см. [17]/ и несложно показать, что $\pi(Ax) \simeq \pi(x)$.

ТЕОРЕМА 2.2.Пусть $\pi(x)$- фоковское представление антикоммутационных соотношений. Представление $\pi(Ax)$ эквивалентно $\pi(x)$ тогда и только тогда, когда $A \in O_0(K)$.

Пусть $A \in O_0(K)$, $Spin(A)$ - такой оператор в , что

$$\pi(Ax) = Spin(A)^{-1}\pi(x)\, Spin(A)$$

Тогда $Spin(A)$ - унитарное проективное представление группы $O_0(K)$, которое называется <u>спинорным представлением</u>.

Комплексификация алгебры Ли O_0 группы $O_0(K)$ записывается в базисе a_k , a_k^* матрицами вида

$$(10) \quad Q = \begin{vmatrix} L & M \\ N & -L^t \end{vmatrix} \qquad M = -M^t, \quad N = -N^t \qquad N, M \in \mathcal{HS}$$

Матрицы из O_0 образуют ~~к~~ вещественную алгебру матриц вида (10) , удовлетворяющих дополнительно условию $M = \overline{N}$, $L = -\overline{L^t}$. Спинорное представление на уровне алгебры Ли задаётся формулами

$$(11)\quad T(Q)=\sum_{i,j} l_{ij}\,\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}+\frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\,\xi_i\,\xi_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j} n_{ij}\,\frac{\partial}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Нетрудно убедиться, что для спинорного представления имеют место аналоги соотношения (4) и, для конечномерного случая, замены (5). Замечание на стр. 28 также остаётся в силе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показал Н.И.Нессонов группа операторов вида $1+K$, где K компактный, не имеет унитарных представлений.

Глава II. КОНСТРУКЦИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СО СТАРШИМ ВЕСОМ ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ

§3. Бозонные представления.

Рассмотрим пространство C, состоящее из вещественных непрерывных функций f на S^1 таких, что

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$$

Введём в C скалярное произведение по формуле /см.[4]/

$$(2) \quad (f_1, f_2) = -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right| f(\varphi_1) f(\varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2$$

ЛЕММА 3.I./см.[4]/Формула (2) задаёт в C положительно определённое скалярное произведение.

Доказательство. Вычислим

$$(e^{in\varphi}, e^{im\varphi}) = -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right| e^{in\varphi_1} e^{-im\varphi_2}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 =$$

/ делаем замену переменных $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi = \varphi_2$ /

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\psi}{2}\right| e^{in\psi} d\psi = \frac{2\pi^2}{|n|}\, \delta_{n,m}$$

при $n \neq 0$, $m \neq 0$ / последний интеграл берётся по частям/ Отсюда следует, что вектора $\alpha\sqrt{n}\cos(n\varphi)$, $\alpha\sqrt{n}\, \sin(n\varphi)$ /$\alpha = \sqrt{2}\pi$/ образуют в C ортонормальный базис. Его полнота следует из теоремы Вейерштрасса / формула (2) задаёт непрерывное отображение $C \times C \to \mathbb{R}$ в равнмерной метрике /

Обозначим через K пополнение C по скалярному произведению (2). Пусть $Diff_0$ действует в C по формуле

$$(3)\quad T(\psi)f(\varphi)=f(\psi(\varphi))\psi'(\varphi)$$

Отметим, что условие (I) инвариантно относительно действия (3). Рассмотрим преобразование Гильберта в K :

$$(4)\quad Hf(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\,v.p.\int_0^{2\pi} ctg\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)f(\psi)\,d\psi$$

ЛЕММА 3.2. Формула (4) определяет ортогональный оператор в K . При этом $H^2=-1$.

Доказательство. Опреатор H корректно определён формулой (4) на гладких функциях. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\left.\begin{aligned} H\cos(n\varphi)&=\sin(n\varphi)\\ H\sin(n\varphi)&=-\cos(n\varphi)\end{aligned}\right.\quad (\text{при } n>0)$$

Но функции $\alpha\sqrt{n}\cos(n\varphi)$, $\alpha\sqrt{n}\sin(n\varphi)$ образуют ортогональный базис в K . Лемма доказана.

Введём в K комплексную структуру : $If \overset{def}{=} H(f)$

Пусть $\langle f,g\rangle=(f,g)+i(f,H(g))$

ТЕОРЕМА 0.I. Операторы $T(\psi)$ лежат в $Sp_0(K)$.

~~Лемма~~

ЛЕММА 3.3. Операторы $T(\psi)$ лежат в $Sp(K)$.

Доказательство. Докажем, что $T(\psi)$ сохраняет $Im\langle f,g\rangle$.

Пусть

$$P_f(\varphi)=\int_0^{\varphi} f(\psi)\,d\psi$$

Ввиду (I), $P_f(\varphi)$ – корректно определённая функция на S^1, при этом $P_{T(\psi)f}(\varphi)=P_f(\psi(\varphi))$. Заметим, что

$$(6) \qquad Im\langle f, g\rangle = c\int_0^{2\pi} P_f(\varphi)P_g'(\varphi)\,d\varphi$$

/формулу достаточно проверить на базисных векторах $\cos(n\varphi)$, $\sin(n\varphi)$. Но это следует из (2) и (5)/

$$Im\langle T(\psi)f, T(\psi)g\rangle = c\int_0^{2\pi} P_f(\psi(\varphi))P_g'(\psi(\varphi))\,d\varphi =$$

$$= c\int_0^{2\pi} P_f(\psi(\varphi))\,P_g'(\psi(\varphi))\,d\psi(\varphi) = Im\langle f, g\rangle$$

ЛЕММА 3.4. Пусть $g\in Diff_0$. Тогда

$$(T^t(g)T(g)-E)\in \mathcal{HS}(K)$$

Доказательство. Вычислим $((T^t(g)T(g)-E)f, g)$

$$((T^t(g)\,T(g)-E)f, g) = (T(g)f, T(g)g) - (f, g)$$

Вычислим сначала $(T(g)f, T(g)g)=$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right| f(g(\varphi_1))f(g(\varphi_2))g'(\varphi_1)\,g'(\varphi_2)\,d\varphi_1\,d\varphi_2 =$$

Сделаем замену переменных $\psi_1=g(\varphi_1)$, $\psi_2=g(\varphi_2)$, пусть $p(\psi)$ – диффеоморфизм, обратный к $g(\varphi)$.

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{p(\psi_1)-p(\psi_2)}{2}\right| f(\psi_1)\,g(\psi_2)\,d\psi_1\,d\psi_2$$

Таким образом, $\left(\left(T^t(g)T(g)-E\right)f, g\right)=$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\ln\left|\sin\frac{P(\psi_1)-P(\psi_2)}{2}\right|-\ln\left|\sin\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right|\right]f(\psi_1)g(\psi_2)d\psi_1 d\psi_2$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{P(\psi_1)-P(\psi_2)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)}\right|f(\psi_1)g(\psi_2)d\psi_1 d\psi_2$$

Теперь заметим, что функции

$$\frac{\sin\left(\frac{P(\psi_1)-P(\psi_2)}{2}\right)}{P(\psi_1)-P(\psi_2)},\quad \frac{P(\psi_1)-P(\psi_2)}{\psi_1-\psi_2},\quad \frac{\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)}{\psi_1-\psi_2}$$

~~ие~~ в окрестности $\psi_1=\psi_2$ на S^1 бесконечно дифференцируемы и не обращаются в 0. Следовательно

$$K(\psi_1,\psi_2)=\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{P(\psi_1)-P(\psi_2)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)}\right|\in C^\infty(S^1\times S^1)$$

Пусть $K(\psi_1,\psi_2)=\sum a_{nm}e^{in\varphi}e^{-im\varphi}$ – разложение $K(\psi_1,\psi_2)$ в ряд Фурье. Хорошо известно, что a_{nm} убывают на бесконечности быстрее любой степени $\frac{1}{n^2+m^2}$. Пусть $e_n=\alpha\sqrt{|n|}\,e^{in\varphi}$ ортогональный базис. Тогда матричные элементы оператора $T^t(g)T(g)-E$ равны

$$b_{nm}=\left(\left(T^t(g)T(g)-E\right)f, g\right)=\alpha^2\sqrt{|mn|}\,a_{nm}$$

Но числа $\sqrt{|mn|}\,a_{nm}$ тоже быстро убывают и, следовательно, ряд $\sum b_{mn}^2$ сходится. Итак $\left(T^t(g)T(g)-E\right)\in \mathcal{HS}$

Лемма доказана.

Следующая лемма проста и хорошо известна.

ЛЕММА 3.5. Пусть A – обратимый оператор. Следующие условия эквивалентны:

а/ $A \in GL_0$, т.е. A представим в виде $L(1+T)$, где $L \in O$, $T \in \mathcal{HS}$.

б/ $(A^t A - E) \in \mathcal{HS}$

Доказательство. а/ $\Rightarrow$ б/ очевидно.

б/ $\Rightarrow$ а/ . Докажем, что в полярном разложении $A = M(1+R)$, где $M \in O$, $1+R$ – положительный самосопряжённый, имеем $R \in \mathcal{HS}$. В самом деле, $1+R = \sqrt{1+S}$. Если λ_k – собственные числа S, то собственные числа R суть

$$\mu_k = \sqrt{1+\lambda_k} - 1 \qquad |\mu_k| \leq \frac{1}{2}|\lambda_k| + C\lambda_k^2$$

Покажем, что $\sum \mu_k^2 < \infty$

$$\sum \left(\sqrt{1+\lambda_k} - 1\right)^2 \leq \sum \left(\frac{1}{2}|\lambda_k| + C\lambda_k^2\right)$$

Но ряд $\sum \lambda_k^2$ сходится, а при достаточно больших K имеем $\lambda_k^4 < |\lambda_k|^3 < \lambda_k^2$.

ЛЕММА 3.6. Пусть $Q \in Sp(K)$, $Q = AT$ – полярное разложение Q, $A \in O(H)$, T – положительный оператор. Пусть $T - E \in \mathcal{HS}$. Тогда $A \in \mathcal{U}(H)$.

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях Леммы $Q \in Sp_0(H)$

Доказательство. $(\mathcal{D} \in Sp) \Leftrightarrow$

(7)

$$\Leftrightarrow (\mathcal{D}x, I\mathcal{D}y) = (x, Iy) \Leftrightarrow \mathcal{D}^t I \mathcal{D} = I$$

Отсюда получаем $(\mathcal{D}^t I \mathcal{D} = I) \Rightarrow (\mathcal{D}^{-1} I \mathcal{D}^{t-1} = I) \Rightarrow$ $(\mathcal{D}^{t-1} \in Sp) \Rightarrow (\mathcal{D}^t \in Sp)$. Следовательно $Q^t Q \in Sp$

По теореме Гильберта-Шмидта $Q^t Q - E$ / и следовательно $Q^t Q$ / имеет собственный ортогональный базис / теорема Гильберта-Шмидта имеет место и в вещественном гильбертовом пространстве, см. [18]/. Обозначим $Q^t Q$ через $\mathcal{D}$.

Согласно (7) $\mathcal{D}^t I \mathcal{D} = I$. Пусть $\mathcal{D} e_k = \lambda_k e_k$. Тогда

$$\mathcal{D} I e_k = (\mathcal{D} I \mathcal{D}) \mathcal{D}^{-1} e_k = I \mathcal{D}^{-1} e_k = \lambda_k^{-1} e_k$$

Но $\sqrt{\mathcal{D}}\, e_m = \sqrt{\lambda_m}\, e_m$, отсюда $\sqrt{\mathcal{D}}\, I e_k = \sqrt{\lambda_k}^{-1} e_k$

или $\sqrt{\mathcal{D}}\, I \sqrt{\mathcal{D}}\, e_k = I e_k$. Итак $\sqrt{\mathcal{D}} \in Sp$.

Так как $Q \in Sp$, то $A = Q(\sqrt{\mathcal{D}})^{-1}$. Но A ортогонален. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 0.I завершено.

Действие $Diff_0$ в пространстве K имеет два аффинных коцикла

$$(8) \quad c_1(\varphi) = \varphi' - 1 \qquad c_2(\varphi) = \varphi''/\varphi'$$

Формула

$$(9) \quad Z_{\alpha,\beta}(\rho) f(\varphi) = T(\rho) f(\varphi) + \alpha c_1(\rho) + \beta c_2(\rho)$$

задаёт аффинное действие $Diff_0$ на пространстве K / $\rho''/\rho' = d\ln \rho'$, поэтому условие (I) при действии (9) сохраняется /. Таким образом, мы имеем серию вложений $Diff_0$ в $Sp_0 \ltimes K$ и, следовательно, серию унитарных представлений $N_{\alpha,\beta}$ группы $Diff_0$ / см. стр. 26 /.

Вычислим действие $N_{\alpha,\beta}$ на уровне алгебры Ли. Пусть $\mu(\varphi)\partial/\partial\varphi \in Vect$

$$(10) \quad Z'_{\alpha,\beta}\left(\mu(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) f(\varphi) = \left(\mu(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mu'(\varphi)\right) f(\varphi) + \alpha\mu'(\varphi) + \beta\mu''(\varphi)$$

/ где $Z'_{\alpha,\beta}$ – производное действие/. Пусть $V_n = e^{in\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$, $e_k = \sqrt{|k|}\, e^{ik\varphi}$. Тогда линейная часть преобразований (10) принимает в этом базисе вид:

$$(11) \quad T'(V_n) e_k = \left(e^{in\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi} + n e^{in\varphi}\right) e^{ik\varphi}\sqrt{|k|} =$$

$$=\sqrt{|k||n+k|}\ \operatorname{sgn}(n+k)\, e_{n+k}$$

а соответствующий бесконечно малый сдвиг задаётся формулой

$$(12)\qquad P_{\alpha,\beta}(V_n)=\alpha\sqrt{|n|}\,e_n+i\beta|n|^{3/2}e_n$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы находимся в условиях замечания на стр. 28 . Самосопряжённость соответствующих операторов L следует например из того, что вектора e_n для всех них являются аналитическими.

Используя формулы (2) и (3) §2, получаем формулы для $Y_k=N'_{\alpha,\beta}(V_k)$.

$$Y_0=\sum_{k=1}^{\infty} k z_k\frac{\partial}{\partial z_k}$$

$$Y_n=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k(n+k)}\ z_{k+n}\frac{\partial}{\partial z_k}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{j(n-j)}\ z_j z_{n-j}+$$

$$+\sqrt{n}\,(\alpha+i\beta n)z_n\ ,\qquad \text{при}\quad n>0$$

$$Y_{-n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{(k-n)k}\ z_{k-n}\frac{\partial}{\partial z_k}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{j(n-j)}\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_{n-j}}+$$

$$+\sqrt{n}\,(\alpha-i\beta n)\frac{\partial}{\partial z_n}\ ,\qquad \text{при}\quad n>0$$

Теперь заметим, что единичная функция на K есть вектор старшего веса, то есть $Y_{-n}1=0$ при $n>0$. Вычислим h и c . Операторы Y_k задают лишь проективное представление алгебры V, см. (4) § 2.

$$[Y_{-1},Y_1]1=Y_{-1}Y_1 1=Y_{-1}(\alpha+i\beta)z_1=\alpha^2+\beta^2$$

$$[Y_{-2},Y_2]1=Y_{-2}Y_2 1=Y_{-2}\left(\tfrac{1}{2}z_1^2+(\alpha+2i\beta)z_2\right)=$$

$$= \frac{1}{2} + 2(\alpha^2 + 4\beta^2)$$

Но/по формулам (2) §I/

$$[Y_{-1}, Y_1] = Z'_{\alpha,\beta}(2\rho_0)$$

$$[Y_{-2}, Y_2] = Z'_{\alpha,\beta}\left(4\rho_0 + \frac{1}{2} Z\right)$$

Так как $Z'_{\alpha,\beta}(\rho_0) = h$, $Z'_{\alpha,\beta} = c$, мы получаем, что

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ c = 1 + 12\beta^2 \end{cases}$$

Первое утверждение теоремы 0.2 доказано.

§4. Фермионные представления.

Пусть $Diff_0$ действует в вещественном пространстве $L^2(S^1)$ по формуле

$$(1)\quad S'(\psi)f(\varphi)=f(\psi(\varphi))\psi'(\varphi)^{1/2}$$

Операторы $S'(\psi)$ являются ортогональными. Возьмём расширенное пространство $K=L^2(S^1)\oplus\mathbb{R}$, группа $Diff_0$ действует лишь на первое слагаемое / по формуле (I) /. Действие $Diff_0$ в K мы будем обозначать через $S(\psi)$. Введём в K комплексную структуру при помощи оператора I :

$$(2)\quad I(f(\varphi),c)=\left(c+\frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_0^{2\pi}ctg\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)f(\psi)d\psi,\ -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi\right)$$

ТЕОРЕМА 0.3. Операторы $S(\psi)$ лежат в $O_0(K)$.

ЛЕММА 4.I. Следующие условия эквивалентны:

а/ $A\in O_0(K)$

б/ $A\in O(K)$, и в каноническом разложении $A=M+N$ в сумму линейного и антилинейного операторов, $N\in\mathcal{HS}$

в/ $A^tIA-I\in\mathcal{H}S$, $A\in O(K)$

Доказательство. Импликации а/ $\Rightarrow$ б/ и б/ $\Rightarrow$ в/ очевидны.

в/$\Rightarrow$б/. Пусть $A=M+N$ - каноническое разложение A в сумму линейного и антилинейного операторов

$$M=\frac{1}{2}(A+I^{-1}AI),\quad N=\frac{1}{2}(A-I^{-1}AI)$$

Имеем $A^tIA-I\in\mathcal{H}S\Rightarrow$

$$\Rightarrow IA-AI=A(A^tIA-I)\in\mathcal{H}S\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A - I^{-1} A I \in \mathcal{HS} \quad \Rightarrow \quad N \in \mathcal{HS}$$

Доказательство б/ $\Rightarrow$ в/ содержится в [I] стр. I3I–I36.

ЛЕММА 4.2. Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$, $0 \in (\alpha, \beta)$, задана функция $f(x) = \frac{1}{x} + \mu(x)$, где $\mu(x) \in C^\infty[\alpha, \beta]$. Пусть $x = g(y)$ – гладкая замена переменной, $\alpha = g(\gamma)$, $\beta = g(\delta)$, $g(0) = 0$, $g' > 0$. Тогда

$$v.p. \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = v.p. \int_\gamma^\delta f(g(y))\,g'(y)\,dy$$

Доказательство. Существование обоих интегралов очевидно

$$v.p. \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\alpha,\beta] \setminus [-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\gamma,\delta] \setminus [g^{-1}(-\varepsilon),\, g^{-1}(\varepsilon)]} f(g(y))\,g'(y)\,dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{[\gamma,\delta] \setminus [-g^{-1}(\varepsilon),\, g^{-1}(\varepsilon)]} f(g(y))\,g'(y)\,dy + \int_{[g^{-1}(-\varepsilon),\, -g^{-1}(\varepsilon)]} f(g(y))\,g'(y)\,dy \right)$$

Заметим, что подинтегральная функция в последнем интеграле представима в виде $\frac{1}{y} + \nu(y)$, $\nu(y) \in C^\infty$

$$g^{-1}(-\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{g'(0)} + O(\varepsilon^2) \qquad -g^{-1}(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{g'(0)} + O(\varepsilon^2)$$

поэтому последний интеграл стремится к 0.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть $N_\psi = S(\psi)^t I S(\psi)$ Вектора $e_n = (e^{in\varphi}, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\lambda = (0, 1)$ составляют ортонормальный базис в $K_\mathbb{C}$. Нам необходимо доказать, что

$$\sum_{n,m} \langle (N_\psi - I) e_n, e_m \rangle + \sum_n \langle (N_\psi - I) e_n, \lambda \rangle +$$

$$+ \sum_m \langle (N_\psi - I) \lambda, e_m \rangle + \langle (N_\psi - I) \lambda, \lambda \rangle < \infty$$

Но два последних ряда сходятся в виду ограниченности $N_\psi - I$ / операторы $S(\psi)$ и I ортогональны/

$$(N_\psi x, y) = (I\, S(\psi) x,\ S(\psi) y)$$

Простыми выкладками, аналогичными вычислениям в доказательстве Леммы 3.4, получаем

$$(N_\psi(f,0),(g,0)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\left(\frac{\rho(\varphi_1)-\rho(\varphi_2)}{2}\right)\rho'(\varphi_1)^{\frac12}\rho'(\varphi_2)^{\frac12} f(\varphi_1) \times$$

$$\times \overline{g(\varphi_2)}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 + \int_0^{2\pi} f(\varphi_1)\rho'(\varphi_1)^{\frac12} d\varphi_1 \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi_2)\rho'(\varphi_2)^{\frac12} d\varphi_2$$

где $\rho(\varphi)$ - диффеоморфизм, обратный к $\psi(\varphi)$.

$$((N_\psi - I)(f,0),(g,0)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_\psi(\varphi_1,\varphi_2) f(\varphi_1)\overline{g(\varphi_2)}\, d\varphi_1\, d\varphi_2$$

где

$$K_\psi(\varphi_1,\varphi_2) = ctg\left(\frac{\rho(\varphi_1)-\rho(\varphi_2)}{2}\right)\rho'(\varphi_1)^{\frac12}\rho'(\varphi_2)^{\frac12} - ctg\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) + \rho'(\varphi_1)\rho'(\varphi_2$$

Теперь заметим, что

$$M_\psi(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{ctg\left(\frac{\rho(\varphi_1)-\rho(\varphi_2)}{2}\right)\rho'(\varphi_1)\rho'(\varphi_2)}{ctg\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}$$

есть гладкая функция в окрестности $\varphi_1 = \varphi_2$, причём $M_\psi(\varphi,\varphi) = 0$. Следовательно

$$K_\psi(\varphi_1,\varphi_2)=ctg\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\left(M(\varphi_1,\varphi_2)-1\right)+\rho'(\varphi_1)^{\frac{1}{2}}\rho'(\varphi_2)^{\frac{1}{2}}$$

– гладкая функция в окрестности $\varphi_1=\varphi_2$ и, следовательно, $K_\psi(\varphi_1,\varphi_2)\in C^\infty(S^1\times S^1)$.

Итак, коэффициенты Фурье $K_\psi(\varphi_1,\varphi_2)$ быстро убывают и поэтому ряд $\sum\limits_{n,m}\langle(N_\psi-I)e_n,e_m\rangle$ сходится. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь в $Diff_0$ подгруппу G, состоящую из чётных диффеоморфизмов $/g(\varphi+\pi)=g(\varphi)+\pi$ /. Группа G является двулистной накрывающей группы $Diff_0$, $Diff_0\simeq G/\mathbb{Z}_2$ поэтому проективные унитарные представления G являются проективными унитарными представлениями $Diff_0$. Выберем в алгебре Ли группы G базис $W_n=\frac{1}{2}e^{2in\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$. Легко видеть, что

$$[W_n,W_k]=(k-n)W_{k+n}$$

~~Итак~~ Пространство K разлагается в сумму двух инвариантных относительно G и оператора I подпространств $K=K_+\oplus K_-$.

$$K_+=\{(f,\rho):f(\varphi+\pi)=f(\varphi)\}$$

$$K_-=\{(g,0):g(\varphi+\pi)=-g(\varphi)\}$$

Таким образом, мы получаем пару гоморфизмов $M_\pm:G\to O(K_\pm)$ и, следовательно, два унитарных проективных представления $\rho_\pm(g)=Spin(M_\pm(g))$ группы $Diff_0$.

Выберем в $K_{\mathbb{C}}$ базис

$$e_{n/2}=(e^{in\varphi},0)\ \text{при}\ n\in\mathbb{Z}\setminus 0,\quad \boxed{\cancel{e_0^\pm=(0,+1)}}$$

$$e_0^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\mp i)$$

Пусть S – производное представление алгебры Ли группы G в пространстве K :

$$S\left(\mu(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f(\varphi)=\left(\mu(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\mu'(\varphi)\right)f(\varphi)$$

$$S(w_\alpha)e_p=\left(p+\frac{\alpha}{2}\right)e_{p+\alpha}\cdot\lambda_{p,\,p+\alpha}$$

где $\lambda_{k,l}=1$, если $k\neq 0$, $l\neq 0$, и $\lambda_{k,l}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ в противном случае. Оператор I в базисе e_k имеет вид

$$Ie_k=i\,\mathrm{sgn}(k)e_k,\ \text{при } k\neq 0,\quad Ie_0^{\pm}=\pm ie_0$$

Применяя формулы (II) §2 получаем формулы для операторов $y_k=\rho_-'(w_k)$ производного представления ρ_- / $n>0$ /

$$y_0=\sum k\,\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}$$

$$(3)\qquad y_n=\sum_{k\geq 0}\left(k+\frac{n}{2}\right)\xi_{n+k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}+\frac{1}{4}\sum_{\alpha+\beta=n}(\alpha-\beta)\xi_\alpha\xi_\beta$$

$$y_{-n}=\sum_{k\geq n}\left(k-\frac{n}{2}\right)\xi_{k-n}\frac{\partial}{\partial\xi_k}+\frac{1}{4}\sum_{\alpha+\beta=n}(\alpha-\beta)\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}$$

Индекс k здесь пробегает положительные полуцелые числа $/\ \frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots/$

Формулы для ρ_+' в сущности такие же: надо взять формулы (3), в которых индекс k пробегает целые неотрицательные числа и заменить в них

$$\xi_0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_0 \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_0} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial \eta_0}$$

$$\xi_k \to \eta_k \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_k} \to \frac{\partial}{\partial \eta_k} \quad (\text{при } k>0)$$

Тривиальное вычисление, аналогичное вычислению на стр. 39 показывает, что

I. Вектора 1 и ξ_0 являются особыми векторами /см. §I/ в ρ_+ с $h = 1/16$, $c = 1/2$.

2. Вектора 1 и $\xi_{1/2}$ являются особыми векторами в ρ_-, причём вектору 1 соответствует $h=0$, $c = 1/2$, а вектору $\xi_{1/2}$ – $h = \frac{1}{2}$, $c = 1/2$.

Ниже (§7) из совсем иных соображений показано, что в ρ_+ и ρ_- нет других особых векторов и, следовательно

$$(4) \qquad \rho_+ \simeq L(1/16, 1/2) \oplus L(1/16, 1/2)$$

$$(5) \qquad \rho_- \simeq L(0, 1/2) \oplus L(1/2, 1/2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Представление ρ_- реализуется в бесконечномерном аналоге "чётных" спиноров. Разложение (5) соответствует разложению "чётных" спиноров на зеркальные полуспиноры. Конструкция представления ρ_+ фактически использует бесконечномерный аналог "нечётных" спиноров,/см., например,[I7]/.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть в формулах (3) индекс k пробегает значения $\alpha+\mu$, $\beta+\nu$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\mu+\nu = 1$, $\mu \neq 1/2$. Тогда мы получим серию T_μ унитарных представлений V, у которых 1 есть вектор старшего веса $h = \frac{1}{8}(\mu-\nu)^2$, $c=1$

Модули T_μ приводимы и раскладываются в счётную прямую сумму модулей со старшим весом. Соответствующие проективные унитарные представления $Diff_0$ нетрудно построить, рассматривая вместо действия $Diff_0$ на S^1 действие $Diff_0$ на $\mathbb{R}$ /см. §1/. Мы не будем на этом подробнее останавливаться, потому что все представления $Diff_0$, которые можно получить таким образом уже построены в §23/. Заметим лишь, что

$$\lim_{\mu \to \frac{1}{2}} T_\mu = \rho_- \otimes \rho_-$$

$$\lim_{\mu \to 0} T_\mu = \rho_+ \otimes \rho_+$$

Глава III. УНИТАРИЗУЕМЫЕ МОДУЛИ СО СТАРШИМ ВЕСОМ

§5. Форма Шаповалова.

На любом модуле Верма над алгеброй Вирасоро существует и единственна с точностью до пропорциональности инвариантная симметричная билинейная форма. Для модулей Верма над конечномерными полупростыми алгебрами такую форму принято называть <u>формой Шаповалова</u>. Мы сохраним это название и для модулей Верма над алгеброй Вирасоро.

Опишем явную конструкцию / см.,например, [24] ,[27]/

1. Однородные компоненты модуля $M(h,c)$ попарно ортогональны.

2. $\langle P_{\alpha_1} P_{\alpha_2} \ldots P_{\alpha_k} v, P_{\beta_1} P_{\beta_2} \ldots P_{\beta_\ell} v \rangle =$

$$= \langle v, P_{-\alpha_k} \ldots P_{-\alpha_1} P_{\beta_1} P_{\beta_2} \ldots P_{\beta_\ell} v \rangle$$

3. $\langle v, v \rangle = 1$

Если h и c вещественны, матрица этой формы симметрична и вещественна и следовательно на $M(h,c)$ существует эрмитова инвариантная форма Sh. Через Sh_k обозначим ограничение формы Шаповалова Sh на k-ую однородную компоненту модуля $M(h,c)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.I. Ядро формы Sh есть максимальный собственный подмодуль $M(h,c)$.

Доказательство. В силу инвариантности формы Sh её ядро есть подмодуль. Пусть вектор z содержится в некотором подмодуле $L \subset M(h,c)$, пусть $gr(z) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\ell$. Тогда

$$\langle z, P_{\alpha_1} \ldots P_{\alpha_\ell} v \rangle = \langle P_{-\alpha_\ell} \ldots P_{-\alpha_1} z, v \rangle = \langle \alpha v, v \rangle$$

но $v \notin L$, следовательно $\alpha = 0$. Предложение доказано. /см., например, [38] /

Определитель формы Sh_k в базисе $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} v$, $\sum_{\ell=1}^{k} \ell \alpha_\ell = k$ является многочленом от h, c.

ТЕОРЕМА 5:I. /формула Каца/

а/ $$\det{}^2 Sh_k = C \prod_{i=1}^{k} \prod_{j|i} \psi_{j, i/j} (h, c)^{p(k-i)}$$

где $$\psi_{\alpha,\beta}(h,c) = \left(h + \frac{1}{24}(\alpha^2-1)(c-13) + \frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right) \times$$
$$\times \left(h + \frac{1}{24}(\beta^2-1)(c-13) + \frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right) + \frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{16}$$

C - ненулевая константа.

б/ Для существования в $M(h,c)$ особого вектора степени $\leq k$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторых натуральных чисел α, β с $\alpha\beta \leq k$ имело место $\psi_{\alpha,\beta}(h,c) = 0$.

в/ В $M(h,c)$ существует подмодуль, изоморфный $M(h+\ell, c)$ тогда и только тогда, когда существуют натуральные числа $\ell_0 = 0, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$ такие, что $\alpha_j \beta_j = \ell_j - \ell_{j-1}$ и $\psi_{\alpha_j, \beta_j}(h + \ell_j, c) = 0$

Теорема сформулирована в [39], [40] и доказана в [24].

Заметим, что в правой части формулы Каца стоит квадрат некоторого многочлена, т.к. $\psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\beta,\alpha}$

$$\psi_{\alpha,\alpha} = \left(h + \frac{1}{24}(\alpha^2-1)(c-13) + \frac{1}{2}(\alpha^2-1)\right)^2$$

Введём новые обозначения. Пусть $\varphi_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}$ при $\alpha \neq \beta$

$$\varphi_{\alpha,\alpha} = \left(h + \frac{1}{24}(\alpha^2-1)(c-13) + \frac{1}{2}(\alpha^2-1)\right) =$$

(1)
$$= \left(h + \frac{\alpha^2-1}{24}(c-13)\right), \quad \varphi_{\alpha,\alpha}^2 = \psi_{\alpha,\alpha}.$$

Мы видим, что в точках общего положения модули $M(k,c)$ неприводимы. Исследуем свойства кривых $\varphi_{\alpha,\beta}(k,c)=0$

ЛЕММА 5.I.а/ $\varphi_{\alpha,\alpha}$ – семейство ~~кривых~~ прямых, проходящих через точку $k=0$, $c=1$. Ось $c=0$ они пересекают в точках $k=\frac{\alpha^2-1}{24}$, прямую $c=13$ в точках $k=-\frac{\alpha^2-1}{2}$

б/При $\alpha\neq\beta$ $\varphi_{\alpha,\beta}$ представляет из себя гиперболу с центром $c=13$, $k=-\frac{1}{2}(\alpha\beta-1)$ / отметим, что $k<0$/ и асимптотами

$$k+\frac{1}{24}(\alpha^2-1)(c-13)+\frac{1}{2}(\alpha\beta-1)=0$$

$$k+\frac{1}{24}(\beta^2-1)(c-13)+\frac{1}{2}(\alpha\beta-1)=0$$

Эти асимптоты параллельны прямым $\varphi_{\alpha,\alpha}$ и $\varphi_{\beta,\beta}$.

Доказательство леммы очевидно.

ЛЕММА 5.2. а/ Верхняя ветвь гиперболы $\varphi_{\alpha,\beta}$ касается прямой $c=25$ сверху в точке $k=-\frac{(\alpha+\beta)^2}{2\cdot 2}+1$

б/ Нижняя ветвь гиперболы $\varphi_{\alpha,\beta}$ касается прямой $c=1$ снизу в точке $k=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$

/ в частности гиперболы не пересекаются собластью $1<c<25$/

Решим уравнение $\varphi_{\alpha,\beta}=0$ относительно k :

$$k=-\left(\frac{c-13}{24}(\alpha^2+\beta^2-2)+\alpha\beta-1\right)\pm(\alpha^2-\beta^2)\frac{\sqrt{(c-1)(c-25)}}{24}$$

Мы видим, что при $1<c<25$ уравнение не имеет решений. При $c=1$ имеем двукратный корень $k=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$ при $c=25$ – двукратный корень $k=-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2+1$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. / [39] / При $c>1$, $k>0$ модули $M(k,c)$ неприводимы.

Действительно, нижние ветви гипербол не проходят через эту область по Лемме 2б. Верхняя ветвь $\varphi_{\alpha,\beta}$ лежит между лежит между асимптотами, а соответствующий угол между асимптотами целиком содержится в области $c \geq 13$, $h<0$ /см. Лемму Iб/. Наконец $\varphi_{\alpha,\alpha}$ не пересекает область $c>1$, $h>0$ по лемме Iа.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $(h,c)\neq(\frac{n^2}{4},1)$, $n\in\mathbb{Z}$ представления $N_{\alpha,\beta}$ неприводимы.

Это следствие заканчивает доказательство теоремы 0.2. Если же $(h,c)=(\frac{n^2}{4},1)$, то $N_{\alpha,\beta}\simeq\bigoplus_{k\geq 0}\left(\frac{(n+2k)^2}{4},1\right)$/ Оба утверждения следуют из того, что размерности однородных компонент $N_{\alpha,\beta}$ и $M(h,c)$ равны $p(k)$ /

ЛЕММА 5.3. Для любых натуральных α, β, k существует $\varepsilon>0$ такой, что в ε-окрестности точки $h_0=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$ $c_0=1$ гипербола $\varphi_{\alpha+k,\beta+k}$ лежит выше гиперболы $\varphi_{\alpha,\beta}$. /Обе гиперболы касаются в этой точке прямой $c=1$ /

Доказательство. Разрешим уравнение $\varphi_{\gamma,\delta}=0$ относительно h и разложим $c(h)$ в ряд Тейлора в окрестности $h_0=\frac{1}{4}(\gamma-\delta)^2$. Имеем

$$(c-1)=-\frac{96}{(\gamma^2-\delta^2)^2}(h-h_0)^2+O(h-h_0)^3$$

Теперь лемма очевидна.

ЛЕММА 5.4. Точки пересечения $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\varphi_{\gamma,\delta}$ задаются формулами:

$$c_{1,2}=1-\frac{6\left((\alpha\pm\gamma)-(\beta\pm\delta)\right)^2}{(\alpha\pm\gamma)(\beta\pm\delta)}$$

(2)

$$h_{1,2}=\frac{(\gamma\beta-\alpha\delta)^2-\left((\alpha\pm\gamma)-(\beta\pm\delta)\right)^2}{4(\alpha\pm\gamma)(\beta\pm\delta)}$$

/другая пара корней получается перестановкой γ и δ /

В истинности формул (2) проще всего убедиться непосредственной подстановкой k, c в $\varphi_{\alpha,\beta}$ учитывая, что

$$\gamma\beta - \alpha\delta = (\gamma+\alpha)\beta - \alpha(\beta+\delta)$$

ЗАМЕЧАНИЯ к формулам 2 . а/ Две квадрики в $\mathbb{C}P^2$ / двумерное комплексное проективное пространство/ имеют с учётом кратностей 4 точки пересечения. Из формул (2) следует, что все 4 точки пересечения $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\varphi_{\gamma,\delta}$ вещественны.

б/ Наличие точек пересечения на бесконечности эквивалентно наличию у гипербол параллельных асимптот.

в/ (c, k) , отвечающие знаку $+$ в формулах (2) лежат на нижних ветвях гипербол. Следовательно верхние ветви гипербол $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\varphi_{\gamma,\delta}$ имеют не более двух точек пересечения.

г/ В случае $\alpha = \beta$ каждая точка пересечения $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\varphi_{\gamma,\delta}$ выдаётся формулами (2) дважды.

Отметим ещё, что равенство $\varphi_{-\alpha,\beta}(k,c)=0$ при $\alpha>0$, $\beta>0$ тоже имеет прозрачный смысл. Легко видеть, что

$$\varphi_{-\alpha,\beta}(k,c) = \varphi_{\alpha,\beta}(k-\alpha\beta, c)$$

Но это означает, что $M(k-\alpha\beta, c) \supset M(k, c)$

§6. Унитаризуемые модули Верма.

Обозначим через C следующую область на плоскости (h,c)

$$C = \{h>0,\ c\geqslant 1\} \setminus \{h = n^2/4,\ c=1\},\ n\in\mathbb{Z}$$

ТЕОРЕМА §6.I. При $(h,c)\in C$ модуль $M(h,c)$ унитаризуем.

Доказательство. Эрмитовы формы Sh_n при $(h,c)\in K$ невырождены /см. предложение 5.I и следствие I к лемме 5.2./ Далее Sh_n непрерывно зависит от (h,c), поэтому сигнатура Sh_n на C постоянна / так как множество невырожденных квадратичных форм данной сигнатуры открыто/. Поэтому достаточно показать, что хотя бы при одной паре (h,c) модуль $M(h,c)$ унитаризуем. Но такие модули / $N_{\alpha,\beta}$ / построены в §3. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.При $h\geqslant 0$, $c\geqslant 1$ модули $L(h,c)$ унитаризуемы.

Действительно, эти точки содержатся в замыкании области и поэтому на таких $M(h,c)$ форма Шаповалова неотрицательно определена. Но форма на $L(h,c)$, индуцированная с Sh всегда невырождена./см. предложение 5.I/

СЛЕДСТВИЕ 2.

$$Det\ Sh_k = \lambda \prod_{i\leq k}\ \prod_{j|i,\ j^2\leq i} \varphi_{j,\,i/j}^{p(k-i)}(h,c)$$

причём $\lambda>0$

Доказательство. В самом деле мы знаем $Det^2 Sh_k$. Так как $Det\ Sh_k$ есть многочлен от (h,c), нам необходимо вычислить лишь его знак. Но при $(h,c)\in C$ имеем $Det\ Sh_k>0$ /в силу теоремы/. Осталось заметить, что в области C все многочлены $\varphi_{\alpha,\beta}$ положительны.

ЛЕММА 6.I. Пусть $M(h,c)$ унитаризуем. Тогда $h>0$.

В самом деле, $\varphi_{1,1}=h$, поэтому при $h<0$ имеем $Det\, Sh_1<0$

Пусть $k\geq 2$, $0<\ell<k$ - целые числа. Обозначим через $\alpha(k,\ell)$, $\beta(k,\ell)$ пару целых чисел, таких что

I. $\alpha(k,\ell)-\beta(k,\ell)=\ell$

2. $\alpha(k,\ell)\beta(k,\ell)\leq k<(\alpha(k,\ell)+1)(\beta(k,\ell)+1)$

Пусть $\varphi^{+}_{\alpha,\beta}$ - область на плоскости (h,c), где $\varphi_{\alpha,\beta}>0$

Пусть $\sum_k=\bigcap\limits_{\alpha\beta\leq k}\varphi^{+}_{\alpha,\beta}$. Зададим на каждой гиперболе ориентацию /на нижней ветви/. Положительным будем считать направление, соответствующее касательному вектору $(1,0)$ в точке $(\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2),1)$ Соответственно приобретают смысл слова "слева" по гиперболе и"справа" по гиперболе $\varphi_{\alpha,\beta}$. Мы будем говорить, что (h',c') лежит внутри гиперболы, если (h',c') внутри нижней ветви гиперболы/ $\varphi_{\alpha,\beta}(h,c)<0$, $c<1$ /

ЛЕММА 6.2. Область $\sum_k$ связна и ограничена снизу криволинейной ломаной L_k следующего вида:

I. На отрезке $[0,1/4]$ L_k состоит из отрезка прямой $\varphi_{\alpha(k,0),\beta(k,0)}$ и отрезка гиперболы $\varphi_{\alpha(k,1),\beta(k,1)}$.

2.На отрезке $[\frac{1}{4}(\ell-1)^2,\frac{1}{4}\ell^2]$ при $\ell\leq k-1$ ломаная состоит из отрезка гиперболы $\varphi_{\alpha(k,\ell-1),\beta(k,\ell-1)}$ и отрезка гиперболы $\varphi_{\alpha(k,\ell),\beta(k,\ell)}$

3. На луче $[\frac{1}{4}(k-1)^2,\infty]$ ломаная L_k состоит из луча гиперболы $\varphi_{k-1,1}$, уходящего на бесконечность.

/см. рис.3б/

Доказательство. Напомним, что согласно Лемме 5.3. в малой окрестности точек $\frac{1}{4}\ell^2$ ломаная L_k устроена указанным

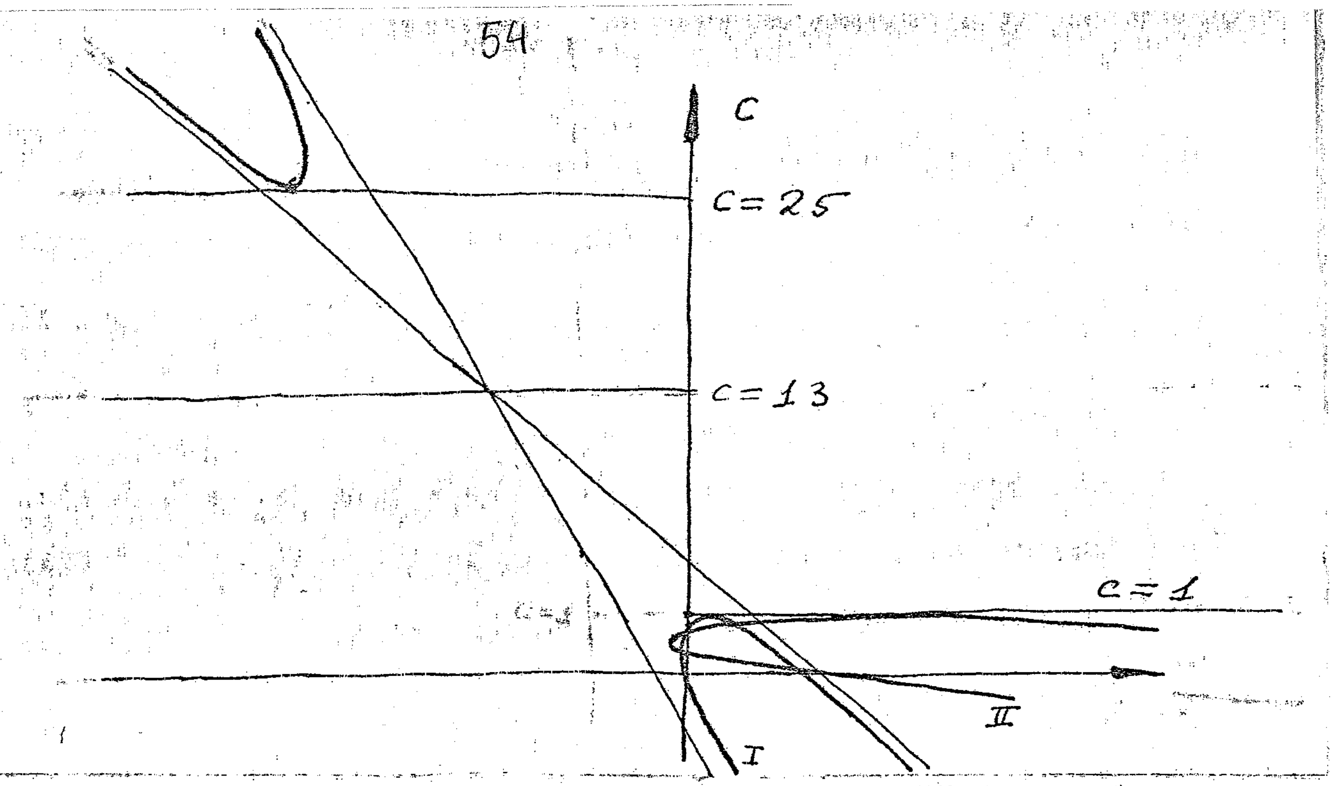


Рис.3а. К леммам 5.I,5.2 . Положение гиперболы II довольно типично.

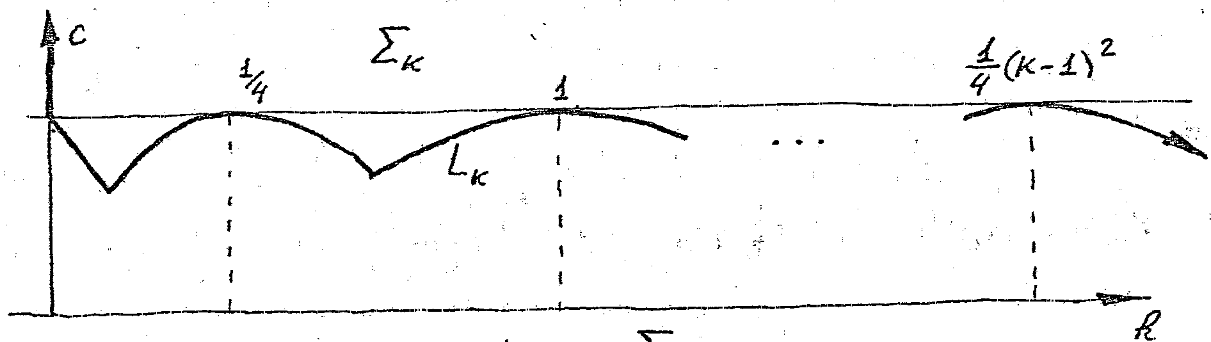


Рис.3б. К лемме 6.2 . Вид области Σ_k

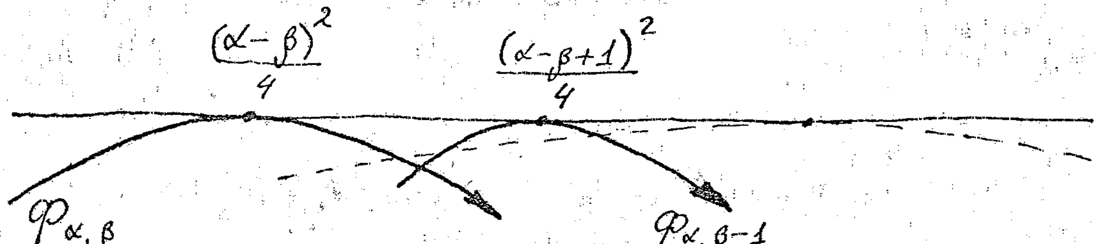


Рис.3в. К лемме 6.2 . Ситуация, отмеченная пунктиром невозможна.

образом.

Доказательство мы быдем вести по индукции. При $K=2$ лемма очевидна. Пусть она доказана при $K=n$, пусть $\alpha\beta=k+1$. Разберём 4 случая.

I. $\alpha-\beta=\ell>1,\ \beta\neq 1,\ \alpha\beta=k+1$

а//"Выяснение ситуации на левом луче $\varphi_{\alpha,\beta}$ "/. Имеем $\alpha(k,\ell-1)=\alpha-1,\ \beta(k,\ell-1)=\beta$. Одна из точек пересечения $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\varphi_{\alpha-1,\beta}$ лежит на бесконечности, другой соответствует $c\geqslant 25$. Исследуем положение двух оставшихся точек.

$$h_1=\frac{(\beta^2-\alpha^2+\alpha)^2-1}{4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)} \qquad c=1-\frac{6}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}$$

$$h_1=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)}{4}-\frac{\beta^2-1}{4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}$$

Второй член последнего выражения меньше $1/8$, поэтому

$$\frac{1}{4}(\alpha-\beta-1)^2<h_1<\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$$

$$h_2=\frac{\beta^2-(2\alpha-2\beta-1)^2}{4(2\alpha-1)2\beta} \qquad c_2=1-\frac{6}{(2\alpha-1)2\beta}$$

Ясно, что отрезок гиперболы $\varphi_{\alpha,\beta}$ между (h_1,c_1) и (h_2,c_2) целиком лежит внутри $\mathbb{R}^2\setminus\Sigma_k$. Теперь заметим, что точка (h_2,c_2) лежит ниже прямой

$$\varphi_{\beta,1}=h+\frac{c-1}{24}(\beta^2-1)$$

В самом деле

$$h_2+\frac{c_2-1}{24}(\beta^2-1)=\frac{1-(2\alpha-2\beta-1)^2}{4(2\alpha-1)2\beta}<0$$

так как $\alpha\geqslant\beta-2$. Прямая $\varphi_{\beta,1}$ и гипербола $\varphi_{\alpha,\beta}$ имеют точку пересечения на бесконечности и точку пересечения между (h_2,c_2) и $\left(\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2,1\right)\in\varphi_{\alpha,\beta}$ / указанные две точки лежат по разные стороны от $\varphi_{\beta,1}$/. Следовательно луч гиперболы $\varphi_{\alpha,\beta}$ левее точки (h_2, c_2) целиком лежит ниже $\varphi_{\beta,1}$ и содержится в $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$. Тем самым весь левый луч гиперболы $\varphi_{\alpha,\beta}$ с началом в (h_1, c_1) лежит в $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$.

б/Имеем $\alpha(k, l+1) = \alpha$, $\beta(k, l+1) = \beta - 1$. Гиперболы $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\varphi_{\alpha,\beta-1}$ имеют одну точку пересечения на бесконечности и одну точку пересечения в области $c \geqslant 25$. Правые асимптоты $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\varphi_{\alpha,\beta-1}$ параллельны, причём асимптота $\varphi_{\alpha,\beta}$ лежит левее. Поэтому правее $\left(\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2, 0\right)$ гипербола $\varphi_{\alpha,\beta}$ пересекается с $\varphi_{\alpha,\beta-1}$ нечётное число раз/с учётом кратностей/. Следовательно такая точка пересечения одна

$$h = \frac{(\alpha^2 - \beta^2 + \beta)^2 - 1}{4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)} \qquad c = 1 - \frac{6}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}$$

Точно так же, как в Iа

$$\frac{(\alpha-\beta)^2}{4} < h < \frac{(\alpha-\beta+1)^2}{4}$$

и, следовательно, правый луч $\varphi_{\alpha,\beta}$ с началом в (h, c) лежит внутри $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$.

Таким образом, мы выяснили, как изменяется граница Σ_k при переходе к $\Sigma_k \cap \varphi^+_{\alpha,\beta}$ ./при указанных значениях α и β /

Разбор трёх остальных случаев, в сущности, аналогичен

2/ $\alpha = \beta$. Тогда $\alpha(n,1) = \alpha$, $\beta(n,1) = \alpha - 1$. Прямая $\varphi_{\alpha,\alpha}$ и гипербола $\varphi_{\alpha,\alpha-1}$ имеют точку пересечения на бесконечности, поэтому в конечной области у них лишь одна точка пересечения

$$h_0 = \frac{\alpha^2 - 1}{8\alpha(2\alpha-1)} \qquad c_0 = 1 - \frac{3}{\alpha(2\alpha-1)}$$

$h_0 < \frac{1}{4}$, при $h > h_0$ прямая $\varphi_{\alpha,\alpha}$ лежит ниже гиперболы $\varphi_{\alpha,\alpha-1}$ и, следовательно, внутри облатсти $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$.

3/ $\beta = \alpha - 1$. Тогда $\alpha(k,0) = \beta(k,0) = \alpha - 1$. В точности те же вычисления, что и в случае 2/ показывают, что $\varphi_{\alpha-1,\alpha-1}$ и

$\varphi_{\alpha,\alpha-1}$ имеют единственную точку пересечения, при этом $k_0\in(0,\frac{1}{4})$ и левее этой точки $\varphi_{\alpha,\alpha-1}$ лежит в $\mathbb{R}^2\setminus\Sigma_k$.

Исследование ситуации справа от точки $(\frac{1}{4},1)$ фактически проведено в п. Іб/

4. $\beta=1$, $\alpha=k$. Тогда $\alpha(k,k-2)=k-1$, $\beta(k,k-2)=1$ То же вассуждение, что и в п.Іб показывает, что $\varphi_{k-1,1}$ пересекается с $\varphi_{k,1}$ правее точки $\frac{(k-2)^2}{4}$ ровно один раз, при этом $\frac{1}{4}(k-2)^2\le k\le\frac{1}{4}(k-1)^2$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(k,c)\in\Sigma_{k-1}\setminus\Sigma_k$. Тогда

$$Det_1\, Sh_k(k,c)\le 0$$

Доказательство. Одновременное выполнение равенств

$$\alpha\beta=\gamma\delta=n,\quad \ell=\alpha-\beta=\gamma-\delta+1\quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta\in N)$$

невозможно. Действительно, это влечёт

$$\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)(\beta-\delta)=-1$$

Но левая часть этого равенства либо равна нулю, либо по модулю больше 1. Поэтому при $k=n$ появление двух "новых"гипербол на отрезке $\left[\frac{1}{4}\ell^2,\ \frac{1}{4}(\ell+1)^2\right]$ невозможно.

Следовательно в каждой точке $\Sigma_{k-1}\setminus\Sigma_k$ из семейства многочленов $\varphi_{\alpha,\beta}$ / $\alpha\beta=k$ / неположителен в точности один многочлен. Но при $\gamma\delta<k$ имеем $\varphi_{\gamma,\delta}(k,c)>0$. Поэтому $Det_k(k,c)\le 0$. Следствие Леммы 6.2 доказано.

Осталось заметить, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\Sigma_k\subset\bigcap_{\alpha=1}^{\infty}\varphi^{+}_{\alpha,\alpha}\subset\{k>0,\ c\ge 1\}$$

В точках $(h,c)=(\frac{n^2}{4},1)$ форма Шаповалова вырождена. Тем самым доказана

Теорема Z.6.2. Если $M(h,c)$ унитаризуем, то $(h,c)\in C$ /тем самым доказана Теорема 0.5/

§7. Вырожденные модули.

В этом параграфе $M(h,c)$ будет отождествляться с $U(N_+)$. Соответственно во всех модулях $M(h,c)$ введена единая система координат, в которой действие операторов из V_- варьируется.

Фиксируем α,β и рассмотрим семейство модулей $M(h,c)$ таких, что $\Phi_{\alpha,\beta}(h,c)=0$, $c\leq 1$. Каждый такой модуль содержит особый вектор на уровне $n=\alpha\beta$, т.е. $M(h,c)\supset M(h+n,c)$. Рассмотрим в $M(h,c)/M(h+n,c)$ форму Sh', индуцированную Sh /см. Предложение 5.I/. Пусть $k>0$ удовлетворяет условиям:

I. При $\{\gamma,\delta\}\neq\{\alpha,\beta\}$, $\gamma\delta\leq n+k$ имеем $\Phi_{\gamma,\delta}(h,c)\neq 0$

2. $\Phi_{\gamma,\delta}(h+n,c)\neq 0$ при $\gamma\delta\leq k$

ЛЕММА 7.I. При сформулированных выше предположениях

$$Det\, Sh'_k=\frac{\prod_{\gamma\delta\leq n+k,\ \gamma\leq\delta,\ \{\gamma,\delta\}\neq\{\alpha,\beta\}}\Phi_{\gamma,\delta}(h,c)^{P(n+k-\gamma\delta)}}{\lambda^{P(k)}\,Det\, Sh_k(h+n,c)}\cdot\rho_k$$

где λ не зависит от k, $\rho_k>0$.

Доказательство. Из I и 2 следует, что $M(h,c)$ не содержит особых векторов в однородных компонентах степени $\leq(n+k)$, за исключением вектора старшего веса модуля $M(h+n,c)$

Пусть (μ,ν) – вектор, трансверсальный к кривой $\Phi_{\alpha,\beta}=0$ в точке (h,c). Рассмотрим семейство модулей $M(h+\mu t,c+\nu t)$ при малых $|t|$. Тогда форма Шаповалова вырождена ~~их~~ лишь при $t=0$. Пусть w – вектор, который при $t=0$ является особым, $\langle w,w\rangle=\lambda t+O(t^2)$. В самом деле, если бы $\langle w,w\rangle(t)$ имело бы второй порядок малости, то очевидно /см., например, ниже рассуждение с определителем/ такой же порядок малости имел бы и $Det\, Sh_k$. Противоречие.

Пусть $X_1,\dots,X_{p(k)}$ – базис k-ой однородной компоненты $M(h+n,c)$, причём X_i имеют вид $\rho_1^{\alpha_{i1}}\rho_2^{\alpha_{i2}}\dots\rho_k^{\alpha_{ik}}W$ $\sum_\ell \alpha_{i\ell}\ell=0$. Пусть $y_1,\dots,y_m$ дополняют этот базис до базиса $(n+k)$-ой однордной компоненты $M(h,c)$. Заметим, что

$$(1)\quad \langle x_i,x_j\rangle(t)=Q(x_i,x_j)\lambda t+O(t^2)$$

где $Q(x_i,x_j)$ – значение формы Шаповалова модуля $M(h+n,c)$ на векторах x_i, x_j. В самом деле $\langle x_i,x_j\rangle(0)=0$

$$\langle \rho_1^{\alpha_{i1}}\rho_2^{\alpha_{i2}}\dots\rho_k^{\alpha_{ik}}W,\ \rho_1^{\alpha_{j1}}\rho_2^{\alpha_{j2}}\dots\rho_k^{\alpha_{jk}}W\rangle=$$

/ пусть, для определённости $\alpha_{i1}\neq 0$ /

$$=\langle \rho_1^{\alpha_{i1}-1}\rho_2^{\alpha_{i2}}\dots\rho_k^{\alpha_{ik}}W,\ \rho_{-1}\rho_1^{\alpha_{j1}}\dots\rho_k^{\alpha_{jk}}W\rangle$$

Теперь заметим, что $\rho_{-1}X_j(0)\in M(h+n,c)$ следовательно $\rho_{-1}X_j(t)=Z+Qt+O(t^2)$, где $Z\in M(h+n,c)$. Но

$$\langle \rho_1^{\alpha_{i1}-1}\dots\rho_k^{\alpha_{ik}}W,\ Q\rangle=0 \qquad \text{при } t=0$$

поэтому

$$\langle x_1,x_2\rangle(t)=\langle \rho_1^{\alpha_{i1}-1}\dots\rho_k^{\alpha_{ik}},Z\rangle+O(t^2)$$

Продолжая этот процесс, получаем (I). Теперь вычислим

$$Det\, Sh_{n+k}(t)=\left|\begin{array}{c|c}\langle x_i,x_j\rangle & \langle x_i,y_\ell\rangle\\ \hline \langle y_k,x_j\rangle & \langle y_k,y_j\rangle\end{array}\right|$$

$$\langle x_i,x_j\rangle=Q(x_i,x_j)\lambda t+O(t^2)$$

$$\langle x_i,y_\ell\rangle(t)=O(t)$$

отсюда

$$\operatorname{Det} Sh_{n+k}(t) = \det Sh_k(h+n, c)\, \lambda^{P(k)} t^{P(k)} \times$$

$$\times \det |\langle y_i, y_j \rangle| + O(t^{P(k)+1})$$

Осталось заметить, что $\det Sh_k \neq 0$, а $\det|\langle y_i, y_j\rangle| = \operatorname{Det} Sh'_{n\ldots}$

Если вектор направлен так, что $\partial_{(\mu,\nu)} \varphi_{\alpha,\beta} > 0$, то мы получаем требуемое утверждение. Константы P_k не имеют инвариантного смысла: они зависят от выбора базиса, однако знак ~~кадрат~~ оределителя квадратичной формы инвариантно определён. Лемма доказана.

Рассмотрим открытый луч гиперболы $\varphi_{p,q} = 0$ справа от точки касания с прямой $c = 1$. Заметим, что если (h_0, c_0) точка на этом луче, лежащая правее точки пересечения этого луча с левым лучом гиперболы $\varphi_{p-q+2,1}$, то $Sh'(h_0, c_0)$ индефинитна. Правый луч $\varphi_{p,q}$ однозначно параметризуется координатой $c \in (1, -\infty)$.

Будем по очереди строить кривые $\varphi_{\alpha,\beta}$ с $\alpha\beta = 1, 2, 3, \ldots$

ЛЕММА 7.2. Первая точка пересечения $\varphi_{p,q}$ с $\varphi_{\alpha,\beta}$ лежащая внутри интервала $c \in \left(1, 1 - \frac{6}{z(z-1)}\right)$ есть $c = 1 - \frac{6}{z(z+1)}$ причём $\alpha = z - q + 1$, $\beta = z - p$ $(p \geq q)$

~~ЛЕММА~~. Доказательство. Случай I. $\alpha - \beta > p - q$. Тогда

$$c = 13 - 6\left(\frac{\alpha+q}{p+\beta} + \frac{\beta+p}{\alpha+q}\right)$$

где $\frac{\alpha+q}{\beta+p} > 1$. Как известно $x + \frac{1}{x}$ имеет единственный минимум при $x = 1$. Следовательно мы имеем следующую целочисленную задачу на минимум

$$\min_{\alpha,\beta} \frac{\alpha+q}{\beta+p}, \quad \alpha, \beta \in N, \quad \frac{\alpha+q}{\beta+p} > 1$$

$$\alpha\beta < (z-q+1)(z-p)$$

/см. рис. 4/. Линии уровня функции $\frac{\alpha+q}{\beta+p}$ от переменных α, β суть пучок прямых, проходящих через $(-p, -q)$. Очевидно, что минимум достигается при $\alpha = z-q$, $\beta = z-p-1$ что соответствует точке $c = 1 - \frac{6}{z(z-1)}$

Случай 2. $|\alpha-\beta| < p-q$. Тогда

$$c = 13 - 6\left(\frac{\beta-q}{\alpha-p} + \frac{\alpha-p}{\beta-q}\right)$$

Мы для определённости будем считать, что $\alpha > \beta$. Тогда $\alpha-p < \beta-q$. Мы снова имеем задачу на минимум:

$$\max \frac{\alpha-p}{\beta-q}, \quad \alpha, \beta \in N, \quad \frac{\alpha-p}{\beta-q} < 1$$

$$\alpha\beta < (z-q+1)(z-p), \quad \alpha > p, \; \beta > q$$

Получаем $\alpha = z-q-1$, $\beta = z-p$

$$c = 1 - \frac{6}{(z-p-q-1)(z-p-q)}$$

Но эта точка лежит вне интервала $\left(1, 1-\frac{6}{z(z-1)}\right)$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. Первая точка пересечения $\varphi_{p,q}$ с $\varphi_{\alpha,\beta}$, лежащая на интервале $\left(1, 1-\frac{6}{z(z-1)}\right)$ при $z > p$ есть $1 - \frac{6}{z(z+1)}$ причём $\alpha = z+p$, $\beta = z+q+1$.

Доказательство. Разберём случай $-\beta+\alpha > p+q$

$$c = 13 - 6\left(\frac{\alpha-p}{\beta+q} + \frac{\beta+q}{\alpha-p}\right)$$

Необходимо найти $\min \frac{\alpha-p}{\beta+q}$ при

$$\frac{\alpha-p}{\beta+q} > 1, \quad \alpha > \beta,$$

Получаем $\alpha = z+p$, $\beta = z-q-1$. Случай $\alpha-\beta < p+q$ разбирается аналогично.

ЛЕММА 8.4. Пусть (h, c) принадлежит правому лучу гиперболы $\varphi_{p,q}$, причём $c \in \left(1, 1-\frac{6}{z(z-1)}\right)$, $\ell<(z-q+1)(z-p)$

Тогда $Det\, Sh'_\ell(h, c)>0$

Доказательство. I/ При $\ell<pq$ данный участок гиперболы $\varphi_{p,q}$ лежит в области Σ_ℓ, поэтому утверждение очевидно /см. Лемму 6.2/

2/ При $\ell=pq$ наш участок гиперболы лежит на границе области Σ_ℓ, поэтому форма Sh_ℓ положительно полуопределена. Но $\dim Ker\, Sh_\ell=1$, поэтому форма Sh'_ℓ положительно определена. Но тогда λ из Леммы 7.I положительно.

3/ При $\ell<(z-q+1)(z-p)$ ни одна гипербола $\varphi_{\alpha,\beta}\ (\alpha\beta\le\ell)$ не пересекает / Лемма 7.2 / $\left(1, 1-\frac{6}{z(z-1)}\right)$. Покажем, что в подмодуле $M(h+pq, c)$ при $pq+\omega\le\ell$ нет особых векторов степени ω. Действительно, по Лемме 7.3 особый вектор может появиться лишь на уровне

$$(z+p)(z-q-1)+pq>(z-p)(z-q+1)$$

Таким образом, в нашей ситуации применима Лемма 7.I.

4/ Итак, согласно 3/ и 2/

$$\operatorname{sgn} Det\, Sh'_\ell=\operatorname{sgn}\prod_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\beta\le\ell,\ \{\alpha,\beta\}=\{p,q\}\\ \alpha\ge\beta}}\varphi_{\alpha,\beta}^{p(\ell-\alpha\beta)}(h,c)\Big/\prod_{\substack{\gamma,\delta\\ \gamma\delta\le\ell-pq\\ \gamma\ge\delta}}\varphi_{\gamma,\delta}^{p(\ell-pq-\alpha\beta)}(h,c)$$

Но по лемме 5.3 $\varphi_{\alpha,\beta}(h,c)$ может быть отрицательно лишь при $\alpha=p+\omega$, $\beta=q+\omega$ / согласно лемме 7.2 все остальные сомножители в разложении $Det\, Sh_\ell$ положительны/. Тогда

$$\alpha\beta-pq=\omega(\omega+p+q)$$

Это означает, что гипербола $\varphi_{\omega+p+q,\omega}$ касается прямой $c=1$ в той же точке, что $\varphi_{-p,q}$ и что множитель $\varphi_{\omega+p+q,\omega}$ появляется в знаменателе при том же ℓ, при котором $\varphi_{p+\omega,q+\omega}$ появляется в ~~знаменателе~~ числителе. Но это, в свою очередь, означает, что $\varphi_{\omega+p+q,\omega}$ входит в знаменатель в той же степени, в которой $\varphi_{\omega+p,\omega+q}$ входит в числитель. Но других отрицательных сомножителей в знаменателе нет согласно Лемме7.3 / Отрицательность $\varphi_{\omega+p+q,\omega}(h,c)$ следует из Леммы 5.3/

Таким образом доказано, что $\mathrm{Det}\, Sh'_\ell > 0$

ЛЕММА 7.5. Рассмотрим интервал правого луча гиперболы $\varphi_{p,q}$: $c \in \left(1-\frac{6}{z(z+1)}, 1-\frac{6}{(z-1)z}\right)$. Тогда $\mathrm{Det}\, Sh'_{(z-q+1)(z-p)}(h,c) < 0$

Доказательство. В точке $c=1-\frac{6}{z(z+1)}$ имеем $\mathrm{Det}=0$ / Лемма 7.2. В модуле $M(h,c)$ появляется ещё один особый вектор, причём он лежит вне подмодуля $M(h+pq,c)$, см.[25]/ Но $\mathrm{Det}\, Sh'$ есть аналитическая функция от (h,c), причём ноль в точке $c=1-\frac{6}{z(z+1)}$ имеет первый порядок. Поэтому $\mathrm{Det}\, Sh'_{(z-q+1)(z-p)}$ при $c=1-\frac{6}{z(z+1)}$ меняет знак. Но при $c<1-\frac{6}{z(z+1)}$ согласно Лемме 7.4 $\mathrm{Det}\, Sh'_{(z-q+1)(z-p)} > 0$

ЛЕММА 7.6. Рассмотрим интервал левого луча гиперболы $\varphi_{p,q}$: $I=\left(1-\frac{6}{z(z+1)}, 1-\frac{6}{z(z-1)}\right)$. Тогда модуль $L(h,c)$ при $(h,c)\in I$ не унитаризуем.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство Леммы 7.5. Отметим, что мы получили в точности тот же набор исключительных точек, что и в лемме 7.5.

Из лемм 7.5 и 7.6 непосредственно следунт

ТЕОРЕМА 7.I. ~~Теорема~~ Если модуль $L(h,c)$ унитаризуем, то выполнено одно из двух условий

I. $h \geq 0,\ c \geq 1$.

2. $c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$, $p \geq 2$

$$h = \frac{n^2-1}{4p(p+1)} \text{, где } n = \alpha p - \beta(p+1),\ 1 \leq \alpha \leq p,\ 1 \leq \beta \leq p-1$$

СЛЕДСТВИЕ. Выполнены равенства (4) и (5) из §4.

Доказательство. Допустим, что в ρ_+ или ρ_- существуют другие особые вектора. Но тогда им соответствует $h \geq 1$, $c = \frac{1}{2}$ а такие $L(h,c)$ не могут быть унитарными.

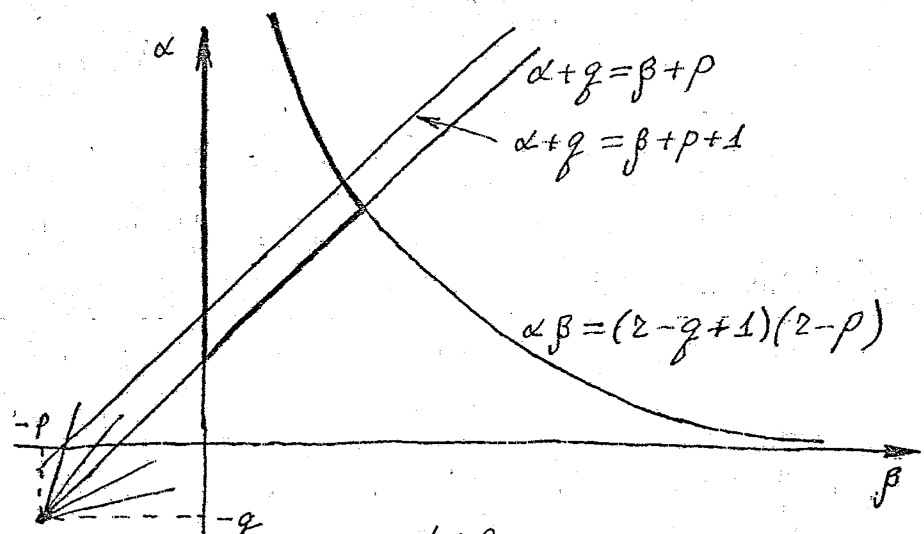


Рис. 4а. Линии уровня $\dfrac{\alpha+q}{\beta+p}$ – пучок прямых, проходящих через $(-p, -q)$ /к Лемме 7.2 /

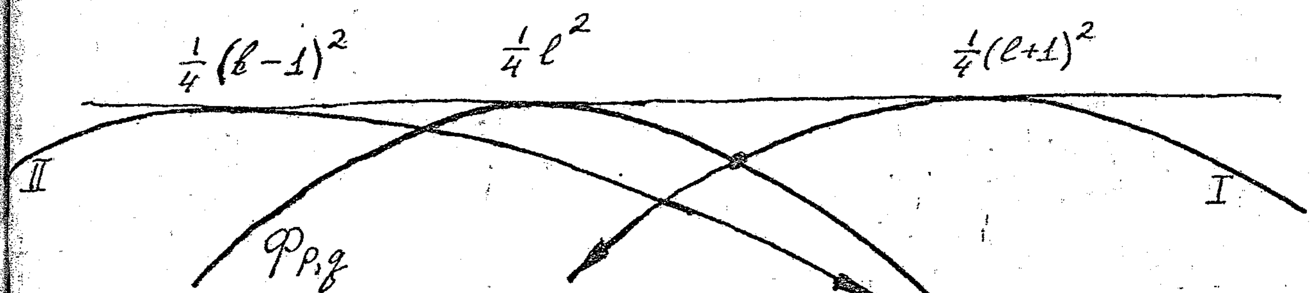


Рис. 4.б. К лемме 7.2. "Догоняющая" гипербола II /см. Случай -2/ пересекает правый луч $\varphi_{p,q}$ ниже, чем "встречная" гипербола I. /см. случай I/

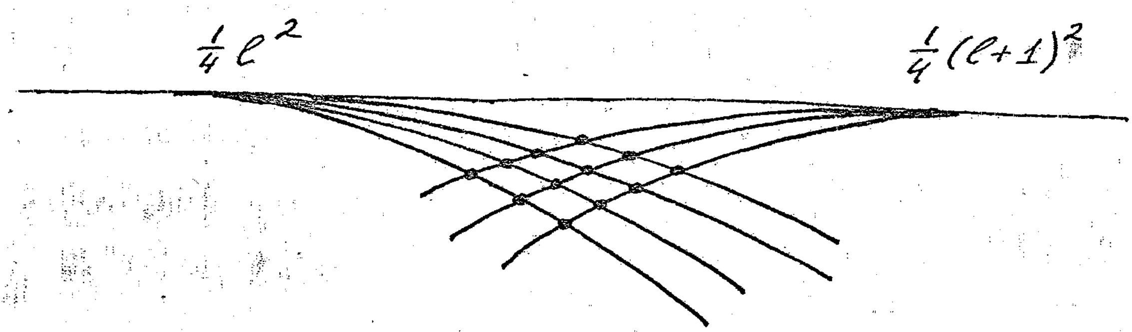


Рис.4в. К теореме 7.I. Исключительные точки должны лежать на пересечении "соседних" пучков гипербол.

ЛИТЕРАТУРА

I.Березин Ф.А.Метод вторичного квантования. М.:Наука,1965.

2.Березин Ф.А., Минлос Р.А.,Фаддеев Л.Д. Квантовая механика с большим числом степеней свободы.- Труды IУ Всес. матем. съезда 1961г., т.II, М.: Наука, 1964, с.532-540.

3.Вершик А.М. Метагональная и метаплектическая бесконечномерные группы. I.Общие понятия и метагональная группа.- Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, т.123, с.3-35.

4.Вершик А.М., Гельфанд И.М., Граев М.И., Представления группы $SL_2(R)$, где R - кольцо функций.-УМН, 1973, т.28.,вып.5, с.83-128.

5.Вершик А.М., Гельфанд И.М., Граев М.И. Представления групп диффеоморфизмов.- УМН, 1975, т.30, вып.6,с.3-35.

6.Вершик А.М.,Карпушев С.И. Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условные положительно определённые функции.- Матем.сб., 1982, т.119, №4,с.521-533.

7.Гельфанд И.М., Граев М.И. Квадратные корни из квазирегулярного представления группы $SL_2(k)$.- Функц. анализ и прилож., 1975, т.9, вып.2,с.64-66.

8.Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий-Шапиро И.И. Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.

9.Гельфанд И.М., Фукс Д.Б. Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности.- Функц.анализ и прилож., 1968, т.2, вып.4 с.92-93.

10.Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщённые функции и действия над ними. М.:Наука, 1958.

11.Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах.М.:Мир, 1979.

I2.Диксмье Ж. Универсальные обёртывающие алгебры. М.:Мир,I978.

I3.Исмагилов Р.С. Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности.- Функц.анализ и прилож., I97I, т.5, вып.3, с.45-53.

I4.Исмагилов Р.С. Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов компактного многообразия.- Функц. анализ и прилож.,I972, т.6, вып.I, с.79-80.

I5.Кириллов А.А. Унитарные представления группы диффеоморфизмов и некоторых её подгрупп. Препринт ИПМ №82, I974.

I6.Кириллов А.А. Орбиты группы диффеоморфизмов окружности и локальные суперапгебры Ли.- Функц. анализ и прилож., I98I, т.I5, вып.2, с.75-76.

I7.Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.:Наука,I978.

I8.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:Наука, I98I.

I9.Неретин Ю.А. Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмофв окружности.- УМН, т.37, вып.2, с.2I3-2I4.

20.Неретин Ю.А, Бозонные представления группы диффеоморфизмов окружности. - ДАН СССР, I983,

2I.Неретин Ю.А. Унитарные представления со старшим весом группы диффеоморфизмов окружности. Функц. анализ и прилож., I983, т.I7, вып.3, с. 85-86.

22.Ольшанский Г.И. Описание неприводимых представлений групп автоморфизмов деревьев Брюа-Титса.- Функц. анализ и прилож, I977, т.II, вып.I, с.32-42.

23.Ольшанский Г.И. Описание унитарных представлений со старшим для групп $U(p,q)^{\sim}$.- Функц.анализ и прилож.,I980, т.I4, вып.3 с.32-44.

24.Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Кососимметричные инвариантные билинейные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро.- Функц. анализ и прилож., т.16, вып.2, с.39-47.

25. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Модули Верма над алгеброй Вирасоро.- Функц. анализ и прилож., 1983, т. 17, вып. 3, с. 91-92.

26. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

27. Шаповалов Н.Н. Об одной билинейной форме на универсальной обёртывающей алгебре комплексной полупростой алгебры Ли.- Функц. анализ и прилож., 1972, т.6, вып.4, с.65-70.

28. Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера, производная в линейных пространствах. М.: Наука, 1967.

29. Bott R. On the characteristic classes of groups of diffeomophisms.- Enseign. Math., Ser 2, 1977, t. 23, N 3-4, p 209-220.

30. Bott R., Segal G. The cohomology of the vector fields on a manifold.- Topology, 1977, v. 16, N4, p 285-298

31. Cartier P. Geometry et analyse sur les arbres.- Lect. Notes Math., 1973, 317, p.123-140

32. Friedrichs K.O. Mathematical aspects of the quantum theory of the Field, New York, 1953

33. Frenkel I.B., Kac V.G. Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models.- Inv. math., 1980, v 62, p.-23-66.

34. Garland J.H., Lepowsky J. Generalized Verma moduls, loop space cohomology and Mac Donald-type identities, Adv. math, 1979

v. 12, N 2, p. 169-234.

35. Goddard P., Horiey R. The group theoretical structure of dual vertices.- Nuclear Physics, 1976, B111, p. 272-296.

36. Goddard P., Thorn C. The absence of the ghosts in the dual resonance model.- Physics letters, 1972, 40B, p. 235-238.

37. Goldin G.A., Mennicoff R., Sharp D.H. Indused representations of diffeomorphizms groups.- Mesure theory and applications, Proc. of 1980 Conf.

38. Jantzen J.C. - Moduln mit einem höchsten gewicht, Lect. Notes Math., 1979, 750.

39. Kac V.G. Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras.- Lect. Notes Phys. V, 1979, 94, p441-445.

40. Kac V.G. Highest weight representations of infinite dimensional algebras. Proceedings of ICM, Helsinki, 1978.

41. Kac V.G., Kazhdan D.A. Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras.- Adv. in Math., 1979, v. 34, N 1, p 97-108.

42. Kashiwara M., Vergne M. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials.- Inv. math., 1978, v 44, N 1, p. 1-47.

43. Lepowsky J., Wilson R.L., Construction of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$.- Commun. Math. Phys., 1978, v. 62, p 45-53.

44. Pukanszky L. The Plancherel formula for universal covering group of $SL_2(\mathbb{R})$. – Math. Ann., 1964, Bd. 156, N2, s. 96–143.
45. Rocha-Caridi A., Wallach N.R. Characters of irreducible representations of Virasoro algebra. – Preprint, 1983.
46. Segal G. Unitary representations of some infinite-dimensional groups. – Comm. Math. Phys. 1981, v80, N3, p. 301–342.
47. Shale D. Linear symmetries of free boson fields. – Trans. Amer. Math. Soc., 1962, v103, N1, p. 149–167.
48. Shale D., Stinespring W.F. Spinor representations of infinite-dimensional ortohonal groups. J. Math. and Mech., 1965, v14, N2, p 315–322.
49. Schwartz „Dual resonance theory. – Phys. Rept., 1973, v8, p 269–335.
50. Vergne M. Group simplectique et second quantization. – C. R. Acad. Sci, Paris, 1977, Ser A., t. 285, p. 191–194.
51. Wallach N.R., Goodman R. Structure and unitary cocicle representations of loop groups and of the group of diffeomophizms of the circle. Preprint., Dep. math Rutgers Univ., New Brunswich, N.J. 08903, 1982.
52. Wallach N.R. Analytic continuation of holomophic discrete series of a semisimple groups. – Trans. Amer. Math. Soc., 1979, v251, p. 1–37.

ОГЛАВЛЕНИЕ