Summe von unabhängigen Normalverteilungen

Hier soll gezeigt werden, dass Summen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind. Zuerst wird dies für zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariable bewiesen.

Satz 1. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien* X *und* Y *unabhängige Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. Weiters sei* X *normalverteilt mit den Parametern* μ_1 *und* σ_1*, und* Y *normalverteilt mit den Parametern* μ_2 *und* σ_2*. Dann ist* $X+Y$ *normalverteilt mit den Parametern* $\mu_1+\mu_2$ *und* $\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}$*.*

Beweis. Die Dichte von X ist $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}}$, und die Dichte von Y ist $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}}$. Da X und Y unabhängig sind, ist die Dichte $g(x)$ gleich der Faltung $(f_1 * f_2)(x)$ von f_1 und f_2. Damit ist

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}}\, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}+\frac{(t-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right)}\, dt\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Jetzt betrachten wir den Exponenten von e in diesem Integral (ohne das Minus-Zeichen). Mittels „Quadratisch Ergänzen“ erhält man

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2} = \\
&= \frac{1}{2}\left(t^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}+\frac{1}{{\sigma_2}^2}\right) - 2t\left(\frac{x-\mu_1}{{\sigma_1}^2}+\frac{\mu_2}{{\sigma_2}^2}\right) + \left(\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}+\frac{{\mu_2}^2}{{\sigma_2}^2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(t^2 - 2t\left(\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{(x-\mu_1)^2{\sigma_2}^2+{\mu_2}^2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(\left(t-\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2 + \right. \\
&\left. \left(\frac{(x-\mu_1)^2{\sigma_2}^2+{\mu_2}^2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2} - \left(\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2\right)\right)\,.
\end{aligned}
$$

Da $\left(\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2 = \frac{(x-\mu_1)^2{\sigma_2}^4+2(x-\mu_1)\mu_2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2+{\mu_2}^2{\sigma_1}^4}{({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)^2}$ gilt, erhält man dann durch Vereinfachen und Herausheben von ${\sigma_1}^2{\sigma_2}^2$, dass

$$\frac{(x-\mu_1)^2{\sigma_2}^2+{\mu_2}^2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2} - \left(\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2 =$$
$$= \frac{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2((x-\mu_1)^2-2(x-\mu_1)\mu_2+{\mu_2}^2)}{({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)^2} = \frac{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2(x-\mu_1-\mu_2)^2}{({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)^2}$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(t - \frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2 + \frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)} ,$$

woraus wir $e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}+\frac{(t-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right)} = e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(t-\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2}$ erhalten. Somit ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}+\frac{(t-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right)}\,dt = \\ &= \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(t-\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2}\,dt\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Jetzt substituieren wir in dem Integral $s = \frac{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}\left(t - \frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)$, woraus sich $ds = \frac{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}\,dt$ ergibt (beachte, dass sich für $t=-\infty$ auch $s=-\infty$ und für $t=+\infty$ auch $s=+\infty$ ergibt). Deshalb erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(t-\frac{(x-\mu_1){\sigma_2}^2+\mu_2{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}\right)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}e^{-s^2}\,ds =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}\ .$$

Wegen $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}$ ergibt sich wegen (2) daraus, dass

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}+\frac{(t-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right)}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}} \tag{3}$$

gilt. Aus (1) ergibt sich daraus, dass $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}}$. Nachdem das die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariablen mit den Parametern $\mu_1 + \mu_2$ und $\sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}$ ist und g die Dichte von $X + Y$ ist, ist damit $X + Y$ normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 + \mu_2$ und $\sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}$. □

Satz 2. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Weiters sei für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Zufallsvariable X_k normalverteilt mit den Parametern μ_k und σ_k. Dann ist $\sum_{j=1}^n X_j$ normalverteilt mit den Parametern $\sum_{j=1}^n \mu_j$ und $\sqrt{\sum_{j=1}^n {\sigma_j}^2}$.*

Beweis. Wir führen diesen Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist offensichtlich X_1 normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 = \sum_{j=1}^1 \mu_j$ und $\sigma_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^1 {\sigma_j}^2}$.

Schließlich sei $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\sum_{j=1}^{n-1} X_j$ normalverteilt mit den Parametern $\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j$ und $\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} {\sigma_j}^2}$. Weiters sind $\sum_{j=1}^{n-1} X_j$ und X_n unabhängig. Nach Satz 1 ist deshalb auch $\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^{n-1} X_j + X_n$ normalverteilt mit den Parametern

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j + \mu_n = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} {\sigma_j}^2}\right)^2 + {\sigma_n}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {\sigma_j}^2},$$

womit das Resultat bewiesen ist. □

Entscheidend im Beweis von Satz 1 war der Beweis der Formel (3). Man könnte diese Formel auch mit Computeralgebraprogrammen nachrechnen. Wir wollen jetzt angeben, welche Befehle dabei einzugeben wären. Mit dem Programm wxMaxima würde das etwa folgendermaßen aussehen.

```
(%i1) assume(s1>0,s2>0);
```

(%o1) $[s1 > 0, s2 > 0]$

```
(%i2) integrate(1/(2*%pi*s1*s2)*%e^(-((x-t-m1)^2/(2*s1^2)+
      (t-m2)^2/(2*s2^2))), t, -inf, inf);
```

(%o2) $$\frac{e^{-\frac{x^2+(-2\,m2-2\,m1)\,x+m2^2+2\,m1\,m2+m1^2}{2\,s2^2+2\,s1^2}}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{s2^2+s1^2}}$$

```
(%i3)   factor(x^2+(-2*m2-2*m1)*x+m2^2+2*m1*m2+m1^2);
```

(%o3) $(x - m2 - m1)^2$

In Mathematica könnte man

```
Integrate[1/(2*Pi*s1*s2)*E^(-((x-t-m1)^2/(2*s1^2)+(t-m2)^2/
(2*s2^2))),{t,-Infinity,Infinity},Assumptions->{s1>0,s2>0}]
```

eingeben. Arbeitet man mit Maple, so gibt man

```
simplify(int(1/(2*Pi*s1*s2)*exp(-((x-t-m1)^2/(2*s1^2)+(t-m2)^2/
(2*s2^2))),t=-infinity...infinity) assuming s1>0,s2>0);
```

ein.