N. Dimitrova, S. Markov:
Über die Intervallarithmetische Berechnung des Wertebereichs einer Funktion mit Anwendungen

Li-Qun Qi:
An Interval Test Using the New Krawczyk Operator

J. Rokne:
Optimal Computation of the Bernstein Algorithm for the Bound of an Interval Polynomial

G. Schröder:
Zur Bedeutung der additiven Kürzungsregel in der Intervallrechnung und in quasilinearen Räumen

Herausgeber: Karl Nickel
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg i. Br.
Hermann-Herder-Straße 10
D-7800 Freiburg i. Br.
West Germany
Telefon (0761) 203 3062
Zusammenfassung - Abstract

In der vorliegenden Arbeit wird ein Satz zur intervallarithmetischen Berechnung des Wertebereichs

\[ \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n \} \]

einer monotonen Funktion auf \( X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \) formuliert und nachgewiesen, wobei \( X_1, X_2, \ldots, X_n \) reelle kompakte Intervalle sind. Es wird eine Anwendung dieses Satzes auf die Bestimmung der Nullstellens von quadratischen Gleichungen mit ungenauen Koeffizienten gemacht.

A theorem allowing for the interval arithmetic computation of sets of the form

\[ \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n \} \]

where \( X_1, X_2, \ldots, X_n \) are closed intervals, and \( f \) is monoton.

* Herrn Professor Dr. R. Krawczyk zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.
in $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ is formulated and proved in this paper. The
application of this theorem is illustrated on the determination of the set of zeros of a quadratic equation with uncertain
coefficients.

1. Einleitung

Die Berechnung des Wertebereiches einer Funktion $f$ von $n$
Veränderlichen

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n \}$$

wobei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reelle Intervalle sind, ist von großer
Bedeutung für die Entwicklung numerischer Algorithmen, die un-
genau Daten verarbeiten und Rundungsfehler beachten. Eines
der großen Verdienste der Intervallrechnung besteht darin, daß
sie Abschätzungen für $F$ liefert und manchmal auch genaue Dar-
stellungen von $F$ ermöglicht (vgl. [1], [3], [5]). Leider ist die
genaue intervallarithmetische Berechnung von $F$ nur in sehr be-
schränkten Fällen möglich, z.B. wenn $f$ eine rationale Funktion
ist und jede Variable im Funktionsausdruck nur einmal und in
der ersten Potenz auftritt (vgl. [5]).

Im allgemeinen gestatten die bis jetzt bekannten intervil-
lararithmetischen Methoden die Bestimmung nur äußerer (vgl. [1], [6])
oder innerer Einschließungen zu $F^s(a, [2])$.

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Intervallarithmetik
ermöglicht die genaue Darstellung und Berechnung von $F^s$ für
eine breite Funktionenklasse - die Klasse der monotonen Funk-
tionen von $n$ Veränderlichen, die von Nickel in [6] untersucht
sind. Der in dieser Arbeit formulierter Intervallweiterungs-
satz ist eine Verallgemeinerung der eindimensionalen Sätze
in [3]. Die Autoren hoffen, daß dieser Satz vielfache Anwendung
auf die Entwicklung von intervallarithmetischen Algorith-
men finden wird.

2. Intervallarithmetik

Es sei $R$ der Körper der reellen Zahlen. Die Menge der ab-
geschlossenen reellen Intervalle der Gestalt $A = [a_1, a_2]$, $a_1 \leq a_2$
wird mit $I(R)$ bezeichnet. Wir führen die folgenden Mengen ein:

$$I^r(R) = \{ [a_1, a_2] : a_1 \cdot a_2 > 0 \};$$

$$I^o(R) = \{ [a_1, a_2] : a_1 \cdot a_2 = 0 \};$$

$$I_s(R) = \{ [a_1, a_2] : a_1 = -a_2 \};$$

$$I_d(R) = I_s(R) \cup I^o(R).$$

Für ein Intervall $A = [a_1, a_2] \in I(R)$ heißt $w(A) = a_2 - a_1$ die
Länge von $A$ und $\varphi(A) = (a_1 + a_2)/2$ - der Mittelpunkt von $A$.

Mit $[a, b]$ bezeichnen wir ein Intervall mit Schranken
$a, b \in R$, wobei nicht notwendig $a \leq b$ ist. Für die Schranken
eines Intervales $A \in I(R) \cap I_s(R)$ führen wir noch die Bezeich-
nungen $a_\mu$ und $a_\nu$ ein. Dabei kennzeichnet $a_\mu$ jene Ecke von $A$,
die näher bei $0$ liegt und $a_\nu$ die andere, also

$$[a_\mu, a_\nu] \text{ falls } \varphi(A) > 0;$$

$$[a_\nu, a_\mu] \text{ falls } \varphi(A) < 0.$$

oder $[a_1, a_2] = [a_\mu, a_\nu]$.

Die Zahl

$$\sigma(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(A) > 0, \\ -1 & \text{falls } \varphi(A) < 0 \end{cases}$$

hat folgende Bedeutung:

- $\sigma(A) = 1$ bedeutet, daß die Schranken von $A$ der gleichen Seite von $0$ liegen und $A$ in $I^o(R)$ liegt.
- $\sigma(A) = -1$ bedeutet, daß die Schranken von $A$ der verschiedenen Seiten von $0$ liegen und $A$ in $I_s(R)$ liegt.

Diese Definition ist für $\varphi(A) = 0$ nicht eindeutig, da es u. a. auch $[0, 0]$ gibt.
wird das Vorzeichen von \( A \in \mathbb{I}(R) \setminus \mathbb{I}_{g}(R) \) genannt.

Es seien \( A, B \in \mathbb{I}(R), A = [(a_1, a_2)], B = [(b_1, b_2)] \). In dieser Arbeit benutzen wir die folgenden Intervallverknüpfungen (vgl. etwa [3]):

\[
\begin{align*}
A \times B &= [(a_1 + b_1, a_2 + b_2)], \\
A - B &= [(a_1 - b_2, a_2 - b_2)], \\
AB &= \left( [(a_1 b_2) \vee (a_2 b_1)] \text{ fällt } A, B \in \mathbb{I}(R) \setminus \mathbb{I}_{g}(R), \right. \\
&\quad (a_1 b_1, a_2 b_2) \text{ fällt } A, B \in \mathbb{I}_g(R); \\
A / B &= \left( [(a_2 / b_1, a_2 / b_2)] \text{ fällt } A \in \mathbb{I}(R) \setminus \mathbb{I}_{g}(R), \right. \\
&\quad (b_2 / a_1, b_2 / a_2) \text{ fällt } B \in \mathbb{I}_g(R). \\
\end{align*}
\]

Im Spezialfall \( A = [a, a] \), \( a \in R \) erhält man

\[
\begin{align*}
dB &= \left( [(a b_2) \vee (a b_2)] \text{ fällt } B \in \mathbb{I}(R) \setminus \mathbb{I}_{g}(R), \right. \\
&\quad [(a b_1) \vee (a b_2)] \text{ fällt } B \in \mathbb{I}_g(R); \right.
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
dB &= \left( [(a / b_1) \vee (a / b_2)] \text{ fällt } B \in \mathbb{I}(R) \setminus \mathbb{I}_{g}(R), \right. \\
&\quad [(b_2 / a_1, b_2 / a_2) \text{ fällt } B \in \mathbb{I}_g(R). \\
\right.
\end{align*}
\]

Zur Abkürzung führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

\[
\begin{align*}
-B &= (-1)B, \\
A \odot B &= A \cdot (-B), \\
A \odot B &= A - (-B); \\
A \odot B &= A / (1/B).
\end{align*}
\]

Aus [4] entnehmen wir die folgenden Relationen, die im folgenden oft benutzt werden:

**Lemmas.**

Es seien \( \alpha, \beta, \varphi, \psi \in R \). Dann gelten die Beziehungen:

\[
\begin{align*}
a) \left[(\alpha + \beta) \vee (\varphi + \psi) \right] &= \begin{cases} \\
[\alpha \vee \varphi] + [\beta \vee \psi] & \text{fällt } (\alpha - \varphi)(\beta - \psi) \geq 0, \\
[\alpha \vee \varphi] \odot [\beta \vee \psi] & \text{andernfalls}; \end{cases}
\end{align*}
\]

b) \( \left[(\alpha \cdot \beta) \vee (\varphi \cdot \psi) \right] = \begin{cases} \\
[\alpha \vee \varphi] \cdot [\beta \vee \psi] & \text{fällt } (\alpha - \varphi)(\beta - \psi) \geq 0, \\
[\alpha \vee \varphi] \odot [\beta \vee \psi] & \text{andernfalls}. \end{cases} \)

Analoges gilt für die Multiplikation und Division:

**Lemmas 2.** Für \( \alpha, \beta, \varphi, \psi \in R \) gelten die Relationen:

\[
\begin{align*}
a) \left[(\alpha \cdot \beta) \vee (\varphi \cdot \psi) \right] &= \begin{cases} \\
[\alpha \vee \varphi] \cdot [\beta \vee \psi] & \text{fällt } (\alpha - \varphi)(\beta - \psi) \geq 0, \\
[\alpha \vee \varphi] \odot [\beta \vee \psi] & \text{andernfalls}; \end{cases}
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
b) \left[(\alpha / \beta) \vee (\varphi / \psi) \right] &= \begin{cases} \\
[\alpha \vee \varphi] / [\beta \vee \psi] & \text{fällt } (\alpha - \varphi)(\beta - \psi) \geq 0, \\
[\alpha \vee \varphi] \odot [\beta \vee \psi] & \text{andernfalls}. \end{cases}
\end{align*}
\]

3. Der Hauptsatz

Man betrachte \( R^n \) mit der üblichen (komponentenweisen) Ordnungsrelation \( \leq \). Es sei \( D \subset R^n \). Mit \( I(D) \) bezeichne man die Menge aller Intervalle auf \( D \), d.h.

\[
X \in I(D) \iff X = [x, x] = \{ [x_1, x_1] \}_{i=1}^n.
\]

Es sei weiter \( f : D \longrightarrow R \) eine Funktion aus \( D \in R \).


**Definition 1.** Die Funktion \( f : D \longrightarrow R \) wird unbedingt partiell isoton (antiton) auf \( D \) genannt, wenn \( f \) stets isoton (antiton) bezüglich \( x_i \) für alle Punkte \( x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \) ist.

In den beiden Fällen wird \( f \) unbedingt partiell monoton genannt.

**Definition 2.** Die Funktion \( f : D \longrightarrow R \) wird unbedingt monoton auf \( D \) genannt, wenn \( f \) unbedingt partiell monoton bezüglich \( x_i \) für alle \( x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \) ist.
Es sei \( \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(D) \) die Menge der auf \( D \) unbedingt monotonen Funktionen. Zu jeder Funktion \( f \in \mathcal{M}_0 \) gibt es zwei zugehörige Indexmengen \( I, J = \{ 1, 2, \ldots, n \} \cup \emptyset \) mit \( I \cap J = \emptyset \) und \( I \cup J = \{ 1, 2, \ldots, n \} \). Derart, daß \( f \) unbedingt partiell isoton ist bezüglich der Variablen \( x_i \) mit \( i \in I \) und \( f \) unbedingt partiell antitton ist bezüglich der Variablen \( x_i \) mit \( i \in J \).

Es sei \( X = [x, \bar{x}] \in \mathcal{I}(D) \). Man definiere die reellen Vektoren \( u(f;x) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \) und \( v(f;x) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \) mit

\[
\begin{align*}
  u_i &= \begin{cases} 
  x_i & \text{für } i \in I, \\
  \bar{x}_i & \text{für } i \in J;
  \end{cases} \\
  v_i &= \begin{cases} 
  x_i & \text{für } i \in J, \\
  \bar{x}_i & \text{für } i \in I.
  \end{cases}
\end{align*}
\]

(1)

Dann heißt die Funktion \( F : \mathcal{I}(D) \to \mathcal{I}(R) \) mit

\[
F(X) = \left[ f(u(f;x)), f(v(f;x)) \right]
\]

(2)
die natürliche Intervallweiterung zu \( f \) auf \( D \) (s. [6]).

Sei \( f \in \mathcal{M}_0 \) noch statisch, dann gilt

\[
\left\{ f(x) : x \in X \right\} = \left[ \min f(x), \max f(x) \right] = F(X)
\]

(3)
zu jedem Intervall \( X \in \mathcal{I}(D) \).

Es wird nun die Frage gestellt, zu zwei Funktionen \( f \) und \( g \), deren natürlichen Intervallweiterungen bekannt sind, die natürliche Intervallweiterung ihrer Summe \( f + g \), ihrer Differenz \( f - g \), ihres Produktes \( f \cdot g \) und ihres Quotienten \( f/g \) zu bestimmen. Das Problem wird für \( f, g \in \mathcal{M}_0 \) untersucht.

Es seien \( f, g \in \mathcal{M}_0 \) und \( h = f + g \) gehöre auch zu \( \mathcal{M}_0 \). Zu \( h \) definiere man die zugehörigen Indexmengen \( I \) und \( J \), wie auch die

zu jedem Intervall \( X \in \mathcal{I}(D) \) zugeordneten reellen Vektoren \( u(h;x) \) und \( v(h;x) \). Weiter bezeichne man mit \( C \) die konvexe Hülle von \( u(h;x) \) und \( v(h;x) \), d.h.

\[
C = \text{co} \left\{ u(h;x), v(h;x) \right\}
\]

(4)

Offensichtlich gilt \( C \subseteq X \) zu jedem \( X \in \mathcal{I}(D) \).

Wir betrachten die Funktionen \( f \) und \( g \) auf \( C \) und mit \( F(C) \) bzw. \( G(C) \) bezeichnen wir die natürliche Intervallweiterung zu \( f \) bzw. \( g \) auf \( C \). Man sieht gleich, daß

\[
\begin{align*}
  F(C) &= \left[ f(u(h;x)) \vee f(v(h;x)) \right], \\
  G(C) &= \left[ g(u(h;x)) \vee g(v(h;x)) \right]
\end{align*}
\]

(5)

ist. Es werden weiter die folgenden Größen eingeführt:

\[
\begin{align*}
  d(F(C)) &= f(u(h;x)) - f(v(h;x)), \\
  r(F(C)) &= |f(u(h;x))| - |f(v(h;x))|
\end{align*}
\]

Satz 1. a) Es seien \( f, g, h = f + g \in \mathcal{M}_0 \). Dann gilt für die natürliche Intervallweiterung \( H \) zu \( h \):

\[
H(X) = \begin{cases} 
  F(C) + G(C) \text{ fällt } d(F(C)) \cdot d(G(C)) \geq 0, \\
  F(C) \boxplus G(C) \text{ andernfalls},
\end{cases}
\]

wobei \( X \in \mathcal{I}(D) \) und \( C \) nach (4) definiert ist.

b) Es seien \( f, g, h = f - g \in \mathcal{M}_0 \). Dann gilt für die natürliche Intervallweiterung \( H \) zu \( h \):

\[
H(X) = \begin{cases} 
  F(C) - G(C) \text{ fällt } d(F(C)) \cdot d(G(C)) \geq 0, \\
  F(C) \boxplus G(C) \text{ andernfalls},
\end{cases}
\]

wobei \( X \in \mathcal{I}(D) \) und \( C = \text{co} \left\{ u(h;x), v(h;x) \right\} \).
c) Seien $|f|, |g|, h = f \cdot g \in \mathscr{M}_o$, so gilt für die natürliche Intervallverweiterung $H$ zu $h$:

$$H(x) = \begin{cases} F(C)G(C) & \text{falls } r(F(C)) \cdot r(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \odot G(C) & \text{anderfalls}, \end{cases}$$

wobei $x \in I(D)$ und $C = \{u(h;x), v(h;x)\}$ ist.

Dann gilt für die natürliche Intervallverweiterung $H$ zu $h$:

$$H(x) = \begin{cases} F(C) \setminus G(C) & \text{falls } r(F(C)) \cdot r(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \setminus G(C) & \text{anderfalls}, \end{cases}$$

wobei $x \in I(D)$ und $C = \{u(h;x), v(h;x)\}$ ist.

Beweis.

Zu a). Aus (2), (5) und Lemma 1a erhält man

$$H(x) = [h(u(h;x)), h(v(h;x))]$$

$$= [f(u(h;x)) + g(u(h;x)), f(v(h;x)) + g(v(h;x))]$$

$$= \left[ f(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right] + \left[ g(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right]$$

$$\text{falls } (f(u(h;x)) - f(v(h;x)))(g(u(h;x)) - g(v(h;x))) \geq 0$$

$$= \left[ f(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right] \odot \left[ g(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right]$$

$$\text{anderfalls; }$$

$$\{F(C) \setminus G(C) \text{ falls } d(F(C)) \cdot d(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \setminus G(C) \text{ andernfalls}.\}$$

Zu b). Der Beweis ergibt sich aus Lemma 1b.

Zu c). Mit Hilfe von Lemma 2a erhält man die Gleichungskette

$$H(x) = [h(u(h;x)), h(v(h;x))]$$

$$= [f(u(h;x)) + g(u(h;x)), f(v(h;x)) + g(v(h;x))]$$

$$= \left[ f(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right] + \left[ g(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right]$$

$$\text{falls } (f(u(h;x)) - f(v(h;x)))(g(u(h;x)) - g(v(h;x))) \geq 0$$

$$= \left[ f(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right] \odot \left[ g(u(h;x)) \cdot g(v(h;x)) \right]$$

$$\text{anderfalls; }$$

$$\{F(C) \setminus G(C) \text{ falls } r(F(C)) \cdot r(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \setminus G(C) \text{ andernfalls}.\}$$

Zu d). Der Beweis folgt aus Lemma 2b.

Der Satz ist nachgewiesen.

Bemerkungen.

1. Selbstverständlich kann man eine kompakte Formulierung von Satz 1 angeben, in dem man mit "-" eine der vier arithmetischen Operationen \{+, -, \cdot, \div\} bezeichnet. Die vorgeschlagene Formulierung wurde der bequemeren Anwendung halber vorgezogen.

2. Wir nehmen an, $f, g \in \mathscr{M}_o$ seien noch stetig. Dann gelten für $F(C)$ und $G(C)$ mit $C = \{u(h;x), v(h;x)\}$ =

$$\{tu(h;x) + (1-t)v(h;x) : t \in [0, 1] \}$$

$$h = f \cdot g, t \in \{+,-,\cdot,\div\}$$

die Formeln:

$$F(C) = \{f(tu(h;x) + (1-t)v(h;x)) : t \in [0, 1] \}$$

$$G(C) = \{g(tu(h;x) + (1-t)v(h;x)) : t \in [0, 1] \}.$$

Die Größen $d(F(C))$ und $r(F(C))$ werden in diesem Fall in folgender Weise definiert:

$$d(F(C)) = \left\{ f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X)) : t = 1 \right\} = \left\{ f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X)) : t = 0 \right\};$$

$$r(F(C)) = \left\{ |f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X))| : t = 1 \right\} - \left\{ |f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X))| : t = 0 \right\}.$$

3. In manchen Fällen staut die natürliche Intervallweiterung $F(C)$ zu $f$ auf $C$ mit der natürlichen Intervallweiterung $F$ zu $f$ auf $D$ überein. Dies ist nämlich der Fall, wenn $u(f;X) = v(h;X)$ oder $u(f;X) = v(h;X)$.

4. Bestimmung der Lösungsmenge reeller quadratischen Gleichungen mit ungenauen Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird eine Anwendung von Satz 1 auf die Berechnung der Nullstellen von quadratischen Gleichungen mit ungenauen Koeffizienten gemacht.

Vorgelegt sei die reelle quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

wir nehmen an, die Koeffizienten $p$ und $q$ seien nicht genau, sondern nur innerhalb gewisser Schranken bekannt, d.h. $p \in P$, $q \in Q$, wobei $P, Q$ aus $I(R)$ seien. Gesucht wird die Menge der reellen Nullstellen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, d.h. die Menge

$$\left\{ x : x^2 + px + q = 0 \mid p \in P, q \in Q \right\}.$$

Wir setzen voraus, $P$ und $Q$ seien so gewählt, daß $p^2 - 4q > 0$ ist für beliebige und festgelegte $p \in P$ und $q \in Q$. Mit $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ bezeichnen wir dann die reellen Wurzeln der entsprechenden quadratischen Gleichung:

$$x^{(1)} = x^{(1)}(p, q) = \frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 - 4q}).$$

$$x^{(2)} = x^{(2)}(p, q) = \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4q}).$$

Die Lösungsmenge (6) zerfällt also in zwei Lösungsintervalle

$$x^{(1)} = x^{(1)}(P, Q) = \left\{ x^{(1)}(p, q) : p \in P, q \in Q \right\},$$

$$x^{(2)} = x^{(2)}(P, Q) = \left\{ x^{(2)}(p, q) : p \in P, q \in Q \right\}.$$

Die Funktionen $x^{(1)}$ und $x^{(2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind unbedingt monoton auf $D = P \times Q$ mit $P, Q \in I^+(\mathbb{R})$, d.h. $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in M_0$. Da $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ noch stetig sind, so kann man $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ als natürliche Intervallweiterungen zu $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ betrachten.

Es handelt sich also um die Berechnung der natürlichen Intervallweiterungen zu $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$.

Für ein Intervall $x = [x_1, x_2] \subseteq I(R)$ mit $x_1 \geq 0$ setzt man

$$\sqrt{x} = \left[ \sqrt{x_1}, \sqrt{x_2} \right].$$
Es bedeutet wie üblich $P^2 = PP$.

**Satz 2.** Es seien $P = [p_1, p_2]$, $Q = [q_1, q_2] \in \mathbb{R}'(R)$ so gewählt, daß $p^2 - 4q > 0$ für alle $p \in P$ und $q \in Q$ ist. Dann gelten für die Lösungsintervalle $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ die folgenden Intervallformeln:

1. $q < 0$.

1.1. $P > 0$.

$$x^{(1)} = \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{fals} \ w(p^2) \leq w(4q), \\ (1/2)(-P \circ \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{anderfalls}; \end{cases}$$

$$x^{(2)} = (1/2)(-P \circ \sqrt{p^2 - 4q}).$$

1.2. $P < 0$.

$$x^{(1)} = (1/2)(-P + \sqrt{P^2 - 4q});$$

$$x^{(2)} = \begin{cases} (1/2)(-P \circ \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{fals} \ w(p^2) \leq w(4q), \\ (1/2)(-P + \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{anderfalls}. \end{cases}$$

2. $q > 0$.

2.1. $P > 0$.

$$x^{(1)} = (1/2)(-P \circ \sqrt{p^2 - 4q});$$

$$x^{(2)} = (1/2)(-P \circ \sqrt{p^2 - 4q}).$$

2.2. $P < 0$.

$$x^{(1)} = (1/2)(-P + \sqrt{P^2 - 4q});$$

$$x^{(2)} = (1/2)(-P \circ \sqrt{P^2 - 4q}).$$

**Beweis.** Man setze $f(p, q) = -(1/2)p$, $g(p, q) = (1/2)\sqrt{p^2 - 4q}$. Daraus folgt $x^{(1)} = f + g$, $x^{(2)} = f - g$. Weil $f, g, x^{(1)}, x^{(2)}$ unbedingt monoton und stetig sind, so kann man zur Berechnung von $x^{(1)}$ bzw. $x^{(2)}$ (Satz 1, a) bzw. b) und Bemerkung 2 verwenden.

Da nach Voraussetzung $p^2 - 4q > 0$ für alle $p \in P$, $q \in Q$ ist, so existieren dann die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x^{(i)}}{\partial p}, \quad \frac{\partial x^{(i)}}{\partial q}, \quad i = 1, 2.$$

Man erhält die Ausdrücke

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial p} = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2p^2 - 4q} \begin{cases} > 0 & \text{falso} Q > 0, P > 0; \\ < 0 & \text{falso} Q > 0, P < 0; \end{cases}$$

oder $Q < 0$;

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial q} = \frac{-1}{\sqrt{p^2 - 4q}} < 0.$$
\[
\frac{\partial x^{(2)}}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} > 0.
\]

Dann werden die reellen Vektoren \(u(x^{(1)}; D), v(x^{(1)}; D), u(x^{(2)}; D), v(x^{(2)}; D)\) in folgender Weise bestimmt:

\[
u(x^{(1)}; D) = \begin{cases} 
(p_1, q_2) & \text{falls } Q > 0, P > 0, \\
(p_2, q_2) & \text{falls } Q > 0, P < 0, \\
(p_1, q_1) & \text{falls } Q > 0, P < 0, \text{ oder } Q < 0; \\
(p_2, q_1) & \text{falls } Q < 0, P > 0, \\
(p_1, q_2) & \text{falls } Q > 0, P > 0, \text{ oder } Q < 0; \\
(p_2, q_2) & \text{falls } Q < 0, P < 0, \\
(p_1, q_2) & \text{falls } Q < 0, P > 0, \text{ oder } Q < 0.
\end{cases}
\]

\[
v(x^{(1)}; D) = \begin{cases} 
(p_2, q_2) & \text{falls } Q > 0, P > 0, \\
(p_1, q_1) & \text{falls } Q > 0, P < 0, \text{ oder } Q < 0; \\
(p_2, q_1) & \text{falls } Q < 0, P > 0, \\
(p_1, q_2) & \text{falls } Q > 0, P > 0, \text{ oder } Q < 0; \\
(p_2, q_2) & \text{falls } Q < 0, P < 0, \\
(p_1, q_2) & \text{falls } Q < 0, P > 0, \text{ oder } Q < 0.
\end{cases}
\]

Mit \(C_1\) bzw. \(C_2\) bezeichnen wir die konvexe Hülle der Vektoren \(u(x^{(1)}; D), v(x^{(1)}; D)\) bzw. \(u(x^{(2)}; D), v(x^{(2)}; D)\), d.h.

\[
C_1 = \text{co}\left\{u(x^{(1)}; D), v(x^{(1)}; D)\right\}
= \left\{tu(x^{(1)}; D) + (1-t)v(x^{(1)}; D) : t \in [0,1] \right\}.
\]

\[
C_2 = \text{co}\left\{u(x^{(2)}; D), v(x^{(2)}; D)\right\}
= \left\{tu(x^{(2)}; D) + (1-t)v(x^{(2)}; D) : t \in [0,1] \right\}.
\]

Zur Abkürzung wird \(T = [0,1]\) gesetzt.

Wir betrachten die einzelnen Fälle.

Zu 1. Es gelten für \(C_1\) und \(C_2\) die Beziehungen:

\[
C_1 = \text{co}\left\{(p_2, q_2), (p_1, q_1)\right\}
= \left\{t(p_2, q_2) + (1-t)(p_1, q_1) : t \in T \right\}
= \left\{(p, q) : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in T \right\};
\]

\[
C_2 = \text{co}\left\{(p_2, q_2), (p_1, q_2)\right\}
= \left\{t(p_2, q_2) + (1-t)(p_1, q_2) : t \in T \right\}
= \left\{(p, q) : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_2 + (q_2 - q_1)t, t \in T \right\}.
\]

Um Satz 1 anwenden zu können, sollen wir \(F(C_1), G(C_1), F(C_2), G(C_2)\) berechnen (s. Bemerkung 2). Anschließend werden die entsprechenden Berechnungen durchgeführt.

\[
F(C_1) = -(1/2)P;
\]

\[
G(C_1) = \left\{(1/2)\sqrt{p_2^2 - 4q_1} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in T \right\}
= \left\{(1/2)\sqrt{(p_2 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} : t \in T \right\}.
\]
\[
\begin{align*}
(1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} & \quad \text{falle} \ p > 0, \\
(1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 + 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} & \quad \text{falle} \ p < 0; \\
(1/2)\sqrt{p^2 - 4q} & \quad \text{falle} \ p > 0, \\
(1/2)\sqrt{p^2 + 4q} & \quad \text{falle} \ p < 0.
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
F(C_2) &= -(1/2)p; \\
G(C_2) &= \left\{ (1/2)\sqrt{p^2 - 4q} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, \right. \\
& \quad \left. q = q_2 + (q_1 - q_2)t, \quad t \in T \right\} \\
&= \left\{ (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_2 + (q_1 - q_2)t)} : t \in T \right\} \\
&= \left\{ (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 + 4(q_2 + (q_1 - q_2)t)} : t \in T \right\} \\
&= \left\{ (1/2)\sqrt{p^2 - 4q} : p > 0, \\
&\quad (1/2)\sqrt{p^2 + 4q} : p < 0; \\
&= \left\{ (1/2)\sqrt{p^2 - 4q} : p > 0, \\
&\quad (1/2)\sqrt{p^2 + 4q} : p < 0.
\end{align*}
\]

Es sei zunächst \( p > 0 \). Wende man Satz 1a bzw. Satz 1b auf die Funktionen \( x^{(1)} \) bzw. \( x^{(2)} \) an, so erhält man für ihre natürlichen Intervallwerte und \( x^{(1)} \) bzw. \( x^{(2)} \) die Ausdrücke:

\[
\begin{align*}
x^{(1)} &= \left\{ (1/2)(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) : \text{falle} \ d(F(C_2))d(G(C_1)) \geq 0, \\
&\quad (1/2)(-p - \sqrt{p^2 - 4q}) : \text{anderfalls}; \\
&= \left\{ (1/2)(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) : \text{falle} \ d(G(C_1)) \leq 0, \\
&\quad (1/2)(-p - \sqrt{p^2 - 4q}) : \text{anderfalls}; \\
&= \left\{ (1/2)(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) : \text{falle} \ w(p^2) \leq w(4q), \\
&\quad (1/2)(-p - \sqrt{p^2 - 4q}) : \text{anderfalls}.
\end{align*}
\]

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung wird die Beziehung \( d(F(C_2)) \leq 0 \) benutzt, und von der zweiten zur dritten Gleichung - die Äquivalenz \( d(G(C_1)) \leq 0 \iff w(p^2) \leq w(4q) \).

\[
\begin{align*}
x^{(2)} &= \left\{ (1/2)(-p + \sqrt{p^2 \circ 4q}) : \text{falle} \ d(F(C_2))d(G(C_2)) \geq 0, \\
&\quad (1/2)(-p - \sqrt{p^2 \circ 4q}) : \text{anderfalls}; \\
&= \left\{ (1/2)(-p + \sqrt{p^2 \circ 4q}), \\
&\quad (1/2)(-p - \sqrt{p^2 \circ 4q}),
\end{align*}
\]

da in diesem Fall \( d(F(C_2)) \leq 0 \) und \( d(G(C_2)) \geq 0 \) gilt.

Sei \( p < 0 \), so erhält man für \( x^{(1)} \) und \( x^{(2)} \) die Formeln:
\[ x^{(1)} = \begin{cases} 
\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{falls } d(F(C_1))d(G(C_1)) \geq 0, \\
\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{andernfalls;}
\end{cases} \]

\[ x^{(2)} = \begin{cases} 
\frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{falls } d(F(C_2))d(G(C_2)) \geq 0, \\
\frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q}) & \text{andernfalls;}
\end{cases} \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]

\[ C_2 = \left\{ \text{falls } P > 0 \right\} \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in T \]

Nun lassen sich die natürlichen Intervallverlängerungen \( F(C_1), F(C_2), G(C_1) \) und \( G(C_2) \) leicht berechnen:

\[ F(C_1) = F(C_2) = -\frac{1}{2} \]

\[ G(C_1) = \begin{cases} 
\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \\
\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T
\end{cases} \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in T \]

\[ \left\{ p, q \right\} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_2 + (q_1 - q_2)t, t \in T \]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{\left(p_1 + (p_2 - p_1)t \right)^2 - 4\left(q_2 + (q_1 - q_2)t \right)} : t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P > 0,
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{\left(p_2 + (p_1 - p_2)t \right)^2 - 4\left(q_2 + (q_1 - q_2)t \right)} : t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P < 0;
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{\left(p_1 + (p_1 - p_2)t \right)^2 + 4\left(q_2 + (q_1 - q_2)t \right)} \\
\text{falls } P > 0,
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{\left(p_2 + (p_1 - p_2)t \right)^2 + 4\left(q_2 + (q_1 - q_2)t \right)} \\
\text{falls } P < 0.
\end{align*}
\]
\[
= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 \otimes 4q}.
\]

\[
G(C_2) = \\
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{p^2 - 4q} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P > 0,
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{p^2 - 4q} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P < 0;
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{(p_2 + (p_1 - p_2)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} : t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P > 0,
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} : t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P < 0.
\end{align*}
\]
\[
= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 \otimes 4q}.
\]

Unter Verwendung von Satz 1 erhält man schließlich für \( x^{(1)} \) und \( x^{(2)} \):
\[
\begin{align*}
\frac{1}{2} \sqrt{p^2 \otimes 4q} & \text{ falls } d(F(C_1))d(G(C_1)) \geq 0, \\
\frac{1}{2} \sqrt{p^2 \otimes 4q} & \text{ andernfalls;}
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\frac{1}{2} \sqrt{p^2 \otimes 4q} & \text{ falls } P > 0, \\
\frac{1}{2} \sqrt{p^2 \otimes 4q} & \text{ falls } P < 0.
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{p^2 - 4q} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P > 0,
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{p^2 - 4q} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t, q = q_1 + (q_2 - q_1)t, t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P < 0;
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{(p_2 + (p_1 - p_2)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} : t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P > 0,
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\{ (1/2) \sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} : t \in \mathbb{T} \} \\
\text{falls } P < 0.
\end{align*}
\]
\[
= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 \otimes 4q}.
\]

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.
Literaturverzeichnis


Anschrift der Verfasser
Prof. Dr. S.M. Markov, N. Dimitrova
Mathematics Institute
Bulg. Academie of Science
P.O. Box 373
BG - Sofia/Bulgarien