UNIVERSITATEA BABEŞ - BOLYAI CLUJ - NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Dualitatea problemelor de optimizare convexă

Conducător ştiinţific:
Prof. dr. Wolfgang Breckner

Absolvent:
Radu-Ioan Boţ

1998

Cuprins

Introducere

În această lucrare vom prezenta un principiu foarte important în studiul problemelor de optimizare convexă, numit principiul dualității. El a fost introdus de W.Fenchel şi R.T.Rockafellar şi prevede ataşarea la o problemă de optimizare dată a unei noi probleme, numită duala acesteia. Determinarea soluțiilor problemei duale permite în anumite condiții rezolvarea problemei inițiale.

Lucrarea de față este structurată pe şapte secțiuni ale căror conținut este prezentat pe scurt în cele ce urmează.

Având un caracter preliminar, prima secțiune conține noțiunile şi rezultatele de bază care intervin frecvent în lucrare. Se defineşte noțiunea de inferior semicontinuitate a unei funcții şi se precizează terminologia utilizată.

Cea de-a doua secțiune examinează unele proprietăți importante ale funcțiilor convexe şi inferior semicontinue. Se demonstrează teorema privind continuitatea unei funcții convexe pe interiorul domeniului său efectiv şi cea de caracterizare a învelitorii superioare a unei familii de funcții afin continue. În final se defineşte regularizata inferior semicontinuă şi Γ-regularizata unei funcții şi se stabileşte legătura dintre acestea.

În cea de-a treia secțiune se introduce noțiunea de conjugată a unei funcții şi se demonstrează proprietățile acesteia. Se definesc conjugatele de ordin superior şi se prezintă condițiile necesare şi suficiente în care o funcție coincide cu conjugata sa.

Secțiunea a patra este destinată subdiferențiabilității unei funcții într-un punct. Sunt evidențiate legăturile dintre subdiferențiala unei funcții într-un punct şi conjugata acelei funcții. În finalul acestei secțiuni este demonstrată teorema de subdiferențiabilitate a unei funcții convexe şi continue într-un punct.

În cadrul secțiunii a cincea se defineşte problema duală a unei probleme de optimizare precum şi noțiunile de dualitate slabă şi tare. Se prezintă de asemenea criterii de existență a dualității tari şi legăturile dintre caracteristicile de stabilitate şi normalitate ale problemei primale. În cazul existenţei dualităţii tari sunt stabilite relaţiile de extremalitate dintre soluţiile celor două probleme, primală şi duală.

Prin definirea Lagrangeanului unei probleme de optimizare relativ la funcţia perturbatoare se sugerează, în secţiunea a şasea, existenţa unei legături dintre noţiunea de dualitate şi problemele de teorie a jocurilor.

Secţiunea a şaptea conţine două aplicaţii ale teoriei dualităţii. În cadrul primeia, pornind de la o problemă de optimizare convexă şi demonstrând existenţa dualităţii tari între această problemă şi duala ei, suntem conduşi la binecunoscuta Teoremă a lui Farkas. Pe baza acestui procedeu se pot demonstra şi alte teoreme cunoscute de alternativă şi se pot obţine altele noi.

În cea de-a doua aplicaţie se tratează dualitatea problemelor de aproximare, analizându-se şi cazuri particulare ale acestora, problema de cea mai bună aproximare convexă, problema de locaţie şi cea de programare liniară. Studiindu-se relaţiile de extremalitate se obţin condiţiile Kolmogorov de existenţă a soluţiilor în cazurile problemei de cea mai bună aproximare convexă şi problemei de locaţie.

Doresc să adresez sincere mulţumiri domnului prof. dr. Wolfgang Breckner pentru materialul pus la dispoziţie, îndrumările şi sugestiile oferite în elaborarea acestei lucrări.

1. Noțiuni introductive

Fie V un spațiu vectorial real. Vom defini în cele ce urmează câteva noțiuni care vor interveni pe parcursul acestei lucrări.

Definiție. Fie u, v $\in$ V. Se numeşte segment de extremități u şi v mulțimea următoare:

$$[u,v] = \{ \lambda u + (1-\lambda)v \mid \lambda \in [0,1] \}$$

Mulțimea $\{ \lambda u + (1-\lambda)v \mid \lambda \in [0,\infty) \}$ o vom numi semidreapta care pleacă din u şi trece prin v.

Definiție. O submulțime A a lui V se numeşte convexă dacă pentru orice u, v $\in$ A segmentul [u,v] este inclus în A.

Pentru o mulțime oarecare A $\subseteq$ V se numeşte învelitoare convexă închisă a lui A şi se notează $\overline{co}$ A intersecția tuturor mulțimilor convexe închise din V care conțin pe A.

Presupunând, în cele ce urmează, că V este un spațiu vectorial topologic vom defini inferior semicontinuitatea a unei funcții $F : V \to \overline{\Re}$ într-un punct u $\in$ V.

Fie $U=\{ U_\alpha \}_{\alpha \in I}$ filtrul vecinătăților lui u în V. Se numeşte limita inferioară a lui F în u , numărul

$$(1.1) \qquad \underline{\lim}_{v \to u} F(v) = \sup_{U_\alpha \in U} \inf_{v \in U_\alpha} F(v).$$

Definiție. Funcția $F : V \to \overline{\Re}$ se numeşte inferior semicontinuă în u $\in$ V dacă

$$(1.2) \qquad \underline{\lim}_{v \to u} F(v) \geq F(u).$$

Având în vedere echivalența definiției cu filtre cu definiția cu şiruri generalizate avem şi următoarea definiție pentru inferior semicontinuitatea unei funcții într-un punct.

Definiție. Funcția $F : V \to \overline{\Re}$ se numeşte inferior semicontinuă în u $\in$ V dacă are loc

$$(1.3) \qquad \underline{\lim}_{x_\alpha \to u} F(x_\alpha) \geq F(u)$$

pentru orice şir generalizat $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, $x_\alpha \to u$.

În [11] este dată următoarea caracterizare a inferior semicontinuităţii unei funcţii într-un punct.

Propoziţia 1.1. Funcţia $F : V \to \overline{\Re}$ este inferior semicontinuă în $u \in V$ dacă şi numai dacă pntru fiecare $\gamma \in \Re$ care verifică $\gamma < F(u)$ există o vecinătate deschisă U a lui u astfel încât $\gamma < F(v)$, oricare ar fi $v \in U$.

Definiţie. Funcţia $F : V \to \overline{\Re}$ se numeşte superior semicontinuă în $u \in V$ dacă $-F$ este inferior semicontinuă în $u \in V$.

Definiţie. Funcţia $F : V \to \overline{\Re}$ se numeşte inferior (respectiv superior) semicontinuă pe $A \subseteq V$ dacă este inferior (respectiv superior) semicontinuă în fiecare punct din A.

Definiţie. Hiperplanul $H = \{ u \in V \mid \ell(u) = \alpha \}$, unde $\alpha \in \Re$ şi ℓ este o funcţională nenulă din V*, separă mulţimile U_1 şi U_2 din V dacă

(1.4) $$\forall u \in U_1,\ \ell(u) \le \alpha \quad \text{şi} \quad \forall v \in U_2,\ \ \ell(u) \ge \alpha$$

şi separă strict mulţimile U_1 şi U_2 din V dacă

(1.5) $$\forall u \in U_1,\ \ell(u) < \alpha \quad \text{şi} \quad \forall v \in U_2,\ \ \ell(u) > \alpha.$$

În continuare vom reaminti două bine cunoscute teoreme de separare a mulţimilor convexe. Demonstraţiile lor se găsesc în [14].

Teorema 1.2. Dacă V este un spaţiu vectorial topologic real, U_1 este o submulţime deschisă, convexă şi nevidă a lui V, iar U_2 este o submulţime convexă a lui V astfel încât $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, atunci U_1 şi U_2 pot fi separate printr-un hiperplan închis din V.

Teorema 1.3. Dacă V este un spaţiu local convex real, U_1 şi U_2 sunt două submulţimi disjuncte şi convexe ale lui V, astfel încât una să fie închisă şi cealaltă compactă, atunci există un hiperplan închis din V care le separă strict.

Dacă V este un spaţiu local convex Hausdorff, Teorema 1.3 ne asigură existenţa unei funcţionale liniare şi continue, nenule, definită pe V cu valori în $\Re$.

Vom nota cu V* dualul algebrico-topologic al spaţiului vectorial topologic real V, reprezentând spaţiul funcţionalelor liniare şi continue definite pe V. Dacă $u \in V$ şi $u^* \in V^*$ valoarea funcţionalei u^* în u se va nota $\langle u^*, u\rangle$.

Putem defini o funcțională biliniară pe $V \times V^*$, de forma $(u,u^*) \mapsto \langle u, u^* \rangle$. Această funcție biliniară poate reprezenta o familie de funcționale liniare depinzând de parametrul $u^* \in V^*$ definite V sau o familie de funcționale liniare depinzând de parametrul $u \in V$ definite pe V^*. Ultima remarcă ne arată că V şi V^* joacă roluri simetrice față de funcționala biliniară $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

Putem considera V^* ca spațiu vectorial al funcționalelor liniare definite pe V şi punctul $u^* \in V^*$ îl putem identifica cu funcția $u \mapsto \langle u,u^* \rangle$, respectiv, putem considera V ca spațiu vectorial al funcționalelor definite pe V^* iar punctul $u \in V$ îl putem identifica cu funcția $u^* \mapsto \langle u, u^* \rangle$.

Se va numi topologie slabă pe V, topologia indusă de V^* şi notată $\sigma(V,V^*)$ iar topologie slabă pe V^* , topologia indusă de V şi notată $\sigma(V^*,V)$.

Dacă V este un spațiu local convex Hausdorff, topologia slabă $\sigma(V,V^*)$ este o topolgie de spațiu local convex separat fiind cea mai fină topologie pe V cu această proprietate.

Dacă pe parcursul lucrării V va fi considerat spațiu local convex se va presupune că este şi Hausdorff.

2. Funcții convexe

În cele ce urmează vom considera V un spațiu vectorial real, $A \subseteq V$ o submulțime nevidă şi funcții definite pe mulțimea A cu valori în $\overline{\mathfrak{R}}$, unde $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$.

Definiție. Fie $A \subseteq V$ o submulțime nevidă, convexă şi $F : A \to \overline{\mathfrak{R}}$. Funcția F se numeşte convexă dacă pentru fiecare $u, v \in A$ şi fiecare $\lambda \in (0,1)$ are loc

(2.1) $$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v),$$

atunci când expresia din membrul drept este definită.

F se numeşte concavă dacă $-F$ este convexă.

Observația 2.1. Relația (2.1) nu are expresia din membrul drept definită atunci când $F(u) = -F(v) = \pm\infty$.

Pentru caracterizarea unei funcții convexe s-a dat următoarea teoremă [8].

Teorema 2.1. Fie $A \subseteq V$ o submulțime nevidă, convexă şi $F : A \to \overline{\mathfrak{R}}$. Funcția F este convexă dacă şi numai dacă oricare ar fi n număr natural, oricare ar fi $u_1, u_2, \ldots, u_n \in A$ şi oricare ar fi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{R}_+$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ are loc

(2.2) $$F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(u_i),$$

atunci când expresia din membrul drept este definită.

Dacă $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ este o funcție convexă, atunci pentru fiecare $a \in \overline{\mathfrak{R}}$ mulțimile $\{ u \mid F(u) \leq a \}$ şi $\{ u \mid F(u) < a \}$ sunt mulțimi convexe.

Observația 2.2. Considerăm funcția $F : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, definită prin $F(u) = \sqrt[3]{u}$. Pentru fiecare $a \in \mathfrak{R}$, mulțimile $\{ u \in \mathfrak{R} \mid F(u) \leq a \}$ şi $\{ u \in \mathfrak{R} \mid F(u) < a \}$ sunt convexe, dar funcția F nu e convexă. Aşadar, reciproca afirmației anterioare nu este adevărată.

Definiție. Pentru orice funcție $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ mulțimea

(2.3) $$\mathrm{dom}F = \{ u \in V \mid F(u) < +\infty \}$$

se numeşte domeniul efectiv al lui F.

Domeniul efectiv al unei funcţii convexe $F : V \to \overline{\Re}$ este o mulţime convexă.

Considerând o funcţie $F : A \to \Re$, unde $A \subseteq V$ este nevidă, îi putem asocia funcţia $\tilde{F} : V \to \overline{\Re}$, definită prin

(2.4) $$\tilde{F}(u) = \begin{cases} F(u), & \text{daca} \quad u \in A \\ +\infty, & \text{daca} \quad u \notin A \end{cases}$$

Propoziţia 2.2. Funcţia $\tilde{F} : V \to \overline{\Re}$ este convexă dacă şi numai dacă $A \subseteq V$ este mulţime convexă şi $F : A \to \Re$ este funcţie convexă.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $u, v \in A$ şi $\lambda \in (0,1)$. $\tilde{F}$ fiind convexă rezultă că $\tilde{F}(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda \tilde{F}(u) + (1-\lambda)\tilde{F}(v) = \lambda F(u) + (1-\lambda) F(v)$.

Dacă $\lambda u + (1-\lambda)v \notin A$ rezultă că $\tilde{F}(\lambda u + (1-\lambda)v) = +\infty$ ceea ce contrazice relaţia anterioară. Trebuie aşadar ca pentru fiecare $u, v \in A$ şi fiecare $\lambda \in (0,1)$ să aibă loc $\lambda u + (1-\lambda)v \in A$, ceea ce înseamnă că A este mulţime convexă.

Pentru $u, v \in A$ şi $\lambda \in (0,1)$ rezultă că $\lambda u + (1-\lambda)v \in A$ şi are loc relaţia

$F(\lambda u + (1-\lambda)v) = \tilde{F}(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda \tilde{F}(u) + (1-\lambda)\tilde{F}(v) = \lambda F(u) + (1-\lambda) F(v)$, ceea ce înseamnă că F este funcţie convexă.

Suficienţa. Fie $u, v \in V$ şi $\lambda \in (0,1)$. Dacă u şi v aparţin lui A atunci $\lambda u + (1-\lambda)v \in A$ şi are loc $\tilde{F}(\lambda u + (1-\lambda)v) = F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v) = \lambda \tilde{F}(u) + (1-\lambda)\tilde{F}(v)$.

Dacă cel puţin unul din punctele u şi v nu aparţine lui A atunci $\lambda \tilde{F}(u) + (1-\lambda)\tilde{F}(v) = +\infty$ şi are loc relaţia $\tilde{F}(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda \tilde{F}(u) + (1-\lambda)\tilde{F}(v)$ ceea ce ne asigură că $\tilde{F}$ este funcţie convexă. ■

Pe baza propoziţiei anterioare putem considera funcţiile convexe definite pe tot spaţiul V.

Definiţie. Numim funcţie indicatoare a mulţimii $A \subseteq V$ funcţia $\chi_A : V \to \overline{\Re}$ definită prin

(2.5) $$\chi_A(u) = \begin{cases} 0, & \text{daca} \quad u \in A \\ +\infty, & \text{daca} \quad u \notin A \end{cases}$$

Propoziția 2.3. Mulțimea A este convexă dacă şi numai dacă χ_A este o funcție convexă.

Demonstrație. *Necesitatea.* Pe baza relației (2.1) va trebui să arătăm că oricare ar fi u, v $\in$ V şi oricare ar fi $\lambda \in (0,1)$ are loc : $\chi_A(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\chi_A(u) + (1-\lambda)\chi_A(v)$. Dacă u $\in$ A şi v $\in$ A atunci $\lambda u + (1-\lambda)v \in A$ şi $\chi_A(\lambda u + (1-\lambda)v) = 0$. Datorită faptului că $\chi_A(u) = 0$ şi $\chi_A(v) = 0$, relația are loc.

Dacă cel puțin unul dintre punctele u şi v nu aparține lui A, atunci $\lambda\chi_A(u) + (1-\lambda)\chi_A(v) = +\infty$ iar relația are loc şi în acest caz, ceea ce ne asigură că χ_A este funcție convexă.

Suficiența. Fie u, v $\in$ A şi $\lambda \in (0,1)$. Din faptul că χ_A este funcție convexă rezultă că $\chi_A(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\chi_A(u) + (1-\lambda)\chi_A(v) = 0$ ceea ce implică că $\chi_A(\lambda u + (1-\lambda)v) = 0$, echivalent cu $\lambda u + (1-\lambda)v \in A$. Aşadar mulțimea A este o mulțime convexă. ■

Pe baza propoziției anterioare, studiul mulțimilor convexe se reduce la studiul funcțiilor convexe.

În continuare vom analiza funcțiile convexe care pot lua valoarea $-\infty$.

Propoziția 2.4. Fie $F : V \to \overline{\Re}$ o funcție convexă. Dacă există u $\in$ V astfel încât $F(u) = -\infty$, atunci pe orice semidreaptă din V care pleacă din u funcția F este identică $+\infty$ sau există un punct v pe acea semidreaptă astfel încât între u şi v funcția F să ia valoarea $-\infty$ iar de la v încolo să ia valoarea $+\infty$.

Demonstrație. Considerăm o semidreaptă oarecare din V care pleacă din u şi presupunem că există pe această semidreaptă un punct v astfel încât $F(v) > -\infty$.

Alegem un punct arbitrar $w \in [u, v]$, $w \neq u$ şi $w \neq v$. Există atunci $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $w = (1-\lambda)u + \lambda v$. Pe baza relației (2.1) obținem că $F(w) = F(\lambda v + (1-\lambda)u) \leq \lambda F(v) + (1-\lambda)F(u) = -\infty$ ceea ce implică că $F(w) = -\infty$.

Alegem acum un punct arbitrar w' pe semidreapta care pleacă din u şi trece prin v astfel încât $w' \notin [u, v]$. Presupunem că $F(w') < +\infty$. Rezultă în acest caz că $v \in [u, w']$ şi există, aşadar, $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât $v = (1-\lambda)u + \lambda w'$. Pe baza relației (2.1) are loc $F(v) = F(\lambda w' + (1-\lambda)u) \leq \lambda F(w') + (1-\lambda)F(u) = -\infty$. Punctul v a fost ales astfel încât $F(v) > -\infty$, ceea ce ne conduce la contradicție. Pentru fiecare punct w' ales în modul de mai sus are loc $F(w') = +\infty$. ■

Definiție. Despre o funcție convexă $F : V \to \overline{\Re}$ spunem că este proprie dacă nu ia în nici un punct valoarea $-\infty$ şi nu este identică $+\infty$.

Definiție. Numim epigraf al unei funcții $F : V \to \overline{\Re}$ mulțimea

(2.6) $$\text{epi}F = \{ (u, a) \in V \times \Re \mid F(u) \le a \}$$

Observația 2.3. Epigraful reprezintă mulțimea punctelor din $V \times \Re$ situate deasupra graficului lui F. Proiecția mulțimii epi$F$ pe V este dom$F$. Importanța epigrafului în studiul funcțiilor convexe este dată de următorul rezultat.

Teorema 2.5. Funcția $F : V \to \overline{\Re}$ este convexă dacă şi numai dacă epi$F$ este o mulțime convexă.

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie (u, a) şi (v, b) două puncte arbitrare din epi$F$ şi λ arbitrar din (0, 1). Se obține atunci $F(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v) \le \lambda a + (1-\lambda)b$ ceea ce implică că $(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda a + (1-\lambda)b) \in \text{epi}F$ echivalent cu $\lambda(u,a) + (1-\lambda)(v,b) \in \text{epi}F$. Aşadar, epi$F$ este mulțime convexă.

Suficiența. Considerăm u şi v arbitrare din V şi $\lambda \in (0, 1)$. Vom arăta că are loc relația (2.1). Dacă cel puțin unul dintre punctele u şi v nu aparțin lui dom$F$, relația (2.1) este adevărată.

Fie acum $u, v \in \text{dom}F$. Există aşadar $a, b \in \Re$ astfel încât $F(u) \le a$ şi $F(v) \le b$, echivalent cu $(u, a), (v, b) \in \text{epi}F$. Din faptul că epi$F$ este mulțime convexă rezultă că $\lambda(u,a) + (1-\lambda)(v,b) \in \text{epi}F \Leftrightarrow (\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda a + (1-\lambda)b) \in \text{epi}F$. Se obține prin urmare că $F(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda a + (1-\lambda)b$.

Dacă F(u) şi F(v) sunt finite putem considera $a = F(u)$ şi $b = F(v)$ ceea ce ne asigură că relația (2.1) are loc.

Dacă cel puțin una din valorile F(u) şi F(v) este $-\infty$, în relația anterioară putem face pe a sau pe b să tindă la $-\infty$ şi rezultă atunci că $F(\lambda u + (1-\lambda)v) = -\infty$. Acest lucru face ca relația (2.1) să fie adevărată. ■

Următoarea propoziție ne oferă câteva proprietăți importante ale funcțiilor convexe, primele două afirmații arătând că mulțimea funcțiilor convexe este un con convex. Demonstrația acestei propoziții se găseşte în [6].

Propoziția 2.6. Sunt adevărate următoarele afirmații:

(i) Dacă funcția $F : V \to \overline{\Re}$ este convexă şi $\alpha \geq 0$, atunci funcția αF este de asemenea funcție convexă.

(ii) Dacă funcțiile $F : V \to \overline{\Re}$ şi $G : V \to \overline{\Re}$ sunt convexe, atunci funcția $F + G$ este de asemenea o funcție convexă.

În cazul în care $F(u) = -G(u) = \pm\infty$ definim $(F + G)(u) = +\infty$.

(iii) Dacă $(F_i)_{i\in I}$ este o familie de funcții convexe, $F_i : V \to \overline{\Re}$ $(i \in I)$, atunci funcția $F : V \to \overline{\Re}$ definită prin $F(u) = \sup \{ F_i(u) \mid i\in I \}$ este, de asemenea, o funcție convexă.

Definiție. Fie $A \subseteq V$ o submulțime nevidă, convexă şi $F : A \to \overline{\Re}$. Funcția F se numeşte strict convexă dacă, pentru fiecare $u, v \in A$, $u \neq v$ şi fiecare $\lambda \in (0,1)$, are loc

(2.7) $$F(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v).$$

În continuare vom studia câteva proprietăți ale funcțiilor inferior semicontinue considerănd V un spațiu vectorial topologic.

Propoziția 2.7. Funcția $F : V \to \overline{\Re}$ este inferior semicontinuă pe V dacă şi numai dacă oricare ar fi $a \in \Re$ mulțimea $\{ u \in V \mid F(u) \leq a \}$ este închisă.

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $a \in \Re$. Vom arăta că mulțimea $G = \{u \in V \mid F(u) > a \}$ este deschisă. Considerăm u_0 un punct arbitrar din G. Din Propoziția 1.1 rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui u_0 în V astfel încât pentru fiecare $v \in U$ are loc $F(v) > a$. Se obține aşadar o vecinătate deschisă a lui u_0 inclusă în G, ceea ce înseamnă că mulțimea G este deschisă.

Suficiența. Vom arăta că F este inferior semicontinuă în fiecare punct din V. Alegem u_0 arbitrar din V şi a un număr real astfel încât $F(u_0) > a$. Rezultă atunci că $u_0 \in \{ u \in V \mid F(u) > a \}$ care pe baza ipotezei este mulțime deschisă. Există o vecinătate deschisă U a lui u_0 astfel încât $U \subseteq \{ u \in V \mid F(u) > a \}$. Oricare ar fi atunci $u \in U$ are loc $F(u) > a$ ceea ce conform Propoziției 1.1 implică că funcția F este inferior semicontinuă în u_0. ■

Observația 2.4 . Considerând funcția indicatoare a unei mulțimi oarecare $A \subseteq V$, pe baza Propoziției 2.7, rezultă că χ_A este inferior semicontinuă dacă şi numai dacă oricare ar fi $a \in \Re$ mulțimea $\{ u \in V \mid \chi_A(u) \le a \}$ este închisă. Mulțimea $\{ u \in V \mid \chi_A(u) \le a \}$ este mulțimea $\varnothing$ dacă $a < 0$ şi este mulțimea A dacă $a \ge 0$. Rezultă că χ_A este inferior semicontinuă dacă şi numai dacă mulțimea A este închisă.

Observația 2.5. Pe baza Propoziției 2.7 mai rezultă că χ_A este superior semicontinuă dacă şi numai dacă mulțimea A este deschisă.

Teorema 2.8 . Funcția $F : V \to \overline{\Re}$ este inferior semicontinuă pe V dacă şi numai dacă epigraful său este o mulțime închisă.

Demonstrație. Considerăm funcția $\Phi : V \times \Re \to \Re$, definită prin $\Phi(u, a) = F(u) - a$. Vom arăta pentru început că F este inferior semicontinuă pe V dacă şi numai dacă Φ este inferior semicontinuă pe $V \times \Re$.

Presupunem că F este inferior semicontinuă pe V şi alegem arbitrar $(u_0, a_0) \in V\times\Re$ şi $\gamma \in \Re$ astfel încât $\Phi(u_0, a_0) > \gamma$, echivalent cu $F(u_0) > a_0 + \gamma$. Există atunci $\varepsilon > 0$ astfel încât $F(u_0) > a_0 + \gamma + \varepsilon > a_0 + \gamma$. F fiind inferior semicontinuă în u_0 rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui u_0 astfel încât oricare ar fi $u \in U$, $F(u) > a_0 + \gamma + \varepsilon$. Mulțimea $W= U \times (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ este o vecinătate deschisă a lui (u_0 , a_0) în $V \times \Re$ şi pentru orice $(u, a) \in W$ are loc $\Phi(u,a) = F(u) - a > a_0 + \gamma + \varepsilon - a > \gamma$, ceea ce conform Propoziției 1.1 implică că Φ este inferior semicontinuă în (u_0 , a_0). Cum (u_0 , a_0) a fost ales arbitrar rezultă că Φ este inferior semicontinuă pe $V \times \Re$.

Să presupunem, acum, că Φ este inferior semicontinuă pe $V \times \Re$ şi să considerăm, arbitrar, $u_0 \in V$ şi $\gamma_0 \in \Re$ astfel încât $F(u_0) > \gamma_0$, echivalent cu $\Phi(u_0 , \gamma_0) = F(u_0) - \gamma_0 > 0$. Φ fiind inferior semicontinuă în (u_0, γ_0) rezultă că există W o vecinătate deschisă a lui (u_0, γ_0) în $V \times \Re$ astfel încât oricare ar fi $(u, \gamma)\in W$, $\Phi(u, \gamma) > 0$. Există atunci U o vecinătate deschisă a lui u_0 în V şi U' o vecinătate deschisă a lui γ_0 în $\Re$ astfel încât $U \times U' \subseteq V$. În consecință, pentru fiecare $u \in U$ şi pentru fiecare $\gamma \in U'$ are loc $\Phi(u, \gamma) >0$. Alegând $\gamma = \gamma_0$ obținem, pentru fiecare $u \in U$, $F(u) - \gamma_0 = \Phi(u, \gamma_0) >0$, echivalent cu faptul că, oricare ar fi $u \in U$, $F(u) > \gamma_0$. Conform Propoziției 1.1 acest lucru implică că F este inferior semicontinuă în u_0 iar din faptul că u_0 a fost ales arbitrar rezultă că F este inferior semicontinuă pe V.

Revenim acum la demonstrația propriu-zisă a teoremei.

Necesitatea. Dacă F este inferior semicontinuă rezultă că şi Φ este inferior semicontinuă iar conform Propoziției 2.7 pentru fiecare $r \in \Re$ mulțimea $\{(u,a) \in V \times \Re \mid \Phi(u, a) \le r\}$ este închisă. Pentru $r = 0$ se obține că mulțimea $\mathrm{epi}F = \{(u,a) \in V \times \Re \mid F(u) \le a\} = \{(u,a) \in V \times \Re \mid \Phi(u, a) \le 0\}$ este închisă.

Suficiența. Vom arăta că pentru fiecare $r \in \Re$ mulțimea $\{(u,a) \in V \times \Re \mid \Phi(u,a) \le r\}$ este închisă ceea ce pe baza Propoziției 2.7 este echivalent cu faptul că Φ este inferior semicontinuă. Are loc următoarea relație

$\{(u, a) \in V \times \Re \mid \Phi(u, a) \le r\} = \{(u, a) \in V \times \Re \mid F(u) \le a + r\} = \{(u , q) \in V \times \Re \mid F(u) \le q\} + \{(0, -r)\}$.

Mulțimea $\mathrm{epi}F$ fiind închisă rezultă că şi $\mathrm{epi}F + \{(0, -r)\}$ este închisă [14], de unde rezultă că mulțimea $\{(u,a) \in V \times \Re \mid \Phi(u, a) \le r\}$ este închisă. ■

Propoziția 2.9. Orice funcție $F : V \to \overline{\Re}$ convexă şi inferior semicontinuă rămâne inferior semicontinuă atunci când topologia lui V este înlocuită cu topologia slabă $\sigma(V,V^*)$.

Demonstrație. Conform Teoremei 2.5 şi Teoremei 2.8 rezultă că $\mathrm{epi}F$ este o mulțime convexă şi închisă. În [8] se arată că o mulțime convexă şi închisă este slab închisă. Rezultă aşadar pe baza Teoremei 2.8 că funcția F este inferior semicontinuă în topologia slabă $\sigma(V, V^*)$. ■

Rezultatul următor este unul foarte important în cazul funcțiilor improprii.

Propoziția 2.10. Dacă V este un spațiu local convex real iar $F : V \to \overline{\Re}$ o funcție convexă şi inferior semicontinuă astfel încât F să ia valoarea $-\infty$ atunci F nu poate lua altă valoare finită.

Demonstrație. Să presupunem că există $u_0 \in V$ astfel încât $F(u_0) \in \Re$ şi să alegem pe $a_0 \in \Re$ astfel încât $a_0 < F(u_0)$. În acest caz, $(u_0, a_0) \notin \mathrm{epi}F$ care pe baza Teoremelor 2.5 şi 2.8 este o mulțime convexă şi închisă. Aplicând Teorema 1.3 rezultă că există o funcțională liniară şi continuă $v^* \in (V \times \Re)^* \setminus \{0\}$ astfel încât $v^*(u_0, a_0) < v^*(u, a)$, oricare ar fi $(u,a) \in \mathrm{epi}F$. Există, aşadar, $u^* \in V^*$ şi $r \in \Re$, $u^* \neq 0$, astfel încât $v^*(u,a) = u^*(u) + ra$. Acest lucru ne conduce la faptul că, pentru fiecare $(u,a) \in \mathrm{epi}F$, are loc relația

$$u^*(u_0) + ra_0 < u^*(u) + ra.$$

Din $(u_0, F(u_0)) \in \mathrm{epi}F$ se obține că $r(F(u_0)-a_0) > 0$, ceea ce conform alegerii lui a_0 implică că $r > 0$. Se obține, pentru fiecare $(u, a) \in \mathrm{epi}\, F$,

$$\frac{1}{r}\, u^*(u_0 - u) + a_0 < a.$$

Pentru fiecare $u \in V$, $(u, F(u)) \in \mathrm{epi}F$ şi rezultă

$$\frac{1}{r}\, u^*(u_0 - u) + a_0 < F(u).$$

Această ultimă relație nu poate fi adevărată deoarece membrul stâng este peste tot finit în timp ce membrul drept ia în cel puțin un punct valoarea $-\infty$. ■

Următoarele propoziții studiază continuitatea funcțiilor convexe.

Propoziția 2.11. Dacă funcția convexă $F : V \to \overline{\Re}$ este mărginită superior de o constantă finită pe o vecinătate deschisă a unui punct $u_0 \in V$ atunci F este continuă în u_0.

Demonstrație. Vom trata întîi cazul $u_0 = 0$ şi $F(0) = 0$. Fie $a \in \Re$ şi U o vecinătate deschisă a lui 0 astfel încât oricare ar fi $u \in U$, $F(u) \leq a < +\infty$.

Fie $\varepsilon > 0$. Fără a restrânge generalitatea putem considera $\varepsilon \in (0, 2a)$. Notăm $W = U \cap (-U)$ şi $W' = \frac{\varepsilon}{2a} W$, care este tot o vecinătate deschisă a lui 0.

Dacă $v \in W'$ implică că $\frac{2a}{\varepsilon} v \in U$ şi ținând cont de faptul că $0 < \frac{\varepsilon}{2a} < 1$ şi că F este convexă are loc relația

$$F(v) = F\left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{2a}\right)0 + \frac{\varepsilon}{2a}\left(\frac{2a}{\varepsilon} v\right)\right) \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2a}\right)F(0) + \frac{\varepsilon}{2a} F\left(\frac{2a}{\varepsilon} v\right)$$

F fiind mărginită superior rezultă că

$$F(v) \leq \frac{\varepsilon}{2a}\, a = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Alegând din nou $v \in W'$ implică că $\frac{2a}{\varepsilon} v \in -U \Leftrightarrow -\frac{2a}{\varepsilon} v \in U$ şi ținând cont de faptul că F este o funcție convexă se obține

$$F(0) = F\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2a}}v + \frac{\frac{\varepsilon}{2a}}{1+\frac{\varepsilon}{2a}}\left(-\frac{2a}{\varepsilon}v\right)\right) \leq \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2a}}F(v) + \frac{\frac{\varepsilon}{2a}}{1+\frac{\varepsilon}{2a}}F\left(-\frac{2a}{\varepsilon}v\right).$$

Aplicând din nou faptul că F este mărginită superior rezultă

$$F(v) \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2a}\right)F(0) - \frac{\varepsilon}{2a}\,F\left(-\frac{2a}{\varepsilon}v\right) \geq -\frac{\varepsilon}{2} > -\varepsilon.$$

S-a obținut, deci, o vecinătate deschisă W' a lui 0 astfel încât oricare ar fi $v \in W'$ să aibă loc $|F(v)| < \varepsilon$, ceea ce asigură continuitatea lui F în 0.

Considerăm cazul $u_0 = 0$ şi $F(0) = c$, $c \in \Re$. Fie $a \in \Re$ şi U o vecinătate deschisă a lui 0 astfel încât oricare ar fi $u \in U$, $F(u) \leq a < +\infty$. Definim funcția $G : V \to \overline{\Re}$, $G(u) = F(u) - c$.

Funcția G este convexă şi verifică $G(0) = 0$. De asemenea oricare ar fi $u \in U$, $G(u) = F(u) - c \leq a - c$. Conform etapei anterioare funcția G este continuă în 0, ceea ce face ca şi F să fie continuă în 0.

Considerăm cazul cel mai general când $u_0 \in V$ este oarecare şi fie $a \in \Re$ şi U o vecinătate deschisă a lui u_0 astfel încât oricare ar fi $u \in U$, $F(u) \leq a < +\infty$. Definim funcția $G : V \to \overline{\Re}$, $G(v) = F(v + u_0)$ şi considerăm mulțimea $U' = U - u_0$ care este o vecinătate deschisă a lui 0. G este o funcție convexă şi pentru fiecare $u' \in U'$, $u' = u - u_0$, unde $u \in U$ are loc relația

$$G(u') = F(u) < a.$$

Funcția G este mărginită superior pe o vecinătate deschisă a originii şi conform etapei anterioare G este continuă în origine.Având în vedere faptul că $G(0) = F(u_0)$ rezultă că F este continuă în u_0. ■

Teorema 2.12. Fie $F : V \to \overline{\Re}$ o funcție convexă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) există o mulțime deschisă, nevidă $O \subseteq V$ astfel încât funcția F să nu fie constantă $-\infty$ pe O şi să fie mărginită superior pe O de o constantă $a < +\infty$.

(ii) F este o funcție proprie şi continuă pe interiorul domeniului său efectiv care este o mulțime nevidă.

Demonstrație. (i)$\Rightarrow$(ii) Oricare ar fi $u \in O$, $F(u) \leq a$, ceea ce implică că $O \subseteq \mathrm{dom}F$. Rezultă atunci că $O \subseteq \mathrm{int}\, O \subseteq \mathrm{int}\, \mathrm{dom}F$ iar din faptul că $O \neq \emptyset$ se obține că int $\mathrm{dom}F \neq \emptyset$.

Vom arăta că funcția F este proprie. Din ipoteză rezultă că există $u_0 \in O$ astfel încât $F(u_0) > -\infty$. Mulțimea O este o vecinătate deschisă a lui u_0 şi, oricare ar fi $u \in O$, $F(u) \leq a$. Din Propoziția 2.11 rezultă că F este continuă în u_0. Există atunci o vecinătate deschisă U a lui u_0 astfel încât, oricare ar fi $u \in U$,

$$F(u) > -\infty.$$

Presupunem că există un punct $v_0 \in V$ astfel încât $F(v_0) = -\infty$. Conform Propoziției 2.4 se obține că, pentru fiecare $w \in [v_0, u_0)$, $F(w) = -\infty$. Însă, $[v_0, u_0) \cap U \neq \emptyset$ şi există aşadar un punct $w' \in [v_0, u_0) \cap U$. Înseamnă că $F(w') = -\infty$, ceea ce este contradicție cu faptul că $w' \in U$.

Am obținut că pentru fiecare $v \in V$, $F(v) > -\infty$ şi datorită faptului că, oricare ar fi $u \in O$, $F(u) < a$ rezultă că F este funcție proprie.

Vom arăta acum că F este continuă pe int dom$F$. Considerăm $v_0 \in$ int dom F, un punct arbitrar. Datorită faptului că $u_0 \in O \subseteq \mathrm{int}\, \mathrm{dom}F$ rezultă că există un număr real $\lambda > 1$ astfel încât $w_0 = (1-\lambda)u_0 + \lambda v_0 \in \mathrm{int}\, \mathrm{dom}F$. Definim funcția $h : O \to h(O)$,

$$h(u) = (1-\frac{1}{\lambda})u + \frac{1}{\lambda} w_0$$

Are loc relația $h(u_0) = (1-\frac{1}{\lambda})u_0 + \frac{1}{\lambda} w_0 = v_0$, ceea ce înseamnă că $v_0 \in h(O)$. O fiind mulțime deschisă şi $1-\frac{1}{\lambda}$ fiind nenul rezultă că $(1-\frac{1}{\lambda})O$ este deschisă şi, de asemenea, rezultă că $h(O) = (1-\frac{1}{\lambda})O + \frac{1}{\lambda} w_0$ este mulțime deschisă ([10]). $h(O)$ este atunci vecinătate deschisă a lui v_0.

Alegând un punct arbitrar $v' \in h(O)$ rezultă că există $u' \in O$ astfel încât $h(u') = v'$, echivalent cu $(1-\frac{1}{\lambda})u' + \frac{1}{\lambda} w_0 = v'$. Avem aşadar următoarea relație

$$F(v') = F((1-\frac{1}{\lambda})u' + \frac{1}{\lambda} w_0) \leq \frac{\lambda-1}{\lambda} F(u') + \frac{1}{\lambda} F(w_0) \leq \frac{\lambda-1}{\lambda} a + \frac{1}{\lambda} F(w_0).$$

Funcţia F este mărginită superior pe o vecinătate deschisă h(O) a lui v_0 iar pe baza Propoziţiei 2.11 acest lucru implică că F este continuă în v_0.

(ii)$\Rightarrow$(i) Datorită faptului că int dom$F \neq \emptyset$ rezultă că există $u_0 \in$ int dom$F$ şi există a_0 număr real astfel încât $F(u_0) < a_0$. Funcţia F fiind proprie rezultă că $F(u_0) > -\infty$. Din continuitatea funcţiei F în u_0 rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui u_0 astfel încât, pentru fiecare $u \in$ U, să aibă loc $F(u) < a_0$. Aşadar, U este o mulţime deschisă şi nevidă pe care F este mărginită superior iar din faptul că F este funcţie proprie rezultă că nu poate fi constantă $-\infty$ pe U. ■

În cele ce urmează vom defini şi studia două noţiuni importante, regularizata inferior semicontinuă şi Γ- regularizata unei funcţii.

Pentru început vom face observaţia că, fiind dată o familie de funcţii inferior semicontinue F_i: V $\rightarrow \overline{\Re}$ (i $\in$ I), funcţia F: V $\rightarrow \overline{\Re}$, definită prin $F(u) = \sup\{ F_i(u) \mid i \in I\}$ este de asemenea inferior semicontinuă [11]. Acest lucru ne conduce la următoarea definiţie.

Definiţie. Fiind dată o funcţie F: V $\rightarrow \overline{\Re}$, se numeşte regularizata inferior semicontinuă a lui F, notată $\overline{F}$, cea mai mare funcţie inferior semicontinuă care o minorează pe F.

Existenţa regularizatei inferior semicontinue ne este asigurată de observaţia anterioară, propoziţia de mai jos fiind o caracterizare a acestei funcţii.

Propoziţia 2.13. Fie F: V $\rightarrow \overline{\Re}$ o funcţie şi $\overline{F}$ regularizata sa inferior semicontinuă. Au loc egalităţile următoare:

(2.8) $$\text{epi}\,\overline{F} = \overline{\text{epi}F}$$

(2.9) $$\varliminf_{v\to u} F(v) = \overline{F}(u),$$

oricare ar fi $u \in$ V.

Demonstraţie. Oricare ar fi $v \in$ V, are loc $\overline{F}(v) \le F(v)$, ceea ce implică că epi$F = \{(u,a) \mid F(u) \le a\} \subseteq \text{epi}\,\overline{F} = \{(u,a) \mid \overline{F}(u) \le a\}$. Rezultă de aici că $\overline{\text{epi}F} \subseteq \overline{\text{epi}\overline{F}}$. $\overline{F}$ fiind o funcţie inferior semicontinuă rezultă, conform Teoremei 2.8, că epi $\overline{F}$ este o mulţime închisă şi se obţine în cele din urmă

$$\overline{\mathrm{epi}F} \subseteq \mathrm{epi}\,\overline{F} = \overline{\mathrm{epi}\overline{F}}\,.$$

Pentru a demonstra incluziunea inversă vom arăta că există o funcție $G : V \to \overline{\Re}$ astfel încât $\mathrm{epi}G = \overline{\mathrm{epi}F}$.

Fie $(u,a) \in \overline{\mathrm{epi}F}$. Există atunci un şir generalizat $(u_\alpha, a_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq \mathrm{epi}F$ care converge la (u, a). Oricare ar fi b un număr real , b > a există un $\alpha_0 \in I$ astfel încât, pentru fiecare $\alpha \geq \alpha_0$, să aibă loc $a_\alpha \leq b$. Pentru fiecare $\alpha \geq \alpha_0$ avem însă că $(u_\alpha, a_\alpha) \in \mathrm{epi}F$, ceea ce implică că $F(u_\alpha) \leq a_\alpha \leq b$. Se obține aşadar că, oricare ar fi $\alpha \geq \alpha_0$, $(u_\alpha, b) \in \mathrm{epi}F$ şi trecând la limită rezultă că $(u, b) \in \mathrm{epi}F$.

Am arătat deci că intersecția lui $\overline{\mathrm{epi}F}$ cu dreapta $\{u\} \times \Re$ este mulțimea vidă sau o mulțime închisă $\{u\} \times [a, +\infty)$. Construim atunci funcția $G : V \to \overline{\Re}$ definită astfel $G(u) = +\infty$, dacă $\overline{\mathrm{epi}F} \cap (\{u\} \times \Re) = \varnothing$ şi $G(u) = a$, în caz contrar.

Vom arăta că $\mathrm{epi}G = \overline{\mathrm{epi}F}$. Alegând $(u, b) \in \mathrm{epi}G$, implică că $G(u) \leq b$, ceea ce conform definiției lui G înseamnă că $(u, b) \in \overline{\mathrm{epi}F}$. Se obține aşadar că $\mathrm{epi}G \subseteq \overline{\mathrm{epi}F}$.

Fie acum $(u, b) \in \overline{\mathrm{epi}F}$. $\overline{\mathrm{epi}F} \cap (\{u\} \times \Re)$ fiind nevidă rezultă, conform definiției lui G, că $G(u) \leq b$, echivalent cu $(u,b) \in \mathrm{epi}G$. Are loc şi relația inversă $\overline{\mathrm{epi}F} \subseteq \mathrm{epi}G$, ceea ce implică că $\overline{\mathrm{epi}F} = \mathrm{epi}G$.

Mulțimea epi$G$ este atunci închisă şi conform Teoremei 2.8 rezultă că funcția G este inferior semicontinuă.

Oricare ar fi $u \in V$, $(u, F(u)) \in \mathrm{epi}F \subseteq \overline{\mathrm{epi}F} = \mathrm{epi}G$, ceea ce implică că $G(u) \leq F(u)$. Funcția G este, deci, un minorant inferior semicontinu a lui F şi are loc relația $G \leq \overline{F}$, care implică că $\mathrm{epi}\,\overline{F} \subseteq \mathrm{epi}G$. Am obținut, în concluzie, şi relația inversă $\mathrm{epi}\,\overline{F} \subseteq \overline{\mathrm{epi}F}$ ceea ce înseamnă că relația (2.8) este adevărată.

Vom demonstra în continuare că şi relația (2.9) este adevărată.

Fie $u \in V$ arbitrar, şi $U = \{ U_\alpha \}_{\alpha\in I}$ filtrul vecinătăților lui u. Conform relației (1.1) avem $\underline{\lim}_{v\to u} F(v) = \sup_{U_\alpha\in U} \inf_{v\in U_\alpha} F(v)$. Oricare ar fi $v \in V$, $\overline{F}(v) \leq F(v)$ şi ținând cont de faptul că $\overline{F}$ este inferior semicontinuă are loc

$$\underline{\lim}_{v \to u} F(v) \geq \underline{\lim}_{v \to u} \overline{F}(v) \geq \overline{F}(u)$$

Să presupunem prin absurd că $\underline{\lim}_{v \to u} F(v) > \overline{F}(u)$. Rezultă că există o vecinătate deschisă $U_\alpha \in U$ a lui u, astfel încât $\inf_{v \in U_\alpha} F(v) > \overline{F}(u)$. Notăm $m = \inf_{v \in U_\alpha} F(v)$. Are loc relația $\overline{F}(u) < \frac{m + \overline{F}(u)}{2} < m$. Alegem pe $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\overline{F}(u) < \frac{m + \overline{F}(u)}{2} - \varepsilon < \frac{m + \overline{F}(u)}{2} < \frac{m + \overline{F}(u)}{2} + \varepsilon < m.$$

Din faptul că $(u, \frac{m + \overline{F}(u)}{2}) \in \operatorname{epi} \overline{F}$, conform relației (2.8), obținem că $(u, \frac{m + \overline{F}(u)}{2}) \in \overline{\operatorname{epi} F}$, ceea ce implică că oricare ar fi W o vecinătate deschisă a lui $(u, \frac{m + \overline{F}(u)}{2})$, $W \cap \operatorname{epi} F \neq \emptyset$.

Mulțimea $W' = U_\alpha \cap (\frac{m + \overline{F}(u)}{2} - \varepsilon, \frac{m + \overline{F}(u)}{2} + \varepsilon)$ este o vecinătate deschisă a lui $(u, \frac{m + \overline{F}(u)}{2})$. Oricare ar fi $(w, c) \in W'$ avem că

$$F(w) \geq \inf_{v \in U_\alpha} F(v) = m > \frac{m + \overline{F}(u)}{2} + \varepsilon > c$$

ceea ce implică că $(w, c) \notin \operatorname{epi} F$ .Obținem că $W' \cap \operatorname{epi} F = \emptyset$, ceea ce ne conduce la contradicție. Rezultă că relația $\underline{\lim}_{v \to u} F(v) = \overline{F}(u)$ are loc. ■

Definiție. Fie V un spațiu local convex. Se numeşte funcție afin continuă pe V o funcție $F : V \to \overline{\Re}$ de tipul $F(v) = \ell(v) + \alpha$, unde ℓ este o funcție liniară şi continuă din V*, iar α este un număr real.

Definiție. Se notează $\Gamma(V)$ mulțimea funcțiilor $F : V \to \overline{\Re}$ care sunt înfăşurătoare superioară a unei familii oarecare de funcții afin continue. Vom nota $\Gamma_0(V)$ mulțimea funcțiilor $F \in \Gamma(V)$ diferite de constantele $+\infty$ şi $-\infty$.

Teorema următoare a fost prezentată în [6].

Teorema 2.14. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $F \in \Gamma(V)$.

(ii) $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ este funcție convexă, inferior semicontinuă și dacă ia într-un punct valoarea $-\infty$ este identică $-\infty$.

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii) Dacă $F \in \Gamma(V)$ implică că F este funcție convexă și inferior semicontinuă. Fie $u \in V$ astfel încât $F(u) = -\infty$. În acest caz familia de funcții a cărei învelitoare superioară este F este $\emptyset$, ceea ce implică că pentru fiecare $u \in V$ are loc $F(u) = -\infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Considerăm $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ o funcție convexă și inferior semicontinuă astfel încât oricare ar fi $u \in V$, $F(u) > -\infty$.

Dacă F este constantă $+\infty$, ea este învelitoarea superioară a familiei tuturor funcțiilor afin continue definite pe V cu valori în $\overline{\mathfrak{R}}$, deci $F \in \Gamma(V)$.

Dacă $F \in \Gamma_0(V)$ vom arăta că, oricare ar fi $u_0 \in V$ și oricare ar fi $a_0 \in \mathfrak{R}$ astfel încât $a_0 < F(u_0)$, există o funcție afin continuă definită pe V cu valori în $\mathfrak{R}$ a cărei valoare în punctul u_0 este cuprinsă între a_0 și $F(u_0)$. Acest lucru ne va asigura că F este învelitoarea superioară a acestei familii de funcții.

Teoremele 2.5 și 2.8 ne asigură că mulțimea epi$F$ este convexă și închisă iar $(u_0, a_0) \notin$ epi$F$. Conform Teoremei 1.3 putem separa strict pe (u_0, a_0) de epi$F$ printr-un hiperplan $H=\{ (u, a) \in V \times \mathfrak{R} \mid u^*(u) + \alpha a = \beta \}$, unde $u^* \in V^*$, $u^* \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$.

Oricare ar fi $(u, a) \in$ epi$F$, are loc

$$u^*(u) + \alpha a > \beta$$

și mai avem că

$$u^*(u_0) + \alpha a_0 < \beta.$$

Dacă $F(u_0) < +\infty$, rezultă că $(u_0, F(u_0)) \in$ epi$F$ și de aici se obține $\alpha(F(u_0) - a_0) > 0$. Având în vedere modul în care au fost aleși u_0 și a_0 implică că $\alpha > 0$. Rezultă așadar

$$a_0 < \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} u^*(u_0) < F(u_0).$$

Am găsit funcția afin continuă $\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} u^*$ cu proprietatea căutată.

Analizăm cazul în care $F(u_0) = +\infty$. Dacă $\alpha \neq 0$ găsirea funcţiei afin continue se realizează ca şi în cazul precedent.

Dacă $\alpha = 0$ obţinem oricare ar fi $u \in \mathrm{dom}F$, $u^*(u) > \beta$ şi $u^*(u_0) < \beta$. Funcţia $g : V \to \Re$, definită prin $g(u) = \beta - u^*(u)$, are proprietăţile că, oricare ar fi $u \in \mathrm{dom}F$, $g(u) < 0$ şi $g(u_0) > 0$. Fie $\gamma - v^*(\cdot)$ un minorant afin continuu al lui F. Rezultă atunci că, oricare ar fi $c > 0$, funcţia $\gamma - v^*(\cdot) + cg(\cdot)$ este un minorant afin continuu al lui F. Putem alege, în concluzie, un c_0, convenabil, astfel încât

$$\gamma - v^*(u_0) + c_0 g(u_0) = \gamma - v^*(u_0) + c_0(\beta - u^*(u_0)) > a_0 \qquad \blacksquare$$

Vom defini în continuare noţiunea de Γ-regularizată a unei funcţii, având la bază propoziţia următoare.

Propoziţia 2.15. Considerăm două funcţii F, G: $V \to \overline{\Re}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) G este învelitoarea superioară a minoranţilor afin continui ai lui F

(ii) G este cea mai mare funcţie din $\Gamma(V)$, minorant a lui F

Funcţia G se numeşte Γ- regularizata lui F.

Demonstraţie. Fie G_1 învelitoarea superioară a minoranţilor afin continui ai lui F şi G_2 învelitoarea superioară a funcţiilor din $\Gamma(V)$, minoranţi ai lui F.

Rezultă că $G_1 \in \Gamma(V)$ care implică că $G_1 \leq G_2$.

Reciproc, toţi minoranţii afin continui ai lui G_2 sunt funcţii din $\Gamma(V)$ şi ,în plus, minoraţi ai lui F. Obţinem, prin urmare, că minoranţii afin continui ai lui G_2 sunt minoranţi afin continui ai lui G_1, ceea ce implică că are loc şi relaţia inversă $G_2 \leq G_1$. $\blacksquare$

Următoarea propoziţie a cărei demonstraţie se găseşte în [6] reprezintă o caracterizare a epigrafului Γ-regularizatei unei funcţii.

Propoziţia 2.16. Fie $F : V \to \overline{\Re}$ o funcţie şi G Γ-regularizata sa. Dacă F admite un minorant afin continuu, atunci are loc relaţia

$$\mathrm{epi}G = \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{epi}F.$$

Observaţia 2.6. Dacă $A \subseteq V$ atunci pe baza Propoziţiei 2.16 se arată că Γ-regularizata funcţiei indicatoare χ_A este funcţia $\chi_{\overline{\mathrm{co}}A}$.

În încheierea acestei secțiuni vom prezenta relația care există între o funcție, regularizata sa inferior semicontinuă şi Γ-regularizata sa.

Propoziția 2.17. Fie $F : V \to \overline{\Re}$ o funcție şi G Γ-regularizata sa. Următoarele afirmații sunt adevărate:

(i) $G \leq \overline{F} \leq F$

(ii) Dacă F este funcție convexă şi posedă un minorant afin continuu, atunci $\overline{F} = G$.

Demonstrație. (i) Conform definiției lui $\overline{F}$ avem că $\overline{F} \leq F$. G fiind Γ-regularizata lui F implică că $G \leq F$ ceea ce înseamnă că $\text{epi}F \subseteq \text{epi}G$. Obținem, aşadar, că $\overline{\text{epi}F} \subseteq \overline{\text{epi}G}$. Funcția $G \in \Gamma(V)$, ceea ce înseamnă că G este continuă şi, pe baza Teoremei 2.8, rezultă că $\overline{\text{epi}G} = \text{epi}G$.

Conform Propoziției 2.13 rezultă că $\overline{\text{epi}F} = \text{epi}\,\overline{F}$ obținându-se aşadar că $\text{epi}\,\overline{F} \subseteq \text{epi}G$. Oricare ar fi $u \in V$, $(u, \overline{F}(u)) \in \text{epi}\,\overline{F}$, ceea ce implică că $(u, \overline{F}(u)) \in \text{epi}G$. Obținem, în final, că oricare ar fi $u \in V$, $G(u) \leq \overline{F}(u)$, echivalent cu $G \leq \overline{F}$.

(ii) Datorită faptului că F posedă un minorant afin continuu rezultă, pe baza Propoziției 2.16, că $\text{epi}G = \overline{\text{co}}\,\text{epi}F$. Funcția F fiind convexă implică din, Teorema 2.5, că are epigraful convex şi obținem că $\text{epi}G = \overline{\text{epi}F} = \text{epi}\,\overline{F}$. Oricare ar fi $u \in V$, $(u, G(u)) \in \text{epi}G = \text{epi}\,\overline{F}$ ceea ce implică că, oricare ar fi $u \in V$, $\overline{F}(u) \leq G(u)$, echivalent cu $\overline{F} \leq G$. La punctul anterior am arătat că are loc şi relația inversă $G \leq \overline{F}$. În final se obține că $\overline{F} = G$. ■

3. Funcții conjugate

În continuare vom presupune că V este un spațiu local convex, iar V* dualul său algebrico-topologic. Cele două spații vor fi considerate în dualitate prin funcția biliniară $<\cdot,\cdot>$.

Fie funcția $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$, α un număr real şi $u^* \in V^*$. Funcția $\ell : V \to \mathfrak{R}$ definită prin $\ell(u) = < u^*, u> + \alpha$ minorează pe F dacă şi numai dacă, oricare ar fi $u \in V$, are loc $\ell(u) \le F(u)$, ceea ce este echivalent cu

(3.1) $$< u^*, u> - F(u) \le \alpha,$$

oricare ar fi $u \in V$.

Funcția ℓ este un minorant afin continuu al lui F şi, considerând mulțimea tuturor minoranților afini continui ai lui F, aceasta ne conduce la următoarea definiție dată de W. Fenchel [7].

Definiție. Fie funcția $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$. Numim funcție conjugată a lui F funcția $F^*: V^* \to \overline{\mathfrak{R}}$ definită prin

(3.2) $$F^*(u^*) = \sup_{u\in V} \{ < u^*, u> - F(u)\}.$$

Pe baza relației (3.1) rezultă că $F^*(u^*) \le \alpha$.

Observația 3.1. Cu ajutorul relației (3.2) vom da o interpretare grafică noțiunii de conjugată a unei funcții în cazul $V = \mathfrak{R}$. Fie $F : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ funcția reprezentată grafic în Fig.1. Conjugata ei va fi $F^* : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, unde am identificat pe $\mathfrak{R}^*$ cu $\mathfrak{R}$. Considerăm pe $u^* \in \mathfrak{R}$, fixat. Atunci, $-F^*(u^*) = \inf_{u\in V} \{ F(u) - < u^*, u>\}$. Aşadar, oricare ar fi $u \in V$, avem că $-F^*(u^*) \le F(u) - < u^*, u> = F(u) - u^*\cdot u$.

Pentru fiecare $u \in \mathfrak{R}$, $F(u) - u^*\cdot u$ reprezintă lungimea segmentului de pe dreapta $\{u\}\times \mathfrak{R}$ cuprins între graficele funcției F şi a funcției liniare $\ell : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, definită prin $\ell(u) = u^*\cdot u$. Considerând lungimea minimă a acestor segmente se obține chiar valoarea lui $-F^*(u^*)$.

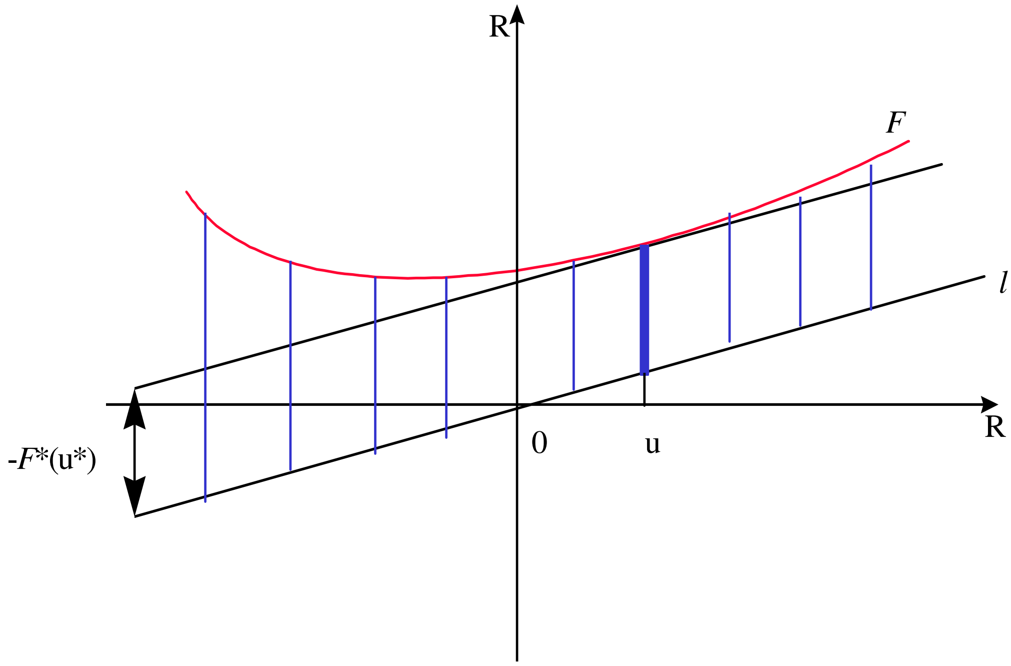

Fig. 1

Observația 3.2. Având în vedere că oricare ar fi $u \in \mathrm{dom}F$, $F(u) = +\infty$, în relația (3.2) supremumul nu se atinge pe mulțimea $\{ u \in V \,|\, F(u) = +\infty \}$. Obținem o relație echivalentă pentru definirea funcției conjugate

(3.3) $$F^*(u^*) = \sup_{u \in \mathrm{dom}F} \{ \langle u^*, u \rangle - F(u) \}.$$

Observația 3.3. Oricare ar fi $u \in \mathrm{dom}F$, avem că $F(u) < +\infty$ și obținem astfel o familie de funcții afin continue $G_u : V^* \to \overline{\mathfrak{R}}$ definite prin $G_u(u^*) = \langle u^*, u \rangle - F(u)$. Funcția conjugată a lui F reprezintă învelitoarea superioară a familiei $\{ G_u \,|\, u \in \mathrm{dom}F \}$, ceea ce implică că $F^* \in \Gamma(V^*)$ iar, conform Teoremei 2.14, această funcție este convexă și inferior semicontinuă.

Observația 3.4. Dacă funcția $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ este identică $+\infty$, atunci $\mathrm{dom}F = \varnothing$, iar, conform relației (3.3), F^* este supremumul unei familii vide. Funcția F^* este atunci identică $-\infty$.

Teorema 3.1. Fie funcția $F : V \to \overline{\Re}$ şi $F^*: V^* \to \overline{\Re}$ funcția conjugată a lui F. Următoarele afirmații sunt adevărate:

(i) $$F^*(0) = -\inf_{u \in V} F(u).$$

(ii) Dacă $G: V \to \overline{\Re}$ este o funcție astfel încât $F \leq G$, atunci $G^* \leq F^*$.

(iii) Dacă $(F_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții, $F_i : V \to \overline{\Re}\,(i \in I)$, atunci au loc relațiile

(3.4) $$(\inf_{i \in I} F_i)^* = \sup_{i \in I} F_i$$

(3.5) $$(\sup_{i \in I} F_i)^* \leq \inf_{i \in I} F_i^*.$$

(iv) Oricare ar fi $\lambda > 0$ şi oricare ar fi $u^* \in V^*$, are loc

$$(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*(\frac{u^*}{\lambda}).$$

(v) Oricare ar fi $\alpha \in \Re$, are loc

$$(F + \alpha)^* = F^* - \alpha$$

(vi) Dacă, pentru fiecare $a \in V$ notăm cu $F_a: V \to \overline{\Re}$ funcția definită prin $F_a(v) = F(v-a)$, atunci are loc

$$(F_a)^*(u^*) = F^*(u^*) + \langle a, u^* \rangle .$$

Demonstrație. (i) Conform relației (3.2) se obține

$$F^*(0) = \sup_{u \in V} \{ \langle 0, u \rangle - F(u)\} = \sup_{u \in V} \{ -F(u) \} = -\inf_{u \in V} F(u).$$

(ii) Oricare ar fi $u^* \in V^*$, pe baza lui (3.2) se obține

$$G^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{ \langle u^*, u \rangle - G(u)\} = \sup_{u \in V} \{ \langle u^*, u \rangle + (-G(u))\} \leq \sup_{u \in V} \langle u^*, u \rangle + \sup_{u \in V} (-G(u))$$

Oricare ar fi $u \in V$, $F(u) \leq G(u) \Leftrightarrow -G(u) \leq -F(u)$ ceea ce implică că $G^*(u^*) \leq \sup_{u \in V} \langle u^*, u \rangle + \sup_{u \in V} (-F(u)) = \sup_{u \in V} \langle u^*, u \rangle - F(u) \} = F^*(u^*)$

Se obține aşadar, datorită faptului că u^* a fost ales arbitrar, că $G^* \leq F^*$.

(iii) Fie $u^* \in V^*$. Avem atunci $(\inf_{i \in I} F_i)^* (u^*) = \sup_{u \in V} \{ \langle u^*, u \rangle - (\inf_{i \in I} F_i)(u) \} =$

$\sup_{u \in V} \{ \langle u^*, u \rangle + \sup_{i \in I} (-F_i(u))\} = \sup_{u \in V} \sup_{i \in I} \{ \langle u^*, u \rangle - F_i(u)\} = \sup_{i \in I} \sup_{u \in V} \{ \langle u^*, u \rangle - F_i(u)\} =$

$\sup_{i \in I} F_i^*(u^*)$.

Mai avem pe de altă parte $(\sup_{i\in I} F_i)^*(u^*) = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - (\sup_{i\in I} F_i)(u) \} = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> + \inf_{i\in I}(-F_i(u)) \} = \sup_{u\in V}\inf_{i\in I}\{ <u^*, u> - F_i(u)\} = \inf_{i\in I}\sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - F_i(u)\} = \inf_{i\in I} F_i^*(u^*)$.

Punctul u* fiind ales arbitrar din V* rezultă că relațiile (3.4) şi (3.5) sunt adevărate.

(iv) Considerăm $\lambda > 0$. Obținem, prin urmare, oricare ar fi $u^*\in V^*$,
$(\lambda F)^*(u^*) = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - (\lambda F)(u)\} = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - \lambda F(u)\} = \sup_{u\in V}\{ \lambda(<\frac{u^*}{\lambda}, u> - F(u))\} = \lambda \sup_{u\in V}\{ <\frac{u^*}{\lambda}, u> - F(u) \} = \lambda F^*(\frac{u^*}{\lambda})$

(v) Oricare ar fi $\alpha \in \Re$ şi oricare ar fi $u^* \in V^*$, obținem $(F+\alpha)^*(u^*) = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - (F+\alpha)(u)\} = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - F(u) - \alpha \} = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - F(u) \} - \alpha = F^*(u^*) - \alpha$. Rezultă prin urmare că oricare ar fi $\alpha \in \Re$, $(F+\alpha)^* = F^* - \alpha$.

(vi) Considerăm pe $a \in V$, ales arbitrar. Obținem atunci, oricare ar fi $u^*\in V^*$, $(F_a)^*(u^*) = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - (F_a)(u)\} = \sup_{u\in V}\{ <u^*, u> - F(u-a)\}$. Făcând schimbarea de variabilă $u - a = v$ rezultă $(F_a)^*(u^*) = \sup_{v\in V}\{ <u^*, a + v> - F(v)\} = \sup_{v\in V}\{ <u^*, v> - F(v)\} + <u^*, a> = F^*(u^*) + <u^*, a>$. ■

Observația 3.5. Spre deosebire de relația (3.4) în relația (3.5) se observă că avem inegalitate. Vom da un exemplu pentru care inegalitatea din relația (3.5) este strictă.

Fie $I = N^*$ şi $V = \Re$. Dualul său $V^* = \Re^*$, îl putem identifica cu $\Re$. Considerăm familia de funcții $(F_n)_{n\in N^*}$, $F_n: \Re \to \overline{\Re}$, definite prin $F_n(u) = -\frac{1}{n}u^2$. Funcția $\sup_{n\in N^*} F_n : \Re \to \overline{\Re}$ are forma $\sup_{n\in N^*} F_n(u) = 0$, oricare ar fi $u\in\Re$. Atunci $(\sup_{n\in N^*} F_n)^*(0) = 0$.

Pe de altă parte, oricare ar fi $n \in N^*$, $F_n^*(0) = \sup_{u\in\Re} \{ <0, u> - F_n(u)\} = \sup_{u\in\Re} \{\frac{1}{n}u^2\} = +\infty$. Aşadar, $(\inf_{n\in N^*} F_n^*)(0) = +\infty$.

În concluzie, are loc următoarea relație

$$(\sup_{n\in N^*} F_n)^*(0) = 0 < +\infty = (\inf_{n\in N^*} F_n^*)(0) \qquad \blacksquare$$

Relația demonstrată în teorema de mai jos poartă numele de inegalitatea lui Young [6].

Teorema 3.2. Fie funcția $F : V \to \overline{\Re}$ şi $F^*: V^* \to \overline{\Re}$ funcția conjugată a lui F. Oricare ar fi $u\in V$ şi oricare ar fi $u^* \in V^*$, are loc relația

(3.6) $\qquad F(u) + F^*(u^*) \geq <u^*, u>$.

Demonstrație. Oricare ar fi $u^* \in V^*$, avem conform definiției $F^*(u^*) = \sup_{u\in V} \{<u^*,u> - F(u)\}$. Se obține că, oricare ar fi $u^* \in V^*$ şi oricare ar fi $u \in V$,

$$F^*(u^*) \geq <u^*, u> - F(u)$$

relație echivalentă cu (3.6). $\blacksquare$

În continuare vom introduce noțiunea de biconjugată a unei funcții.

Definiție. Fie funcția $F: V \to \overline{\Re}$. Numim biconjugata funcției F, funcția $F^{**} : V\to\overline{\Re}$, definită prin

(3.7) $\qquad F^{**}(u) = \sup_{u^*\in V^*} \{ <u. u^*> - F^*(u^*)\}$,

unde $F^*: V^* \to \overline{\Re}$ este conjugata funcției F.

Pe baza Observației 3.3 se obține că $F^{**} \in \Gamma(V)$.

Propoziția 3.3. Fie $F : V \to \overline{\Re}$ o funcție. Funcția $F^{**} : V \to \overline{\Re}$ este atunci Γ-regularizata sa. În particular, dacă $F \in \Gamma(V)$, atunci $F^{**}= F$.

Demonstrație. Oricare ar fi $u^* \in V^*$, considerăm funcția $G_{u^*} : V \to \overline{\Re}$, definită prin $G_{u^*}(u) = <u, u^*> - F^*(u^*)$. Obținem aşadar o familie de funcții afin continue. Din relația (3.6) rezultă că oricare ar fi $u \in U$, $G_{u^*}(u) \leq F(u)$. Familia de funcții $\{ G_{u^*} \mid u^* \in V^*\}$ este o familie de minoranți afin continui ai lui F. Pe baza Propoziției 2.15 Γ-regularizata lui F este înveliotoarea superioară a acestei familii de funcții. Conform relației (3.7) învelitoarea superioară a familiei $\{ G_{u^*} \mid u^* \in V^*\}$ este chiar F^{**}.

În particular, dacă $F \in \Gamma(V)$, pe baza Propoziției 2.15, rezultă că Γ-regularizata lui F care este F^{**} coincide cu F. $\blacksquare$

Teorema următoare demonstrează că procesul de definire a conjugatelor de ordin superior ale unei funcţii este finit.

Teorema 3.4. Oricare ar fi funcţia $F : V \to \overline{\Re}$, are loc relaţia $F^* = F^{***}$, unde F^{***} este conjugata lui F^{**}.

Demonstraţie. Din Propoziţia 3.3 avem că F^{**} este Γ-regularizata lui F şi pe baza definiţiei Γ-regularizatei se obţine că $F^{**} \leq F$. Conform punctului (ii) al Teoremei 3.1 rezultă că $F^* \leq F^{***}$.

Funcţia $F^{***}: V^* \to \overline{\Re}$ se defineşte astfel $F^{***}(u^*) = \sup\limits_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F^{**}(u)\}$.

Fixând $u^* \in V^*$, pe baza inegalităţii lui Young, oricare ar fi $u \in V$, avem că

$$F^{**}(u) \geq \langle u, u^* \rangle - F^*(u^*) \Leftrightarrow \langle u, u^* \rangle - F^{**}(u) \leq F^*(u^*).$$

Trecând la supremum se obţine că $\sup\limits_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F^{**}(u)\} \leq F^*(u^*)$ şi în concluzie rezultă că $F^{***}(u^*) \leq F^*(u^*)$. Are loc deci şi relaţia inversă $F^{***} \leq F^*$. ■

Următoarea definiţie are la bază Propoziţia 3.3 care afirmă că $F \in \Gamma(V)$ dacă şi numai dacă $F = F^{**}$.

Definiţie. Despre funcţia $F \in \Gamma(V)$ şi funcţia $G \in \Gamma(V^*)$ spunem că sunt în dualitate dacă are loc

$$F^* = G \text{ şi } G^* = F.$$

Observaţia 3.6. Noţiunea de conjugată realizează o bijecţie între $\Gamma(V)$ şi $\Gamma(V^*)$. În plus, funcţia constantă $+\infty$ definită pe V este în dualitate cu funcţia constantă $-\infty$ definită pe V^* iar funcţia constantă $-\infty$ definită pe V este în dualitate cu funcţia constantă $+\infty$ definită pe V^*. Din acest motiv rezultă că $F \in \Gamma_0(V)$ dacă şi numai dacă $F^* \in \Gamma_0(V^*)$.

Observaţia 3.7. Fie $A \subseteq V$ şi $\chi_A : V \to \overline{\Re}$ funcţia sa indicatoare.Conjugata ei este funcţia $\chi_A^* : V^* \to \overline{\Re}$, $\chi_A^*(u^*) = \sup\limits_{u \in domF} \{\langle u^*, u \rangle - \chi_A(u)\} = \sup\limits_{u \in A} \langle u^*, u \rangle$. Funcţia χ_A^* se numeşte funcţia suport a lui A. Pe baza Propoziţiei 2.6 rezultă că $\chi_A^{**} = \chi_{\overline{coA}}$.

4. Subdiferenţiabilitatea funcţiilor

În cele ce urmează, cu ajutorul noţiunii de subdiferenţiabilitate a unei funcţii, vom da o condiţie necesară şi suficientă pentru care inegalitatea lui Young devine egalitate.

Definiţie. Fie dată o funcţie $F: V \to \overline{\Re}$. Despre un minorant afin continuu $\ell: V \to \Re$ al lui F spunem că este exact într-un punct $u_0 \in V$ dacă $\ell(u_0) = F(u_0)$.

Observaţia 4.1. Dacă ℓ este un minorant afin continuu al lui F exact în punctul $u_0 \in V$, atunci numărul $F(u_0) = \ell(u_0)$ este finit. Funcţia $\ell: V \to \Re$ fiind afin continuă va avea forma $\ell(u) = u^*(u) + \alpha = \langle u^*, u\rangle + \alpha$, unde $u^* \in V^*$ şi $\alpha \in \Re$. Obţinem că $F(u_0) = \langle u^*, u_0\rangle + \alpha$, de unde rezultă $\alpha = F(u_0) - \langle u^*, u_0\rangle$. În concluzie, funcţia $\ell: V \to \Re$ va fi definită astfel

$$\ell(u) = \langle u^*, u\rangle + F(u_0) - \langle u^*, u_0\rangle = \langle u^*, u - u_0\rangle + F(u_0).$$

Observaţia 4.2. Dacă ℓ este un minorant afin continuu al lui F exact în punctul $u_0 \in V$, se obţine că, oricare ar fi $u \in V$, $\ell(u) \le F(u)$, echivalent cu $\langle u^*, u - u_0\rangle + F(u_0) \le F(u)$. În concluzie, oricare ar fi $u \in V$, are loc

$$\langle u^*, u\rangle - F(u) \le \langle u^*, u_0\rangle - F(u_0).$$

Trecând la supremum după $u \in V$ în membrul stâng al ultimei relaţii, obţinem

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{\langle u^*, u\rangle - F(u)\} \le \langle u^*, u_0\rangle - F(u_0),$$

unde funcţia $F^*: V^* \to \overline{\Re}$ este funcţia conjugată a lui F. Se obţine, în final,

$$F^*(u^*) = \langle u^*, u_0\rangle - F(u_0). \tag{4.1}$$

Definiţie. Spunem că funcţia $F: V \to \overline{\Re}$ este subdiferenţiabilă în punctul $u_0 \in V$ dacă admite un minorant afin continuu exact în u_0.

Punctul $u^* \in V^*$ obţinut pe baza Observaţiei 4.1 se numeşte subgradientul lui F în u_0, iar mulţimea subgradienţilor lui F în u_0 se numeşte subdiferenţiala lui F în u_0 şi se notează $\partial F(u_0)$.

Dacă F nu este subdiferențiabilă în u_0, atunci $\partial F(u_0) = \emptyset$. Pe baza Observației 4.1 putem trage următoarea concluzie: $u^* \in \partial F(u_0)$ dacă şi numai dacă $F(u_0)$ este finită şi, oricare ar fi $u \in V$, are loc $\langle u^*, u - u_0\rangle + F(u_0) \le F(u)$.

Observația 4.3. Dacă ℓ este un minorant afin continuu al lui F exact în u_0, conform Propoziției 2.15, ℓ este minorant al Γ-regularizatei lui F. Din Propoziția 3.3, Γ-regularizata lui F este F^{**}, ceea ce implică că, oricare ar fi $u \in V$, are loc $\ell(u) \le F(u)$. În punctul u_0 avem $\ell(u_0) \le F^{**}(u_0) \le F(u_0)$, de unde rezultă, ținând cont că $\ell(u_0) = F(u_0)$, relația următoare

$$\ell(u_0) = F^{**}(u_0) = F(u_0).$$

Obținem, în concluzie, următorul rezultat:

$$\text{dacă } \partial F(u_0) \neq \emptyset, \text{ atunci } F^{**}(u_0) = F(u_0).$$

Propoziția 4.1. Fie funcția $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ şi $F^{**}: V \to \overline{\mathfrak{R}}$ biconjugata sa. Dacă pentru $u_0 \in V$ avem $F(u_0) = F^{**}(u_0)$, atunci $\partial F(u_0) = \partial F^{**}(u_0)$.

Demonstrație. Fie $u_0 \in V$ astfel încât $F(u_0) = F^{**}(u_0)$ şi $u^* \in \partial F(u_0)$. Rezultă, prin urmare, că, oricare ar fi $u \in V$, $\langle u^*, u - u_0\rangle + F(u_0) \le F(u)$. Din ipoteză obținem, deci, că $F^{**}(u_0)$ este finită şi că, oricare ar fi $u \in V$,

$$\langle u^*, u - u_0\rangle + F^{**}(u_0) \le F(u).$$

Considerăm funcția $\ell : V \to \mathfrak{R}$, definită prin $\ell(u) = \langle u^*, u - u_0\rangle + F^{**}(u_0)$. Funcția ℓ este un minorant afin continuu al lui F, în consecință şi al lui F^{**}. Oricare ar fi $u \in V$, obținem

$$\langle u^*, u - u_0\rangle + F^{**}(u_0) \le F^{**}(u),$$

ceea ce implică că $u^* \in \partial F^{**}(u_0)$. Am arătat astfel că $\partial F(u_0) \subseteq \partial F^{**}(u_0)$.

Reciproc, fie $u^* \in \partial F^{**}(u_0)$. În acest caz $F^{**}(u_0)$ este finită şi, oricare ar fi $u \in V$, avem

$$\langle u^*, u - u_0\rangle + F^{**}(u_0) \le F^{**}(u).$$

Folosind că $F(u_0) = F^{**}(u_0)$ şi că, pentru fiecare $u \in V$, $F^{**}(u) \le F(u)$ se obține că $F(u_0)$ este finită şi că, oricare ar fi $u \in V$,

$$\langle u^*, u - u_0\rangle + F(u_0) \le F(u),$$

ceea ce înseamnă că $u^* \in \partial F(u_0)$. Am arătat astfel că are loc şi relaţia inversă $\partial F^{**}(u_0) \subseteq \partial F(u_0)$. ■

Propoziţia 4.2. Fie funcţia $F : V \to \overline{\Re}$. Are loc $0 \in \partial F(u_0)$ dacă şi numai dacă $F(u_0) = \min\limits_{u \in V} F(u)$.

Demonstraţie. $0 \in \partial F(u_0)$ este echivalent cu faptul că $F(u_0)$ este finită şi că, oricare ar fi $u \in V$,

$$<0, u - u_0> + F(u_0) \le F(u) \Leftrightarrow F(u_0) \le F(u),$$

ceea ce este echivalent cu $F(u_0) = \min\limits_{u \in V} F(u)$. ■

Următoarele propoziţii vor stabili legătura dintre conjugata şi subdiferenţiala unei funcţii.

Propoziţia 4.3. Fie funcţia $F : V \to \overline{\Re}$ şi $F^*: V^* \to \overline{\Re}$ conjugata ei. Dacă $u_0 \in V$ atunci $u_0^* \in \partial F(u_0)$ dacă şi numai dacă

(4.2) $$F(u_0) + F^*(u_0^*) = < u_0^*, u_0>.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Am demonstrat necesitatea în cadrul Observaţiei 4.2, iar formula căutată este echivalentă cu (4.1).

Suficienţa. Conform definiţiei conjugatei unei funcţii avem $F^*(u_0^*) = \sup\limits_{u \in V} \{<u_0^*, u> - F(u)$, ceea ce împreună cu relaţia din ipoteză ne conduce la faptul că, oricare ar fi $u \in V$,

$$<u_0^*, u> - F(u) \le F^*(u_0^*) = <u_0^*, u_0> - F(u_0),$$

echivalent cu

$$<u_0^*, u> + F(u_0) - <u_0^*, u_0> \le F(u).$$

Funcţia $\ell : V \to \Re$, definită prin $\ell(u) = <u_0^*, u> + F(u_0) - <u_0^*, u_0>$ este deci un minorant afin continuu al lui F şi datorită faptului că $\ell(u_0) = F(u_0)$ acest minorant afin continuu este exact în u_0. Conform definiţiei rezultă că $u_0^* \in \partial F(u_0)$. ■

Propoziţia 4.4. Oricare ar fi $u_0 \in V$, mulţimea $\partial F(u_0) \subseteq V^*$ este convexă şi $\sigma(V^*, V)$ - închisă.

Demonstraţie. Fie $u_0 \in V$. Pe baza Propoziţiei 4.3 avem că $\partial F(u_0) =\{ u^* \in V^* \mid F(u_0) + F^*(u^*) = < u^*, u_0>\}$. Din (3.6) rezultă că, oricare ar fi

$u^* \in V^*$, are loc $F^*(u^*) \geq \langle u^*, u_0 \rangle - F(u_0)\}$ şi vom avea pentru mulţimea $\partial F(u_0)$ următoarea definiţie

$$\partial F(u_0) = \{ u^* \in V^* \mid F^*(u^*) - \langle u_0, u^* \rangle \leq -F(u_0)\} = \{ u^* \in V^* \mid F^*(u^*) + \langle -u_0, u^* \rangle \leq -F(u_0)\}.$$

Considerăm funcţia $G : V^* \to \overline{\mathfrak{R}}$ definită prin $G(u^*) = F^*(u^*) + \langle -u_0, u^* \rangle$. Obţinem $\partial F(u_0) = \{ u^* \in V^* \mid G(u^*) \leq - F(u_0)\}$.

Pe baza Observaţiei 3.3, $F^* \in \Gamma(V^*)$ ceea ce înseamnă, conform Teoremei 2.14, că F^* este funcţie convexă şi inferior semicontinuă. Funcţia $\langle -u_0, \cdot \rangle : V^* \to \mathfrak{R}$ fiind liniară şi continuă este de asemenea convexă şi inferior semicontinuă.

Din Propoziţia 2.6 rezultă că funcţia G este convexă fiind sumă de două funcţii convexe ceea ce implică că mulţimea $\partial F(u_0) = \{ u^* \in V^* \mid G(u^*) \leq - F(u_0)\}$ este convexă.

Funcţia G este şi inferior semicontinuă fiind sumă de două funcţii inferior semicontinue ([11]). Pe baza Propoziţiei 2.9 rezultă că funcţia G este inferior semicontinuă şi în topologia $\sigma(V^*, V)$ iar, conform Propoziţiei 2.7, acest lucru implică că mulţimea $\partial F(u_0) = \{ u^* \in V^* \mid G(u^*) \leq - F(u_0)\}$ este $\sigma(V^*, V)$-închisă. ■

Propoziţia 4.5. Fie funcţia $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ şi $F^* : V^* \to \overline{\mathfrak{R}}$ conjugata ei. Pentru $u_0 \in V$ şi $u_0^* \in V^*$ are loc

(4.3) $$u_0^* \in \partial F(u_0) \Rightarrow u_0 \in \partial F^*(u_0^*)$$

Dacă, în plus, $F \in \Gamma(V)$ atunci

(4.4) $$u_0^* \in \partial F(u_0) \Leftrightarrow u_0 \in \partial F^*(u_0^*).$$

Demonstraţie. Fie $u_0^* \in \partial F(u_0)$. Din Propoziţia 4.3 rezultă că $F(u_0) + F^*(u_0^*) = \langle u_0^*, u_0 \rangle$ şi ţinând cont că $F^{**} \leq F$ obţinem

$$F^{**}(u_0) + F^*(u_0^*) \leq F(u_0) + F^*(u_0^*) = \langle u_0^*, u_0 \rangle.$$

Pe de altă parte din (3.7) avem că $F^{**}(u_0) = \sup_{u^* \in V^*} \{ \langle u_0, u^* \rangle - F^*(u^*)\}$, ceea ce implică

$$\langle u_0, u_0^* \rangle - F^*(u_0^*) \leq F^{**}(u_0) \Leftrightarrow \langle u_0, u_0^* \rangle \leq F^*(u_0^*) + F^{**}(u_0).$$

În concluzie, rezultă că $F^{**}(u_0) + F^*(u_0^*) = \langle u_0^*, u_0 \rangle$ care, pe baza Propoziţiei 4.3, ne conduce la $u_0 \in \partial F^*(u_0^*)$.

Dacă, în plus, $F \in \Gamma(V)$ rezultă că $F = F^{**}$ şi obţinem în final

$u_0^* \in \partial F(u_0) \Leftrightarrow F(u_0) + F^*(u_0^*) = \langle u_0^*, u_0\rangle \Leftrightarrow F^{**}(u_0) + F^*(u_0^*) = \langle u_0^*, u_0\rangle \Leftrightarrow u_0 \in \partial F^*(u_0^*)$. ■

Următoare teoremă, dată în [6], reprezintă un criteriu foarte important de subdiferențiablitate a funcțiilor convexe.

Teorema 4.6. Fie $F : V \to \overline{\Re}$ o funcție convexă, finită şi continuă într-un punct $u_0 \in V$. Oricare ar fi $u \in \operatorname{int} \operatorname{dom} F$, are loc $\partial F(u) \neq \emptyset$ şi, în particular, $\partial F(u_0) \neq \emptyset$.

Demonstrație. Funcția F fiind finită şi continuă în u_0, rezultă că există un număr real a şi o vecinătate deschisă U a lui u_0 în V astfel încât oricare ar fi $u \in U$ să aibă loc $F(u) \leq a$. Pe baza Teoremei 2.12 se obține că funcția F este finită şi continuă pe interiorul domeniului său efectiv. Această ultimă afirmație ne arată că este suficient să demonstrăm că $\partial F(u_0) \neq \emptyset$, acest lucru devenind adevărat pentru fiecare $u \in \operatorname{int} \operatorname{dom} F$.

Funcția F fiind convexă, are, pe baza Teoremei 2.5, epigraful o mulțime convexă din $V \times \Re$. Mulțimea $U \times (a, +\infty)$ este deschisă în $V \times \Re$ şi, oricare ar fi $(u, b) \in U \times (a, +\infty)$, are loc $F(u) \leq a < b$, ceea ce implică că $(u, b) \in \operatorname{epi} F$. Din faptul că $U \times (a, +\infty) \subseteq \operatorname{epi} F$ rezultă că $\operatorname{int} \operatorname{epi} F \neq \emptyset$.

În plus, epi$F$ fiind mulțime convexă rezultă că şi int epi$F$ este mulțime convexă [14].

Să presupunem că $(u_0, F(u_0)) \in \operatorname{int} \operatorname{epi} F$. Există atunci o vecinătate deschisă W a lui $(u_0, F(u_0))$ astfel încât $W \subseteq \operatorname{epi} F$. Rezultă că există U' o vecinătate deschisă a lui u_0 şi $\varepsilon > 0$ un număr real astfel încât

$$U' \times (F(u_0) - \varepsilon, F(u_0) + \varepsilon) \subseteq W \subseteq \operatorname{epi} F.$$

Punctul $(u_0, F(u_0) - \frac{\varepsilon}{2}) \in U' \times (F(u_0) - \varepsilon, F(u_0) + \varepsilon)$ dar $F(u_0) > F(u_0) - \frac{\varepsilon}{2}$, ceea înseamnă că $(u_0, F(u_0) - \frac{\varepsilon}{2}) \notin \operatorname{epi} F$. Din cauza contradicției rezultă că $(u_0, F(u_0)) \notin \operatorname{int} \operatorname{epi} F$.

Mulțimea int epi$F$ fiind convexă şi deschisă rezultă, pe baza Teoremei 1.2, că există un hiperplan H care separă punctul $(u_0, F(u_0))$ de mulțimea int epi$F$. El va avea forma

$$H = \{ (u, a) \in \Re \mid \langle u^*, u\rangle + \alpha a = \beta \},$$

unde $u^* \in V^* \setminus \{0\}$ şi $\alpha, \beta \in \Re$.

Oricare ar fi $(u, a) \in \text{epi}F$, avem

$$<u^*, u> + \alpha a \geq \beta$$

şi, în plus,

$$<u^*, u_0> + \alpha F(u_0) = \beta.$$

Alegem $a_0 \in \Re$ astfel încât $F(u_0) < a_0$. Înseamnă că $(u_0, a_0) \in \text{epi}F$ şi, pe baza relațiilor de mai sus, rezultă că $\alpha(a_0 - F(u_0)) \geq 0$. Aşadar $\alpha \geq 0$.

Dacă $\alpha = 0$ s-ar obține, oricare ar fi $u \in \text{dom}F$, că $< u^*, u - u_0> \geq 0$. Din ipoteză avem că $\text{dom}F = V$ şi implică că, pentru fiecare $u \in V$, $<u^*, u - u_0> = 0$. Acest lucru este echivalent cu $u^* = 0$, care ne conduce la contradicție.

Rămâne atunci $\alpha > 0$. Oricare ar fi $u \in V$, are loc

$$< \frac{u^*}{\alpha}, u > + F(u) \geq \frac{\beta}{\alpha} = < \frac{u^*}{\alpha}, u_0 > + F(u_0),$$

echivalent cu

$$F(u) \geq < -\frac{u^*}{\alpha}, u - u_0 > + F(u_0).$$

Această ultimă relație împreună cu faptul că $F(u_0)$ este finit ne conduce la $-\frac{u^*}{\alpha} \in \partial F(u_0)$, ceea ce implică că $\partial F(u_0) \neq \emptyset$. ■

5. Problema primală şi duală de optimizare convexă

Considerăm V un spaţiu vectorial topologic şi V* dualul său algebrico-topologic. Cele două spaţii vor fi considerate în dualitate prin funcţia biliniară $<\cdot,\cdot>_V$. Pentru o funcţie $F : V \to \overline{\Re}$ vom studia problema de optimizare:

$$(\mathrm{P}) \qquad \inf_{u \in V} F(u).$$

Problema P se numeşte problemă primală şi vom nota infimumul ei cu inf P.

Definiţie. Se numeşte soluţie a problemei P un punct $u_0 \in V$ astfel încât

$$F(u_0) = \inf P.$$

Definiţie. Despre problema P vom spune că este netrivială dacă există $u_0 \in V$ astfel încât $F(u_0) < +\infty$.

În cele ce urmează vom studia problema P în cazul în care $F \in \Gamma_0(V)$, condiţie care asigură netrivialitatea problemei P.

Fie Y şi Y* alte două spaţii vectorial topologice situate în dualitate prin funcţia biliniară $<\cdot,\cdot>_Y$. Cele două funcţii biliniare le vom nota $<\cdot,\cdot>$, indiferent la care ne vom referi, iar pentru a nu face confuzii vom nota u, v, w, ... elementele lui V (respectiv u*, v*, w*, ... elementele lui V*) şi p, q, r, ... elementele lui Y(respectiv p*, q*, r*, ... elementele lui Y*).

Considerăm acum o funcţie $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ astfel încât să verifice

$$\Phi(u, 0) = F(u).$$

Pentru fiecare $p \in Y$ obţinem o nouă problemă de optimizare

$$(\mathrm{P}_p) \qquad \inf_{u \in V} \Phi(u, p).$$

Problema P_0 coincide cu problema iniţială P.

Definiţie. Oricare ar fi $p \in Y$, problema P_p se numeşte problemă perturbată a lui P. Funcţia $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ se numeşte funcţie perturbatoare.

Funcţia perturbatoare poate genera diferite tipuri de probleme perturbate. Principalele tipuri de perturbaţii au fost date în [7] şi [15] pentru rezolvarea problemelor de calcul variațional, respectiv în [1] pentru obținerea unor rezultate privind dualitatea în optimizarea convexă .

Conjugata funcției perturbatoare va fi funcția $\Phi^* : V^* \times Y^* \to \overline{\Re}$ definită prin

$$(5.1) \qquad \Phi^*(u^*, p^*) = \sup_{\substack{u\in V \\ p\in Y}} \{ \langle u^*, u\rangle + \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p) \},$$

unde am folosit că $\langle (u^*, p^*) , (u, p) \rangle_{V\times Y} = \langle u^*, u\rangle_V + \langle p^*, p\rangle_Y$.

Pe baza Observației 3.3 rezultă că $\Phi^* \in \Gamma(V^* \times Y^*)$.

Definiție. Numim problema duală a lui P relativ la funcția perturbatoare $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ următoarea problemă

$$(P^*) \qquad \sup_{p^*\in Y^*} \{ - \Phi^*(0, p^*) \}.$$

Vom nota supremumul problemei P* cu sup P*.

Definiție. Numim soluție a problemei P* un punct p_0^* cu proprietatea

$$-\Phi^*(0, p_0^*) = \sup P^*.$$

Vom stabili în continuare relațiile care există între problema primală şi duala ei.

Propoziția 5.1. Între problema de optimizare P şi duala ei P* are loc relația

$$(5.2) \qquad - \infty \le \sup P^* \le \inf P \le +\infty.$$

Demonstrație. Fie $p^* \in Y^*$. Din relația (5.1) rezultă

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{\substack{u\in V \\ p\in Y}} \{ \langle 0, u\rangle + \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p) \} = \sup_{\substack{u\in V \\ p\in Y}} \{ \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p)\}$$

$$\ge \sup_{u\in V} \{ \langle p^*, 0 \rangle - \Phi(u, 0) \} = \sup_{u\in V} \{ - \Phi(u, 0)\}.$$

Obținem, pentru fiecare $u \in V$, $-\Phi(u, 0) \le \Phi^*(0, p^*)$, echivalent cu

$$-\Phi^*(0, p^*) \le \Phi(u, 0).$$

Trecând la infimum în membrul drept după $u \in V$ iar apoi la supremum în membrul stâng după $p^* \in Y^*$ rezultă că sup P* ≤ inf P. ■

Obsevația 5.1. În [12] şi [16] au fost date exemple astfel încât inegalitățile din relația (5.2) să fie stricte. De asemenea, în [16] au fost date exemple astfel încât inf P şi sup P* să fie - ∞ respectiv + ∞.

Obsevația 5.2. Datorită inegalității sup P* ≤ inf P din relația (5.2), spunem că problemele P şi P* se află în relația de dualitate slabă.

Propoziția 5.2. Dacă problema P este netrivială, atunci

$$\sup P^* \leq \inf P < +\infty.$$

Dacă problema P* este netrivială atunci

$$-\infty < \sup P^* \leq \inf P.$$

Dacă ambele probleme P şi P* sunt netriviale atunci inf P şi sup P* sunt finite şi are loc relația

$$-\infty < \sup P^* < \inf P < +\infty.$$

Demonstrație. Problema P fiind netrivială rezultă că există $u_0 \in V$ astfel încât $F(u_0) = \Phi(u_0, 0) < +\infty$. Se obține că $\sup P^* \leq \inf P \leq \Phi(u_0, 0) < +\infty$.

În cazul în care problema P* este netrivială rezultă că există $p_0^* \in Y^*$ astfel încât $-\Phi^*(0, p_0^*) > -\infty$. Se obține că $-\infty < -\Phi^*(0, p_0^*) \leq \sup P^* \leq \inf P$.

A treia relație se obține pe baza relațiilor anterioare. ■

În cele ce urmează vom continua procesul de dualizare pentru problema de optimizare, urmând a determina problema duală a lui P*.

Oricare ar fi $u^* \in V^*$, asociem problemei P* problema perturbată

$$(P_{u^*}^*) \qquad \sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(u^*, p^*)\}.$$

Funcția conjugată a lui Φ^* va fi funcția $\Phi^{**} : V \times Y \to \overline{\mathfrak{R}}$, definită prin

$$(5.3) \qquad \Phi^{**}(u,p) = \sup_{\substack{u^* \in V^* \\ p^* \in Y^*}} \{ < u, u^* > + < p, p^* > - \Phi^*(u^*, p^*)\}.$$

Obținem prin urmare următoarea problemă, numită biduala problemei P

$$(P^{**}) \qquad \inf_{u \in V} \{ \Phi^{**}(u, 0) \}.$$

Pe baza Propoziției 3.3, funcția Φ^{**} este Γ-regularizata lui Φ, deci $\Phi^{**} \in \Gamma(V \times Y)$.

Repetând procesul de dualizare pentru problema P** obținem, oricare ar fi $p \in Y$, problema perturbată

$$(P_p^{**}) \qquad \inf_{u \in V} \{ \Phi^{**}(u, p)\}$$

şi prin urmare duala lui P** va fi

$$(P^{***}) \qquad \sup_{p^* \in Y^*} \{ -\Phi^{***}(0, p^*)\},$$

unde Φ^{***} este conjugata funcției Φ^{**}.

Conform Teoremei 3.4, implică că $\Phi = \Phi^{***}$, ceea ce face ca problema P*** să fie identică cu problema P*. Acest motiv permite să oprim procesul de dualizare.

Dacă, oricare ar fi $u \in V$, ar avea loc relația $\Phi(u, 0) = \Phi^{**}(u, 0)$, atunci problema P** ar fi identică cu problema P şi cele două probleme P şi P* ar fi fiecare duala celeilalte. Pentru ca acest lucru să se întâmple vom lucra în condiția

(5.4) $$\Phi \in \Gamma(V_0 \times Y),$$

care implică că $\Phi = \Phi^{**}$.

Dacă are loc condiția (5.4), atunci putem privi funcția $F : V \to \overline{\mathfrak{R}}$ definită în felul următor $F(u) = \Phi(u,0)$. Pe baza Teoremei 2.14 rezultă că Φ este o funcție convexă, inferior semicontinuă pe $V \times Y$ şi diferită în oricare punct de $-\infty$. Se obține că şi funcția F este convexă, inferior semicontinuă pe V şi ia valori în intervalul $(-\infty, +\infty)$, ceea ce este echivalent cu $F \in \Gamma(V)$. Dacă considerăm problema P netrivială, atunci funcția F nu este identică $+\infty$ şi rezultă aşadar că $F \in \Gamma_0(V)$.

Observația 5.3. Condiția (5.4) nu ne asigură că sup P* = inf P. Pe baza relației (5.2) avem doar că sup P* $\leq$ inf P şi urmează să analizăm în ce condiții inegalitatea devine egalitate.

Dacă are loc relația sup P* = inf P spunem că problemele P şi P* se află în relația de dualitate tare.

Vom presupune în cele ce urmează că are loc condiția (5.4) şi că problema P este netrivială.

Definiție. Se numeşte funcție valoare infimală funcția $h : Y \to \overline{\mathfrak{R}}$ definită prin $h(p) = \inf P_p = \inf_{u\in V} \Phi(u, p)$.

Propoziția 5.3. Dacă are loc condiția (5.4), atunci funcția valoare infimală este convexă.

Demonstrație. Vom arăta că, oricare ar fi $p, q \in Y$ şi oricare ar fi $\lambda \in (0, 1)$, are loc

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \leq \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q),$$

atunci când expresia din membrul drept are sens.

Dacă cel puțin unul dintre numerele $h(p)$ şi $h(q)$ este $+\infty$, atunci relația este adevărată. Să presupunem că $h(p) < +\infty$ şi $h(q) < +\infty$. Oricare ar fi $a \in \overline{\mathfrak{R}}$ astfel încât

$h(p) < a$, există, conform definiției lui h, un punct $u \in V$ astfel încât $h(p) \leq \Phi(u, p) \leq a$. De asemenea, oricare ar fi $b \in \overline{\Re}$ astfel încât $h(q) < b$, există,un punct $v \in V$ astfel încât $h(q) \leq \Phi(v, q) \leq b$.

Ținând cont de faptul că Φ este convexă are loc

$h(\lambda p + (1-\lambda)q) = \inf\limits_{w \in V} \Phi(w, \lambda p + (1-\lambda)q) \leq \Phi(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda p + (1-\lambda)q) = \Phi(\lambda(u, p) + (1-\lambda)(v, q)) \leq \lambda\Phi(u, p) + (1-\lambda)\Phi(v, q) \leq \lambda a + (1-\lambda)b$.

Făcând pe a să conveargă la $h(p)$ şi pe b să conveargă la $h(q)$ obținem relația căutată. ■

Observația 5.4. Pentru demonstrarea convexității lui h am folosit doar că Φ este funcție convexă.

Observația 5.5. În general, dacă $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$, nu implică că $h \in \Gamma_0(Y)$. Alegem $V = Y = \Re$ şi funcția $\Phi : \Re \times \Re \to \Re$, definită prin $\Phi(u, p) = u + p$. Funcția Φ este liniară, continuă şi diferită de funcția constantă $-\infty$, ceea ce, conform Teoremei 2.14, rezultă că $\Phi \in \Gamma(\Re \times \Re)$. În plus, Φ fiind neidentică $-\infty$ sau $+\infty$ rezultă că $\Phi \in \Gamma_0(\Re \times \Re)$. Funcția infimală $h : \Re \to \Re$ este definită prin $h(p) = \inf\limits_{u \in \Re} (u + p) = -\infty$. Deoarece, oricare ar fi $p \in \Re$, $h(p) = -\infty$ rezultă că $h \notin \Gamma_0(Y)$.

Propoziția 5.4. Dacă $h : Y \to \overline{\Re}$ este funcția infimală şi $h^* : Y^* \to \overline{\Re}$ este conjugata ei atunci, oricare ar fi $p^* \in Y^*$, are loc

$$h^*(p^*) = \Phi^*(0, p^*). \tag{5.5}$$

Demonstrație. Conform definiției rezultă că

$h^*(p^*) = \sup\limits_{p \in Y} \{ \langle p^*, p\rangle - h(p) \} = \sup\limits_{p \in Y} \{ \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p)\} = \sup\limits_{p \in Y} \{ \langle p^*, p\rangle + \sup\limits_{u \in V} (-\Phi(u, p))\} = \sup\limits_{p \in Y} \sup\limits_{u \in V} \{ \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p)\} = \sup\limits_{\substack{u \in V \\ p \in Y}} \{ \langle 0, u\rangle + \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p) \}$.

Conform relației (5.1), avem însă $\Phi^*(0, p^*) = \sup\limits_{\substack{u \in V \\ p \in Y}} \{ \langle 0, u\rangle + \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p) \}$, ceea ce înseamnă că $h^*(p^*) = \Phi^*(0, p^*)$. ■

Propoziția 5. 5. Dacă $h^{**} : Y \to \overline{\Re}$ este biconjugata funcției infimale, atunci are loc următoarea relație

(5.6) $h^{**}(0) = \sup P^*$.

Demonstrație. Conform definiției lui $h^{**} : Y \to \overline{\Re}$, implică că $h^{**}(p) = \sup\limits_{p^* \in Y^*} \{ \langle p, p^* \rangle - h^*(p^*)\}$, de unde rezultă că $h^{**}(0) = \sup\limits_{p^* \in Y^*} \{ \langle 0, p^* \rangle - h^*(p^*)\}$ $= \sup\limits_{p^* \in Y^*} \{-h^*(p^*)\}$. Obținem, pe baza propoziției, anterioare că $h^{**}(0) = \sup\limits_{p^* \in Y^*} \{ - \Phi^*(0,p^*)\}$, ceea ce înseamnă că $h^{**}(0) = \sup P^*$. ■

Observația 5.6. Datorită faptului că h^{**} este Γ-regularizata lui h rezultă că, oricare ar fi $p \in Y$, are loc $h^{**}(p) \le h(p)$ şi în particular $h^{**}(0) \le h(0)$. Pe baza relației (5.6) şi a

definiției funcției infimale această ultimă inegalitate devine $\sup P^* \le \inf P$, relație găsită la Propoziția 5.1.

Definiție. Spunem despre problema P că este normală dacă funcția infimală $h : Y \to \overline{\Re}$ este inferior semicontinuă în 0 şi dacă $h(0)$ este număr finit.

Următoarea teoremă din [6] dă o importantă caracterizare a problemelor normale.

Teorema 5.6. Dacă relația (5.4) are loc, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) problema P este normală.

(ii) problema P* este normală.

(iii) are loc relația $\inf P = \sup P^*$ şi acest număr este finit.

Demonstrație. (i) ⇒ (iii) Fie $\overline{h} : Y \to \overline{\Re}$ regularizata inferior semicontinuă şi $h^{**} : Y \to \overline{\Re}$ Γ-regularizata funcției infimale $h : Y \to \overline{\Re}$. Pe baza Propoziției 2.17, rezultă

(5.7) $h^{**} \le \overline{h} \le h$.

Oricare ar fi $p \in Y$, avem, pe baza Propoziției 2.13, $\overline{h}(p) = \underline{\lim}_{q \to p} h(q)$. De aici, rezultă că $\overline{h}(0) = \underline{\lim}_{q \to 0} h(q)$. Problema P este normală, deci h este inferior semicontinuă în 0, ceea ce implică că $\overline{h}(0) = \underline{\lim}_{q \to 0} h(q) = h(0)$, care este un număr finit. Din faptul că h este convexă rezultă că şi $\overline{h}$ este convexă. Fiindcă $\overline{h}(0)$ este un număr finit iar funcția $\overline{h}$ este convexă şi inerior semicontinuă rezultă, pe baza Propoziției 2.10, că funcția $\overline{h}$ nu poate lua în nici un punct valoarea $-\infty$. Conform Teoremei 2.14, $\overline{h} \in \Gamma_0(V)$ iar din Propoziția 3.3 rezultă $\overline{h} = \overline{h}^{**}$.

Din (5.7) şi Teorema 3.1(ii) se obține următoarea relație

$$h^* \leq \overline{h}^* \leq h^{***}.$$

Din Teorema 3.4 mai avem că $h^* = h^{***}$ ceea ce înseamnă că relația de mai sus devine $h^* = \overline{h}^*$. Obținem în cele din urmă că $h^{**} = \overline{h}^{**} = \overline{h}$, care implică că $h^{**}(0) = \overline{h}(0) = h(0)$. Pe baza Observației 5.6, acest lucru este echivalent cu $\inf P = \sup P^* = h(0)$ care este, deci, finit.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Are loc aşadar $h^{**}(0) = h(0) \in \mathfrak{R}$ iar pe baza relației (5.7) se obține $h^{**}(0) \leq \overline{h}(0) \leq h(0) = h^{**}(0)$. Din faptul că $\overline{h}(0) = h(0) \in \mathfrak{R}$ rezultă că funcția h este finită şi inferior semicontinuă în 0 ceea ce face ca problema P să fie normală.

Echivalența (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) se arată în mod analog folosind faptul că $P^{**} = P$, relație asigurată de (5.4). ■

Observația 5.7. La stabilirea echivalenței dintre (i) şi (iii) nu am folosit că Φ este inferior semicontinuă ci doar că este convexă.

Propoziția 5.7. Mulțimea soluțiilor problemei duale P* este identică cu $\partial h^{**}(0)$.

Demonstrație. Fie $p^* \in Y^*$ soluție a problemei P*, ceea ce înseamnă că oricare ar fi $q^* \in Y^*$, $-\Phi^*(0, p^*) \geq -\Phi^*(0, q^*)$. Pe baza relației (5.5) obținem că, oricare ar fi $q^* \in Y^*$, $h^*(p^*) \leq h^*(q^*)$ echivalent cu $h^*(p^*) = \min\limits_{q^* \in Y^*} h^*(q^*)$. Din Propoziția 4.2 acest lucru este echivalent cu $0 \in \partial h^*(p^*)$. Conform Propoziției 4.5, ținând cont de faptul că $h^* \in \Gamma(V^*)$, relația $0 \in \partial h^*(p^*)$ este echivalentă cu $p^* \in \partial h^{**}(0)$. ■

Vom introduce o nouă noțiune care ne asigură, de asemenea, dualitatea tare între problemele P şi P*.

Definiție. Spunem despre problema P că este stabilă dacă funcția infimală $h\colon Y \to \overline{\mathfrak{R}}$ este subdiferențiabilă în 0 şi dacă $h(0)$ este număr finit.

Următoarele rezultate dovedesc importanța noțiunii de stabilitate.

Teorema 5.8. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Problema P este stabilă.

(ii) Problema P este normală şi problema P* admite soluții.

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii) Dacă problema P este stabilă atunci h(0) este finit şi $\partial h(0) \neq \emptyset$. Acest lucru implică, pe baza Observației 4.3, că $h(0) = h^{**}(0)$, echivalent cu sup P* = inf P $= h(0) \in \Re$. Din Teorema 5.6 obținem că problema P este normală. Din relația $h(0) = h^{**}(0)$ mai obținem, conform Propoziției 4.1, că $\partial h^{**}(0) = \partial h(0)$. Aşadar mulțimea $\partial h^{**}(0)$ este nevidă, ceea ce pe baza Propoziției 5.7 ne asigură că şi mulțimea soluțiilor lui P* este nevidă.

(ii)$\Rightarrow$(i) Problema P fiind normală înseamnă, conform Teoremei 5.6, că $h(0) = h^{**}(0) \in \Re$. Acest lucru implică, pe baza Propoziția 4.1, că $\partial h(0) = \partial h^{**}(0)$. Problema P* având soluție face ca mulțimea $\partial h(0) = \partial h^{**}(0)$ să fie nevidă. Funcția h este subdiferențiabilă în 0 şi datorită faptului că $h(0) \in \Re$ rezultă că problema P este stabilă. ■

Propoziția 5.9. Dacă relația (5.4) are loc, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Problemele P şi P* sunt normale şi admit soluții.

(ii) Problemele P şi P* sunt stabile.

(iii) Problema P este stabilă şi admite soluții.

Demonstrație. (i)$\Rightarrow$(ii). Datorită faptului că problema P este normală şi că P* admite soluții rezultă, conform Teoremei 5.8, că problema P este stabilă. Datorită faptului că problema P* este normală şi că P admite soluții şi ținând cont că P** = P rezultă că şi problema P este stabilă.

(ii)$\Rightarrow$(i) Tot pe baza Teoremei 5.8, folosind şi faptul că P este duala lui P*, rezultă că problemele P şi P* sunt normale şi admit soluții.

(i)$\Rightarrow$(iii) Problema P fiind normală împreună cu faptul că P* admite soluții implică că problema P este stabilă.

(iii)$\Rightarrow$(i) Din Teorema 5.8 rezultă că problema P este normală şi că problema P* admite soluții. Din Teorema 5.6, P fiind normală, rezultă că şi P* este normală. ■

Următoarea teoremă reprezintă un criteriu important de stabilitate a unei probleme de optimizare.

Teorema 5.10. Dacă funcția perturbatoare $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ este convexă, inf P este număr finit şi are loc următoare condiție :

(C) există un punct $u_0 \in V$ astfel încât funcţia de la Y la $\overline{\Re}$, de forma $p \mapsto \Phi(u_0, p)$, să fie finită şi continuă în 0,

atunci problema P este stabilă.

Demonstraţie. Pe baza Propoziţiei 5.3 şi a Observaţiei 5.4, rezultă că funcţia $h : Y \to \overline{\Re}$ este convexă. Având în vedere că $h(0) = \inf P$ este finit, rezultă că $h(0)$ este finit. Rămâne să mai arătăm că funcţia h este subdiferenţiabilă în 0.

Funcţia $p \mapsto \Phi(u_0, p)$ fiind finită şi continuă în 0 rezultă că există un număr real a şi U o vecinătate deschisă a originii din Y astfel încât, oricare ar fi $p \in U$, să aibă loc:

$$\Phi(u_0, p) \leq a < +\infty.$$

Aşadar, oricare ar fi $p \in U$, avem că $h(p) = \inf_{u \in V} \Phi(u, p) \leq \Phi(u_0, p) \leq a$. Funcţia h este o funcţie convexă, mărginită superior pe o mulţime deschisă din Y şi neidentică $-\infty$ pe acea mulţime. Pe baza Teoremei 2.12 rezultă că h este continuă pe interiorul domeniului efectiv al lui Y fiind, deci, continuă şi în 0. Funcţia $h : Y \to \overline{\Re}$ verifică ipotezele Teoremei 4.6, ceea ce implică că $\partial h(0) \neq \emptyset$. ■

În continuare vom da un rezultat de existenţă a soluţiilor problemei de minimizare pentru funcţii convexe şi inferior semicontinue definite pe un spaţiu Banach. În ipotezele Teoremei 5.10, cu ajutorul acestui rezultat, vom demonstra în alt mod stabilitatea problemei P.

Fie aşadar $(V, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach reflexiv, $C \subseteq V$ o mulţime convexă şi închisă iar $F : C \to \Re$ o funcţie convexă şi inferior semicontinuă pe C. Considerăm problema de minimizare

$$(\text{P}') \qquad \inf_{u \in C} F(u).$$

Soluţie a problemei P' va fi un elemnt $u_0 \in C$ astfel încât $F(u_0) = \inf_{u \in C} F(u)$. Asociem problemei P' următoarea problemă de minimizare

$$(\tilde{\text{P}}') \qquad \inf_{u \in V} \tilde{F}(u),$$

unde funcţia $\tilde{F} : V \to \overline{\Re}$ este definită prin

$$\tilde{F}(u) = \begin{cases} \tilde{F}(u), & \text{daca } u \in C \\ +\infty, & \text{daca } u \notin C \end{cases} .$$

Conform Propoziției 2.2 şi Teoremei 2.8, rezultă că $\widetilde{F}$ este de asemenea o funcție convexă şi inferior semicontinuă, ceea ce face ca problemele P' şi $\widetilde{\mathrm{P}}$' să fie identice.

Propoziția 5.11. Dacă mulțimea soluțiilor problemei P' este nevidă, atunci ea este o mulțime convexă şi închisă.

Demonstrație. Fie $\alpha \in \overline{\Re}$ astfel încât $\inf\limits_{u \in C} F(u) = \alpha$. Dacă $\alpha = \pm\infty$, atunci mulțimea soluțiilor lui P' este mulțimea vidă.

Dacă $\alpha \in \Re$, atunci mulțimea soluțiilor problemei *P*' este $\{ u \in V \mid \widetilde{F}(u) \le \alpha \}$. Din faptul că funcția $\widetilde{F}$ este convexă şi inferior semicontinuă rezultă că mulțimea soluțiilor problemei *P*' este convexă şi închisă. ■

Definiție. Despre funcția $F : C \to \Re$ spunem că este coercivă dacă, oricare ar fi $u \in C$ astfel încât $\| u \| \to +\infty$, are loc $F(u) \to +\infty$.

Teorema 5.12. Dacă $(V, \| \cdot \|)$ este un spațiu Banach reflexiv, $C \subseteq V$ o mulțime convexă şi închisă şi $F : C \to \Re$ o funcție convexă şi inferior semicontinuă pe C astfel încât să aibă loc cel puțin una din condițiile:

(i) mulțimea C este mărginită;

(ii) funcția F este coercivă;

atunci problema P' are cel puțin o soluție. Dacă, în plus, funcția F este strict convexă, atunci problema P' are soluție unică.

Demonstrație. Fie $\alpha \in [-\infty, +\infty)$ astfel încât $\inf\limits_{u \in C} F(u) = \alpha$. Există atunci un şir $(u_n)_{n \in N^*}$ în C astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} F(u_n) = \inf\limits_{u \in C} F(u) = \alpha$. Vom arăta că şirul $(u_n)_{n \in N^*}$ este mărginit.

Dacă are loc condiția (i), deci mulțimea C este mărginită, atunci şirul $(u_n)_{n \in N^*} \subseteq C$ este de asemenea mărginit.

Dacă are loc condiția (ii), să presupunem că $(u_n)_{n \in N^*}$ nu este mărginit. În acest caz va exista $(u_{n_i})_{i \in N^*}$ un subşir a lui $(u_n)_{n \in N^*}$ astfel încât $\lim\limits_{i \to \infty} \| u_{n_i} \| = +\infty$. Funcția F fiind coercivă va implica că $\lim\limits_{i \to \infty} F(u_{n_i}) = +\infty$, care este contradicție cu $\lim\limits_{i \to \infty} F(u_{n_i}) = \alpha \in [-\infty, +\infty)$.

În ambele cazuri şirul $(u_n)_{n\in N^*}$ trebuie să fie mărginit, ceea ce implică că există $(u_{n_i})_{i\in N^*}$ un subşir a lui $(u_n)_{n\in N^*}$ convergent la un element u $\in \overline{C} = C$. Funcţia F este inferior semicontinuă în u, ceea ce pe baza relaţiei (1.2) implică

$$F(u) \le \underline{\lim}_{i\to\infty} F(u_{n_i}) = \alpha.$$

Obţinem aşadar $\alpha \neq -\infty$ şi că u este o soluţie a problemei P'.

Dacă, în plus, funcţia F este strict convexă, să presupunem că problema P' are două soluţii diferite u_1 şi u_2. Mulţimea soluţiilor lui P' este, conform Propoziţiei 5.11, convexă, ceea ce înseamnă că şi $\frac{u_1+u_2}{2}$ este soluţie a problemei P'.Din (2.7) avem însă că

$$F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}F(u_1) + \frac{1}{2}F(u_2) = \alpha,$$

obţinând o contradicţie cu faptul că $\frac{u_1+u_2}{2}$ este soluţie a problemei P'. ■

Obsevaţia 5.8. Revenind la problema P, să presupunem că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 5.10. Fie Y un spaţiu Banach reflexiv şi Y* dualul său. Pe baza Propoziţiei 5.4 problema duală P* se poate scrie astfel

(P*) $$\sup_{p^*\in Y^*} \{ -h^*(p^*) \}$$

care este echivalentă cu

(P*) $$-\inf_{p^*\in Y^*} \{ h^*(p^*) \}.$$

Condiţia (C) din Teorema 5.10 fiind îndeplinită rezultă că h este continuă în 0, ceea ce implică că este inferior semicontinuă. Fiindcă h(0) este finit rezultă că problema P este normală. Rămâne să arătăm că problema P* are soluţie, ceea ce pe baza Teoremei 5.8 ar implica că problema P este stabilă.

Funcţia $h^* : Y^* \to \Re$ fiind din $\Gamma_0(Y^*)$ este convexă şi inferior semicontinuă pe Y* şi oricare ar fi $a \in \Re$ mulţimea $\{ p^* \in Y^* \mid h^*(p^*) \le a \}$ este mărginită. Vom arăta că funcţia *h** este coercivă.

Fie $(p_n^*)_{n\in N^*}$ un şir din Y* astfel încât $\lim_{n\to\infty} \| p_n^* \| = +\infty$. Să presupunem că $\underline{\lim}_{n\to\infty} h^*(p_n^*) < +\infty$. Implică că există $a_0 \in \Re$ astfel încât, oricare ar fi $n \in N^*$,

$h^*(p_n^*) \le a_0$. Mulțimea $\{ p^* \in Y^* \mid h^*(p^*) \le a_0 \}$ este însă mărginită de unde rezultă că există $c \ge 0$ astfel încât, oricare ar fi $n \in N^*$, $\| p_n^* \| \le c$. Am ajuns la contradicție cu faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \| p_n^* \| = +\infty$.

Funcția $h^* : Y^* \to \Re$ este așadar și coercivă , Teorema 5.12 asigurându-ne astfel că problema

$$\inf_{p^*\in Y^*} \{ h^*(p^*) \}$$

are soluție. Rezultă, în consecință, că și problema

$$\text{(P*)} \qquad \sup_{p^*\in Y^*} \{ - h^*(p^*) \} = - \inf_{p^*\in Y^*} \{ h^*(p^*) \}$$

are soluție. ■

În finalul acestei secțiuni vom demonstra câteva rezultate care stabilesc legătura dintre soluțiile problemelor P și P* în cazul în care acestea există.

Propoziția 5.13. Dacă problemele P și P* admit soluții și dacă are loc

$$\text{(5.8)} \qquad \inf P = \sup P^*,$$

care este un număr finit, atunci fiecare soluție u_0 a lui P și fiecare soluție p_0^* a lui P* sunt legate prin relația de extremalitate

$$\text{(5.9)} \qquad \Phi(u_0, 0) + \Phi^*(0, p_0^*) = 0,$$

echivalentă cu

$$\text{(5.10)} \qquad (0, p_0^*) \in \partial\Phi(u_0, 0).$$

Reciproc, dacă $u_0 \in V$ și $p_0^* \in Y^*$ verifică relația de extremalitate (5.9), atunci u_0 este soluție a problemei P, p_0^* este soluție a problemei P* și are loc relația (5.8).

Demonstrație. Dacă $u_0 \in V$ este soluție a problemei P rezultă că $\inf P = F(u_0) = \Phi(u_0, 0)$. Dacă $p_0^* \in Y^*$ este soluție a problemei P* rezultă că $\sup P^* = - \Phi^*(0. p_0^*)$, ceea ce, pe baza relației (5.8), implică că $\Phi(u_0, 0) + \Phi^*(0, p_0^*) = 0$.

Având în vedere că $0 = < u_0, 0> + < 0, p_0^*> = < (u_0, 0) , (0, p_0^*)>$ implică că $\Phi(u_0, 0) + \Phi^*(0, p_0^*) = < (u_0, 0),(0, p_0^*)>$. Din Propoziția 4.3 rezultă atunci că $(0, p_0^*) \in \partial\Phi(u_0, 0)$.

Reciproc, fie $u_0 \in V$ și $p_0^* \in Y^*$ care verifică relația (5.9). Am arătat însă că, oricare ar fi $u \in V$ și oricare ar fi $p^* \in Y^*$, are loc $- \Phi^*(0, p^*) \le \Phi(u, 0)$. Rezultă că, oricare ar fi

$p^* \in Y^*$, $-\Phi^*(0, p^*) \leq \Phi(u_0, 0) = -\Phi^*(0, p_0^*)$, ceea ce implică că $-\Phi^*(0,p_0^*) = \sup_{p^*\in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\}$.

În mod analog se arată că $\Phi(u_0, 0) = \inf_{u\in V} \{\Phi(u, 0)\}$. Aşadar, u_0 este soluţie a problemei P, p_0^* este soluţie a problemei P* şi are loc relaţia

$$\inf P = \Phi(u_0, 0) = -\Phi^*(0, p_0^*) = \sup P^*. \qquad \blacksquare$$

Observaţia 5.9. Oricare ar fi $p^* \in Y^*$, avem pe baza relaţiei (5.1)

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{\substack{u\in V\\ p\in Y}} \{ \langle 0, u\rangle + \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p) \} \geq \sup_{u\in V} \{\langle p^*, 0\rangle - \Phi(u,0)\} = \sup_{u\in V} \{-\Phi(u, 0)\}.$$

Rezultă că, oricare ar fi $u \in V$ şi oricare ar fi $p^* \in Y^*$, $\Phi(u, 0) + \Phi^*(0, p^*) \geq 0$.

Această ultimă inegalitate justifică denumirea de relaţie de extremalitate a relaţiei (5.9). Soluţiile problemelor P şi P* sunt punctele în care relaţia de mai sus îşi atinge minimul.

Observaţia 5.10. Dacă problema P este normală, atunci relaţia (5.9) are loc. Propoziţia 5.13 are loc dacă una din afirmaţiile Propoziţiei 5.9 este adevărată.

Propoziţia 5.14. Fie V un spaţiu Banach reflexiv şi $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ funcţia perturbatoare, astfel încât $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. Presupunem că este îndeplinită condiţia (C) şi că, în plus, dacă $u \in V$ astfel încât $\| u \| \to +\infty$ are loc

$$\Phi(u, 0) \to +\infty.$$

În aceste condiţii problemele P şi P* au cel puţin o soluţie, are loc inf P = sup P* şi relaţiile de extremalitate (5.9) şi (5.10) sunt îndeplinite.

Demonstraţie. Funcţia $F : V \to \overline{\Re}$, definită prin $F(u) = \Phi(u, 0)$ verifică condiţia (ii) din Teorema 5.12. Fiind funcţie convexă şi inferior semicontinuă rezultă că problema

$$\inf_{u\in V} F(u)$$

are soluţie, ceea ce este echivalent cu faptul că problema P are soluţie.

Din condiţia (C) rezultă că problema P este stabilă ceea ce conform Teoremei 5.8 implică că problema P este normală şi că problema P* are soluţie. Din Teorema 5.6

obținem, în consecință, că inf P = sup P* şi că acest număr este finit. Condițiile din ipoteza Propoziției 5.13 fiind îndeplinite rezultă că şi relațiile de extremalitate (5.9) şi (5.10) sunt îndeplinite. ■

6. Lagrangean şi puncte şa

În cadrul acestei secţiuni vom introduce funcţia Lagrangean a problemei P cu ajutorul căreia vom stabili legătura dintre noţiunea de dualitate şi problemele de teorie a jocurilor.

Definiţie. Se numeşte Lagrangean al problemei P relativ la funcţia perturbatoare $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$, funcţia L: $V \times Y^* \to \overline{\Re}$ definită prin

(6.1) $$L(u, p^*) = - \sup_{p \in Y} \{ \langle p^*, p \rangle - \Phi(u, p) \}$$

Observaţia 6.1. Oricare ar fi $u \in V$, considerăm funcţia $\Phi_u : Y \to \overline{\Re}$, definită prin $\Phi_u(p) = \Phi(u,p)$. Conjugata funcţiei Φ_u este funcţia $\Phi_u^* : Y \to \overline{\Re}$, definită prin $\Phi_u^*(p^*) = \sup_{p \in Y} \{ \langle p^*, p \rangle - \Phi_u(p) \} = \sup_{p \in Y} \{ \langle p^*, p \rangle - \Phi(u, p) \}$. Avem, aşadar, oricare ar fi $u \in V$ şi oricare ar fi $p^* \in Y^*$,

$$L(u, p^*) = - \Phi_u^*(p^*).$$

Pe baza Observaţiei 3.3 rezultă că $\Phi_u^* \in \Gamma(Y^*)$.

Propoziţia 6.1. Oricare ar fi $u \in V$, funcţia L_u: $Y^* \to \overline{\Re}$ definită prin

(6.2) $$L_u(p^*) = L(u, p^*)$$

este o funcţie concavă şi superior semicontinuă pe Y^*.

Dacă funcţia $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ este convexă, atunci, oricare ar fi $p^* \in Y^*$, funcţia L_{p^*}: $V \to \overline{\Re}$ definită prin

(6.3) $$L_{p^*}(u) = L(u, p^*)$$

este convexă.

Demonstraţie. Fie $u \in V$. Oricare ar fi $p^* \in Y^*$, avem $L_u(p^*) = L(u, p^*)= -\Phi_u^*(p^*)$. Având în vedere că $\Phi_u^* \in \Gamma(Y^*)$ rezultă, pe baza Teoremei 2.13, că funcţia Φ_u^*

este convexă şi inferior semicontinuă pe Y*. Se obține, în consecință, că funcția L_u este concavă şi superior semicontinuă.

Fie acum $p^* \in Y^*$, arbitrar. Vom arăta că funcția L_{p^*} este convexă. Oricare ar fi $u, v \in V$ şi $\lambda \in (0, 1)$, vom arăta că are loc

$$L_{p^*}(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda L_{p^*}(u) + (1-\lambda)L_{p^*}(v)$$

echivalent cu

$$L(\lambda u + (1-\lambda)v, p^*) \le \lambda L(u, p^*) + (1-\lambda)L(v, p^*).$$

Dacă cel puțin unul dintre numerele $L(u, p^*)$ şi $L(v, p^*)$ este $+\infty$ atunci relația are loc.

Să presupunem că $L(u, p^*) < +\infty$ şi $L(v, p^*) < +\infty$. Fie $a, b \in \Re$ astfel încât $L(u, p^*) < a$ şi $L(v, p^*) < b$. Din relația (6.1) se obține

$$L(u, p^*) = -\sup_{p\in Y} \{ \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p) \} = \inf_{p\in Y} \{\Phi(u, p) - \langle p^*, p\rangle\} < a.$$

Există, atunci, un punct $p_0 \in Y$ astfel încât $L(u, p^*) \le \Phi(u, p_0) - \langle p^*, p_0\rangle \le a$. În acelaşi mod se arată că există un punct $q_0 \in Y$ astfel încât $L(v, p^*) \le \Phi(v, q_0) - \langle p^*, q_0\rangle \le b$.

Se obține următoarea relație

$$L(\lambda u + (1-\lambda)v, p^*) = \inf_{p\in Y} \{\Phi(\lambda u + (1-\lambda)v, p) - \langle p^*, p\rangle\} \le \Phi(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda p_0 + (1-\lambda)q_0) - \langle p^*, \lambda p_0 + (1-\lambda)q_0\rangle = \Phi(\lambda(u, p_0) + (1-\lambda)(v, q_0)) - \lambda\langle p^*, p_0\rangle - (1-\lambda)\langle p^*, q_0\rangle \le \lambda(\Phi(u, p_0) - \langle p^*, p_0\rangle) + (1-\lambda)(\Phi(v, q_0) - \langle p^*, q_0\rangle) \le \lambda a + (1-\lambda)b.$$

Dacă facem pe a să tindă la $L(u, p^*)$ şi pe b să tindă la $L(v, p^*)$ rezultă relația căutată. ■

Vom rescrie cu ajutorul Lagrangeanului problemele P şi P*. Pe baza relației (5.1) rezultă

$$\Phi^*(u^*, p^*) = \sup_{\substack{u\in V\\ p\in Y}} \{ \langle u^*, u\rangle + \langle p^*, p\rangle - \Phi(u, p) \} = \sup_{u\in V} \{ \langle u^*, u\rangle + \sup_{p\in Y} [\langle p^*, p\rangle - \Phi(u,p)] = \sup_{u\in V} \{ \langle u^*, u\rangle - L(u, p^*) \}.$$

Se obține că $\Phi^*(0, p^*) = \sup_{u\in V} \{ \langle 0, u\rangle - L(u, p^*) \} = \sup_{u\in V} \{ -L(u, p^*) \} = -\inf_{u\in V} L(u, p^*)$. În concluzie avem

(6.4) $$-\Phi^*(0, p^*) = \inf_{u\in V} L(u, p^*).$$

Problema

(P*) $$\sup_{p^*\in Y^*} \{ -\Phi^*(0, p^*) \}$$

se scrie cu ajutorul Lagrangeanului astfel

(P*) $$\sup_{p^*\in Y^*} \inf_{u\in V} L(u, p^*).$$

Presupunând acum că $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$, funcția Φ_u: $Y \to \overline{\Re}$, definită prin $\Phi_u(p) = \Phi(u, p)$ aparține lui $\Gamma_0(Y)$, ceea ce, pe baza Propoziției 3.3, implică că $\Phi_u = \Phi_u^{**}$. Oricare ar fi $u \in V$ şi oricare ar fi $p \in Y$, obținem

$$\Phi(u, p) = \Phi_u(p) = \Phi_u^{**}(p) = \sup_{p^*\in Y^*} \{<p^*, p> - \Phi_u^*(p^*)\} = \sup_{p^*\in Y^*} \{<p^*, p> + L(u,p^*)\}.$$

Oricare ar fi $u \in V$ rezultă că

(6.5) $$\Phi(u, 0) = \sup_{p^*\in Y^*} \{<p^*, 0> + L(u,p^*)\} = \sup_{p^*\in Y^*} L(u,p^*).$$

Problema

(P) $$\inf_{u\in V} \{\Phi(u, 0)\}$$

se scrie cu ajutorul Lagrangeanului astfel

(P) $$\inf_{u\in V} \sup_{p^*\in Y^*} L(u,p^*).$$

Observația 6.2. Relația de dualitate slabă sup P* ≤ inf P o putem scrie cu ajutorul Lagrangeanului în forma sup inf L ≤ inf sup L, obținând o relație binecunoscută din teoria jocurilor.

Definiție. Spunem că $(u_0, p_0^*) \in V \times Y^*$ este punct şa al Lagrangeanului L: $V \times Y^* \to \overline{\Re}$ dacă oricare ar fi $u \in V$ şi oricare ar fi $p^* \in Y^*$, are loc

(6.6) $$L(u_0, p^*) \le L(u_0, p_0^*) \le L(u, p_0^*).$$

Teorema 6.2. Fie $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ funcția perturbatoare a problemei P. Dacă $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $(u_0, p_0^*) \in V \times Y^*$ este punct şa al lui L.

(ii) u_0 este soluție a problemei P, p_0^* este soluție a problemei P* şi are loc relația inf P = sup P*.

Demonstație. (i)$\Rightarrow$(ii) Din relația (6.6) rezultă că $L(u_0, p_0^*) = \inf_{u\in V} L(u, p_0^*)$ şi că $L(u_0, p_0^*) = \sup_{p^*\in Y^*} L(u_0, p^*)$.

Pe baza relațiilor (6.4) şi (6.5) implică că $-\Phi^*(0, p_0^*) = \inf_{u\in V} L(u, p_0^*) = L(u_0,p_0^*)$ şi că $\Phi(u_0, 0) = \sup_{p^*\in Y^*} L(u_0,p^*)= L(u_0, p_0^*)$. Se obține în final $\Phi(u_0, 0) + \Phi^*(0, p_0^*) = 0$, ceea ce pe baza Propoziției 5.13 ne conduce la concluzia că u_0 este soluție a problemei P, p_0^* este soluție a problemei P* şi are loc relația inf P = sup P*.

(ii)$\Rightarrow$(i) Din Propoziția 5.13 rezultă că $\Phi(u_0, 0) = -\Phi^*(0, p_0^*)$. Ținând cont de (6.4) şi (6.5) obținem următoarea relație

$$-\Phi^*(0, p_0^*) = \inf_{u\in V} L(u, p_0^*) \le L(u_0, p_0^*) \le \sup_{p^*\in Y^*} L(u_0,p^*) = \Phi(u_0, 0),$$

ceea ce înseamnă că relația (6.6) este adevărată. ■

Propoziția 6.3. Fie $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ funcția perturbatoare a problemei P. Să presupunem că $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ şi că problema P este stabilă. Atunci, $u_0 \in V$ este soluție a problemei P dacă şi numai dacă există $p_0^* \in Y^*$ astfel încât (u_0, p_0^*) să fie punct şa al lui L.

Demonstrație. *Necesitatea.* Dacă u_0 este soluție a problemei P rezultă, pe baza Teoremei 5.6 şi a Teoremei 5.8, că problema P* admite soluții şi că are loc inf P = sup P*. Fie $p_0^* \in Y^*$ o soluție a problemei P*. Conform Teoremei 6.2 rezultă că $(u_0, p_0^*) \in V \times Y^*$ este punct şa al Lagrangeanului L.

Suficiența. Din Teorema 6.2, $(u_0, p_0^*) \in V \times Y^*$ fiind punct şa al lui L, rezultă că $u_0 \in V$ este soluție a problemei P. ■

7. Aplicații ale teoriei dualității

Teorema lui Farkas

Ca o primă aplicație a teoriei dualității vom prezenta o metodă de obținere a unor teoreme de alternativă. Fiind date date două sisteme de ecuații sau inecuații, o teoremă de alternativă afirmă că dintre cele două sisteme sunt compatibile primul sau al doilea, dar niciodată amândouă. Metoda aceasta de obținere a teoremelor de alternativă a fost prezentată de G. Wanka [18], care în [19] redescoperă teorema lui Gale. În cele ce urmează, cu ajutorul acestei metode, vom obține teorema lui Farkas, care poate fi scrisă ca teoremă de alternativă [13]. Procedeul constă în determinarea problemei duale pentru o problemă de optimizare şi în demonstrarea existenței dualității tari între cele două probleme .

Un alt procedeu de obținere a teoremelor de alternativă a fost dat de A. Dax [5].

În spațiu vectorial $\Re^n$ considerăm următoarele relații de ordine parțială pentru x $=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y =(y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^n$:

$x \geqq y$ dacă şi numai dacă, oricare ar fi $i \in \{1,2, ..., n\}$, avem $x_i \geq y_i$;

$x \geq y$ dacă şi numai dacă $x \geqq y$ şi $x \neq y$;

$x > y$ dacă şi numai dacă, oricare ar fi $i \in \{1,2, ..., n\}$, avem $x_i > y_i$.

Teorema lui Farkas este dată în [4] în forma următoare:

Fie $p \in N^*$ şi $u, v^1, v^2, ..., v^p \in \Re^n$. Sistemul de inecuații din $\Re^n$

$$\begin{cases} < x, u > < 0 \\ < x, v^i > \leq 0, \ i \in \{1, 2, \ldots, p\} \end{cases}$$

este incompatibil dacă şi numai dacă există $a = (a_1, a_2,..., a_p) \in \Re_+^p$ astfel încât

$$u + \sum_{i=1}^{p} a_i v^i = 0.$$

Teorema lui Farkas se poate reformula ca teoremă de alternativă astfel:

Teorema 7.1. Fie $p \in N^*$ şi $u, v^1, v^2, ..., v^p \in \Re^n$. Atunci sistemul

$$(7.1) \qquad \begin{cases} x \geqq 0 \\ \sum_{i=1}^{p} x_i v^i + u = 0 \end{cases}$$

are soluţii în $\Re^p$ sau sistemul

$$(7.2) \qquad \begin{cases} < y, u > < 0 \\ < y, v^i > \leq 0, \ i \in \{1, 2, \ldots, p\} \end{cases}$$

are soluţii în $\Re^n$, dar niciodată nu pot avea amândouă soluţii.

Observaţia 7.1. Sistemul

$$(7.3) \qquad \begin{cases} x \leqq 0 \\ \sum_{i=1}^{p} x_i v^i = u \end{cases}$$

are soluţie în $\Re^p$ dacă şi numai dacă sistemul (7.1) are soluţie în $\Re^p$. Se observă că $x \in \Re^p$ este o soluţie a sistemului (7.1) dacă şi numai dacă $x' = -x \in \Re^p$ este o soluţie a sistemului (7.3).

Oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, considerăm $a_i \in \Re^p$ definite astfel:

dacă $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $a_i = e^i$, unde e^i sunt vectorii bazei canonice ai lui $\Re^n$;

dacă $i \in \{p+1, p+2, ..., p+n\}$, $a_i = (v_{i-p}^{\ 1}, v_{i-p}^{\ 2}, ..., v_{i-p}^{\ p})$;

dacă $i \in \{p+n+1, p+n+2, ..., p+2n\}$, $a_i = -a_{i-n}$.

Oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, considerăm $b_i \in \Re$ definite astfel:

dacă $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $b_i = 0$:

dacă $i \in \{p+1, p+2, ..., p+n\}$, $b_i = u_{i-p}$;

dacă $i \in \{p+n+1, p+n+2, ..., p+2n\}$, $b_i = -b_{i-n}$.

Obţinem, prin urmare, matricea $A \in \Re^p \times \Re^{2n+p}$ şi matricea coloană $b \in \Re^{2n+p}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ a_{p+1} \\ \vdots \\ a_{p+n} \\ a_{p+n+1} \\ \vdots \\ a_{p+2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ v_1^{\,1} & v_1^{\,2} & \cdots & v_1^{\,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n^{\,1} & v_n^{\,2} & \cdots & v_n^{\,p} \\ -v_1^{\,1} & -v_1^{\,2} & \cdots & -v_1^{\,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v_n^{\,1} & -v_n^{\,2} & \cdots & -v_n^{\,p} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \\ b_{p+1} \\ \vdots \\ b_{p+n} \\ b_{p+n+1} \\ \vdots \\ b_{p+2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}.$$

Sistemul (7.3) se poate scrie atunci în următoarea formă

$$(7.3) \qquad \begin{cases} < a_i, x > \le b_i \\ i \in \{1, 2, \dots, 2n+p\} \end{cases}.$$

Considerăm în continuare următoarea problemă de optimizare

$$(\,P\,) \qquad \inf_{\substack{< a_i, x_i > \le b_i \\ i \in \{1,2,\dots,2n+p\}}} \sum_{i=2}^{2n+p} \| x_i - x_1 \|.$$

Observația 7.2. Minimul lui P este 0 dacă şi numai dacă există, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, $x_i \in \mathfrak{R}^p$ astfel încât $< a_i, x_i > \le b_i$ şi, în plus, $x_1 = x_2 = ... = x_{2n+p} = x$. Acest lucru este echivalent cu faptul că sistemul (7.3) are soluție.

Vom determina, în continuare, duala problemei P. Considerăm spațiul vectorial $Y = \mathfrak{R}^p \times ... \times \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^{2n+p}$, unde $\mathfrak{R}^p$ apare de (2n + p -1) ori. Fie $\Phi : \mathfrak{R}^p \times ... \times \mathfrak{R}^p \times Y \to \overline{\mathfrak{R}}$, funcția perturbatoare a problemei P, definită prin

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_{2n+p}, \varphi, \gamma) = \begin{cases} \sum_{i=2}^{2n+p} \| x_i + \varphi_i - x_1 \|, \text{daca} < a_i, x_i > - b_i \le \gamma_i, \forall i \in \{1,2,\dots,2n+p\} \\ +\infty, \qquad \text{in caz contrar} \end{cases},$$

unde $\varphi = (\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{2n+p})$ şi $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2n+p})$ astfel încât, oricare ar fi $i \in \{2, 3, ..., 2n+p\}$, $\varphi_i \in \mathfrak{R}^p$ şi, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, $\gamma_i \in \mathfrak{R}$.

Observația 7.3. Am considerat şi spațiul vectorial $V = \mathfrak{R}^p \times ... \times \mathfrak{R}^p$, unde $\mathfrak{R}^p$ apare de (2n + p) ori. Problema P se mai poate scrie

$$(\tilde{P}) \qquad \inf_{(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+p}) \in V} \tilde{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+p}),$$

funcția $\tilde{F} : V \to \overline{\Re}$ fiind definită prin

$$\tilde{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+p}) = \begin{cases} \sum_{i=2}^{2n+p} \| x_i - x_1 \|, \text{ daca } < a_i, x_i > \le b_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, 2n+p\} \\ +\infty, \qquad \text{in caz contrar} \end{cases}.$$

Cele două probleme sunt identice şi am putut ataşa funcția perturbatoare a problemei $\tilde{P}$, definită mai înainte, problemei P.

Problema perturbată care se obține este următoarea

$$(P_{\varphi, \gamma}) \qquad \inf_{\substack{x_i \in \Re^p \\ i \in \{1, 2, \ldots, 2n+p\}}} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+p}, \varphi, \gamma).$$

Dacă oricare ar fi $i \in \{2, 3, \ldots, 2n+p\}$, $\varphi_i = (0, 0, \ldots, 0) \in \Re^p$ şi, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, 2n+p\}$, $\gamma_i = 0$, atunci problema $P_{\varphi, \gamma}$ este chiar problema primală P.

Conjugata funcției Φ va fi funcția $\Phi^* : V^* \times Y^* \to \overline{\Re}$, definită prin

$$\Phi^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{2n+p}^*, \varphi^*, \gamma^*) = \sup_{\substack{x_i \in \Re^p, \forall i \in \{1, 2, \ldots, 2n+p\} \\ \varphi_i \in \Re^p, \forall i \in \{2, 3, \ldots, 2n+p\} \\ \gamma \in \Re^{2n+p}}} \{ \sum_{i=1}^{2n+p} < x_i^*, x_i > +$$

$$< \gamma^*, \gamma > + \sum_{i=2}^{2n+p} < \varphi_i^*, \varphi_i > - \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+p}, \varphi, \gamma) \},$$

unde oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, 2n+p\}$, $x_i^* \in (\Re^p)^*$ şi $(\varphi^*, \gamma^*) = (\varphi_2^*, \varphi_3^*, \ldots, \varphi_{2n+p}^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_{2n+p}^*) \in Y^*$. Având în vedere cum a fost definită funcția Φ obținem

$$\Phi^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{2n+p}^*, \varphi^*, \gamma^*) = \sup_{\substack{x_i \in \Re^p, \forall i \in \{1, 2, \ldots, 2n+p\} \\ \varphi_i \in \Re^p, \forall i \in \{2, 3, \ldots, 2n+p\} \\ \gamma \in \Re^{2n+p} \\ < a_i, x_i > \le b_i + \gamma_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, 2n+p\}}} \{ \sum_{i=1}^{2n+p} < x_i^*, x_i > +$$

$$< \gamma^*, \gamma > + \sum_{i=2}^{2n+p} < \varphi_i^*, \varphi_i > - \sum_{i=2}^{2n+p} \| x_i + \varphi_i - x_1 \| \}.$$

Considerăm $y = (y_2, y_3, ..., y_{2n+p}) \in \Re^p \times ... \times \Re^p$ şi $z = (z_1, z_2,..., z_{2n+p}) \in \Re^{2n+p}$ astfel încât :

oricare ar fi $i \in \{2, 3, ..., 2n+p\}$, $y_i = x_i + \varphi_i - x_1$;

oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, $z_i = \gamma_i + b_i - \langle a_i, x_i \rangle$.

Făcând aceste schimbări de variabilă rezultă

$$\Phi^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_{2n+p}^*, \varphi^*, \gamma^*) = \sup_{\substack{z_i \geq 0, x_i \in \Re^p, \forall i \in \{1,2,\dots,2n+p\} \\ y_i \in \Re^p, \forall i \in \{2,3,\dots,2n+p\}}} \Big\{ \sum_{i=1}^{2n+p} \langle x_i^*, x_i \rangle +$$

$$\sum_{i=2}^{2n+p} \langle \varphi_i^*, x_1 + y_i - x_i \rangle + \sum_{i=1}^{2n+p} \gamma_i^*(z_i - b_i + \langle a_i, x_i \rangle) - \sum_{i=2}^{2n+p} \| y_i \| \Big\} =$$

$$\sup_{\substack{z_i \geq 0, x_i \in \Re^p, \forall i \in \{1,2,\dots,2n+p\} \\ y_i \in \Re^p, \forall i \in \{2,3,\dots,2n+p\}}} \Big\{ \langle x_1^*, x_1 \rangle + \sum_{i=2}^{2n+p} [\langle \varphi_i^*, y_i \rangle - \| y_i \|] +$$

$$\sum_{i=2}^{2n+p} \langle x_i^* + \gamma_i^* a_i - \varphi_i^*, x_i \rangle + \langle \gamma_1^* a_1, x_1 \rangle + \sum_{i=2}^{2n+p} \langle \varphi_i^*, x_1 \rangle + \langle \gamma^*, z - b \rangle \Big\} =$$

$$\sum_{i=2}^{2n+p} \sup_{y_i \in \Re^p} [\langle \varphi_i^*, y_i \rangle - \| y_i \|] + \sum_{i=2}^{2n+p} \sup_{x_i \in \Re^p} \langle x_i^* + \gamma_i^* a_i - \varphi_i^*, x_i \rangle +$$

$$\sup_{x_1 \in \Re^p} \langle x_1^* + \gamma_1^* a_1 + \sum_{i=2}^{2n+p} \varphi_i^*, x_1 \rangle + \sup_{z \geqq 0} \langle \gamma^*, z \rangle - \langle \gamma^*, b \rangle,$$

unde $z = (z_1, z_2,..., z_{2n+p}) \geqq 0$ dacă oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, $z_i \geq 0$.

Pentru a determina duala trebuie ca oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, $x_i^* = 0$. Problema duală a lui P va fi

$$(P^*) \qquad \sup_{\substack{\varphi_i^* \in \Re^p, \forall i \in \{2,3,...2n+p\} \\ \gamma_i^* \in \Re, \forall i \in \{1,2,...2n+p\}}} \{ - \Phi^*(0, 0, ..., 0, \varphi^*, \gamma^*) \}$$

care este echivalentă cu

$$(P^*) \quad \sup_{\substack{\varphi_i^* \in \Re^p, \forall i \in \{2,3,...2n+p\} \\ \gamma_i^* \in \Re, \forall i \in \{1,2,...2n+p\}}} \{ \sum_{i=2}^{2n+p} \sup_{y_i \in \Re^p} [< \varphi_i^*, y_i > - \| y_i \|] +$$

$$\sum_{i=2}^{2n+p} \sup_{x_i \in \Re^p} < \gamma_i^* a_i - \varphi_i^*, x_i > + \sup_{x_1 \in \Re^p} < \gamma_1^* a_1 + \sum_{i=2}^{2n+p} \varphi_i^*, x_1 > + \sup_{z \geqq 0} < \gamma^*, z > - < \gamma^*, b > \}.$$

Dacă, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, are loc $\| \varphi_i^* \| \leq 1$, atunci $< \varphi_i^*, y_i > \leq \| y_i \|$, pentru fiecare $y_i \in \Re^p$ şi de aici rezultă că, pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$, $\sup_{y_i \in \Re^p} [< \varphi_i^*, y_i > - \|y_i\|] = 0$. Impunând condiţia ca $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, ..., \gamma_{2n+p}^*) \leqq 0$ implică că $\sup_{z \geqq 0} < \gamma^*, z > = 0$. De asemenea mai impunem condiţiile ca $\gamma_1^* a_1 = - \sum_{i=2}^{2n+p} \varphi_i^*$ şi ca, oricare ar fi $i \in \{2, 3, ..., 2n+p\}$, să aibă loc $\varphi_i^* = \gamma_i^* a_i$.

Problema duală se scrie în aceste condiţii

$$(P^*) \quad \sup_{\substack{\gamma^* \leqq 0, \gamma_1^* a_1 = -\sum_{i=2}^{2n+p} \varphi_i^* \\ \|\varphi_i^*\| \leq 1, \varphi_i^* = \gamma_i^* a_i, \forall i \in \{2,3,...,2n+p\}}} < \gamma^*, b >.$$

Dacă eliminăm, oricare ar fi $i \in \{2, 3, ..., 2n+p\}$, pe φ_i^* obţinem problema duală în următoarea formă

$$(P^*) \quad \sup_{\substack{\gamma^* \leqq 0, \sum_{i=1}^{2n+p} \gamma_i^* a_i = 0 \\ |\gamma_i^*| \leq \frac{1}{\|a_i\|}, \forall i \in \{2,3,...,2n+p\}}} < \gamma^*, b >.$$

Observaţia 7.3. Fără a restrânge generalitatea putem considera că $\| a_i \| > 0$ pentru fiecare $i \in \{2, 3, ..., 2n+p\}$. Dacă ar exista $i_0 \in \{2, 3, ..., 2n+p\}$ astfel încât $\| a_{i_0} \| = 0$, aceasta ar implica $a_{i_0} = 0$, ceea ce ne-ar permite să eliminăm linia i_0 făra a schimba natura sistemului.

Propoziţia 7.2. Problema P este stabilă.

Demonstarţie. Vom arăta că funcţia perturbatoare $\Phi : V \times Y \to \overline{\Re}$ este convexă. Fie $(x_1, x_2, ..., x_{2n+p}, \varphi, \gamma)$, $(y_1, y_2, ..., y_{2n+p}, \varphi', \gamma') \in V \times Y$ şi $\lambda \in (0, 1)$. Va trebui să arătăm că :

$\Phi(\lambda x_1+ (1-\lambda)y_1,...,\lambda x_{2n+p}+ (1-\lambda)y_{2n+p}, \lambda\varphi + (1-\lambda)\varphi', \lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma') \le \lambda\Phi(x_1, x_2, ..., x_{2n+p},\varphi,\gamma)$ $+ (1-\lambda)\Phi(y_1, y_2, ..., y_{2n+p}, \varphi', \gamma')$.

Dacă, oricare ar fi $i\in\{1,2,...,2n+p\}$au loc relaţiile $<a_i, x_i> - b_i \le \gamma_i$ şi $<a_i,y_i>-b_i \le \gamma'_i$, atunci, oricare ar fi $i\in\{1, 2,...,2n+p\}$, $<a_i, \lambda x_i+ (1-\lambda)y_i > - b_i \le \lambda\gamma_i + (1-\lambda)\gamma_i'$, ceea ce implică că

$\Phi(\lambda x_1+ (1-\lambda)y_1 ,..., \lambda x_{2n+p}+ (1-\lambda)y_{2n+p}, \lambda\varphi + (1-\lambda)\varphi', \lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma') =$ $\sum_{i=2}^{2n+p} \| \lambda x_i+(1-\lambda)y_i +\lambda\varphi_i+(1-\lambda)\varphi_i'-\lambda x_1-(1-\lambda)y_1\| \le \lambda \sum_{i=2}^{2n+p} \| x_i + \varphi_i - x_1\|+(1-\lambda) \sum_{i=2}^{2n+p} \|y_i+\varphi_i'-$ $y_1\| \le \lambda\Phi(x_1, x_2, ..., x_{2n+p},\varphi,\gamma) + (1-\lambda)\Phi(y_1, y_2, ..., y_{2n+p}, \varphi', \gamma')$.

Dacă există $i_0\in\{1, 2,...,2n+p\}$astfel încât

$$<a_{i_0} ,\lambda x_{i_0} + (1-\lambda) y_{i_0} > - b_{i_0} > \lambda \gamma_{i_0} +(1-\lambda) \gamma_{i_0}' ,$$

atunci cel puţin una din valorile $\Phi(x_1, x_2, ..., x_{2n+p},\varphi,\gamma)$ şi $\Phi(y_1, y_2, ..., y_{2n+p}, \varphi', \gamma')$ este $+ \infty$ ceea ce face ca relaţia căutată să fie adevărată.

Fie $\overline{x} = (\overline{x}_1 ,..., \overline{x}_{2n+p}) \in V$ astfel încât, oricare ar fi $i\in\{1, 2,...,2n+p\}$, $<a_i, \overline{x_i} > < b_i$. Vom arăta că pentru $\overline{x}\in V$ condiţia (C) din Teorema 5.10 este adevărată. Va trebui să arătăm că funcţia $\Phi_1 : Y\to \overline{\Re}$, definită prin $\Phi_1(\varphi,\gamma) = \Phi(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{2n+p} ,\varphi,\gamma)$, este continuă şi finită în $(0, 0) \in Y$.

Conform alegerii lui $(\overline{x}_1 ,..., \overline{x}_{2n+p})$, oricare ar fi $i\in\{1, 2,...,2n+p\}$, are loc $<a_i, \overline{x_i} > - b_i < \gamma_i = 0$, ceea ce implică că $\Phi_1(0, 0) = \sum_{i=2}^{2n+p} \| \overline{x_i} - \overline{x}_1 \|$, care este număr finit.

Fie $\varepsilon >0$. Fără a restrânge generalitatea îl putem alege pe ε astfel încât, oricare ar fi $i\in\{1, 2,...,2n+p\}$,$<a_i, \overline{x_i} > - b_i < -\varepsilon < 0 < \varepsilon$. Fie $B(0,\frac{\varepsilon}{2n+p}) =\{\varphi \in \Re^p \mid \| \varphi \| < \frac{\varepsilon}{2n+p}\}$ bila deschisă din $\Re^p$. Considerăm $W = B(0, \frac{\varepsilon}{2n+p}) \times ... \times B(0, \frac{\varepsilon}{2n+p}) \times (- \varepsilon, + \varepsilon)^{2n+p}$, unde B(0, $\frac{\varepsilon}{2n+p}$) apare de (2n + p -1) ori, o vecinătate deschisă din Y a lui (0, 0). Fie $(\varphi, \gamma) = (\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{2n+p}, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2n+p}) \in W$. Având în vedere că, oricare ar fi $i \in \{1,2,...,2n+p\}$, $\gamma_i \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ rezultă că, oricare ar fi $i \in \{1, 2,...,2n+p\}$, $<a_i, \overline{x_i}> - b_i < \gamma_i$. Pe baza acestei relații se obține

$$\Phi_1(\varphi, \gamma) = \Phi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{2n+p}, \varphi, \gamma) = \sum_{i=2}^{2n+p} \| \overline{x_i} + \varphi_i - \overline{x}_1 \|.$$

În consecință, rezultă următoarea relație

$$| \Phi_1(\varphi, \gamma) - \Phi_1(0, 0) | = | \sum_{i=2}^{2n+p} (\| \overline{x_i} + \varphi_i - \overline{x}_1 \| - \| \overline{x_i} - \overline{x}_1 \|) | \le \sum_{i=2}^{2n+p} | \| \overline{x_i} + \varphi_i - \overline{x}_1 \| - \| \overline{x_i} - \overline{x}_1 \| | \le \sum_{i=2}^{2n+p} \| \varphi_i \| < \sum_{i=2}^{2n+p} \frac{\varepsilon}{2n+p} = \frac{(2n+p-1)\varepsilon}{2n+p} < \varepsilon,$$

care ne asigură continuitatea lui Φ_1 în (0, 0).

Având în vedere şi faptul că inf P este finit, pe baza Teoremei 2.10, obținem că problema P este stabilă. ■

În cele ce urmează vom nota minP minimul problemei P şi maxP* maximul problemei P*.

Propoziția 7.3. Pentru problema P şi duala ei P* are loc următoarea relație

(7.4) inf P = max P*.

Demonstrație. Problema P fiind stabilă rezultă, pe baza Teoremei 5.6 şi a Teoremei 5.8, că problema P* are soluție şi că inf P = sup P*. Din faptul că P* are soluție rezultă că sup P* = max P*. ■

Propoziția următoare [19] ne va da o caracterizare a soluției problemei P.

Propoziția 7.4. Dacă inf P = 0 atunci problema P are soluție, ceea ce este echivalent cu min P = 0.

Demonstrație. Dacă inf P = 0 rezultă că există un şir $((x_{1l}, x_{2l}, ..., x_{2n+pl}))_{l \in N^*}$ în V astfel încât, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n+p\}$ şi oricare ar fi $l \in N^*$, are loc $< a_i, x_{il} > \le b_i$ şi

$\lim\limits_{l\to\infty} \sum\limits_{i=2}^{2n+p} \| x_{i\,l} - x_{1\,l} \| = 0$. Această ultimă relație este echivalentă cu faptul că, oricare ar fi, $i \in \{2,,3, ..., 2n+p\}$, $\lim\limits_{l\to\infty} \| x_{i\,l} - x_{1\,l} \| = 0$.

Pe baza acestei relații rezultă că, dacă există $i_0 \in \{1,2,.... 2n+p\}$ astfel încât şirul $(x_{i_0 l})_{l\in N^*}$ să fie mărginit, atunci, oricare ar fi $i \in \{1,2,.... 2n+p\}$, şirul $(x_{il})_{l\in N^*}$ este mărginit.

Să presupunem că, oricare ar fi $i \in \{1,2,.... 2n+p\}$, şirul $(x_{il})_{l\in N^*}$ este mărginit. Pentru fiecare $i \in \{1,2,.... 2n+p\}$, şirul $(x_{il})_{l\in N^*}$ admite un subşir convergent $(x_{il_h})_{h\in N^*}$ astfel încât $\lim\limits_{h\to\infty} x_{il_h} = \overline{x}_i \in \Re^p$.

Oricare ar fi $i \in \{1,2,.... 2n + p\}$, mulțimea $\{ x \in \Re^p \mid < a_i, x_i > \le b_i\}$ este închisă ceea ce implică că $< a_i, \overline{x}_i > \le b_i$. Rezultă, aşadar, că punctul $(\overline{x}_1 ,..., \overline{x}_{2n+p})$ este soluție admisibilă pentru problema P.

Fie $i \in \{2,3,.... 2n + p\}$, arbitrar. Avem următoarea relație, oricare ar fi $h \in N^*$,

$$\| \overline{x}_i - \overline{x}_1 \| \le \| \overline{x}_i - x_{il_h} \| + \| x_{il_h} - x_{1l_h} \| + \| x_{1l_h} - \overline{x}_1 \|.$$

Dacă facem pe h să tindă la $+\infty$ se obține că $0 \le \| \overline{x}_i - \overline{x}_1 \| \le 0$, ceea ce implică că $\overline{x}_i = \overline{x}_1$. Obținem că $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = ... = \overline{x}_{2n+p}$ de unde rezultă că $(\overline{x}_1 ,..., \overline{x}_{2n+p})$ este soluție a problemei P şi avem atunci că min P =0.

Să presupunem acum că oricare, ar fi $i \in \{1,2,.... 2n+p\}$, şirurile $(x_{il})_{l\in N^*}$ sunt nemărginite şi că problema P nu admite soluții, deci min P > 0.

Oricare ar fi $i \in \{1,2,....,2n+p\}$, fie semispațiul închis $S_i = \{ x \in \Re^p \mid < a_i, x_i > \le b_i\}$, făcut de hiperplanul $H_i = \{ x \in \Re^p \mid < a_i, x_i > = b_i\}$. Din min P >0 rezultă că $\bigcap\limits_{i=1}^{2n+p} S_i = \emptyset$.

Dacă, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, ... 2n+p\}$, $H_i \cap H_j = \emptyset$, echivalent cu faptul că hiperplanele H_i sunt paralele între ele pentru fiecare $i \in \{1, 2, ... 2n+p\}$, rezultă că există două semispații închise S_r şi S_s disjuncte. Având în vedere că $(x_{rl})_{l\in N^*} \subseteq S_r$ şi $(x_{sl})_{l\in N^*} \subseteq S_s$ are loc următoarea relație

$$0 \le \| x_{rl} - x_{sl} \| \le \| x_{rl} - x_{0l} \| + \| x_{0l} - x_{sl} \|.$$

Făcându-l pe l să tindă la + ∞ se obține $\lim_{l\to\infty} \| x_{rl} - x_{sl} \| = 0$, care este în contradicție cu faptul că $d(S_r, S_s) = \inf \{ \| x- y \| \mid x \in S_r, y \in S_s \} > 0$.

Dacă nu sunt toate hiperplanele H_i paralele între ele, fie k numărul maxim de semispații cu intersecția nevidă, $2 \le k \le 2n + p - 1$. Considerăm aceste semispații $S_{i_1}, ..., S_{i_k}$, unde pentru $j \in \{1,2,..., k\}$, $i_j \in \{1,2,..., 2n + p\}$. Alegerea acestor semispații nu este unică. Notăm $S = \bigcap_{j=1}^{k} S_{i_j}$, care este o mulțime nevidă şi închisă. Există atunci un semispațiu închis S_r, $r \in \{1, 2, ..., 2n + p\}$, astfel încât, oricare ar fi $j \in \{1, 2, ..., k\}$, $S_{i_j} \neq S_r$ şi $S \cap S_r = \varnothing$. Această ultimă condiție este echivalentă cu $d(S_r, S) = \inf \{ \| x- y \| \mid x \in S_r, y \in S \} > 0$.

Considerăm şirul $(x_{sl})_{l\in N^*}$, $s \in \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ cu proprietatea că admite un subşir în S şi şirul $(x_{rl})_{l\in N^*} \subseteq S_r$. Dacă pentru aceste două şiruri aplicăm raționamentul de la cazul anterior ajungem din nou la contradicție. ■

Propoziția 7.5. Sistemul (7.3) are soluție dacă şi numai dacă min P = 0.

Demonstrație. Pe baza Observației 7.2 rezultă că (7.3) are soluție dacă şi numai dacă inf P = 0. Conform Propoziției 7.4 acest lucru este echivalent cu min P = 0. ■

Vom demonstra acum principalul rezultat al acestui paragraf.

Teorema 7.6. În ipotezele anterioare are loc următoarea alternativă

(i) sistemul (7.3) are soluție $x \in \mathfrak{R}^p$

sau

(ii) sistemul

$$(7.5)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2n+p} \gamma_i^* a_i = 0 \\ \gamma^* \leqq 0 \\ <\gamma^*, b> > 0 \end{cases}$$

are soluție $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*,..., \gamma_{2n+p}^*) \in \mathfrak{R}^{2n+p}$ dar nu pot avea soluție simultan.

Demonstrație. Dacă sistemul (7.3) are soluție rezultă, pe baza Propoziției 7.5, că min P = 0, ceea ce, conform Propoziției 7.3, rezultă că max P* = 0.

Oricare ar fi $\gamma^* \in \mathfrak{R}^{2n+p}$, cu proprietatea că $\gamma^* \leqq 0$, $\sum_{i=1}^{2n+p} \gamma_i^* a_i = 0$ şi pentru fiecare $i \in \{2, 3,...,2n+p\}$, $|\gamma_i^*| \le \frac{1}{\|a_i\|}$, are loc $<\gamma^*, b> \le 0$.

Să presupunem că sistemul (7.5) are soluție. Fie $\theta^* = (\theta_1^*,..., \theta_{2n+p}^*) \in \mathfrak{R}^{2n+p}$ o soluție a acestui sistem. Considerăm M , P $\in \mathfrak{R}_+^*$ astfel încât, oricare ar fi $i \in \{2, 3,...,2n+p\}$, $0 < M < \frac{1}{\|a_i\|}$ şi $P = \max\{\left|\frac{\theta_i^*}{M}\right| \mid i \in \{2,3,\ldots,2n+p\}\}$. Fie $\gamma^* \in \mathfrak{R}^{2n+p}$, $\gamma^* = \frac{1}{P}\theta^* \in \mathfrak{R}^{2n+p}$.

Din faptul că $\theta^* \leqq 0$ implică că $\gamma^* \leqq 0$. De asemenea din $\sum_{i=1}^{2n+p} \theta_i^* a_i = 0$ implică că $\sum_{i=1}^{2n+p} \gamma_i^* a_i = 0$ şi mai avem că $\forall\, i \in \{2,3,..., 2n+p\}$, $|\gamma_i^*| = \left|\frac{\theta_i^*}{p}\right| \le M < \frac{1}{\|a_i\|}$. Având că $<\theta^*, b> \, > 0$ obținem că $<\gamma^*, b> \, > 0$, ceea ce ne conduce la contradicție. Aşadar sistemul (7.5) nu poate avea soluție.

Dacă sistemul (7.3) nu are soluție rezultă, pe baza Propozițiilor 7.3, 7.4 şi 7.5, că maxP* = inf P > 0. Există în acest caz $\gamma^* \in \mathfrak{R}^{2n+p}$, cu proprietatea $\gamma^* \leqq 0$, $\sum_{i=1}^{2n+p} \gamma_i^* a_i = 0$ şi pentru fiecare $i \in \{2, 3,...,2n+p\}$, $|\gamma_i^*| \le \frac{1}{\|a_i\|}$, astfel încât $<\gamma^*, b> \, > 0$. Acest γ^* este o soluție pentru sistemul (7.5), astfel că (ii) este adevărată. ■

În final, vom demonstra echivalența dintre existența soluției sistemului (7.5) şi a soluției sistemului (7.2).

Teorema 7.7. Sistemul

(7.2) $$\begin{cases} <y, u> \, < 0 \\ <y, v^i> \, \le 0, \; i \in \{1, 2, \ldots, p\} \end{cases}$$

are soluție în $\Re^n$ dacă şi numai dacă sistemul

$$(7.5) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2n+p} \gamma_i^* a_i = 0 \\ \gamma^* \leqq 0 \\ <\gamma^*, b> > 0 \end{cases}$$

are soluție în $\Re^{2n+p}$.

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^n$ soluție a sistemului (7.2). Oricare ar fi $j \in \{1, 2, ..., n\}$, există, atunci, θ_{p+j}^* şi θ_{n+p+j}^* numere reale pozitive astfel încât $y_j = \theta_{p+j}^* - \theta_{n+p+j}^*$. Se obține, prin urmare,

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^i (\theta_{p+j}^* - \theta_{n+p+j}^*) \leq 0,$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., p\}$, şi

$$\sum_{j=1}^{n} u_j (\theta_{p+j}^* - \theta_{n+p+j}^*) < 0.$$

Oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., p\}$, fie $\theta_i^* = - \sum_{j=1}^{n} v_j^i (\theta_{p+j}^* - \theta_{n+p+j}^*)$. Obținem $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*,..., \theta_{2n+p}^*) \in \Re^{2n+p}$ cu proprietatea $\theta^* \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{n} u_j (\theta_{p+j}^* - \theta_{n+p+j}^*) < 0$ şi oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $\theta_i^* + \sum_{j=1}^{n} v_j^i (\theta_{p+j}^* - \theta_{n+p+j}^*) = 0$. Ținând cont de definiția lui a_i şi b_i, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., 2n + p\}$, au loc următoarele relații $\sum_{i=1}^{2n+p} \theta_i^* a_i = 0$, $\theta^* \geqq 0$ şi $< \theta^*, b > < 0$.

Dacă considerăm $\gamma^* \in \Re^{2n+p}$, $\gamma^* = -\theta^*$, atunci rezultă că γ^* este soluție a sistemului (7.5).

Suficiența. Fie $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, ..., \gamma_{2n+p}^*) \in \Re^{2n+p}$ o soluție a sistemului (7.5). Se obține așadar

$$\sum_{j=1}^{n} u_j (\gamma_{p+j}^* - \gamma_{n+p+j}^*) > 0$$

și, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., p\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^i (\gamma_{p+j}^* - \gamma_{n+p+j}^*) = - \gamma_i^*.$$

Dacă notăm, oricare ar fi $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $y_j = \gamma_{p+j}^* - \gamma_{n+p+j}^*$ obținem $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^n$ care verifică $\sum_{j=1}^{n} u_j y_j > 0$ și, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $\sum_{j=1}^{n} v_j^i y_j = - \gamma_i^*$. Având în vedere că, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $\gamma_i^* \leq 0$ se obține

$$< u, y > > 0$$

și oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., p\}$

$$< v^i, y > \geq 0.$$

Punctul $z \in \Re^n$, $z = -y$ va fi soluție a sistemului (7.2). ■

Dualitate pentru problema de aproximare

În acest paragraf se va determina duala problemei de aproximare în cazul cel mai general, rezultate ce se vor particulariza pentru problema de cea mai bună aproximare convexă și problema de locație. Se vor obține în final condițiile Kolmogorov atât pentru problema de cea mai bună aproximare convexă cât și pentru problema de locație.

Pentru început vom reaminti unele noțiuni de care vom avea nevoie în continuare.

Definiție. Fie V un spațiu vectorial. O mulțime $K \subseteq V$ se numeşte con dacă, oricare ar fi $v \in K$ şi oricare ar fi $\lambda \geq 0$, are loc $\lambda v \in K$. Un con K se numeşte punctat dacă $K \cap (-K) = \emptyset$.

În [9] se arată că, dacă $K \subseteq V$ este un con convex , atunci se poate introduce pe V o relație de ordine parțială definită astfel :

$$u \underset{K}{\geq} v \Leftrightarrow u - v \in K.$$

Definiție. Fie $K \subseteq V$ este un con. Mulțimea $K^* = \{ u^* \in V^* \mid \langle u^*, u\rangle \geq 0, \forall u \in K\}$ se numeşte conul dual al lui K.

Conul dual K* defineşte de asemenea pe V* o relație de ordine parțială:

$$u^* \underset{K^*}{\geq} v^* \Leftrightarrow u^* - v^* \in K^*.$$

Observația 7.4. Dacă $K \subseteq V$ este un con convex şi închis, atunci are loc $K^{**} = K$. Elementele lui K se pot caracteriza în acest caz în felul următor:

$$v \in K \Leftrightarrow \langle v^*, v\rangle \geq 0, \forall v^* \in K^*.$$

Fie $n \in N^*$ şi, oricare ar fi $i \in \{1,2, ..., n\}$, fie $(V_i , \| \cdot \|_i)$ un spațiu Banach. Mai considerăm, de asemenea, V şi Z două spații Banach. Considerăm $U \subseteq V$ o mulțime închisă şi convexă şi oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $W_i \subseteq V_i$, de asemenea, mulțimi închise şi convexe. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n\}$, fie $L(V, V_i)$ mulțimea funcțiilor liniare şi continue de la V la V_i şi $L(V, Z)$ mulțimea funcțiilor liniare şi continue de la V la Z. Fie $K_1 \subseteq Z$ un con convex şi, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $S_i \in L(V, V_i)$, $A \in L(V, Z)$, $\ell \in V^*$ funcții liniare şi continue. Mai considerăm un element fixat $b \in Z$ şi, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, numerele reale pozitive λ_i.

Definim următoarea problemă de aproximare

$$(P_a) \qquad \inf_{\substack{u \in U \\ x_i \in W_i, \forall i \in \{1,2,...,n\} \\ Au+b \underset{K_1}{\leq} 0}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_i - S_i u \|_i + \langle \ell , u \rangle \right\}.$$

Pentru a determina duala problemei P_a vom considera spațiile vectoriale produs $W = V \times V_1 \times ... \times V_n$ şi $Y = V_1 \times ... \times V_n \times Z$.

Fie funcția perturbatoare $\Phi : W \times Y \rightarrow \overline{\Re}$, definită prin

$$\Phi(u, x, \varphi, \gamma) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x_i + \varphi_i - S_i u\|_i + <\ell, u>, & \text{daca } u \in U, Au + b \underset{K_1}{\leq} \gamma, \\ & x_i \in W_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ +\infty, & \text{in caz contrar} \end{cases},$$

unde $u \in V$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ şi $\gamma \in Z$.

Problema perturbată va avea forma

$$(P_{a\ \varphi,\gamma}) \qquad \inf_{\substack{u \in U \\ x \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n}} \Phi(u, x, \varphi, \gamma).$$

Dacă $\varphi = 0$ şi $\gamma = 0$ atunci problema de mai sus coincide cu problema P_a.

Funcția conjugată $\Phi^* : W^* \times Y^* \rightarrow \overline{\Re}$ a lui Φ va fi

$$\Phi^*(u^*, x^*, \varphi^*, \gamma^*) = \sup_{\substack{u \in V, \gamma \in Z \\ x, \varphi \in V_1 \times \ldots \times V_n}} \{ \sum_{i=1}^{n} < x_i^*, x_i > + < u^*, u > + < \gamma^*, \gamma > +$$

$$\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i^*, \varphi_i > - \Phi(u, x, \varphi, \gamma > \},$$

unde $u^* \in V^*$, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in V_1^* \times \ldots \times V_n^*$, $\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots \varphi_n^*) \in V_1^* \times \ldots \times V_n^*$ şi $\gamma^* \in Z^*$.

Pe baza definiției lui Φ se obține

$$\Phi^*(u^*, x^*, \varphi^*, \gamma^*) = \sup_{\substack{u \in U, Au + b \underset{K_1}{\leq} \gamma \\ x_i \in W_i, \varphi_i \in V_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}}} \{ \sum_{i=1}^{n} [< x_i^*, x_i > + < \varphi_i^*, \varphi_i >] +$$

$$< u^*, u > + <\gamma^*, \gamma> - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_i + \varphi_i - S_i u \|_i - < \ell, u > \}.$$

Considerăm $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V_1 \times V_2 \times \ldots V_n$ şi $z \in Z$ astfel încât, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $y_i = x_i + \varphi_i - S_i u$ şi $z = \gamma - b - Au$.

În consecinţă, rezultă

$$\Phi^*(u^*,x^*,\varphi^*,\gamma^*) = \sup_{\substack{u \in U,\ z \geq_{K_1} 0 \\ x_i \in W_i, \varphi_i \in V_i, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}}} \{ \sum_{i=1}^{n} [< x_i^*, x_i > + <\varphi_i^*, S_i u + y_i - x_i >] + < u^*, u > + <\gamma^*, Au + b + z > - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| y_i \|_i - < \ell, u > \} =$$

$$\sup_{\substack{u \in U,\ z \geq_{K_1} 0 \\ x_i \in W_i, \varphi_i \in V_i, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}}} \{ \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(< \frac{\varphi_i^*}{\lambda_i}, y_i > - \| y_i \|_i) + < x_i^* - \varphi_i^*, x_i >] + < \gamma^*, z + b> + < \sum_{i=1}^{n} S_i^*\varphi_i^* + A^*\gamma^* + u^* - \ell, u > \} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sup_{y_i \in V_i} (< \frac{\varphi_i^*}{\lambda_i}, y_i > - \| y_i \|_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{x_i \in W_i} < x_i^* - \varphi_i^*, x_i > + \sup_{z \geq_{K_1} 0} < \gamma^*, z> + \sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} S_i^*\varphi_i^* + A^*\gamma^* + u^* - \ell, u > + < \gamma^*, b>.$$

Problema duală a problemei P_a va fi

$$(P_a^*) \qquad \sup_{(\varphi^*,\gamma^*) \in Y^*} \{ - \Phi^*(0, 0, \varphi^*, \gamma^*) \}.$$

Aşadar, problema P_a^* se va scrie astfel

$$\sup_{(\varphi^*,\gamma^*) \in Y^*} \{- \Phi^*(0, 0, \varphi^*, \gamma^*) \} = \sup_{(\varphi^*,\gamma^*) \in Y^*} - \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sup_{y_i \in V_i} (< \frac{\varphi_i^*}{\lambda_i}, y_i > - \|y_i\|_i) + \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_i \in W_i} < - \varphi_i^*, x_i > + \sup_{z \geq_{K_1} 0} < \gamma^*, z> + \sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} S_i^*\varphi_i^* + A^*\gamma^* - \ell, u > + < \gamma^*, b>\}.$$

Oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, are loc

$$\sup_{y_i \in V_i} \left(< \frac{\varphi_i^*}{\lambda_i}, y_i > - \| y_i \|_i \right) = \begin{cases} 0, & \text{daca} \quad \|\varphi_i^*\| \leq \lambda_i \\ +\infty, & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

şi, în plus, mai avem

$$\sup_{z \underset{K_1}{\geq} 0} < \gamma^*, z> = \begin{cases} 0, & \text{daca} \quad \gamma^* \underset{K_1^*}{\leq} 0 \\ +\infty, & \text{in caz contrar} \end{cases}.$$

Dacă, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, notăm $p_i^* = \dfrac{\varphi_i^*}{\lambda_i}$, atunci duala lui P_a are următoarea formă

$$(P_a^*) \qquad \sup_{\substack{\gamma^* \underset{K_1^*}{\leq} 0 \\ \|p_i^*\| \leq 1, \forall i \in \{1,2,\ldots n\}}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \inf_{x_i \in W_i} < p_i^*, x_i > - <\gamma^*, b> - \sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_i^* + A^*\gamma^* - \ell, u > \right\}.$$

Considerând că $U = K_0$ este un con convex şi închis, atunci relaţia $u \in U$ este echivalentă cu $u \underset{K_0}{\geq} 0$. În aceste condiţii are loc următoarea relaţie

$$\sup_{u \underset{K_0}{\geq} 0} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_i^* + A^*\gamma^* - \ell, u > = \begin{cases} 0, \text{ daca } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_i^* + A^*\gamma^* - \ell \underset{K_0^*}{\leq} 0 \\ +\infty, \text{ in caz contrar} \end{cases}$$

Problema duală a problemei P_a va fi

$$(P_a^*) \qquad \sup_{\substack{\gamma_0^* \underset{K_1^*}{\leq} 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_i^* + A^*\gamma^* - \ell \underset{K_0^*}{\leq} 0 \\ \|p_i^*\| \leq 1, \forall i \in \{1,2,\ldots n\}}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \inf_{x_i \in W_i} < p_i^*, x_i > - <\gamma^*, b> \right\}$$

Pe baza Propoziţiei 5.1 are loc $\sup P_a^* \leq \inf P_a$. În cele ce urmează vom da o teoremă care să asigure dualitatea tare între problemele P_a şi P_a^*.

Teorema 7.8. Dacă $-\infty < \inf P_a < +\infty$ şi dacă există $u_0 \in U$ astfel încât $Au_0 + b \in -\operatorname{int} K_1$, atunci problema P_a este stabilă.

Demonstraţie. Funcţia $\Phi : W \times Y \rightarrow \overline{\Re}$ este convexă iar numărul $\inf P_a$ este finit. Vom arăta că are loc condiţia (C) din Teorema 5.10 ceea ce ne va conduce la faptul că problema P_a este stabilă.

Oricare ar fi $i \in \{1,2, \ldots, n\}$, fixăm $x_{i0} \in W_i$ şi notăm $x_0 = (x_{10}, x_{20},\ldots, x_{n0})$. Considerăm funcţia $\Phi_2 : Y\rightarrow \overline{\Re}$, definită prin $\Phi_2(\varphi, \gamma) = \Phi(u_0, x_0, \varphi, \gamma)$. Din ipoteză rezultă că funcţia Φ_2 este finită în $(0, 0) \in Y$. Rămâne să mai arătăm că funcţia Φ_2 este continuă în $(0, 0)$.

Din faptul că $-(Au_0 + b) \in \operatorname{int} K_1$ rezultă că există o vecinătate deschisă W a lui $-(Au_0 + b)$ astfel încât $W \subseteq K_1$. Mulţimea $W' = Au_0 + b + W$ este o vecinătate deschisă a lui 0 şi $W' = Au_0 + b + W \subseteq Au_0 + b + K_1$. Rezultă, că oricare ar fi $\gamma \in W'$, are loc

$$\gamma \in Au_0 + b + K_1 \Leftrightarrow \gamma - Au_0 - b \in K_1 \Leftrightarrow \gamma \underset{K_1}{\geq} Au_0 + b.$$

Fie $\varepsilon > 0$.Oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, considerăm bila deschisă de centru 0 din V_i, $V_i' = B(0, \frac{\varepsilon}{n\lambda_i}) = \{ \varphi_i \in V_i \mid \| \varphi_i \|_i \leq \frac{\varepsilon}{n\lambda_i} \}$. Mulţimea $V_1'\times V_2'\times\ldots\times V_n'\times W'$ este o vecinătate deschisă a lui $(0, 0)$ din $V_1\times V_2 \times \ldots \times V_n \times Z = Y$. Oricare ar fi $(\varphi, \gamma) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \gamma) \in V_1'\times V_2'\times\ldots\times V_n'\times W'$, are loc

$$| \Phi_2 (\varphi , \gamma) - \Phi_2 (0 , 0) | = | \Phi (u_0 , x_0 , \varphi , \gamma) - \Phi(u_0 , x_0 , 0 , 0)| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\| x_{i0} + \varphi_i - S_iu_0 \|_i - \| x_{i0} - S_iu_0 \|_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\| \varphi_i \|_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Observaţia 7.5. Dacă ipotezele Teoremei 7.8 sunt verificate rezultă, pe baza Teoremei 5.8 şi a Teoremei 5.6, că problema P_a^* are soluţie şi că $\inf P_a = \sup P_a^* = \max P_a^*$.

Vom trata în continuare câteva cazuri particulare ale problemei P_a.

1. Problema de cea mai bună aproximare convexă

În ipotezele problemei P_a considerăm n =1, λ_1 =1, V_1 = V, b = 0, x $\in$ V fixat şi funcţiile liniare şi continue A = 0 $\in$ L(V, Z), S_1 = I $\in$ L(V, V), ℓ = 0 $\in$ V*. Obţinem problema

$$(P_{a1}) \qquad \inf_{u\in U} \| x - u \|.$$

Ataşându-i funcţia perturbatoare $\Phi : V \times V \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, definită prin

$$\Phi(u, \varphi) = \begin{cases} \|x+\varphi-u\|, & \text{daca } u \in U \\ +\infty, & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

se obţine problema duală

$$(P_{a1}^*) \qquad \sup_{\|p^*\|\le 1} \{ <p^*, x> - \sup_{u\in U} <p^*, u> \} = \sup_{\|p^*\|\le 1} \{ \inf_{u\in U} < p^*, x-u> \}.$$

Pe baza Teoremei 5.10 problema P_{a1} este stabilă ceea ce implică, conform Observaţiei 7.5, că $\inf_{u\in U} \| x - u \| = \max_{\|p^*\|\le 1} \{ \inf_{u\in U} < p^*, x-u> \}$. Având în vedere că $\| x - u \| = \sup_{\|p^*\|\le 1} < p^*, x-u >$ obţinem următoarea relaţie

$$\inf_{u\in U} \{ \sup_{\|p^*\|\le 1} < p^*, x-u > \} = \max_{\|p^*\|\le 1} \{ \inf_{u\in U} < p^*, x-u> \}.$$

2. Problema de locaţie

În ipotezele problemei P_a considerăm $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$, b = 0 şi, oricare ar fi i $\in$ {1, 2 , …, n}, fixăm $x_i \in$ V. Considerăm de asemenea funcţiile liniare şi continue A = 0 $\in$ L(V, Z), ℓ = 0 $\in$ V* şi, oricare ar fi i $\in$ {1, 2 ,…, n}, S_i = I $\in$ L(V, V). Obţinem problema

$$(P_{a2}) \qquad \inf_{u\in U} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_i - u \|.$$

Considerăm pentru problema P_{a2} funcția perturbatoare $\Phi : V \times V \times \ldots \times V \to \overline{\mathfrak{R}}$, definită prin

$$\Phi(u, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_i + \varphi_i - u \|, & \text{daca } u \in U \\ +\infty, & \text{in caz contrar} \end{cases}.$$

Duala problemei P_{a2} va fi

$$(P_{a2}^*) \qquad \sup_{\|p_i^*\| \le 1, \forall i \in \{1,2\ldots,n\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < p_i^*, x_i > - \sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i^*, u > \right\}$$

şi ținând cont de faptul că P_{a2} este stabilă se obține

$$\inf_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_i - u \| = \sup_{\|p_i^*\| \le 1, \forall i \in \{1,2\ldots,n\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < p_i^*, x_i > - \sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i^*, u > \right\}.$$

3. Problema de programare liniară

În ipotezele problemei P_a considerăm, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lambda_i = 0$ şi $U = K_0$ un con convex şi închis din V. Obținem următoarea problemă

$$(P_{a3}) \qquad \inf_{\substack{u \underset{K_0}{\ge} 0 \\ Au + b \underset{K_1}{\le} 0}} < \ell, u >.$$

Ataşându-i funcția perturbatoare $\Phi : V \times Z \to \overline{\mathfrak{R}}$, definită prin

$$\Phi(u, \gamma) = \begin{cases} < \ell, u >, & \text{daca } u \underset{K_0}{\ge} 0,\ Au + b \underset{K_1}{\le} \gamma \\ +\infty, & \text{in caz contrar} \end{cases},$$

obținem următoarea problemă duală:

$$(P_{a3}^*) \qquad \sup_{\substack{\gamma^* \leq_{K_1^*} 0 \\ A^*\gamma^* - \ell \leq_{K_0^*} 0}} \{ - < \gamma^*, b > \}.$$

Dacă condițiile din Teorema 7.8 sunt îndeplinite, atunci problema P_{a3} este stabilă şi are loc următoarea relație

$$\inf_{\substack{u \geq_{K_0} 0 \\ Au + b \leq_{K_1} 0}} < \ell, u > = \sup_{\substack{\gamma^* \leq_{K_1^*} 0 \\ A^*\gamma^* - \ell \leq_{K_0^*} 0}} \{ - < \gamma^*, b > \}.$$

Considerând $V = \Re^n$, $K_0 = \Re_+^n$, $Z = \Re^m$, $K_1 = \Re_+^m$, $A \in M_{m,n}(\Re)$ şi $b \in M_{m,1}(\Re)$ problema P_{a3} devine problema de programare liniară studiată în [4].

În cele ve urmează vom studia relațiile de extremalitate ale problemei P_a.

Teorema 7.9. Sunt adevărate următoarele afirmații:

1° Fie $(u_0, x_0) = (u_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ o soluție a problemei P_a şi fie îndeplinite condițiile din ipoteza Teoremei 7.8 . Dacă $(p_0^*, \gamma_0^*) = (p_{10}^*, p_{20}^*, \ldots, p_{n0}^*, \gamma_0^*)$ este o soluție a problemei P_a^*, atunci, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, au loc următoarele relații:

(i) $< p_{i0}^*, x_{i0} - S_i u_0 > = \| x_{i0} - S_i u_0 \|$;

(ii) $< p_{i0}^*, x_{i0} > = \inf_{x_i \in W_i} < p_{i0}^*, x_i >$;

(iii) $< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_{i0}^* + A^*\gamma_0^* - \ell, u_0 > = \sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_{i0}^* + A^*\gamma_0^* - \ell, u >$;

(iv) $< \gamma_0^*, Au_0 + b > = 0$.

2° Dacă (u_0, x_0) este o soluție admisibilă a problemei P_a, iar (p_0^*, γ_0^*) este o soluție admisibilă a problemei P_a^* şi au loc relațiile (i)-(iv), atunci (u_0, x_0) este o soluție a problemei P_a, (p_0^*, γ_0^*) este o soluție a problemei P_a^* şi are loc min P_a^* = max P_a^*.

Demonstrație. 1° Dacă, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\varphi_{i0}^* = \lambda_i p_{i\,0}^*$, atunci rezultă, pe baza Propoziției 5.13, că $\Phi(u_0, x_0, 0, 0) + \Phi^*(0, 0, \varphi_0^*, \gamma_0^*) = 0$, echivalent cu

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_{i0} - S_i u_0 \| + < \ell, u_0 > + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sup_{x_i \in W_i} < -p_{i0}^*, x_i > + < \gamma_0^*, b> +$$

$$\sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_{i0}^* + A^*\gamma_0^* - \ell, u > = 0.$$

Pe de altă parte avem următoarea relație

$$-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < p_{i0}^*, x_{i0} - S_i u_0 > -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < - p_{i0}^*, x_{i0} > + < \gamma_0^*, Au_0 > -$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_{i0}^* + A^*\gamma_0^*, u_0 > = 0.$$

Adunând cele două relații, se obține

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\| x_{i0} - S_i u_0 \| - < p_{i0}^*, x_{i0} - S_i u_0 >) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sup_{x_i \in W_i} < -p_{i0}^*, x_i > - < -p_{i0}^*, x_{i0}>)$$

$$+ \sup_{u \in U} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^* p_{i0}^* + A^*\gamma_0^* - \ell, u - u_0> + < \gamma_0^*, Au_0 + b > = 0.$$

Fiecare membru al acestei sume este mai mare sau egal cu 0 ceea ce implică că trebuie să fie egal cu 0 şi astfel relațiile (i)-(iv) sunt îndeplinite.

2° În aceste condiții are loc relația de extremalitate $\Phi(u_0 , x_0 , 0 , 0) + \Phi^*(0, 0, \varphi_0^*, \gamma_0^*) = 0$, ceea ce pe baza Propoziției 5.13 ne asigură că (u_0, x_0) este soluție a problemei P_a, (p_0^*, γ_0^*) este soluție a problemei P_a^* şi are loc $\min P_a^* = \max P_a^*$. ■

Observația 7.6. În cazul problemei de cea mai bună aproximare convexă, aşa cum s-a sugerat în [3], se obține că $u_0 \in V$ este soluție a problemei P_{a1} dacă şi numai dacă există o funcție liniară şi continuă $p_0^* \in V^*$ astfel încât

(i) $\| p_0^* \| \leq 1$;

(ii) $< p_0^*, x - u_0 > = \| x - u_0 \|$;

(iii) oricare ar fi $u \in U$, $< p_0^*, u - u_0 > \leq 0$.

Acest rezultat a fost demonstrat în [17] şi generalizat în [3] şi [20].

Observația 7.7. În cazul problemei de locație dacă, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \in V \setminus \overline{U}$, atunci, pe baza Teoremei 7.9, se obține că $u_0 \in V$ este o soluție a problemei P_{a2} dacă şi numai dacă, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, există funcțiile liniare şi continue $p_{i0}^* \in V^*$ astfel încât

(i) $\| p_{i0}^* \| = 1$;

(ii) $< p_{i0}^*, x_i - u_0 > = \| x_i - u_0 \|$;

(iii) oricare ar fi $u \in V$, $< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{i0}^*, u - u_0 > \leq 0$.

În [2] s-a demonstrat că oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, p_{i0}^* sunt puncte extremale ale bilei unitate din V^*.

Bibliografie

[1] V.Barbu, Th.Precupanu - *Convexitate şi optimizare în spaţii Banach*, Academia R.S.R., Bucureşti, 1975

[2] W.W.Breckner - *O teoremă de caracterizare a elementelor de cea mai bună aproximare,* Studia Universitatis Babeş- Bolyai, 13(1968), 39-42

[3] W.W.Breckner - *Zur Charakterisierung von Minimallösungen*, Mathematica, 12(35)(1970), 25 -38

[4] W.W.Breckner - *Cercetări operaţionale*, Universitatea Babeş - Bolyai, Cluj - Napoca, 1981

[5] A.Dax - *Theorems of the alternative and duality*, JOTA, 94(1997), 561-590

[6] I.Ekeland, R.Temam - *Analyse convexe et problémes variationnels*, Dunod, Paris, 1973

[7] W.Fenchel - *On conjugate convex functions*, Canadian J. Math., 1(1949), 73 -77

[8] J.R.Giles - *Convex analysis with application in differentiation of convex functions*, Pitman, London, 1982

[9] J.Jahn - *Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces*, Verlag P.Lang, Frankfurt am Main, 1986

[10] I.V.Kantorovici - *Analiză funcţională*, Editura Ştiinţifică şi Pedagogică, Bucureşti, 1986

[11] G.Köthe - *Topologische lineare Räume*, Vol. I, Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960

[12] K.S.Kretchmer - *Programmes in paired spaces*, Canadian J. Math., 13(1961), 221-238

[13] O.L.Mangasarian - *Nonlinear programming*, McGraw - Hill Book Company, New York, 1969

[14] I.Muntean - *Analiză funcțională*, Universitatea Babeş - Bolyai, Cluj-Napoca, 1993

[15] R.T.Rockafellar - *Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions*, Duke Math. J., 33(1960), 81-90

[16] R.T.Rockafellar - *Duality and stability in extremum problems involving convex functions*, Pacific J. Math., 21(1967), 167-187

[17] I.Singer - *Cea mai bună aproximare în spații vectoriale normate prin elemente din subspații vectoriale*, Academia R.S.R., Bucureşti, 1967

[18] G.Wanka - *Application of location to get theorems of alternative*, Studies in Locational Analysis, 9(1996), 131-135

[19] G.Wanka - *Approximation and adjoint inequalities*, Alexisbad 1996, Proceedings of the 6th Workshop of the DGOR- Working Group, Hänsel - Hohenhausen, Egelsbach - Frankfurt - Washington, 237-246

[20] G.Wanka - *Kolmogorov-conditions for vectorial approximation problems* (în curs de apariție)