

ÖSTERREICHISCHE GESELLSCHAFT FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE

© =α= =⊗= =κ= =∇= =Ω= =α= =⊗= =κ= =∇= =Ω= =α= =⊗= =κ= =∇= =Ω= ©  
©  
© VIII.Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik ©  
©  
© =α= =⊗= =κ= =∇= =Ω= =α= =⊗= =κ= =∇= =Ω= =α= =⊗= =κ= =∇= =Ω= ©

VON DER TONTAFEL ZUM INTERNET  
Der Einfluß des Mediums auf die Entwicklung der Mathematik

in MIESENBACH

in Niederösterreich, zwischen Puchberg am Schneeberg und dem Piestingtal  
von SONNTAG, 21. MAI bis SAMSTAG, 27. MAI 2006

KURZFASSUNGEN DER VORTRÄGE

HERAUSGEBER:

*Dr. Christa Binder*

*Institut für Analysis und Scientific Computing*

*Technische Universität Wien*

*Wiedner Hauptstr. 8-10/101*

*A 1040 Wien, Österreich.*

*Tel.: +43 1 58801 10129*

*FAX: +43 1 59901 10199*

*e-mail: christa.binder@tuwien.ac.at*

**Danksagung:**

Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen. Dafür herzlichen Dank.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur  
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung  
Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte  
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien  
Springer-Verlag, Heidelberg  
anonyme Spender

Gefördert durch das Land Niederösterreich.

# Programm und Inhaltsverzeichnis

## **MONTAG, 22. Mai, vormittag:**

- ULRICH REICH (*Karlsruhe*) 1  
Handschrift und gedrucktes Buch – was ist Henne, was ist Ei?
- HARALD GROPP (*Heidelberg*) 10  
Morning star and evening star in East and West.
- SERGIO NOBRE (*Rio Claro, Brasilien*) 18  
Die Institutionalisierung der Forschung auf dem Gebiet der Geschichte der Mathematik in Brasilien.

## **MONTAG, 22. Mai, nachmittag:**

- MARKO RAZPET (*Laibach*) 24  
Zu den Lah-Zahlen mit Hilfe der umbralen Rechnung.
- FRIEDRICH KATSCHER (*Wien*) 42  
Das Rechnen mit Jetons in Frankreich.
- GERHARD LINDBICHLER (*Wien*) 48  
Staffel- und Sprossenradmaschinen.

## **DIENSTAG, 23. Mai, vormittag:**

- STEFAN DESCHAUER (*Dresden*) 56  
Anspruchsvolle mathematische Probleme in einem byzantinischen Manuskript von 1436.
- JASNA FEMPL-MADJAREVIC (*Belgrad*) 74  
Equations through history - Her Majesty the *Equation*.
- IVOR GRATTAN-GUINNESS (*London*)  
Einige Bemerkungen zur Geschichte der Druckereien, Verlage und Buchhandlungen.

## **DIENSTAG, 23. Mai, nachmittag:**

- NADA RAZPET (*Laibach*) 79  
Influence of computers on teaching geometry.
- GERT SCHUBRING (*Bielefeld*) 86  
Stabilität und Wandel: Vergleich von Entwicklungs-Mustern für eine Geschichte mathematischer Lehrbücher seit der Antike.
- MILOŠ ČANAK (*Belgrad*) 94  
Johann Sebastian Bach und die Mathematik.

**MITTWOCH, 24. Mai, vormittag:**

- FRANZ PICHLER (*Linz*) 102  
Walshfunktionen und Anwendungen – ein historischer Überblick.
- KARL-HEINZ SCHLOTE (*Altenburg*) 107  
Hopfs elementare Bemerkung zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen.
- MILOŠ ČANAK (*Belgrad*) 113  
Über die historische Entwicklung und die harmonikale Bedeutung der Vekuaschen Differentialgleichung.

**MITTWOCH, 24. Mai, nachmittag:**

Ausflug nach Wiener Neustadt, Besichtigung der Militärakademie und der Bibliothek im Neukloster, Stadtrundgang.

**DONNERSTAG, 25. Mai (Christi Himmelfahrt), vormittag:**

- PHIL J. DAVIS (*Providence*) 123  
The Media and Mathematics Look at Each Other.
- IVOR GRATTAN-GUINNESS (*London*) 129  
The reception of Gödel's 1931 incompleteness theorems by mathematicians.
- PETER ULLRICH (*Koblenz*) 140  
Die Herausgabe der Weierstraßschen *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen* durch Hermann Amandus Schwarz.

**DONNERSTAG, 26. Mai (Christi Himmelfahrt), nachmittag:**

- MARTINA BEČVÁŘOVÁ (*Prag*) 150  
Emil Weyr and some his activities.
- JÓZSEF KOLUMBÁN (*Cluj*) 160  
The development of the Cluj (Koložsvár–Klausenburg) School of Mathematics between 1872–1919.
- KLAUS BARNER (*Kassel*) 169  
Bemerkungen zu Fermats Geburtsdatum.

**FREITAG, 27. Mai, vormittag:**

- RITA MEYER-SPASCHE (*Garching*) 171  
Einige Anmerkungen zum Einfluß von Computern auf Mathematik und Physik.
- RENATE TOBIES (*Berlin-Linz*) 175  
Graphische mathematische Methoden für das Lösen praktischer Probleme (Iris Runge als Mittlerin in der angewandten Forschung und Industrie).
- MAGDALENA HYKŠOVÁ (*Prag*) 184  
From Parlor Games to Computer Networks.

## **FREITAG, 27. Mai, nachmittag:**

WALTRAUD VOSS ( <i>Dresden</i> )	192
Aus Gustav Zeuners <i>Geheimakten</i> : Briefe im Vorfeld von Berufungen.	
PETER SCHMITT ( <i>Wien</i> )	205
PC, T <sub>E</sub> X, www, arXiv, google,... – Ein informeller, fragmentarischer und subjektiver Rückblick auf das letzte Dritteljahrhundert.	
<b>Schriftliche Beiträge:</b>	
S.S. DEMIDOV - R.A. SIMONOV ( <i>Moskau</i> )	212
Prince Albertus Dalmatskii and the first Russian manuscript of XVIIth century on theoretical geometry.	
MA LI ( <i>Stockholm</i> )	220
Four problems from bamboo strips (a preliminary study).	
SVETLANA PETROVA ( <i>Moskau</i> )	225
Sur la méthode du <i>polygone de Newton</i> .	
CHRISTINE PHILI ( <i>Athen</i> )	228
The arithmetization of P. Zervos' book <i>Infinitesimal Calculus</i> at the twenties' in Greece.	
ANNETTE VOGT ( <i>Berlin</i> )	240
Vorlesungs-Mitschriften als Quelle?	
STEFAN DESCHAUER ( <i>Dresden</i> )	242
Gedicht.	

Gruppenbild Börsenhof (Donnerstag, 26. Mai 2006) (Foto: Peter Schmitt)

von links nach rechts: Waltraud Voss, Menso Folkerts, Stefan Deschauer, Ivor Grattan-Guinness, Ulrich Reich, Peter Ullrich, Martina Bečvářová, Magdalena Hykšová, Maria Gruber-Haunlieb, Gerlinde Faustmann, Karl-Heinz Schlote, Christa Binder, Gert Schubring, Nada Razpet, Renate Tobies, Herwig Säckl, Rita Meyer-Spache, Wolfgang Breidert, Detlef Gronau, Harald Gropp, Fritz Katscher, Franz Pichler, Peter Schmitt, Jozsef Kolumban, Michael von Renteln, Marko Razpet.

Gruppenbild Wiener Neustadt (Mittwoch, 25. Mai 2006) (Foto: Peter Schmitt)

von links nach rechts: Jozsef Kolumban, Fritz Katscher, Gert Schubring, Gerlinde Faustmann, Wolfgang Breidert, Waltraud Voss, Peter Ullrich, Christa Binder, Menso Folkerts, Jasna Fempl-Madjarević, Magdalena Hykšová, Detlef Gronau, Renate Tobies, Martina Bečvářová, Karl-Heinz Schlote, Ulrich Reich, Miloš Čanak, Nada Razpet, Ivor Grattan-Guinness, Frau Pichler, Sergio Nobre, Franz Pichler, Stefan Deschauer, Marlene Breidert, Enid Grattan-Guinness, Klaus Barner, Gisela von Renteln, Ligia Arantes Sad, Harald Gropp, Michael von Renteln, Marko Razpet.





RE

ÖRSENHOF



**FREITAG, 27. Mai, nachmittag:**

192 **WALTRAUD VOSS (Dresden)**  
Aus Gustav Zeuners *Geheimakten*: Briefe im Vorfeld von Berufungen.

205 **PETER SCHMITT (Wien)**  
PC, TeX, www, arXiv, google, ... – Ein informeller, fragmentarischer und subjektiver Rückblick auf das letzte Dritteljahrhundert.

**Schriftliche Beiträge:**

212 **S.S. DEMIDOV - R. A. SIMONOV (Moskau)**  
Prince Albertus Dalmatski and the first Russian manuscript of XVIIIth century on theoretical geometry.

220 **MA LI (Stockholm)**  
Four problems from bamboo strips (a preliminary study).

225 **SVETLANA PETROVA (Moskau)**  
Sur la méthode du *polygone de Newton*.

228 **CHRISTINE PHILI (Athen)**  
The arithmetization of P. Zervos' book *Infinitesimal Calculus at the twenties* in Greece.

240 **ANNETTE VOGT (Berlin)**  
Vorlesungs-Mitschriften als Quelle?

242 **STEFAN DESCHAUER (Dresden)**  
Gedicht.

Gruppenbild Börsenhof (Donnerstag, 26. Mai 2006) (Foto: Peter Schmitt)  
von links nach rechts: Waltraud Voss, Menso Folkerts, Stefan Deschauer, Ivor Grattan-Guinness, Ulrich Reich, Peter Ullrich, Martina Bečvářová, Magdalena Hykšová, Maria Gruber-Haunlieb, Gerlinde Faustmann, Karl-Heinz Schlöte, Christa Binder, Gert Schubring, Nada Razpet, Renate Tobies, Herwig Säckl, Rita Meyer-Spache, Wolfgang Breidert, Detlef Gronau, Harald Gropp, Fritz Katscher, Franz Pichler, Peter Schmitt, Jozsef Kolumban, Michael von Renteln, Marko Razpet.

Gruppenbild Wiener Neustadt (Mittwoch, 25. Mai 2006) (Foto: Peter Schmitt)  
von links nach rechts: Jozsef Kolumban. Fritz Katscher, Gert Schubring, Gerlinde Faustmann, Wolfgang Breidert, Waltraud Voss, Peter Ullrich, Christa Binder, Menso Folkerts, Jasna Fempl-Madžarević, Magdalena Hykšová, Detlef Gronau, Renate Tobies, Martina Bečvářová, Karl-Heinz Schlöte, Ulrich Reich, Miloš Čanak, Nada Razpet, Ivor Grattan-Guinness, Frau Pichler, Sergio Nobre, Franz Pichler, Stefan Deschauer, Marlene Breidert, Enid Grattan-Guinness, Klaus Barner, Gisela von Renteln, Ligia Arantes Sad, Harald Gropp, Michael von Renteln, Marko Razpet.



HOCHSCHULE KARLSRUHE – TECHNIK UND WIRTSCHAFT  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES  
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK  
ULRICH REICH



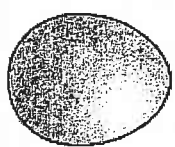
## Handschrift und gedrucktes Buch –

Was ist



,

was ist



?

VIII. Österreichisches Symposium  
zur Geschichte der Mathematik

Miesenbach / Niederösterreich, 22. Mai 2006





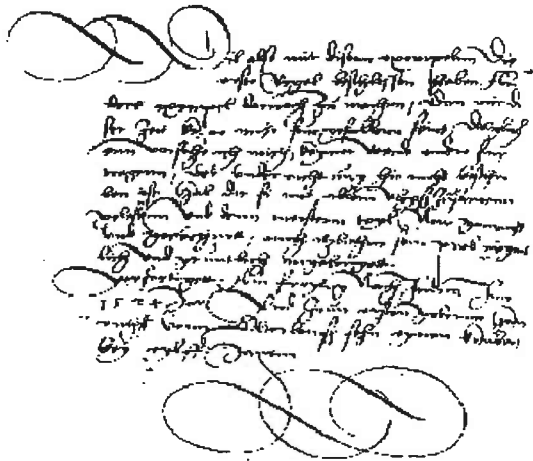
HOCCE NOVO OPERT  
INLYSTRAND CVRAVERE  
C D DCCC LXXVIII

BESICHTIGUNG  
WAPPEN-  
UND  
OR-  
NAMENT-  
SÄULE



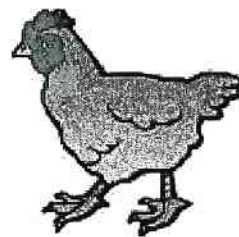


HOCHSCHULE KARLSRUHE – TECHNIK UND WIRTSCHAFT  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES  
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK  
ULRICH REICH



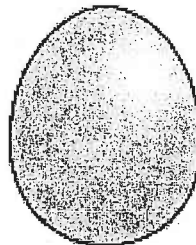
**Handschrift und gedrucktes Buch –**

**Was ist**



,

**was ist**



?

VIII. Österreichisches Symposium  
zur Geschichte der Mathematik

Miesenbach / Niederösterreich, 22. Mai 2006

## Handschrift und gedrucktes Buch – was ist Henne, was ist Ei?

ULRICH REICH, KARLSRUHE

Forschung kann so spannend und auch so mühselig sein wie die Aufklärung eines Kriminalfalles. Dies soll hier an einem Beispiel aus der Mathematikgeschichte des 16. Jahrhunderts dargestellt werden. Zum besseren Verständnis bietet sich die Darstellung in chronologischer Reihenfolge an. Unterwegs gab es Irrwege und zusätzliche andere überraschende Erkenntnisse und Funde. Der Autor benötigte mehrere Jahre, um diese Nuss weitestgehend zu knacken. Letzte Unklarheiten bleiben bestehen.

### 1 Dortmunder Handschrift

Bei Nachforschungen zum Rechenmeister Adam Ries (1492 – 1559) erhielt der Autor Kenntnis von einer 135 Blätter umfassenden Handschrift zur Unterweisung der Rechenkunst im Oktavformat (10 cm x 15 cm), die im Handschriftenbestand des Stadtarchivs der Stadt Dortmund als Bestand 203 Nr. 29 geführt wird. Dabei handelt es sich um ein fragmentarisches Manuskript, das im Wesentlichen nach der Erläuterung der Grundrechenarten aus einer Sammlung von Dreisatzaufgaben besteht. In seinem Brief vom 14.9.1992 teilte Prof. Dr. Thomas Schilp vom Stadtarchiv Dortmund mit, dass die Herkunft als ungeklärt gelten müsse. Die Handschrift stamme mit Sicherheit aus dem 16. Jahrhundert und sei teils lateinisch, teils hochdeutsch abgefasst. Mit Sicherheit habe sie kein Dortmunder niedergeschrieben.

Ein Vergleich mit der Handschrift von Adam Ries erwies sich als aufschlussreich. Die Dreisatzaufgaben entsprachen in Form, Inhalt und Dialekt denjenigen bei Ries. Eine Rechenaufgabe behandelte ausgerechnet das im Erfurter Raum verbreitete Blaufärbemittel Waid. Und Ries hatte sich um 1520 mehrere Jahre in Erfurt aufgehalten. Die Schrift und hier insbesondere die Ziffern ähnelten den Darstellungen bei Adam Ries. Intensive Untersuchungen waren jedenfalls erforderlich. Dabei stellte es sich rasch heraus, dass es sich bei der Dortmunder Handschrift keinesfalls um die Hand des Adam Ries handeln konnte. Nun war vollkommen offen, wer der Verfasser dieser Handschrift sein könnte. Die Handschrift wurde nach äußeren und inneren Erkennungsmerkmalen untersucht.

An den Wasserzeichen des Papiers, auf das die Rechenaufgaben geschrieben waren, biss ich mir die Zähne aus. Ein Wasserzeichen war der Buchstabe P wie Papier. Ich schaute mir im Hauptstaatsarchiv Stuttgart in Gerhard Piccards Wasserzeichenkartei einen Tag lang 9500 Buchstaben P an. Der Erfolg war gleich Null. Seither kann ich kein Wasserzeichen mit dem Buchstaben P mehr sehen.

Aus dem Inhalt der Rechenaufgaben kann nur wenig gefolgert werden. Die erwähnten Waren und Münzwährungen lassen keine weiteren Rückschlüsse zu. Auch der sprachliche Befund gestattet keine genaue Dialekt- und damit Raumeingrenzung. Zeitlich kann die Handschrift auf einen Entstehungszeitraum um 1540 eingegrenzt werden.

Die Handschrift gliedert sich auf in sieben Teile:

- 1.) Species, f. 0<sup>v</sup> – f. 18<sup>r</sup>,
- 2.) Regula Detri mit den Aufgaben 1 – 119 , f. 20<sup>r</sup> – 53<sup>v</sup>,
- 3.) Progressio mit den Aufgaben 120 – 131, f. 57<sup>r</sup> – 62<sup>r</sup>,
- 4.) Species in Brüchen mit den Aufgaben 132 – 166, f. 65<sup>r</sup> – 78<sup>v</sup>,
- 5.) Regula Detri in Brüchen mit den Aufgaben 167 – 196, f. 79<sup>r</sup> – 108<sup>r</sup>,
- 6.) Regula Detri auf den Vorteil mit Währungs- und Gewichtstabellen und den Aufgaben 197 – 211, f. 115<sup>r</sup> – 127<sup>r</sup>,
- 7.) Niederdeutscher Teil (Aufgaben der Unterhaltungsmathematik) mit den Aufgaben 212 – 219, f. 127<sup>v</sup> – 131<sup>v</sup>.

## 2 Suche nach dem Autor

Die Aufgabensammlung konnte der Entwurf für ein geplantes Rechenbuch, die Vorlage oder auch die Abschrift eines gedruckten Rechenbuches sein. Genau so gut könnte eine Handschrift vorliegen, die nie zum Druck gelangt war bzw. nichts mit einem gedruckten Rechenbuch zu tun hatte.

Welches Rechenbuch könnte in Frage kommen? Es gab gut hundert Rechenbuchautoren. Die Suche nach einem Druckwerk glich der Suche nach der Stecknadel im Heuhaufen. Kann man die Suche bei den Rechenbuchautoren auf ein paar wenige „Hauptverdächtige“ eingrenzen? Wer kommt am ehesten in Frage? Der Autor hatte das Glück des tüchtig Suchenden: Er entdeckte viele Aufgaben der Dortmunder Handschrift in einem Rechenbuch des Rechenmeisters Johann Albert von Wittenberg.

Mit dem Fund des Rechenbuches erhob sich die Frage: Ist die Handschrift der Entwurf des Rechenmeisters für sein Druckwerk oder lediglich eine Abschrift, die er selber, ein Freund oder ein Schüler aus dem Rechenbuch angefertigt hat? Was ist Henne, was ist Ei? So war es nahe liegend, Leben und Werk von Johann Albert genauer unter die Lupe zu nehmen.



### 3 Vita des Johann Albert

In der Lutherstadt Wittenberg war Johann Albert unbekannt. Aber mit Hilfe der Melanchthon-Forschungsstelle Heidelberg gewann der Autor über das Leben Johann Alberts Kenntnisse, die bis dato so in der Fachwelt nicht bekannt waren.

Johann Albert (Albrecht) ist 1488 in Zörbig geboren. Über seine Jugend ist nichts bekannt. In der Kastenrechnung 1524/25 wird er als Stuhlschreiber in Wittenberg angeführt. Etwa 30 Jahre lang lehrte er Arithmetik und Katechetik an der Mädchenschule. Unter dem Reformator Johannes Bugenhagen war er 26 Jahre lang Küster an der Stadtkirche. Albert schrieb nach seinem ersten Rechenbuch „*Rechenbüchlein auff der Linien ...*“, Wittenberg 1534, ein zweites mit dem Titel „*New Rechenbüchlein auff der Federn ...*“, das erstmals 1541 gedruckt wurde. Titelschmuck und Zeichnungen der Wittenberger Auflagen stammen aus der Werkstatt des Lucas Cranach d. Ä.. Johann Albert war der nach Ries erfolgreichste deutschsprachige Rechenbuchautor des 16. Jahrhunderts. Er verstarb im Alter von 70 Jahren und wurde am 12. Juni 1558 in Wittenberg bestattet.

### 4 Identifizierung der Handschrift

Ein vager Hinweis löste den Verdacht aus, in Wittenberg eine Handschrift Alberts aus seiner Tätigkeit als Küster aufspüren zu können. Johann Albert soll handschriftlich am Wittenberger Einnahme- und Ausgabe-register des Gemeinen Kastens in einem mehrjährigen Zeitraum mitgewirkt haben. So fuhr ich nach Lutherstadt Wittenberg, um persönlich die Register am originalen Ort, der nicht öffentlich zugänglichen Ordinandenstube, in der Stadtkirche St. Marien in Augenschein nehmen zu können.

Thomas Schilp und ich wurden im Einnahme- und Ausgaberegister fündig: An vielen Stellen entdeckten wir die uns von der Dortmunder Handschrift vertraute Schrift, die wir zweifelsfrei als die Schrift des Wittenberger Küsters und Rechenmeisters Johann Albert identifizieren konnten.

Damit liegt - was für das 16. Jahrhundert bisher einmalig erscheint - eine deutsche Rechenschrift im handschriftlichen Entwurf und im Druck vor. Wie aber hängen diese Werke voneinander ab. Welche Druckwerke sind für die Untersuchung relevant?

### 5 Alberts Rechenbücher

Johann Albert schrieb 1534 ein Rechenbuch und 1541 ein zweites, das bis 1622 insgesamt 40 Auflagen erlebte, wovon 32 als gesichert erscheinen.

Das erste Rechenbuch führt den Titel „*Rechenbüchlein auff der linien, dem einfeltigen gemeinen man oder leien vnd jungen anhebenden liebhabern der Arithmetice zu gut*“ (s. Abb.). Es umfaßt 326 Seiten im Oktavformat und wurde 1534 von Georg Rhaw in Wittenberg gedruckt. Der Titelschmuck und eine Zeichnung stammen aus der Werkstatt des Lucas Cranach d.Ä.. In den vergangenen zehn Jahren konnten drei Exemplare im Adam-Ries-Museum Annaberg-Buchholz, in der Bibliothek des Forschungsinstituts für diskrete Mathematik der Universität Bonn und in der Ratsschulbibliothek Zwickau mit Signatur 2.8.9.(1) aufgespürt werden.



Sein zweites Rechenbuch brachte Johann Albrecht 1541/42 unter dem Titel „*New Rechenbüchlein auff der Federn, gantz leicht aus rechtem grund, jnn Gantzen vnd Gebrochen. Neben angehefftem, vnlangst aus gelassnem Buechlein auff den Linien, dem einfeltigen gemeinen Man vnd anhebenden der Arithmetica Liebhabern zu gut*“ heraus (s. Abb.). Das Buch im Oktavformat umfaßt 220 Seiten. Titelschmuck und zwei Zeichnungen stammen aus der Werkstatt des Lucas Cranach d.Ä.. Albrecht datierte die Widmung auf „*Freitags abends der Beschneidung vnsers lieben Herrn vnd Heilands im Tausent funffhundert 41 Jar*“. Das Buch schließt mit dem Colophon „*Gedruckt vnd volendet zu Wittemberg durch Georgen Rhaw. 1542*“.

Heute sind bei den 40 Auflagen weltweit die Standorte von 52 Exemplaren in 37 verschiedenen Städten bekannt.

## 6 Zusammenhang zwischen der Dortmunder Handschrift und den beiden Rechenbüchern

### 6.1 Vergleich der beiden Rechenbücher

Wie hängen die beiden Rechenbücher und die Handschrift zusammen? Am einfachsten fällt bei der Betrachtung dieser drei Werke der Vergleich zwischen den beiden gedruckten Rechenbüchern von 1534 und 1541 aus. Auf die Betrachtung zusätzlicher Auflagen des zweiten Rechenbuches kann hier verzichtet werden, da es sich bei den späteren Auflagen stets um Nachdrucke ohne inhaltliche Änderungen handelt.

Selbstverständlich baut das zweite auf dem ersten Rechenbuch auf. Nach dem Titel des ersten Rechenbuches war es Alberts Absicht, nur das Rechnen auf den Linien vorzuführen. Seine Erläuterungen zu den einzelnen Rechenaufgaben fallen - im Gegensatz zu den anderen damaligen Rechenbüchern - überraschend ausführlich aus, was man mit den begrenzten Möglichkeiten und Schwierigkeiten des Linienrechnens bei anspruchsvollen Dreisatzaufgaben begründen kann. So erreicht Albert bei seinem ersten Rechenbuch zur Beschreibung der Grundrechenarten und Rechenregeln samt 344 Aufgaben und deren Erläuterungen 326 Seiten im Oktavformat.

Diesem ersten Rechenbuch waren hauptsächlich aus zwei Gründen keine weiteren Auflagen vergönnt: Einerseits war es gegenüber Konkurrenzprodukten, z.B. dem zweiten Rechenbuch des Adam Ries mit ca. 142 Seiten, zu umfangreich und damit zu teuer, andererseits waren dem Rechnen auf der Linien Grenzen gesetzt, und es verstärkte sich der Bedarf nach dem schriftlichen Rechnen.

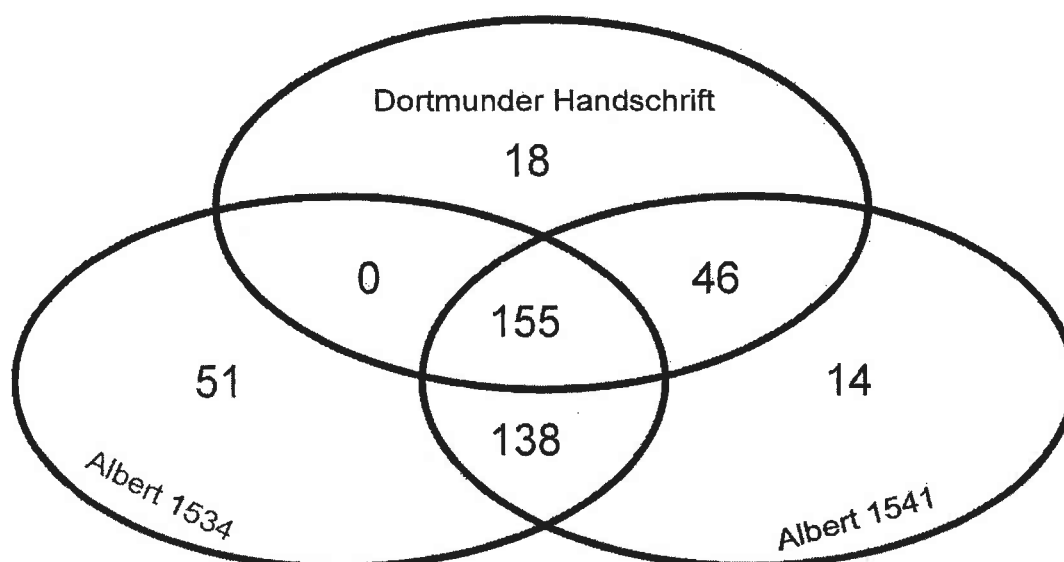
Diese Umstände erkannte auch Albert. So nahm er in seinem zweiten Rechenbuch zusätzlich die schriftlichen Lösungsmöglichkeiten bei den Grundrechenarten der Addition, Subtraktion, Duplikation, Mediation, Multiplikation und Division von ganzen Zahlen (samt Proben mit der Quersumme) und von Brüchen auf. Zu diesem Teil formulierte er 36 Rechenaufgaben. Andere Erweiterungen nahm Albert nicht vor.

Sonst übernahm Albert alle Teile seines ersten Rechenbuches. Er wertete von den 344 Aufgaben des ersten Rechenbuches 293 Aufgaben im zweiten Rechenbuch. Auf 51 Aufgaben verzichtete er, dafür fügte er 60 weitere Aufgaben hinzu, von denen sich 36 auf den Themenkreis des Rechnens auf der Feder bezogen. Die größte Einsparung an der Seitenzahl erreichte Albert durch Weglassen seiner ausführlichen Erklärungen. Nur so konnte er den Inhalt von 326 auf 220 Seiten reduzieren. Bei diesem Seitenumfang konnte Albert mit dem damals erfolgreichsten Rechenbuch von Ries konkurrieren und 40 Auflagen erzielen.

## 6.2 Unterschiede zwischen der Handschrift und den Rechenbüchern

Wie ist die Dortmunder Handschrift einzuordnen? Ganz eindeutig ist ihr engerer Zusammenhang mit dem zweiten Rechenbuch zu sehen. Hierzu werden im folgenden Argumente aufgelistet und Beispiele angedeutet.

Besonders aufschlussreich ist die Überprüfung auf die Konkordanz zwischen der Handschrift und den beiden Rechenbüchern.



### Konkordanz der 422 Rechenaufgaben

Aufschlussreicher als die Gemeinsamkeit, dass 155 Aufgaben in allen drei Werken auftauchen, sind die Unterschiede: Es gibt neben 30 Aufgaben zum Rechnen auf der Feder 16 weitere Aufgaben, die im zweiten Rechenbuch und der Handschrift, aber nicht im ersten Rechenbuch erscheinen. Umgekehrt findet man keine einzige Aufgabe, die nur in der Handschrift und im ersten Rechenbuch anzutreffen ist, aber nicht im zweiten Rechenbuch.

Den besonders engen Zusammenhang zwischen der Handschrift und dem zweiten Rechenbuch erkennt man bei folgender Aussage: Von den ersten 211 Aufgaben der Handschrift stehen 201 im zweiten Rechenbuch, umgekehrt befinden sich diese 201 unter den ersten 223 Aufgaben des zweiten Rechenbuches, die restlichen 130 Aufgaben der insgesamt 353 Aufgaben des gedruckten Buches fehlen in der fragmentarischen Handschrift. Damit deckt die Handschrift nach der Zahl der Aufgaben und nach dem Seitenumfang etwa 60 % des gedruckten Buches ab.

Bei unterschiedlicher Aufgabenformulierung orientiert sich die Handschrift am zweiten Rechenbuch. Hierzu könnte man viele Beispiele auf-



listen. Aus Platzgründen wird verzichtet. Und bei unterschiedlicher Reihenfolge von Aufgaben im ersten und zweiten Rechenbuch weist die Handschrift die gleiche Reihenfolge bei den Aufgaben auf wie das zweite Rechenbuch. Im ersten Rechenbuch sind bei einzelnen Aufgaben die Waren Kalmas, Feigen, Rosinen, Unslat, Lorbeer, Reis und Kümmel bezeichnet, im zweiten Rechenbuch und in der Handschrift fehlen diese Bezeichnungen.

Als Resümee kann gezogen werden: Das zweite Rechenbuch und die Handschrift hängen direkt zusammen.

Auf eine mathematische Besonderheit wird hingewiesen: Beim Darstellen von Brüchen verwendet Albert bei seiner Handschrift meist wie gewohnt den Bruchstrich, doch er beschreitet vereinzelt auch Neuland mit einer außergewöhnlichen Darstellung. Albert schreibt den Nenner über den Zähler und trennt die Zahlen durch einen Halbkreis, den er als „media luna“ (Halbmond) bezeichnet. In seinen Rechenbüchern von 1534 und von 1541 verwendet er hierfür die Begriffe Mond und Zirckel.

Die bei den *affirmati* quatuor *fortes*  
*Supra* *totum* *luna* *supra* *media* *luna* *supra*  
*et* *sub* *supra* *affirmati* *unum* *fortes* *media*  
*luna* *et*  
 De *Terni*  $2\frac{1}{2}$

Die bei den *affirmati* *duodecim* *ponit*  
*Supra* *media* *luna* *luna* *et* *ac* *media* *luna*  
 bei den *affirmati* *quatuor* *et* *media* *luna*  
 et *Supra* *luna* *et* *media* *luna*  $\frac{1}{5}$

### 6.3 Bewertung der Handschrift

Zunächst wird die vereinfachende Frage aufgeworfen: Handelt es sich bei der Handschrift um einen Entwurf für das zweite Rechenbuch oder um eine Weiterentwicklung, die auf dem zweiten Rechenbuch aufbaut? In diesem Zusammenhang sei darauf verwiesen, dass es sich bei der Handschrift lediglich um ein Fragment handelt, das nur Teile des zweiten Rechenbuches behandelt. Die These, dass es sich bei der Handschrift um einen Entwurf für das zweite Rechenbuch handele, kann nicht mehr aufrecht erhalten werden, weil die weitergehenden Änderungen nicht in dem zweiten Rechenbuch aufgenommen worden sind. Vielmehr baut - was nicht verwundert - das zweite auf dem ersten Rechenbuch auf. Flüchtigkeitsfehler in der Handschrift deuten ebenfalls darauf hin, dass sie aus dem zweiten Rechenbuch abgeschrieben worden ist. Daher kann eher an die kaum zu verifizierende These geglaubt werden, dass Albert auf der Basis seines zweiten Rechenbuches eine lateinische Ausgabe seines Rechenbuches geplant hat. So können die lateinischen Passagen in der Handschrift gedeutet werden. Folgende Argumente sprechen dafür.

Der Kundenkreis für ein lateinisches Buch zur Arithmetik wäre bei den Studenten an der Artistenfakultät (und auch bei Schülern der Lateinschu-

len) zu suchen. Albert stand in irgendeinem Zusammenhang zur Universität Wittenberg, weil seine Todesnachricht in „*Scriptorum publice propositorum a gubernatoribus studiorum in Academia Wittebergensi. Tomus tertius. Complectens annum 1556 et tres sequentes. Witebergae excusus ab haeredibus Georgii Rhauu. 1559.*“ gedruckt worden ist.

Der Wunsch nach einem solchen Rechenbuch bestand in Wittenberg. Denn seit 1540 wurden mehrere Auflagen des lateinischen Rechenbuches „*Arithmeticae Practicae Methodus Facilis*“ von Rainer Gemma Frisius (1508 – 1555) in Wittenberg gedruckt. Dieses Rechenbuch wurde an den Universitäten und Lateinschulen sehr beliebt und erlebte mindestens 118 Auflagen. Es wurde wie Alberts Bücher von Georg Rhaw gedruckt und enthielt als Titelschmuck aus der Cranach-Werkstatt das Bildnis eines Schülers beim Rechenmeister, das ebenfalls bei Albert im ersten und im zweiten Rechenbuch (1541, 1544 und 1546) wiedergegeben ist.

Das Rechenbuch des Gemma Frisius war mit 180 Seiten im Oktavformat knapp gehalten und damit relativ preiswert. Vielleicht scheiterte Albert deshalb oder brach von sich aus den Versuch ab, ein lateinisches Rechenbuch zu veröffentlichen. Ob er bei den anspruchsvollen lateinischen Formulierungen seiner Handschrift von anderer Seite unterstützt worden ist oder ob er selber Latein so hervorragend beherrscht hat, lässt sich nicht belegen.

#### **6.4 Weitere Zwecke von Teilen der Handschrift**

Man kann davon ausgehen, daß Albert mit seinen handschriftlichen Notizen weitere Zwecke verfolgte, die bei den einzelnen Teilen unterschiedlich ausgefallen sind. So hat er sich niederdeutsche Aufgaben aufnotiert, um sie später in einem Rechenbuch oder im Unterricht verwerten zu können. Teile seiner Notizen konnte Albert auch als Unterrichtsmanuskript an der Wittenberger Mädchenschule verwerten.

### **7 Dank**

Für die in der Sache segensreiche Beratung und Unterstützung danke ich Frau Prof. Dr. Karin Reich, Hamburg, Frau Dr. Irmtraud Stier, Pirna, und den Herren Prof. Dr. Stefan Deschauer, Dresden, Prof. Dr. Menso Folkerts, München, Prof. Dr. Wolfgang Kaunzner, Regensburg, Wolfgang Meretz, Berlin, Dr. Heinz Scheible, Heidelberg, Prof. Dr. Thomas Schilp, Dortmund, und Hans-Jochen Seidel, Lutherstadt Wittenberg. Vielen Bibliotheken und Archiven verdanke ich wichtige Erkenntnisse. Der Dank für die Genehmigungen zur Veröffentlichung von Abbildungen gilt dem Stadtarchiv Dortmund, der Herzog-August-Bibliothek Wolfenbüttel und der Ratsschulbibliothek Zwickau.

# Morning star and evening star in East and West

Harald Gropp

Mühlingstr. 19, D-69121 Heidelberg, Germany

d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

## 1 Introduction

The topic *From Clay Tablets to the Internet — The Influence of the Media on the Development of Mathematics ?* of the symposium in Miesenbach in 2006 should mean that in at least one talk clay tablets, i.e. Mesopotamian mathematics, should occur. Hence I chose a topic which touches several ancient cultures including the Ancient Near East. However, my focus is on the planet Venus which can be observed as morning star or evening star by humans on Earth.

The planet Venus (as an inner planet seen from the Earth) is always relatively close to the Sun, either in the East or in the West. During the periods when Venus is too close to the Sun Venus is invisible from Earth. Yes, in most cases, but not always. There are two exceptions possible. During a solar eclipse or close to this eclipse Venus can be observed, even if it is not far from the Sun in the sky. In very few occasions Venus is situated exactly between the Earth and the Sun, hence the black Venus disk passes across the disk of the Sun, a so-called Venus transit. This paper will mainly focus on Venus transits in history.

Concerning ancient cultures only medieval Islamic culture is discussed in some detail. The main part of this paper describes European observations of the last centuries. Last but not least, for the special purpose of this paper I chose to write East and West as well as the Sun, the Moon, and the Earth with capital letters.

## 2 East and West

On the one hand, Venus is in the East and in the West in relation to the Sun. On the other hand, Venus is observed in Eastern and Western countries or regions or continents of the Earth, and Venus is just one name for this planet. Other important names are Inanna, Ishtar, Astarte, and Aphrodite, just to mention some of them. Moreover, Venus is the name of a goddess



which is closely related to the planet in many cultures of the world. And in many cases the most important female god or goddess is connected to this planet.

East and West may mean Eastern Europe and Western Europe, e.g. represented by Greek and Roman (or Latin) culture. East and West may stand for the Orient (Near East) and the Occident (Europe). In comparison to China (which I have to leave out in this paper) the East stands for Eastern Asia whereas the whole region between Western Europe and India represents the West. What about America, e.g. Mexico or Brasil ? Is it East or West in relation to the *Old World* ? How was it 500 years ago and how is it now at the beginning of the third millennium ?

### 3 Venus transits

#### 3.1 Recent Venus transits

Between the years 1400 and 2100 there are 10 Venus transits on the following days, computed astronomically. Six of them (between 1639 and 2004) have certainly been observed by humans, for the first three events this is in doubt, the event of 2012 is still in future.

26.05.1518, 23.05.1526, 07.12.1631, 04.12.1639, 06.06.1761,  
03.06.1769, 09.12.1874, 06.12.1882, 08.06.2004, 06.06.2012.

The two earliest of these dates are given in the Julian calendar. The other dates in the Gregorian calendar are those in the telescope period.

#### 3.2 The general scheme

Venus transits normally occur in cycles of 243 years containing 4 transits with 8, 121.5, 8, and 105.5 years of time intervals inbetween. This produces the following scheme.

1275	1283	1388	1396
1518	1526	1631	1639
1761	1769	1874	1882
2004	2012	2117	2125

A short and easy explanation for this scheme is the fact that 152 synodic Venus periods of 583.9 days yield 88755.8 days and 243 years contain 88755 or 88756 days. Moreover, 5 synodic Venus periods yield 2919.6 days and 8 solar years are equal to 2921.9 days. This difference of 2.3 days is responsible for the shifting of the date by 2 or 3 days during 8 years.

### 3.3 The importance of Venus transits

Why are these Venus transits interesting ? They are quite rare. If an ancient report can be related to such an event this supplies very helpful information concerning the absolute chronology of a culture, i.e. the relation of ancient calendars to our own calendar. So far chronology and history.

In the eighteenth century observations of Venus transits were the key to measure the distances in our Solar System and as such the basis for distance measurements in the universe.

Also from a cultural point of view Venus transits belong to the few interesting alignment events in our Solar System, like eclipses and occultations, which interrupt and highlight the usual movement of the celestial bodies.

### 3.4 Venus and Venus transits in ancient and foreign cultures

Whether Venus transits were observed before the seventeenth century is not clear. Some aspects are discussed in this paper. Moreover, a general discussion of Venus *embedded* in several cultures in connection to mathematics, music, religion, and other aspects should be given here for Ancient Mesopotamia, the Islamic world, and Mesoamerica.

However, the focus will be on the Islamic world. The medieval Islamic world is the neighbour of the modern European world in space and time. The relevant sources are at least a bit more reliable and clearer than in other ancient and foreign cultures whose discussion has to be postponed here, also because of the restricted length of this paper.

### 3.5 The Islamic world

The earliest Venus transits after the Hijra, the beginning of the Muslim era, happened in the Christian years 667, 789, 797, 910, 1032, 1040, 1153, 1275, 1283, 1396, 1518, 1526, etc.

Concerning possible Venus transit observations by Muslim scientists in these years let me refer to the papers by B. Goldstein ([?] and [?]). Discussed are al-Fārābī (died 950), Ibn Sīnā (died 1037), Ibn Bāḡḡa (died 1139) and others.

#### 3.5.1 Ibn Sīnā

As far as Ibn Sīnā is concerned he says in one of his works:

I say that I saw Venus as a spot on the surface of the sun.

He does not give a date. During his lifetime there was only the Venus transit of 1032 which was visible in the Islamic West, but in the East. As far as we know, he never travelled to the West.

### 3.5.2 Ibn Bāḡḡa

Ibn Bāḡḡa was an astronomer, philosopher, poet, and musician from the Islamic West. He was born at or near Zaragoza (now Spain) and died in Fez (now Morocco) in 1139 (533 A.H.). In Latin he is known as Avempace. When the Christians captured Zaragoza in 1118 he moved to Valencia, Sevilla, and further to Oran (Algeria) and Fez.

Ibn Bāḡḡa does not belong to the very well known Islamic scientists, but recently he has been studied also by Spanish scholars, e.g. Miguel Asin Palacios and Joaquin Lomba Fuentes.

Ibn Bāḡḡa states (cited later by al-Shirāzī (died 1311)):

At sunrise one day ..... I saw two spots on the surface of the sun. I calculated the positions of Venus and Mercury ..... and I found them both near the position of the sun. Therefore I concluded that the two spots were Venus and Mercury.

Now, due to our calculations there was no Venus transit between 1040 and 1153, i.e. during his lifetime, not at all a simultaneous transit of Venus and Mercury (see below).

Concerning the discussion above it might well be that certain Muslim scientists observed Venus transits, these reports were copied by others and integrated into their works who themselves have personally never observed a transit.

## 3.6 Observed Venus transits

### 3.6.1 The 17<sup>th</sup> century

In the seventeenth century there were still problems concerning the accuracy of precalculations for the Venus transits. It looks as if the transit of 1631 was not observed. Kepler had computed the day of the transit, but he died one year earlier. In most parts of Europe this transit was not visible but in Eastern Europe it would have been possible, e.g. in most parts of Austria.

If only Kepler had lived another year, he might have seen it himself.

This is how the authors of a recent book [?] describe it. By the way, the Mercury transit of 1631, also calculated by Kepler, which took place 4 weeks earlier was observed by Gassendi in Paris and two other Europeans. Gassendi was not successful in observing Venus and published a book *Mercurius in Sole Visa et Venus Invisa*.

Anyhow, the following report is by J. Horrox commenting the 1639 transit, a translation from his book *Venus in Sole Visa*, published by Hevelius in 1662.

About fifteen minutes past three in the afternoon, when I was again at liberty to continue my labors, the clouds, as if by divine interposition,

were entirely dispersed, and I was once more invited to the grateful task of repeating my observations. I then beheld a most agreeable spectacle, the object of my sanguine wishes, a spot of unusual magnitude and of a perfectly circular shape, which had already fully entered upon the sun's disc on the left, so that the limbs of the Sun and Venus precisely coincided, forming an angle of contact. Not doubting that this was really the shadow of the planet, I immediately applied myself sedulously to observe it.

This is the earliest known report which clearly describes a Venus transit. By the way, Kepler in his precalculations had missed this Venus transit of 1639. This young Englishman Horrox, born in 1619, calculated the day of the Venus transit a few weeks before the event. He died already in 1641. Maybe that is the reason why he is not much known in the history of astronomy.

As far as we know only Horrox and his friend Crabtree observed this Venus transit of 1639 although it was visible throughout nearly the whole of Italy, France, and Spain.

### 3.6.2 The 18<sup>th</sup> century

Whereas one century earlier Europeans were mainly still focussed on Europe fighting a bloody internal Thirty Years' War, now in the eighteenth century expeditions from Europe were sent around the world in order to observe the Venus transits from different angles and to measure a base length in the Solar System. This was the key to absolute distances in comparison to relative distances obtained from Kepler's laws.

Among many others Maximilian Hell and James Cook will be discussed here shortly. James Cook explored the distant Pacific Ocean and chose the island of Tahiti as his basis where still today, not far from the capital Papeete, a *Pointe Vénus* exists.

The transit of 1769 was not visible in some parts of Europe, in Africa, and in the Near East. While Tahiti represents one of the few observation points in the rest of the world, Maximilian Hell's trip to Northern Norway was one of the many expeditions to Western and Northern Europe.

Maximilian Hell (born in Schemnitz (now Banská Štiavnica in Slovakia) in 1720, died in Wien in 1792) was a Jesuit and the director of the observatory in Wien.

### 3.6.3 The 19<sup>th</sup> century

Another century later the two Venus transits of 1874 and 1882 were no longer events in which a few scientists were interested in order to obtain new data. A broader interested public in many countries of the world took part in the observations accompanied by the new technique of photography. Let me focus here on the aspect of how the Venus transits were discussed in one of the books published for this special purpose by R.A. Proctor [?], titled

*Transits of Venus. A popular account of past and coming transits from the first observed by Horrocks A.D. 1639 to the transit of A.D. 2012.*

Preface. This work is intended to be partly historical and partly explanatory. So far as I know, no book has hitherto been published in England giving a complete account of the transits of 1639, 1761, and 1769. ....

[p.229] It is not probable ... that any of my readers will witness the transits of 2004 and 2012. Nevertheless, it may be interesting to know the circumstances of those transits and the regions of the earth where they will be wholly or partially visible.

... The astronomers of the first years of the twenty-first century, looking back over the long transitless period which will then have passed .... should there then be found, among old volumes on their book-stalls, the essays and charts by which I have endeavoured to aid in securing that end (perhaps even this little book in which I record the history of the matter), .....

### 3.6.4 The 21<sup>th</sup> century

In the twentieth century there were no Venus transits. The transit of 2004 was called *the small eclipse* (in comparison to the solar eclipse of 1999). In many countries of the world it was observed by a lot of interested people, just for fun. The Venus transit of 2012 is still ahead of us; another chance for those who missed 2004, and very probably the last chance for all people living now. The next event after 2012 will be in 2117.

## 4 Venus in the Internet

Much information on Venus can be obtained from the Internet nowadays. In this sense not only the development of mathematics depends on and is influenced by the media but also the research in the history of mathematics is influenced by the new media as well.

Apart from information on the history of Venus transits and further historical events the main focus on Venus in the Internet is information on Venus positions in the sky at certain dates or information on space flights like *Venus Express* telling us details not only on Venus, the disk in the sky, or Venus, the goddess, but also on Venus, the celestial body, and on the physical properties of this body.



## 5 Further events in past and future

### 5.1 Venus von Willendorf

Circa 25000 years ago the *Venus von Willendorf* was produced. It was found again in 1908 in *Willendorf in der Wachau* not too far from Miesenbach and Wien. Whether this Venus is related to the planet or to a goddess or to a beautiful woman in the past is not clear at all.

### 5.2 The next Venus transit

The next Venus transit will occur on June 6, 2012. In Europe it will happen during the early morning hours after sunrise and will last until 6:55 hours (Central European Summer Time) in Wien. At sunrise the disk of Venus will be already in front of the Sun. However, in Reykyavik in Iceland the whole transit will be observable (nearly 7 hours) because the Sun will be above the horizon the whole night in June. Of course, the meteorological conditions will play a certain role.

### 5.3 Mercury transits

Of course, not only Venus transits are of interest. There are also transits of the second inner planet (with respect to Earth), Mercury. These Mercury transits are more frequent than Venus transits. The next such Mercury transit shall occur on November 8, 2006.

One might ask whether a simultaneous transit of Mercury and Venus may occur at some time (see [?]). This is not possible in the near future since in our time Mercury transits occur in May and November whereas Venus transits occur in June and December. Just now the angle between the two node lines is 28 degrees. However, this difference decreases by 0.285 degrees per century. In the year A.D. 69163 there will be a Mercury transit and a Venus transit at the same time. Already earlier such an event will nearly happen. On September 17 in A.D. 13425 Mercury and Venus will transit the Sun, but with a time difference of 9 hours. However, 4 days later, on September 21, Venus will occult Mercury 7 degrees west of the Sun. Such occultations among planets are also quite rare events.

It must also be remarked here that these calculations into the far future heavily depend on numerical integrations of differential equations and the positions of the involved celestial bodies. An important question is which bodies should be considered in these calculations. In this sense these data above should be regarded with a certain amount of critical scepticism.

## 5.4 Earth transits

Unfortunately, neither Mercury nor Venus has a satellite. However, let's go from Earth one step towards the outer edges of our Solar System, to Mars.

From Mars an Earth transit can be observed from time to time. In this case

the Earth transit is accompanied by a Moon transit. The last of these events took place in 1984, the next one will be in 2084, maybe observed by a human on Mars ? Nobody knows now. However, there is a human report on the Earth transit of 1984, by an astronaut, but only in fiction, in science fiction written in 1971 by Arthur C. Clarke, *Transit of Earth* [?].

Only a minute to go; getting down to business. For the record: year, 1984; month, May; day II, .... Four thirty-two. Any moment now ... There it is ... there it is ! I can hardly believe it ! A tiny black dent in the edge of the Sun ... growing, growing, growing ... Hello, Earth. Look up at me, the brightest star in your sky, straight overhead at midnight.

For sheer, triumphant power and glory there's nothing in the whole of music to match the Toccata and Fugue in D. I won't have time to hear all of it, that doesn't matter. Johann Sebastian, here I come.

Here (in this science fiction story on Mars) our own planet with all its people, its history, and its culture (in East and West) is just a disk in the (Martian) sky, sometimes a morning star in the East, sometimes an evening star in the West, and very rarely a black disk in transit.

## References

- [1] B. Goldstein, Some medieval reports on Venus and Mercury transits , *Centaurus* 14 (1969), 49-59
- [2] B. Goldstein, Theory and observation in medieval astronomy , *Isis* 63 (1972), 39-47.
- [3] A.C. Clarke, *Transit of Earth* (1971).
- [4] J. Meeus, A. Vitagliano, Simultaneous transits, *J. Brit. Astron. Assoc.* 114 (2004), 132-135.
- [5] R.A. Proctor, *Transits of Venus* (1874, 1882).
- [6] W. Sheehan, J. Westfall, *The transits of Venus* (2004).



## DIE INSTITUTIONALISIERUNG DER FORSCHUNG AUF DEM GEBIET GESCHICHTE DER MATHEMATIK IN BRASILIEN. \*

von Dr. Sergio Nobre\*\*  
UNESP – Brasilien

### Einleitung

Brasilien wurde am 22. April des Jahres 1500 von dem Portugiesen Pedro Alvares Cabral entdeckt. Als die Portugiesen in Brasilien landeten, lebten nach derzeitigen Schätzungen fünf Millionen Indianer im Land: 3,7 Millionen in den Regenwäldern Amazoniensgebiet und 1,3 Millionen im restlichen Territorium. Heutzutage sind sie nicht mehr als 200.000 und leben im Reservat.

Das Land wurde bis 1808 von Portugal aus verwaltet. Im Jahr 1808 floh der portugiesische Prinzregent mit seinem Hofstaat wegen der napoleonischen Truppe, die auf den Weg nach Portugal war, nach Rio de Janeiro. Damit begann eine neue Ära. Brasilien verlor seinen Koloniestatus und wurde Regierungs- und Verwaltungszentrum des Vereinigten Königreichs von Portugal und Algarve. Also Rio de Janeiro wurde die Hauptstadt des portugiesischen Königreichs. Mit dieser Tatsache begann die brasilianische Entwicklung im Bereich der Wirtschaft, der Wissenschaft und der Kultur. Sofort nach der Ankunft des Königs befreite D. João die Produktion und den Handel von den Beschränkungen, die Brasilien durch das Monopolsystem auferlegt worden waren, und öffnete die brasilianischen Häfen für die befreundeten Nationen.

Eine sehr wichtige Tat im Kulturbereich war die Aufhebung des Gesetzes, das der Druck von Büchern und Zeitungen auf brasilianischem Boden verboten hatte. In demselben Jahr (1808) wurde die königliche Druckerei gegründet. Mit dem Umzug brachte der König auch die Bibliothek des Hofes mit und gründete im Jahr 1810 die National Bibliothek in Rio de Janeiro. Diese Bibliothek ist heute die größte Bibliothek in Lateinamerika mit circa 9 Millionen Titeln. 1810 gründete er die königliche Militärische Akademie und wurde das erste akademische Studium in Brasilien eingeführt.



Erzherzogin Leopoldina

Der erste Kurs in der Militärischen Akademie war für Offizier Ingenieurwissenschaft und Artillerie.

1817 heiratete der Kronprinz D. Pedro die österreichische Erzherzogin Leopoldina, eine intelligente, geistreiche Frau, die in der Regierung große Rolle spielte. Nach vielen Historikern war sie eine der treibenden Kräfte, die die Unabhängigkeit Brasiliens 1822 erreichten. Die Farbe der brasilianischen Flagge sind Grün aus Portugal und Gelb aus Österreich. Leopoldina übte auch einen großen Einfluss auf die europäischen Speditionswissenschaft in

Brasilien aus. Zum Beispiel die Spedition von Carl von Martius, die die brasilianische Flora geforscht hat. Leopoldina war auch sehr wichtig für die Einwanderungsbewegung in Brasilien, insbesondere für die Deutsche. Die große Zeit der deutsche Siedlungsgeschichte in

\* Durch die Unterstützung von FUNDUNESP – Fundação para o Desenvolvimento da Unesp wurde es möglich meine Teilhame am VIII.Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik.

\*\* Dr. habil. Sergio Nobre, Privatdozent der Staatlichen Universität von São Paulo (Unesp), Brasilien. General-Sekretär der Gesellschaft für Geschichte der Mathematik Brasiliens. Herausgeber der Revista Brasileira de História da Matemática - an international journal on the History of Mathematics.

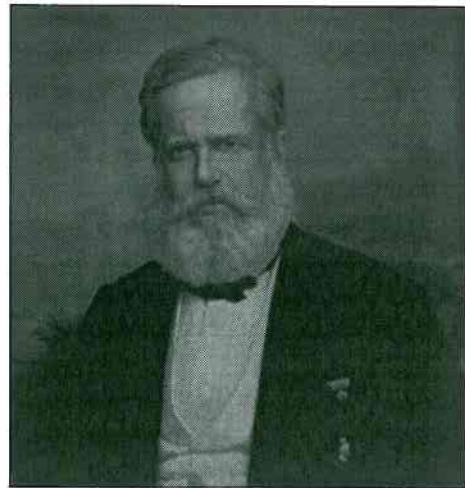
Brasilien beginnt erst am 25. Juli 1824, als die ersten deutschen Einwanderer im Süden

Brasiliens angelangen sind und eine Siedlung, die nach dem Namensheiligen der Kaiserin des Landes Sao Leopoldo benannt wird, gegründet wurde.

D. Pedro II, Sohn von D. Pedro I und Leopoldina, spielte auch eine große Rolle im Raum der wissenschaftlichen Beziehung zwischen Brasilien und europäischen Ländern.

1889 begann die Republik in Brasilien

Es wurden viele Hochschulen (Jura, Medizin, Ingenieurwissenschaft) in verschiedenen Städten gegründet, aber die erste Universität Brasiliens wurde im Jahr 1933 gegründet. Die Universität von Sao Paulo. Diese Universität ist die größte und bekanntest Universität in Brasilien.



Kaiser D. Pedro II

### Allgemeiner Überblick von der Forschung auf dem Gebiet der Naturwissenschaft und der Mathematik in Brasilien



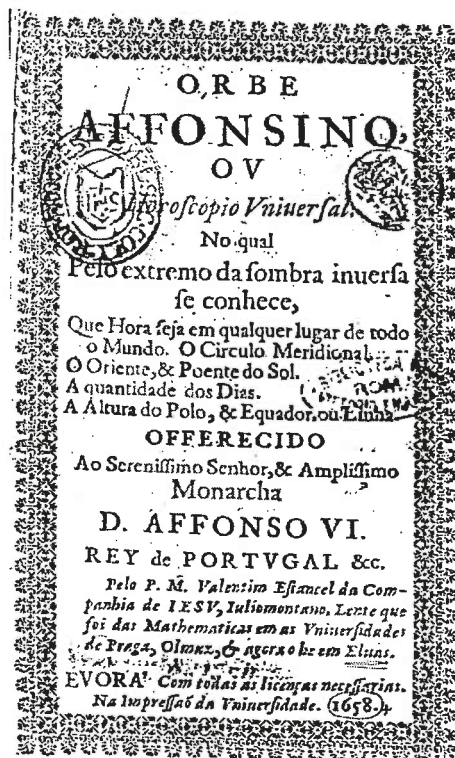
Staden: Wahrhaftige Historia... - Titelblatt und Figur

Ein sehr wichtiges Forschungsgebiet ist heutzutage die ethnographische Forschung. Mit dieser Forschung hat man die Absicht die Gewohnheit und Lebensstil der Native (Indianer) zu untersuchen. Damit versucht man die wissenschaftlichen Auffassungen der Indianer zu verstehen. Einige Arbeiten auf dem Gebiet Ethnomathematik gehören zum Rahmen der Geschichte der Mathematik aus der Zeit vor Kolumbus. Eine wichtige Quelle ist das Buch, Zwei Reisen nach Brasilien, von Hans Staden. Hans Staden hat im 16. Jahrhundert gelebt. Er war zwei Mal in Brasilien. Sein Buch "Wahrhaftige Historia..." hat mehr als 80 Auflagen erlebt, davon 15 in portugiesischer und 25 in deutscher Sprache. Es ist



das älteste Werk mit einer genauen Beschreibung der Urbevölkerung Brasiliens. Die "Wahrhaftige Historia..." beschreibt das Land, seine Tier- und Pflanzenwelt, die Hans Staden mit fast wissenschaftlicher, neuzeitlich wirkender Schärfe zwischen São Vicente und Ubatuba beobachtete.

Die Arbeiten der Jesuiten sind auch bedeutungsvoll, wenn man mehr über die Indianer, ihre Kultur und Gewohnheit erfahren will. Sie kamen nach Brasilien im Jahr 1549 an und blieben im Lande bis 1759, als die portugiesische Regierung ihre Mission abgeschafft hat. Sie hatten viele Kontakte zu den Indianern, bei den sie viel lernten. Die erste Grammatik von einer indianischen Sprache (tupy) wurde von einem Jesuiten geschrieben und im Jahr 1596 in Coimbra, Portugal veröffentlicht. Eine andere sehr wichtige Sache war das Lernen von der Erkennung und der Benutzung der verschiedensten Medizinpflanzen. Die Jesuiten sammelten mehrere Rezepte von Medikament, und brachten diese Rezepte nach Europa.



Stanzel: Orbe Affonsino - Titelblatt

Die Jesuiten leisteten auch großen Beitrag zu anderem wissenschaftlichen Gebiet wie Astronomie, Kartographie und auch zur Grunderziehung. Die ersten Grundschulen in Brasilien wurden von den Jesuiten gegründet. Der wichtigste Jesuit in Brasilien für die Geschichte der Mathematik war Valentin Stanzel.

Valentin Stanzel ist in Olmütz (heute Tscheche Republik) geboren, und war Dozent für Grammatik und Mathematik an der Universität von Olmütz und Prag. 1655 reiste er nach Rom und Portugal. In Portugal war

er tätig als Lehrer in Evora und Lissabon. 1663 kam er nach Brasilien, wo er bis seinen Tod im Jahr 1705 blieb. Stanzel war Lehrer für Grammatik und Mathematik an der jesuitischen Schulen in Salvador. Seine Hauptforschung auf dem wissenschaftlichen Gebiet war über die astronomische Beobachtung. Er sendete einige Berichte über die Ergebnisse seiner Forschungen nach Europa, die in verschiedenen wissenschaftlichen Zeitschriften jener Zeit veröffentlicht wurden. Diese Zeitschriften waren *Giornale de Letterati*, (Italien), *Acta Eruditorum Lipsiensis* (Deutschland), *Journal des Sçavans* (Frankreich) und *Philosophical Transactions* (England). Einige bekannte Wissenschaftler lasen diese neuen Informationen über den südlichen Himmel und zitierten in seinen Werken. Das beste Beispiel davon ist das Zitat von Isaac Newton in seinem Buch *Principia*. Die Ergebnisse seiner Beobachtungen in Brasilien wurden gesammelt und in Prag im Jahr 1683 publiziert. Mehrere wissenschaftliche Arbeiten von Stanzel sind bis heute unbekannt. Aus der allgemeinen Literatur, wissen wir, dass es andere wichtige Arbeiten von ihm gibt, aber bis heute wurden sie noch nicht gefunden. Ich muss noch sagen, dass wir noch viel über die Jesuiten und ihrer wissenschaftlichen Arbeiten forschen müssen.

Aber nicht nur die Jesuiten spielten eine große Rolle am Anfang der Geschichte der Mathematik in Brasilien. Brasilien war eine neue Welt und ein begieriges Land. Verschiedene Nationen wie Frankreich und Niederland versuchten das Land einzudringen. Um das Land zu verteidigen, wurde die portugiesische militärische Kraft eingesetzt. Die Armee sorgte dafür, ihre Offiziere zu bilden. Sie gründeten einige bestimmte militärische Schulen. Aus dieser Zeit wurde das erste brasilianische mathematische Buch erschienen. Es ist ein Buch über Artillerie, aber dieses Buch behandelt viel von der Elementar Mathematik.

# EXAME DE ARTILHEIROS QUE

COMPREHENDE ARITHMETICA, GEOMETRIA, E  
Artilheria, com quatro appendices: O primeiro de algumas pre-  
guntas uteis; o segundo do methodo de contar as ballas, e  
bombas nas pallas; o terceiro das baterias; e o quarto  
dos fogos artificiaes.

OBRA DE GRANDE UTILIDADE, PARA SE ENSI-  
NAREM os jovens Soldados Artilheiros, nos parguas, e repa-  
lhas.

DEDICADO  
AO ILLUSTRISSIMO, E EXCELLENTISSIMO SENHOR  
**GOMES FREIRE**  
DE ANDRADE,  
DO CONSELHO DE SUA Magestade,  
Sargento mór de batalhas de seus Exercitos, Go-  
vernador, e Capitão General do Rio de Janeiro,  
e Minas Geraes.

POR  
**JOZE FERNANDES**  
PINTO ALPOYM,  
CAVALLEIRO PROFESSOR NA ORDEM DE CRISTO, E SARGENTO  
mór Exercito, e do corpo de Artilheria: Leme da mesma, por  
Sua Magestade que Deus guarde, na Academia do Rio de Janeiro.

LISBOA:  
Na nova Officina de JOZE ANTONIO PLATES,  
Anno de M. DCC. XLIV.  
Com todas as licenças necessarias.

Alpoim: Exame de Artilheiros - Titelblat

der Mathematik. Die erste Dissertation erschien im Jahr 1848 und bis 1858 wurden mehr als 20 Dissertationen verteidigt. Die Hauptthemen dieser Dissertationen waren Astronomie, Infinitesimal Mathematik und angewandte Mathematik. Ich möchte ein bisschen mehr über die erste Dissertation und deren Verfasser reden.

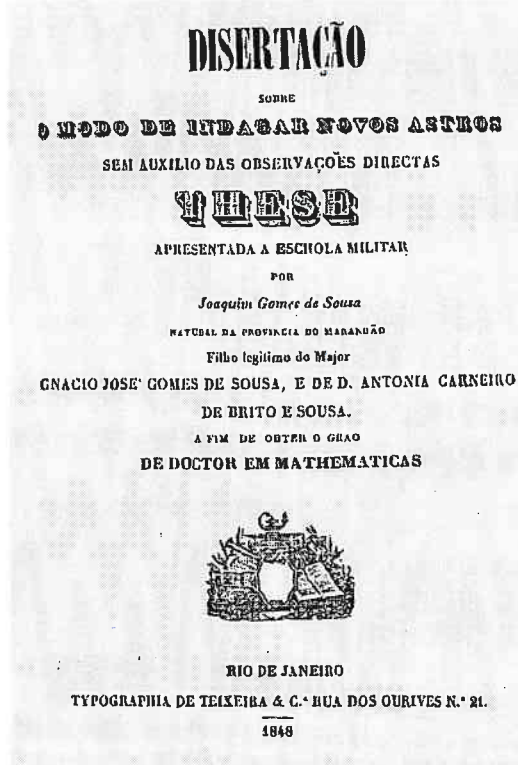
Joaquim Gomes de Sousa, bekannt als Sousinha, schrieb die erste Dissertation, wofür das Thema die Art die neuen Gestirne zu forschen ohne Hilfe der direkten Beobachtung behandelt wurde. Die damalige neuerliche Entdeckung des Planeten Neptun (1846) ermutigte ihn diese Dissertation zu schreiben. Um diese Arbeit zu schreiben, beruhte er auf dem Werk von Laplace: *Traité de Mécanique Céleste*. Hier muss ich sagen, dass er eine relativ moderne Mathematik im Vergleich mit der Mathematik, die in Europa diskutiert worden war, nutzte. Sousinha ist zur Zeit als der wichtigste Mathematiker des 19. Jahrhunderts in Brasilien anerkannt. Er hat ein kurzes Leben. Er war erst 34 als er gestorben ist. Aber trotz seines Kurzlebens hat er viel getan. Mit 19 Jahren alt verteidigte er seine Dissertation und begann er mathematische Artikel zu schreiben. Zwei Bücher von ihm wurden in Deutschland, Leipzig – Bei Brockhaus, publiziert. Bei einem handelt es um die Gedichte und dem anderen um die Mathematik. Das erste Buch hat eine merkwürdige Geschichte, die uns bis heute nicht klar ist. Die Frage ist, wie konnte er ca. 500 Gedichte in 17 verschiedenen Sprachen sammeln? Beherrschte er alle diese Fremdsprachen? Über das zweite Buch habe ich schon etwas in Leipzig bei dem Brockhaus Archiv geforscht. Es ist wichtig zu sagen, dass das zweite Buch keine Auflage von Brockhaus ist, es wurde einfach dort gedruckt. Als das Buch

Wie schon es am Anfang erwähnt wurde, war die Gründung der Militär Akademie (1810) sehr bedeutungsvoll für die Institutionalisierung der Mathematik im Lande. Der erste Kurs in der Militärischen Akademie war für Offizier, Ingenieurwissenschaft und Artillerie. Dieser Kurs bestand in zwei Teile: Militär Kurs, der 3 Jahre dauerte und Mathematik Kurs mit 4 Jahren Dauern. Mit dieser Tat wurde die akademische Mathematik ins Land eingeführt.

Dieser mathematische Kurs bezog auf die Werke von Lacroix, Euler, Bezout, Monge, Legendre, Laplace, usw. Zu dieser Zeit begann auch die Übersetzung der mathematischen Bücher in Brasilien. Die ersten übersetzten Bücher waren von Legendre und Euler.

Ab 1842 hat man die Möglichkeit eine Doktorarbeit in Brasilien zu verteidigen. Im Jahr 1848 wurde die erste Dissertation im Lande verteidigt.

Die ersten Doktorarbeiten, die in der Militär Akademie verteidigt worden sind, bezeichneten den Beginn der wissenschaftlichen Forschung auf dem Gebiet



Gomes de Sousa: Promotionsarbeit - Titelblat

gedruckt wurde, war Sousinha schon tot und der brasilianische König wollte ihm huldigen, deswegen finanzierte die brasilianische Regierung diese Auflage.

Die erste Beiträge zur Mathematik, und auch zur Wissenschaft in Brasilien, wie von Sousinha, z. B., waren nur individuelle Ergebnisse. Bis dann gab es keine Forschungsgruppe.

Am Ende des 19. Jahrhunderts, mit dem Beginn der Republik, war Brasilien von den Positivismus Gedanken sehr beeinflusst. Das ist ganz deutlich zu merken. Zum Beispiel in der brasilianischen Flagge stehen bis heute die Wörter: *Ordnung und Fortschritt*. Für die Mathematiker in Brasilien spielte die mathematischen Werke von August Comte auch eine große Rolle. Die Bücher von Comte waren übersetzt ins Portugiesische und bei den Wissenschaftlern sehr beliebt. Sie waren ungefähr wie eine Bibel für den Mathematiker in Brasilien. In dieser Zeit wurden auch viele mathematische Lehrbücher geschrieben, und die meisten verfolgten die Gedanken des Positivismus. Am Anfang des 20. Jahrhunderts gab es einen großen Streit zwischen den Anhängern und den Gegnern Comtes Gedanken im Bereich der Mathematik. Der Positivismus ist ein umfassendes Forschungsthema für die Geschichte der Mathematik in Brasilien.

Am Anfang des 20. Jahrhunderts begann die Modernisierung der wissenschaftlichen Institutionen in Brasilien. An der Hochschule für Ingenieurwissenschaft, in Rio de Janeiro, waren die ersten berühmten Mathematiker des Landes. Otto de Alencar Silva (1874-1912), Manuel Amoroso Costa (1885-1928) und Theodoro Augusto Ramos (1895-1935)

Otto de Alencar Silva war ein strenger Gegner des Positivismus. Seine Hauptarbeit war auf dem Gebiet der Analysis und er führte ins Lande die mathematische Arbeit von Felix Klein ein.

Amoroso Costa gründete die brasilianische Akademie für Wissenschaft, und hatte enge Kontakte mit Émile Borel. Nach Empfehlung von Borel, Amoroso Costa war Gast an der Universität Sourbone im Jahr 1928. Durch seine Vermittlung, berühmte Wissenschaftler besuchten Brasilien: Émilie Borel (1922), Jacques Hadamard (1924), Albert Einstein (1925), Marie Curie (1926) u. a.

Theodoro Ramos hatte seine Promotion über Analysis in der Hochschule für Ingenieurwissenschaft, in Rio de Janeiro, aber er verbrachte großes Teil seines Kurzen Leben an der Polytechnische Schule in Sao Paulo, wo er einen modernen mathematischen Lehrplan für das Studium einführte. Theodoro Ramos war auch Gast an der Universität Sourbone, und aus seiner Vorlesung, wurde das Buch *Leçons sur le Calcul Vectoriel* bei dem Verlag *Librarie Scientifique Albert Blanchard* publiziert.

Mit der Gründung der ersten Universität in Brasilien, im Jahr 1933. Die Universität von São Paulo, Theodoro Ramos war verantwortlich für die Anstellung einige Wissenschaftler aus Ausland, um die Lehrkraft der Universität zu verstärken. Es kamen nach der Philosophischen Fakultät für das Lehrstuhl Physik Gleb Wataghin (1899-1986), Schüler von Enrico Fermi und für Mathematik Luigi Fantappiè (1901-1956), Schüler von Vito Volterra, alle beide aus Italien. Später, nach Empfehlung von Fantappiè, übernahm anderer Italianer den Lehrstuhl von Analysis. Giacomo Albanese kam aus Palermo und war Schüler von Ulisses Dini und Francesco Severi

Fantappiè arbeitete im Funktional Analysis und Albanese im Algebraische Geometrie. Die ersten Schüler von Fantappiè und Albanese führten die mathematische Forschung an der Universität durch. Mit dem Beginn des 2. Weltkrieges, kehrten die Italianer nach Italien zurück, aber Gleb Wataghin, Jude, blieb und später bekam die brasilianische Staatsbürgerschaft. Es ist bekannt, dass Fantappiè in der faschistischen Bewegung hoch engagiert war und dass er nach Europa kam, um auf der Seite der italienischen Regierung zu kämpfen. Nach dem Zweiten Weltkrieg kamen noch viele anderen berühmten Wissenschaftler zur Universität von Sao Paulo. Für die Mathematik, erstes war Andre Weil, dann Jean Dieudonné, die beiden arbeiteten an der Philosophische Fakultät fast 3 Jahre. Später kamen Oscar Zariski, Jean Delsarte und Alexander Grothendieck, aber sie waren nur kurze Zeit an



der Universität beschäftigt. Weil war auf den Lehrstuhl für Höhere Analysis beschäftigt. Sein Ausdruck über die Fakultät wurde in seinen Biographie geschrieben: *Meine Lehrtätigkeit forderte mich wenig. Mein Vorgänger Albanese war ein angesehener Experte auf dem Gebiet der Geometrie gewesen und hatte für die Fakultät eine außergewöhnlich gute Bibliothek, vor allem auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie, sei Spezialgebiet, zusammengetragen. Das kam mir sehr gelegen.* André Weil gründete eine wichtige mathematische Forschungsgruppe an der Universität von Sao Paulo und seine Schüler haben eine sehr wichtige Rolle in dem mathematischen Forschungsgebiet in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhundert gespielt. Unter andere Betreuung hat Andre Weil die erste Mathematik-Promotionsarbeit von einer Frau in Brasilien betreut. (1950). Mit großem Einfluss von Andre Weil, 1946 wurde die erste mathematische Gesellschaft Brasiliens – die Mathematische Gesellschaft von Sao Paulo, gegründet. Beide, Andre Weil und Jean Dieudonné hielten Vorlesungen für Hoch Mathematik an der Universität. Diese Vorlesungen wurden von einigen Schüler auf Portugiesische aufgeschrieben und später durch die Sao Paulo Mathematische Gesellschaft publiziert. 1947 ging Weil nach Chicago, aber für viele Jahre blieb er im engen Kontakt mit seinen brasilianischen Schülern.

Infolge der politischen Probleme in Spanien und Portugal flohen viele Wissenschaftler nach Lateinamerika, vor allem nach Brasilien und Argentinien. Also die Portugiesen nach Brasilien und die Spanier nach Argentinien. Unter den portugiesischen Mathematikern, Antonio Aniceto Monteiro war der berühmteste. Schuler von Maurice Fréchet, Monteiro war Begründer der Mathematische Gesellschaft in Portugal und der mathematischen Zeitschriften *Portugaliae Mathematica* und *Gazeta de Matemática*. Monteiro ging nach Rio de Janeiro 1945. In Rio de Janeiro arbeitete er an der National Philosophischen Fakultät und, wie Andre Weil in Sao Paulo, gründete er eine wichtige Forschungsgruppe auf den Feld der abstrakte Algebra. Monteiro war Begründer der mathematischen Zeitschrift *Summa Brasiliensis Mathematicae*, die zusammen mit der Zeitschrift der Sao Paulos Mathematik Gesellschaft die Verbreitungsmittel der mathematischen Wissenschaft in Brasilien war. Als Gegner der Salazars Regierung in Portugal, hatte Monteiro auch politisches Problem in Brasilien. Deshalb ging er 1949 nach Argentinien, und ab 1957 koordinierte er ein wichtiges mathematisches Zentrum an der Universidad Nacional del Sur in Bahia Blanca. Ende des 40er wurden in Rio de Janeiro das Brasilianisches Zentrum für Physikalische Forschung (CBPF) und Anfangs der 50er das Institut für reine und angewandte Mathematik (IMPA) gegründet. 1957 begann die National Mathematische Kolloquium und seitdem findet dieses Kongresses jedes 2. Jahr statt.

In den Sechzigern Jahren wurde die Sao Paulos Mathematische Gesellschaft gelöscht und es wurde eine neue brasilianische Gesellschaft für Mathematik gegründet. Von Anfang an führten Sao Paulo und Rio de Janeiro die wissenschaftliche Bewegung für Mathematik im Land. Aber heutzutage gib es auch Mathematikforschung an andere Universität, z.B. in Recife, Belo Horizonte, Brasilia, u. a. Zur Zeit üben einige Mitglieder der brasilianischen Mathematik Gesellschaft einen großen politischen Einfluss auf die Internationale Gesellschaft aus. Z. B. der Vorsitzender der International Union of Mathematics ist ein Brasilianer.

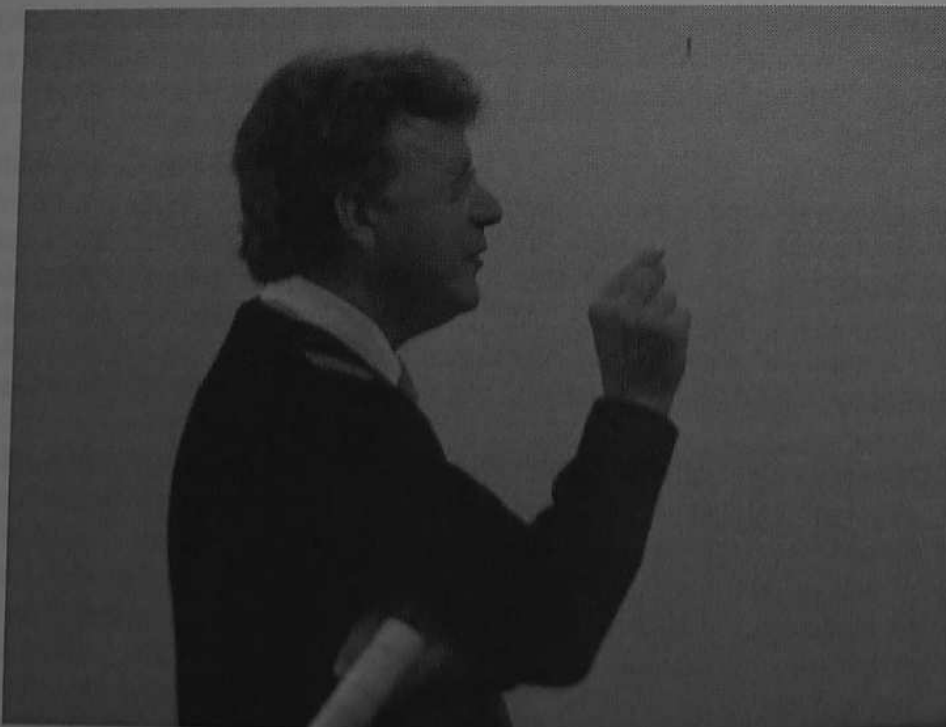
### **Die Institutionalisierung auf dem Gebiet Geschichte der Mathematik in Brasilien**

Bis zum Achtzigern Jahren wurden einige Einzelne Arbeiten auf das Gebiet Geschichte der Mathematik geschrieben. Einige Mathematiker hatten Interesse an dieses Thema und haben es als Hobby untersucht. Ihre Hauptaufgabe im Beruf war nicht dieses Thema. In den letzten Jahren begann eine Bewegung in Brasilien in dem Sinne die Geschichte der Mathematik zu institutionalisieren. Bis jetzt haben wir schon viel geschaffen, z. B.: Im Jahr 1995 wurde den ersten Lehrstuhl als Privatdozent für Geschichte der Mathematik in einem mathematischen Institut geschafft. 2001 wurde die erste Habilitationsarbeit auf dem Gebiet Geschichte der Mathematik in einer brasilianischen Universität verteidigt. Mehrere

Dissertationen wurden zu diesem Thema geschrieben. Einige Forschungsgruppen wurden in mehreren Universitäten gegründet. Seit 1995 organisieren wir Nationalen Tagungen für Geschichte der Mathematik. Diese Tagungen finden alle zwei Jahre in verschiedener Universität statt. Oft werden auch regionale Tagungen organisiert. Am 30. März 1999 während des dritten Nationalen Kongress wurde die brasilianische Gesellschaft für die Geschichte der Mathematik gegründet. 2001 begann die Publikation der brasilianischen wissenschaftlichen Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Es ist eine international Zeitschrift, wo man in verschiedener Sprache publizieren kann. Diese ist die erste (einzige?) spezifische Zeitschrift für Geschichte der Mathematik im südlichen Äquator.

#### Literaturverzeichnis

- Azevedo, Fernando (org.). 1994 (2ª Ed.). *As ciências no Brasil*, Rio de Janeiro, Editora UFRJ.
- D'Ambrosio, Ubiratan. 1999. História da Matemática no Brasil - Uma Visão Panorâmica até 1950. *Saber y Tiempo*. vol. 2, nº 8, Julio-Diciembre 7-37.
- D'Ambrosio, Ubiratan. 2001. A Matemática na época das grandes navegações e início da colonização. In: *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. I, nº 1. 3-20.
- Nobre, Sergio (ed.). 2001-2006. *Revista Brasileira de História da Matemática*.
- Nobre, Sergio. 2000. The institutional organisation for the history of mathematics in Brazil. *Newsletter of the British Society for History of Mathematics*. 41, 32-35
- Silva, Circe Mary Silva. 1999. *A matemática positivista e sua difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES.
- Silva, Circe Mary Silva. 2001. Benjamin Constant e o ensino da matemática no Brasil In: *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. I, nº 1. 86-98.
- Silva, Clóvis Pereira. 1992. *A Matemática no Brasil - Uma História de seu desenvolvimento*, Curitiba, Ed. da UFPR.





# Zu den Lah-Zahlen mit Hilfe der umbralen Rechnung

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät in Ljubljana

Miesenbach, 21.–27. Mai 2006

Hier werden zuerst die Grundzüge der von Gian-Carlo Rota und Steven Roman entwickelten umbralen Rechnung vorgestellt. Ihre umbrale Rechnung ist ein systematisches Studium der Sheffer-Folgen von Polynomen, die einem geordneten Paare zweier formalen Potenzreihen der Ordnung 0 und 1 gehören. Dabei ist eine einfache Technik der modernen linearen Algebra gebraucht. Damit kann man Zusammenhangskoeffizienten zwischen zwei Sheffer-Folgen von Polynomen finden. In einem Spezialfall der steigenden und fallenden Faktoriellen bekommt man die Lah-Zahlen.

*"The progress of mathematics can be viewed as progress from the infinite to the finite."* (Gian-Carlo Rota (1932–1999))

## Einleitung

Es sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit Charakteristik 0. Mit  $\mathbb{F}[x]$  bezeichnen wir alle Polynome  $p(x)$  in Variable  $x$  mit Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  in  $\mathbb{F}$ . Wenn  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$  und  $a_n \neq 0$ , dann hat  $p(x)$  den Grad  $n$ . Mit  $\mathbb{F}[[t]]$  bezeichnen wir aber alle formalen Potenzreihen  $f(t)$  in Unbestimmter  $t$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}$ :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathbb{F}[[t]].$$

Die Ordnung einer Potenzreihe  $f(t) \neq 0$  ist der kleinste Index  $k$ , für welchen  $a_k \neq 0$ . Man nimmt für  $f(t) = 0$  die Ordnung  $\infty$ .

Operationen mit formalen Potenzreihen sind normalerweise definiert, ebenso die Gleichheit. Für formale Potenzreihen

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \in \mathbb{F}[[t]]$$

definiert man das Produkt durch die Regel

$$f(t)g(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Es ist klar, dass  $f(t)g(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ . Die formale Potenzreihe  $f(t)$  der Ordnung 0 ( $a_0 \neq 0$ ) ist im algebraischen Sinne invertierbar. Das Inverse von  $f(t)$  bezüglich der Multiplikation wird mit  $1/f(t) = f(t)^{-1}$  bezeichnet. Es gilt:  $f(t)f(t)^{-1} = 1$ .

Wenn die Ordnung der formalen Potenzreihe  $f(t)$  größer als 1 ist, existiert für alle anderen formalen Potenzreihen  $g(t)$  die Komposition  $h(t) = g(f(t))$  als eine neue formale Potenzreihe. Die formale Potenzreihe  $f(t)$  der Ordnung 1 ist invertierbar bezüglich der Komposition. Dieses Inverse ist ebenso der Ordnung 1 und wird mit  $\bar{f}(t)$  bezeichnet. Es gilt:  $f(\bar{f}(t)) = \bar{f}(f(t)) = t$ .

Eine formale Potenzreihe der Ordnung 1 heißt auch Delta-Reihe. Die Ordnung von  $f(t)^k$  ist in solchem Falle eben der Exponent  $k$ .

Man schreibt oft  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  in so genannter exponentialer Form:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k.$$

Für zwei formale Potenzreihen

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} t^k$$

in exponentialer Form hat das Produkt auch exponentiale Form:

$$f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jede formale Potenzreihe  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  in exponentialer Form kann man als lineares Funktional auf  $\mathbb{F}[x]$  behandeln, wenn man ihre Wirkung für  $n = 0, 1, 2, \dots$  definiert durch

$$\langle f(t) | x^n \rangle = a_n$$

und dann  $f(t)$  linear auf alle Polynome  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  erweitert. Umgekehrt, für jedes lineare Funktional  $L$  auf  $\mathbb{F}[x]$  gibt es eine eindeutig bestimmte formale Potenzreihe  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ , so dass  $\langle L | p(x) \rangle = \langle f(t) | p(x) \rangle$  für alle  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ . Diese Reihe ist

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L | x^k \rangle}{k!} t^k.$$

Es ist leicht zu beweisen, dass

$$\langle f(t)g(t) \mid x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle f(t) \mid x^k \rangle \langle g(t) \mid x^{n-k} \rangle; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Damit wird  $\mathbb{F}[[t]]$  eine Algebra – die umbrale Algebra.

Für alle  $h(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ ,  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  gelten folgende Reihen- und Polynomentwicklungen:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) \mid x^k \rangle}{k!} t^k, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle t^k \mid p(x) \rangle}{k!} x^k.$$

Die letzte Reihe hat eigentlich endlich viele Terme.

Ist die Ordnung von  $f_k(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  gleich  $k$  und  $\langle f_k(t) \mid p(x) \rangle = \langle f_k(t) \mid q(x) \rangle$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ , wobei  $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ , so ist  $p(x) = q(x)$ . Ist aber der Grad von  $p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$  gleich  $k$  und  $\langle f(t) \mid p_k(x) \rangle = \langle g(t) \mid p_k(x) \rangle$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ , wobei  $f(t), g(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ , so ist  $f(t) = g(t)$ .

Die formale Ableitung beliebiger formaler Potenzreihe

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \in \mathbb{F}[[t]]$$

ist die formale Potenzreihe

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} t^k \in \mathbb{F}[[t]].$$

Es gilt die Identität:  $\langle f(t) \mid xp(x) \rangle = \langle f'(t) \mid p(x) \rangle$  für alle  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ . Für alle  $a \in \mathbb{F}$  und für alle  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  gilt auch die Identität  $\langle f(t) \mid p(ax) \rangle = \langle f(at) \mid p(x) \rangle$ .

Wenn  $f(t)$  eine Delta-Reihe ist, heißt das entsprechende Funktional auch Delta-Funktional. Die Reihe  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  ist Delta-Funktional genau dann, wenn  $\langle f(t) \mid 1 \rangle = 0$  und  $\langle f(t) \mid x \rangle \neq 0$ .

### Beispiele der Funktionale

Für alle Polynome  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  gilt:

$$\langle t^k \mid p(x) \rangle = p^{(k)}(0); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Für die formale exponentiale Reihe

$$\exp(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k, \quad y \in \mathbb{F},$$

gilt für alle  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ :

$$\langle \exp(yt) \mid p(x) \rangle = p(y), \quad \langle \exp(yt) - 1 \mid p(x) \rangle = p(y) - p(0),$$

$$\langle t \exp(yt) \mid p(x) \rangle = p'(y), \quad \langle (1-t)^{-1} \mid p(x) \rangle = \int_0^\infty p(u) \exp(-u) du,$$

$$\langle (\exp(yt) - 1)/t \mid p(x) \rangle = \int_0^y p(u) du.$$

Jede formale Potenzreihe  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  kann auch die Rolle eines linearen Operators auf  $\mathbb{F}[x]$  spielen.

Die fallende Faktorielle  $x^{\underline{k}}$  und die steigende Faktorielle  $x^{\overline{k}}$  sind definiert durch:

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1), \quad x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)$$

für natürliche  $k \geq 1$ , speziell aber für  $k = 0$ :  $x^{\underline{0}} = 1$ ,  $x^{\overline{0}} = 1$ . Die Wirkung des Operators  $t^k$  auf die Potenz  $x^n$ , wenn  $n, k = 0, 1, 2, \dots$ , ist definiert durch:

$$t^k x^n = n^{\underline{k}} x^{n-k}.$$

Die Wirkung wird dann normalerweise auf eine beliebige Potenzreihe erweitert. Schreibt man nämlich

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \in \mathbb{F}[[t]],$$

so findet erhält man sofort:

$$f(t)x^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^{\underline{k}}}{k!} a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k x^{n-k}.$$

Der Operator  $f(t)$  steigt nicht dem Polynome seinen Grad. Deswegen kann man nicht jeden linearen Operator auf  $\mathbb{F}[x]$  mit einer formalen Potenzreihe  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  vorstellen. Die Multiplikation der Polynome mit  $x$  ist dafür ein einfaches Beispiel.

Wenn  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  eine Delta-Reihe ist, heißt der entsprechende Operator auch Delta-Operator.

Ein Operator  $A$  auf  $F[x]$  ist durch eine Potenzreihe  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  vorstellbar genau dann, wenn  $A$  mit irgendeinem Delta-Operator kommutiert.

Allgemein gilt auch:

$$[f(t)g(t)]p(x) = f(t)[g(t)p(x)] = f(t)g(t)p(x) = g(t)f(t)p(x).$$

Überschreitet die Ordnung der formalen Potenzreihe  $f(t)$  den Grad des Polynoms  $p(x)$ , so ist  $f(t)p(x) = 0$ .

Ebenso wie für Funktionale auf  $\mathbb{F}[x]$  gelten auch folgende Lehrsätze:

Ist die Ordnung von  $f_k(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  gleich  $k$  und  $f_k(t)p(x) = f_k(t)q(x)$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ , wobei  $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ , so ist  $p(x) = q(x)$ . Ist der Grad von  $p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$  gleich  $k$  und  $f(t)p_k(x) = g(t)p_k(x)$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ , wobei  $f(t), g(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ , so ist  $f(t) = g(t)$ .

Wenn sich Potenzreihen  $f(t)$  und  $g(t)$  in beiden Rollen treffen, gilt

$$\langle f(t)g(t) | p(x) \rangle = \langle g(t) | f(t)p(x) \rangle = \langle f(t) | g(t)p(x) \rangle.$$

### Beispiele der Operatoren

Für alle Polynome  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  gilt:

$$t^k p(x) = p^{(k)}(x); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Für die exponentiale Reihe

$$\exp(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k, \quad y \in \mathbb{F},$$

gilt für alle  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ :

$$\exp(yt)p(x) = p(x+y), \quad (\exp(yt) - 1)p(x) = p(x+y) - p(x),$$

$$t \exp(yt)p(x) = p'(x+y), \quad (1-t)^{-1}p(x) = \int_0^{\infty} p(x+u) \exp(-u) du,$$

$$[(\exp(yt) - 1)/t]p(x) = \int_x^{x+y} p(u) du.$$

Die Sheffer-Folge von Polynomen  $(s_n(x))_{n=0}^{\infty}$ , wobei

$$s_n(x) \in \mathbb{F}[x] \quad \text{und} \quad \deg p_n(x) = n \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

entspricht einem beliebigen geordneten Paare formaler Potenzreihen  $(g(t), f(t))$ , wobei  $g(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  invertierbar bezüglich Multiplikation und  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  eine Delta-Reihe ist. Dabei muss aber gelten:

$$\langle g(t)f(t)^k \mid s_n(x) \rangle = n! \delta_{n,k} \quad \text{für alle } n, k = 0, 1, 2, \dots$$

Die Sheffer-Folge von Polynomen  $(p_n(x))_{n=0}^\infty$  des Paares  $(1, f(t))$  heißt Basisfolge der Delta-Reihe  $f(t)$ . Für ein beliebiges Paar  $(g(t), f(t))$  gilt

$$g(t)s_n(x) = p_n(x) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Für alle  $h(t) \in \mathbb{F}[[t]]$ ,  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  gelten folgende Reihen- und Polynomentwicklungen:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) \mid s_k(x) \rangle}{k!} g(t)f(t)^k, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(t)f(t)^k \mid p(x) \rangle}{k!} s_k(x).$$

Die letzte Reihe hat eigentlich endlich viele Terme.

Unter anderen gelten für alle  $y \in \mathbb{F}$  folgende Entwicklungen:

$$\exp(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \exp(yt) \mid s_k(x) \rangle}{k!} g(t)f(t)^k, \quad \exp(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} g(t)f(t)^k$$

und am Ende die erzeugenden Funktionen der Sheffer- und Basispolynome:

$$[g(\bar{f}(t))]^{-1} \exp(y\bar{f}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} t^k, \quad \exp(y\bar{f}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{k!} t^k.$$

Diese Entwicklungen sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass die Folge  $(s_n(x))_{n=0}^\infty$  die Sheffer-Folge des Paares  $(g(t), f(t))$  ist, beziehungsweise dass die Folge  $(p_n(x))_{n=0}^\infty$  die Basisfolge der Delta-Reihe  $f(t)$  ist. Aus der Identität

$$\langle g(t)f(t)^k \mid f(t)s_n(x) \rangle = \langle g(t)f(t)^{k+1} \mid ns_{n-1}(x) \rangle,$$

die für alle nicht-negativen ganzen Zahlen  $k$  und  $n$  gilt, folgen Identitäten

$$f(t)s_n(x) = ns_{n-1}(x), \quad f(t)p_n(x) = np_{n-1}(x),$$

die Analogien für die Ableitung  $tx^n = nx^{n-1}$  sind. Allgemein gelten noch folgende Identitäten

$$f(t)^k s_n(x) = n^{\underline{k}} s_{n-k}(x), \quad f(t)^k p_n(x) = n^{\underline{k}} p_{n-k}(x).$$



Die Wirkung des Operators

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} g(t) f(t)^k$$

auf  $s_n(x)$  ergibt:

$$h(t)s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} n^k g(t) s_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle h(t) | s_{n-k}(x) \rangle p_k(x).$$

Deswegen hat man:

$$h(t)s_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle h(t) | s_{n-k}(x) \rangle p_k(x),$$

$$h(t)p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle h(t) | p_{n-k}(x) \rangle p_k(x).$$

In speziellem Fall gilt für alle  $y \in \mathbb{F}$ :

$$\exp(yt)s_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \exp(yt) | s_{n-k}(x) \rangle p_k(x),$$

$$\exp(yt)p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \exp(yt) | p_{n-k}(x) \rangle p_k(x).$$

So hat man die Sheffer-Identität

$$s_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_{n-k}(y) p_k(x)$$

und im Falle der Basispolynome die binomische Identität:

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{n-k}(y) p_k(x).$$

Die Bedingungen

$$p_n(0) = \langle 1 | p_n(x) \rangle = \delta_{n,0} \quad \text{und} \quad f(t)p_n(x) = np_{n-1}(x)$$

sind notwendig und hinreichend dafür, dass die Folge  $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$  die Basisfolge der Delta-Reihe  $f(t)$  ist.

Wenn das Funktional  $[g(\bar{f}(t))]^{-1} \exp(y\bar{f}(t))$  auf die Potenz  $x^n$  wirkt, ergibt sich

$$s_n(y) = \langle [g(\bar{f}(t))]^{-1} \exp(y\bar{f}(t)) | x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \langle [g(\bar{f}(t))]^{-1} \bar{f}(t)^k | x^n \rangle y^k.$$

So berechnet man explizite Entwicklungen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \langle [g(\bar{f}(t))]^{-1} \bar{f}(t)^k | x^n \rangle x^k, \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \langle \bar{f}(t)^k | x^n \rangle x^k$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$

### Beispiele

---

$$f(t) = \bar{f}(t) = i(t) = t$$

$$\exp(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k \implies p_n(x) = x^n.$$

Die binomische Identität für Basispolynome

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{n-k}(x) p_k(y)$$

geht in die klassische über:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$


---

$$f(t) = \exp(t) - 1, \quad \bar{f}(t) = \log(1+t), \quad \exp(y \log(1+t)) = (1+t)^y,$$

$$\exp(y \log(1+t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k \implies p_n(x) = x^n.$$

Die binomische Identität für Basispolynome

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{n-k}(x) p_k(y)$$

geht in die folgende über:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$f(t) = 1 - \exp(-t), \bar{f}(t) = -\log(1 - t),$$

$$\exp(-y \log(1 - t)) = (1 - t)^{-y},$$

$$\exp(-y \log(1 - t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k \implies p_n(x) = x^{\bar{n}},$$

Die binomische Identität für Basispolynome schaut so aus:

$$(x + y)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\bar{n}-k} y^{\bar{k}}.$$

Die Laguerre-Polynome  $L_n^{(\alpha)}(x)$  sind Sheffer-Polynome des Paares  $(g(t), f(t))$ , wobei

$$g(t) = (1 - t)^{-\alpha-1}, \quad f(t) = \bar{f}(t) = t(t - 1)^{-1}.$$

Der obere Index  $\alpha \in \mathbb{F}$  ist die Ordnung der Laguerre-Polynome.

Für  $\alpha = -1$  hat man die Basispolynome  $L_n(x) = L_n^{(-1)}(x)$  der Delta-Reihe  $f(t) = t(t - 1)^{-1}$  und die erzeugende Funktion:

$$\exp(yt(t - 1)^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k(y)}{k!} t^k.$$

Die binomische Identität hat die folgende Gestalt:

$$L_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_{n-k}(x) L_k(y).$$

Aus expliziter Formel der Basispolynome

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \langle \bar{f}(t)^k | x^n \rangle x^k$$

hat man in diesem Falle

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \langle t^k (t-1)^{-k} | x^n \rangle x^k.$$

Aus Entwicklungen

$$(t-1)^{-k} = (-1)^k (1-t)^{-k} = (-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(-k)_j}{j!} t^j,$$

$$\langle t^k (t-1)^{-k} | x^n \rangle = \langle (t-1)^{-k} | t^k x^n \rangle = n^{\underline{k}} \langle (t-1)^{-k} | x^{n-k} \rangle,$$

$$\langle t^k (t-1)^{-k} | x^n \rangle = (-1)^k n^{\underline{k}} (-1)^{n-k} (-k)^{\overline{n-k}} = (-1)^k n^{\underline{k}} k^{\overline{n-k}},$$

ergibt sich:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^{\underline{k}} k^{\overline{n-k}}}{k!} (-x)^k.$$

Am Ende kann man  $L_n(x)$  folgende Gestalt geben:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^k = \sum_{k=0}^n L(n, k) (-x)^k.$$

Die Zahlen

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$$

sind die so genannten Lah-Zahlen, die im Jahre 1955 zuerst publiziert wurden (I. Lah, Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik, *Mitteilungsbl. Math. Statist.*, Vol. 7 (1955), S. 203-212).

	0	1	2	3	4	5	$\rightarrow n$
0	1	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	6	24	120	
$\downarrow$	2	0	0	1	6	36	240
$k$	3	0	0	0	1	12	120
	4	0	0	0	0	1	20
	5	0	0	0	0	0	1



Für die Delta-Reihe  $f(t) \in \mathbb{F}[[t]]$  definiert man den umbralen Operator  $\Lambda_f$  auf  $\mathbb{F}[x]$  folgenderweise:

$$\Lambda_f x^n = p_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei sind  $p_n(x)$  Basispolynome der Reihe  $f(t)$ . Wenn wir noch eine Delta-Reihe  $\ell(t)$  haben, definieren wir ebenso den umbralen Operator  $\Lambda_\ell$ :

$$\Lambda_\ell x^n = q_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Polynome  $q_n(x)$  sind dabei Basispolynome der Reihe  $\ell(t)$ .

Die umbrale Rechnung lehrt uns, dass folgende Regeln für die Komposition und das Inverse gelten:

$$\Lambda_f \circ \Lambda_\ell = \Lambda_{\ell \circ f}, \quad \Lambda_f^{-1} = \Lambda_{\bar{f}}.$$

Dabei gilt  $\Lambda_i = I$ , das heißt der identische Operator auf  $\mathbb{F}[x]$ .

Die Komposition  $(\ell \circ f)(t) = \ell(f(t))$  hat aber die Basisfolge  $(q_n(\vec{p}(x)))_{n=0}^\infty$ . Mit  $q_n(\vec{p}(x))$  bezeichnet man die so genannte umbrale Komposition des Polynoms  $q_n(x)$  mit Polynomen  $p_k(x)$  in folgendem Sinne: wenn

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} x^k,$$

so ist

$$q_n(\vec{p}(x)) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} p_k(x).$$

Es gilt nämlich:

$$\Lambda_\ell x^n = q_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} x^k,$$

$$(\Lambda_f \circ \Lambda_\ell)x^n = \Lambda_f q_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} \Lambda_f x^k = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} p_k(x).$$

Darum:

$$(\Lambda_f \circ \Lambda_\ell)x^n = \Lambda_{\ell \circ f} x^n = q_n(\vec{p}(x)).$$

Also, Polynome  $q_n(\vec{p}(x))$  sind Basispolynome der Komposition  $(\ell \circ f)(t)$ .

Laguerre-Polynome  $L_n(x)$  sind Basispolynome für die Reihe  $f(t) = t(t-1)^{-1}$ , die eine schöne Eigenschaft hat:  $(f \circ f)(t) = i(t) = t$ . Weil Basispolynome von der Reihe  $i(t) = t$  gewöhnliche Potenzen  $x^n$  sind, gilt die Identität

$$L_n(\vec{L}(x)) = x^n.$$

Es seien  $f(t)$  und  $\ell(t)$  Delta-Reihen mit Basispolynomen  $p_n(x)$  und  $q_n(x)$  entsprechend.

Das Zusammenhangskoeffizientenproblem fragt nach solchen Konstanten  $c_{n,k} \in \mathbb{F}$ , für welche für alle nicht-negativen  $n$  die folgenden Gleichungen gelten:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} q_k(x).$$

Mit umbralen Operatoren ergibt sich:

$$\Lambda_f x^n = \sum_{k=0}^n c_{n,k} \Lambda_\ell x^k, \quad \Lambda_{f \circ \bar{\ell}} x^n = \Lambda_{\bar{\ell}} \Lambda_f x^n = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k = t_n(x).$$

Also, Polynome  $t_n(x)$  sind Basispolynome der Delta-Reihe  $F(t) = f(\bar{\ell}(t))$ . Es ist aber bekannt, dass Polynome, die Basispolynome der Delta-Reihe  $F(t)$  sind, folgende Gestalt besitzen:

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \langle \bar{F}(t)^k | x^n \rangle x^k.$$

Endlich haben wir:

$$c_{n,k} = \frac{1}{k!} \langle \bar{F}(t)^k | x^n \rangle = \frac{1}{k!} \langle (\ell(\bar{f}(t)))^k | x^n \rangle.$$

Analogisch wird auch das Zusammenhangskoeffizientenproblem für die Sheffer-Polynome gelöst. Wenn Polynome  $s_n(x)$  Sheffer-Polynome des Paares  $(g(t), f(t))$  und  $r_n(x)$  Sheffer-Polynome des Paares  $(h(t), \ell(t))$  sind, so sind Zusammenhangskoeffizienten  $c_{n,k}$  in Gleichungen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} r_k(x)$$

folgender Gestalt:

$$c_{n,k} = \frac{1}{k!} \langle [h(\bar{f}(t))][g(\bar{f}(t))]^{-1} (\ell(\bar{f}(t)))^k | x^n \rangle.$$

Die Idee steckt in der Einführung des Sheffer-Operators  $\Lambda_{g,f}$ , der definiert ist durch:

$$\Lambda_{g,f} x^n = s_n(x).$$

Hier sind Polynome  $s_n(x)$  Sheffer für das Paar  $(g(t), f(t))$ . Die Komposition und das Inverse rechnet man nach den Regeln:

$$\Lambda_{g,f} \circ \Lambda_{h,\ell} = \Lambda_{g(h \circ f), \ell \circ f}, \quad \Lambda_{g,f}^{-1} = \Lambda_{(g(\bar{f}))^{-1}, \bar{f}}.$$

### Beispiel

Polynome  $p_n(x) = x^{\bar{n}}$  sind Basispolynome der Potenzreihe  $f(t) = 1 - \exp(-t)$  mit  $\bar{f}(t) = -\log(1-t)$ . Polynome  $q_n(x) = x^n$  sind aber Basispolynome der Reihe  $\ell(t) = \exp(t) - 1$ . Die Zusammenhangskoeffizienten  $c_{n,k}$  verbinden folgenderweise:

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k.$$

In diesem Beispiel hat man

$$F(t) = \ell(\bar{f}(t)) = t(1-t)^{-1} = -t(t-1)^{-1}$$

und nach allgemeiner Formel bekommt man

$$c_{n,k} = \frac{(-1)^k}{k!} \langle [t^k (t-1)^{-k} \mid x^n \rangle.$$

Erinnern wir uns an die Laguerre-Polynome

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \langle t^k (t-1)^{-k} \mid x^n \rangle x^k,$$

wo

$$\frac{1}{k!} \langle t^k (t-1)^{-k} \mid x^n \rangle = (-1)^k L(n, k).$$

Also, die Zusammenhangskoeffizienten sind die bekannten Lah-Zahlen:

$$c_{n,k} = L(n, k)$$

Die Lah-Zahlen hängen fallende und steigende Faktoriellen  $x^n$  und  $x^{\bar{n}}$  durch die so genannte Lah-Identität zusammen:

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n L(n, k) x^k.$$

Nach der Substitution  $x \rightarrow -x$  und durch die einfachen Identitäten

$$(-x)^{\bar{n}} = (-1)^n x^{\bar{n}}, \quad (-x)^{\bar{n}} = (-1)^n x^{\bar{n}}$$

kann man auch eine andere Gestalt der Lah-Identität entwickeln:

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L(n, k) x^{\bar{k}}.$$

Mit Hilfe der so genannten Transferformeln der umbralen Rechnung hat man auch einen kürzeren Weg zu den Laguerre-Polynomen:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= x(t-1)^n x^{n-1} = x \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{\bar{k}}}{k!} t^{n-k} x^{n-1} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{\bar{k}}}{k!} (n-1)^{\bar{n-k}} x^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^n \frac{n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} (-x)^{\bar{k}} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^n L(n, k) (-x)^{\bar{k}}. \end{aligned}$$

### Wer war Ivo Lah?

Ivo Lah wurde in Štruktjeva vas (Struckelsdorf) unweit von dem merkwürdigen periodisch auftretenden Cerknica-See (Zirknitzer See) am 5. September 1896 geboren. Er besuchte die Volksschule in Sv. Vid (St. Veith) nahe Cerknica (Zirknitz) und in Ljubljana (Laibach), wo er im Dezember 1915 das klassische Gymnasium mit den besten Noten vollendete. Vom Jahre 1918 studierte er Mathematik und Physik, ein Semester an der Universität in Wien und dann sieben Semester an der Universität in Zagreb (Agram). Dort beendete er seine Studien in April 1925. Während des Studiums in Zagreb studierte er auch Geschäfts- und Verkehrswissenschaften, was er im Jahre 1923 mit Staatsprüfung vollendete. Während des ersten Weltkriegs kämpfte er als freiwilliger Leutnant an der Isonzo-Front gegen Italien, nach dem Krieg bot er Schutz an der neuen nördlichen Grenze mit Österreich. Ivo Lah war im Jahre 1921 Assistent für Mathematik an der Fakultät für Forstkunde in Zagreb, von September 1921 bis Oktober 1950 arbeitete er an der Anstalt für Sozial- und Versicherungssachen in Ljubljana, Zagreb und Beograd (Belgrad), danach noch an dem Föderalen Statistischen Amt in Belgrad bis December 1956, wann Lah voll pensioniert wurde.



Die Adriatische Versicherungsgesellschaft, Riunione Adriatica di Sicurtà, die in Triest begründet worden war, schickte ihn nach Wien um dort in Jahren 1927 und 1928 Versicherungskunde zu studieren. Als Vertreter der Versicherungsmathematikerunion Königreichs Jugoslawien, wo er ein aktives Mitglied von 1933 bis 1941 war, hat er am Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker in Rom (1934) und Paris (1937) teilgenommen. Im Jahre 1943 wurde Lah nach Rom an die dortige Fakultät für Statistik eingeladen, aber wegen des Krieges blieb er in der ewigen Stadt nur einen Monat.

In den Jahren 1937–1941 war Ivo Lah Redakteur der Zeitschrift *Glasnik udruženja aktuara Kraljevine Jugoslavije* (Zeitschrift der Versicherungsmathematikerunion Königreichs Jugoslawien), wo er einer von den Gründern war. Auf diese Weise wurde er Korrespondent mit vielen Institutionen aus Portugal, Belgien, Italien, Deutschland, Frankreich und aus der Schweiz. Im Jahre 1932 übernahm Ivo Lah neue Verpflichtungen in Statistik der Sozialversicherung in Slowenien, wo er seine Arbeit mit den Studien an der Universität in Ljubljana verband. Er lehrte Studenten Seminararbeiten und Projekte über die Statistik zu verfertigen und mehrere Doktorarbeiten in Statistik und Versicherungskunde dank Ivo Lah wurden geschrieben. Er arbeitete auch an praktischer Demographie und Statistik.

Die größte Arbeit von Ivo Lah ist das dreisprachige Buch *Računske osnovice životnog osiguranja*, geschrieben in kroatischer, russischer und französischer Sprache (Rechengrundlagen der Lebensversicherung). Das Buch wurde im Jahre 1947 in Zagreb publiziert. Der lateinische Satz *Natura non facit saltus* in diesem Buch gefiel aber den Behörden gar nicht, der fragliche Satz wurde als antimarxistisch proklamiert und das Buch wurde aus Umlauf genommen und im Jahre 1951 fast ganz vernichtet. Ivo Lah rettete nur seltene Stücke. Es gibt eine tragische Ironie, dass Ivo Lah ein Mitglied der jugoslawischen Delegation war, wann die Verhandlungen über die Kriegsreparationen nach dem zweiten Weltkrieg verliefen. Dank seinem Wissen waren die Verhandlungen maximal erfolgreich, trotzdem wurde er aber schwer bestraft, so dass sein Monatslohn gering war um kaum eine Fahrkarte Beograd–Ljubljana zu kaufen.

Die wissenschaftliche Bibliographie von Ivo Lah umfasst ungefähr 120 Titel, die ein breites Spektrum der mathematischen, statistischen, demographischen und anderen Gebiete berühren. Zum Beispiel, in *Zentralblatt für Mathematik* findet man 19 Titel und in *Mathematical Reviews* 10 Titel von Lahs Arbeiten. Im Jahre 1955 publizierte Ivo Lah die so genannte Lah-Identität,

wo die Lah-Zahlen  $L(n, k)$  auftreten. Nach Lah benannte diese Zahlen der führende Kombinatoriker jener Zeit, John Riordan, der Lahs Werke vor dem Publizieren durchgesehen hat. Die Benennung "Lah-Zahlen" treffen wir zum ersten Mal in Riordans Buch *Introduction to Combinatorial Analysis* im Jahre 1958.

Ivo Lah publizierte seine Zahlen in seinem Aufsatz *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik* im Jahre 1955. Die Gesellschaft der Mathematiker, Physiker und Astronomen Sloweniens enthüllte im Jahre 2005, 50 Jahre nach der Entdeckung der Lah-Zahlen, dem versehenen und verschwiegenen Mathematiker an seinem Geburtshaus in Štrukljeva vas eine bescheidene Gedenktafel.

Ivo Lah stört auch drei Stereotype über Mathematiker: er war nicht jung, er hatte nicht Doktorat, er arbeitete nicht lange an der Universität. Trotzdem war er sehr erfolgreich bezüglich seiner Entdeckungen.

#### Literatur

1. J. Cigler: Konkrete Analysis, Vorlesungen, Sommersemester 2004.
2. I. Niven: Formal power series, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), S. 871–889.
3. M. Petkovšek, T. Pisanski: Combinatorial Interpretation of Unsigned Stirling and Lah Numbers, *Preprint Series* **40** (2002), no. 837.
4. M. Petkovšek, T. Pisanski: The Lah Numbers and the Argonauts, *Pi Mu Epsilon Journal* **11** (2002), no. 7, S. 385–386.
5. T. Pisanski: Ivo Lah, An Overlooked Slovenian Mathematician, [www.ijp.si/IvoLah/](http://www.ijp.si/IvoLah/)
6. J. Riordan: *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, New York 1968.
7. J. Riordan: *Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, New York 1958.
8. S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, Orlando et al. 1984.







Friedrich Katscher (Wien):

## Das Rechnen mit Jetons in Frankreich

Das *Rechnen auf den Linien* mit *Rechenpfennigen* in *Deutschland* wurde bei Tagungen des Adam-Ries-Bundes in Annaberg-Buchholz eingehend behandelt.

Auch in *Frankreich* war dieses nichtschriftliche Rechnen, *l'art de calculer* – oder *compter – avec les jetons* (die Kunst des Rechnens mit den Jetons), Jahrhunderte lang üblich. Heute wird das Wort *Jeton* meist nur noch im Sinne von Spielmarke, meist aus Plastik, verwendet, doch früher waren die Jetons das französische Gegenstück der deutschen Rechenpfennige, 2 bis 4 Zentimeter große Münzen, in der Regel aus minderwertigem Metall, Kupfer, Bronze oder Messing, mit denen, auf einer Fläche nach bestimmten Regeln aufgelegt, addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert wurde. Auf beiden Seiten der Jetons gab es die vielfältigsten Prägungen, Symbole, Bilder und Inschriften, jedoch keine Angabe eines Geldwerts.

Das französische Wort *Jeton*, das erst später verwendet wurde, und ebenso seine zahlreichen Vorgänger, sind eigentlich nicht plausibel. Sie stammen nämlich alle von dem französischen Zeitwort „jeter“, das vom lateinischen Verb „iactare“ herrührt und ebenso wie das italienische „gettare“ ganz eindeutig „kräftig werfen“ oder „schleudern“ bedeutet. Doch niemals wurden die Jetons tatsächlich geworfen, obwohl sie auch auf englisch *casting-counters* (Wurf-Zahlpfennige) genannt werden und im Niederländischen manchmal als *Werp-geld* bezeichnet wurden.

In allen Anleitungen wurde die Tätigkeit, die Jetons für die Rechnung an die richtige Stelle zu bringen, auf französisch *mettre, poser, placer* oder *disposer* und auf lateinisch *ponere*, seltener *apponere* oder *deponere*, also legen, ab-, hin-, niederlegen, stellen, setzen, platzieren oder anordnen genannt, und das geschah natürlich sacht und keineswegs heftig, wie es das Wort *werfen* andeutet.

Die französische Endung –oir findet sich bei Instrumenten, Geräten, Utensilien. So heißt *moucher* sich die Nase putzen und das Taschentuch *mouchoir*, raser rasieren und *rasoir* das Rasierzeug, und ebenso entstand aus *jeter* oder *geter* zuerst das Wort *jetoir* oder *getoir*. In den Handschriften, Büchern und auf manchen Rechenpfennigen findet man mehrere Formen: *gectoires, gettoires, gettoiers, jettouers, giets, gects, gets, giétons* usw., und später *getons, jettons* (auch mit *i* statt *j*), und schließlich *jetons*.

Hier soll das Rechnen mit Jetons in Frankreich anhand von Büchern in französischer und lateinischer Sprache dargestellt werden und zwar in der Reihenfolge des Erscheinens der ersten Auflage, zuerst die französischen Werke:

1) *Le liure des getcz grandement profitable pour messeigneurs les marchans et aultres*, also „das Buch der Gectz (ein alter Name für Jetons), sehr profitabel für die Herren Händler und andere“. Es hat keinen Autor, erschien um 1490 in Lyon und das Exemplar in der British Library in London (Signatur IA 41783), das der Referent kopierte, umfasst neben dem Titelblatt nur 13 Seiten. Obwohl es in altem Französisch und mit Abkürzungen geschrieben ist, ist es doch leicht verständlich.

Hier sei der erste Abschnitt des *Liure des getcz* wiedergegeben, in modernes Französisch übertragen und auf Deutsch übersetzt:

*Cy commence le liure des getcz*

*Ici commence le livre des jetons*

*Pource que plusieurs marchans qui ne sauent lire ne escrire et leur est necessaire  
Parce que plusieurs marchands qui ne savent ni lire ni écrire et leur est nécessaire  
de bien scavoir compter l'intention de l'auteur est dieu aidant de fayre Ung petit tracte  
de bien savoir compter l'intention de l'auteur est dieu aidant de faire un petit traité  
de algorisme le quel donnera la pratique de bien scavoir compter au getcz comme  
d'algorisme le quel donnera la pratique de bien savoir compter aux jetons comme*

*ala plume. Et sappellera ceste pratique de bien gecter au grant getz. Et à la plume. Et cette pratique s'appellera de bien jeter aux grands jetons. Et premièrement vous deues mettre vne table de getoers selon la somme que vous premièrement vous devez mettre une table de jetons selon la somme que vous voulles fayre lung get loing de lautre enuiron deux bons doys. Puis deues voulez faire, l'un jeton loin de l'autre environ deux bons doigts. Puis devez commencer au premier get vers vous et dire nombre. Et le second diseynne. Et le commencer au premier jeton vers vous et dire nombre. Et le second dizaine. Et le tiers santeinne. Et le quart millier: Et le cinquiesme diseynne de millier. Et le troisième centaine. Et le quatrième millier. Et le cinquième dizaine de millier. Et le sixiesme santenne de milliers. Puis million et diseynne de million: et santeynne de sixième centaine de milliers. Puis million et dizaine de million et centaine de million. Et ainsi poues mettre iusquez a neuf getz en la table si besoing y font. million. Et ainsi vous pouvez mettre jusqu'à neuf jetons sur la table s'il y a besoin. Car iamais ne passe neuf. Et au droit du premier get qui se dit nombre Car jamais il ne passe pas neuf. Et à droite du premier jeton qui se dit nombre deues mettre tous ce qui est moins de dix. Comme sont .i..ii.iii. et .iiii. Et ainsi vous devez mettre tout ce qui est moins de dix. Comme sont I, II, III, et IIII. Et ainsi des aultres. Et au droit du second get deues mettre toutes les diseynnez. des autres. Et à droite du second jeton vous devez mettre toutes les dizaines. Comme sont .x.xx.xxx. Et ainsi des aultres. Et au droit du tiers get deues Comme sont X, XX, XXX. Et ainsi des autres. Et à droite du troisième jetons devez mettre tous les cens et au droit du quart les milliers. Et du quint les mettre tous les cents et à droite du quatrième les milliers. Et du cinquième les diseynnes de milliers. et ainsi par ordre. Et notes bien qu'un get de ceulx qui sont dizaines de milliers. Et ainsi par ordre. Et notez bien qu'un jeton de ceux qui sont endroit de lespasse vault cinc de ceulx qui sont endroit de la ligne. Car sil y a ung à l'endroit de l'espace vaut cinc de ceux qui sont à l'endroit de la ligne. Car s'il y a un get endroit le meillieu du nombre et de la diseynne celui get vault cinc de ceulx du jeton à l'endroit du milieu du nombre et de la dizaine ce jeton vaut cinc de ceux du nombre. et sil ya .i. get entre la diseynne et la centeynne. Celui vault cinquante et nombre, et s'il y a l jeton entre la dizaine et la centaine celui-ci vaut cinquante, et ung entre la centeynne et le millier vault cinc cens. Et ainsi des aultres. car tousiours un entre la centaine et le millier vaut cinc cens. Et ainsi des autres. Car toujours ung get de ceulx de lespasse vault cinc de ceulx de la ligne qui est dessoubz. un jeton de ceux de l'espace vaut cinc de ceux de la ligne qui est dessous.*

Übersetzung: „Hier beginnt das Buch der Jetons. Weil mehrere Händler, die weder lesen noch schreiben können und gut rechnen können müssen, ist es die Absicht des Autors mit Gottes Hilfe eine kleine Algorismus-Abhandlung zu verfassen, die die Praxis, mit den Jetons und mit der Feder gut rechnen zu können, geben wird. Und sie heißt Praxis, um gut mit den großen Jetons zu rechnen. Und zuerst müssen Sie einen Jeton-Tisch gemäß der Summe, die Sie machen wollen, aufstellen, einen Jeton ungefähr zwei Finger vom anderen entfernt. Dann müssen Sie mit dem ersten Jeton bei Ihnen beginnen und ihn Zahl (Einer) nennen. Und den zweiten (oberhalb davon) Zehner. Und den dritten (wieder darüber) Hunderter. Und den vierten Tausender. Und den fünften Zehntausender. Und den sechsten Hunderttausender. Dann Million und zehn Millionen und hundert Millionen. Und so können Sie bis zu neun Jetons auf den Tisch legen. Denn niemals übersteigt man (benötigt man mehr als) neun (Jetons). Und an der Stelle des ersten Jetons, der Zahl heißt, müssen sie alles auflegen, was weniger als zehn ist. Wie es I, II, III und IIII sind. (Man beachte: Die Zahlen sind nicht mit arabischen, sondern mit römischen Ziffern geschrieben.)

Und an der Stelle des zweiten Jetons müssen Sie alle Zehner auflegen wie es X, XX, XXX sind. Und ebenso die anderen. Und rechts vom dritten Jeton müssen Sie die Hunderter auflegen und rechts vom vierten die Tausender. Und vom fünften die Zehntausender. Und so in dieser Anordnung. Und merken Sie sich gut, dass ein Jeton von denen, die im Zwischenraum (französisch: espace = Spacium oder Spatium) sind, als fünf von denen gilt, die auf der Linie liegen. Denn falls es einen Jeton in der Mitte zwischen den Einern und den Zehnern gibt, so gilt dieser fünf von denen der Einer. Und falls es 1 (einen) Jeton zwischen den Zehnern und den Hundertern gibt, so gilt dieser fünfzig und einer zwischen den Hundertern und den Tausendern gilt fünfhundert. Und ebenso von den anderen. Denn immer gilt ein Jeton von denen im Zwischenraum fünf von jenen der Linie darunter.“

Es folgen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, doch nur die Aufteilung von tausend Francs unter drei Händlern. Ergebnis: „drei hundert und .xxxiii. Francs .vi. solz (Sous; von lateinisch solidus) und viii, deniers (von lateinisch denarius, Pfennig)“. (12 Deniers waren ein Sous, und 20 Sous ein Franc.) Danach Proben (durch die entgegengesetzte Rechenart), Regel de tri, Gesellschaftsrechnung und Tausch.

Wesentlich ist, dass hier nicht *auf gezeichneten* oder *eingravierten Linien* gerechnet wird wie in Deutschland, sondern mit Hilfe einer *Disposition* (Anordnung), die Tranchant (siehe Buch 3) nur *arbre* (Baum) und Le Gendre (Buch 6) *Arbre de Numeration* (Baum des Zählens oder Zählbaum; ohne den heute üblichen Accent aigu von numération) nennt.

Bei dieser Methode wird *senkrecht* eine Reihe von Münzen aufgelegt (bei Le Gendre sind sie größer als die anderen). Jede repräsentiert eine Zehnerpotenz, also von unten nach oben die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw. Dieser *Zählbaum* – oder vielmehr sein „Baumstamm“ – bleibt unverändert an Ort und Stelle liegen und dient lediglich als Markierung, als Gedächtnisstütze, um den Stellenwert der Rechenpfennige, die rechts von der jeweiligen Zehnerpotenz, gewissermaßen als *Zweige* des Baums, auf nur *gedachten* Linien, aufgelegt werden und mit denen gerechnet wird, anzugeben. Jean François (Buch 5) schreibt auf Seite 5 seines Buches: „On nomme cet ordre & cette rangée des jettons l'Arbre.“ (Man nennt diese Anordnung und diese Reihe der Jetons den Baum.)

2) In der Bibliothèque Nationale in Paris gibt es drei Exemplare des Buches von Anthoine Catalan: *Arithmetique et manière à chiffrer & conter par la plume & par les getz* (Arithmetik und Art und Weise mit Zahlen umzugehen und mit der Feder und mit den Jetons zu rechnen), Lyon 1556, das der Referent nicht sah.

3) *L'Arithmetique de lean Tranchant, departie en trois livres, Ensembles un petit discours des Changes, Avec l'art de calculer aux Getons* (Die Arithmetik von Jean Tranchant, aufgeteilt in drei Bücher, zusammen mit einer kleinen Abhandlung über die Geldwechsel, mit der Kunst mit Getons zu rechnen) ist der Titel eines Buches, das der Referent besitzt. Es erschien 1647 in der Stadt Rouen. Doch die erste Auflage des Buches kam 1558 in Lyon heraus. Es gab 21 oder 22 Auflagen, von denen die letzte von 1694 stammt. Die Österreichische Nationalbibliothek besitzt die zweite Auflage von 1561. Zumeist wird der Name des Autors jedoch *Trenchant* mit e geschrieben. „L'Art et Moyen de calculer avec les Getons“ (Die Kunstfertigkeit und Fähigkeit mit den Jetons zu rechnen) umfasst im Exemplar des Referenten die letzten 13 Seiten und es gibt auch Abbildungen.

Der Titel von Kapitel II lautet „De l'arbre, disposition, & valeur des getons“ (Über den Baum, die Anordnung und den Wert der Jetons), und von Kapitel III „Representer tout nombre par les getons“ (Jede Zahl durch die Jetons darstellen).



Tranchant zeichnet auf seinen Abbildungen zwar Linien, aber sie dienen nur zur Veranschaulichung. Auf seinen Illustrationen stehen auf den Münzen des Zählbaums auch Bezeichnungen: 1, ein eigenes Zeichen für 10, C (Abkürzung von Cent) für 100, M (Abkürzung für Mille), ein Zeichen für sous ähnlich unserem scharfen s und ein Zeichen für denier ähnlich dem früheren deutschen Abkürzungszeichen für Pfennig. Während in deutschen Büchern über das Linienrechnen auf den Abbildungen mehrere Rechenpfennige immer *nebeneinander* liegen (Ausnahme Gregorius Reisch in seiner *Margarita philosophica* von 1503 und später), liegen sie bei Tranchant und Le Gendre (Buch 6) *jeweils zur Hälfte übereinander*.

4) *Cursus Mathematici Tomus Secundus, Continens Arithmetiicam practicam... Tome Second du Cours Mathématique, Contenant l'Arithmétique pratique... Par Pierre Herigone, Mathématicien* (Zweiter Band [von sechs] des Mathematikurses, enthaltend die praktische Arithmetik ... Von Pierre Herigone, Mathematiker [1580-1643]), Paris 1644, ist ein lateinisch-französisches Werk, von dem sich ein Exemplar in der Österreichischen Nationalbibliothek befindet. Kapitel XVI (Seiten 125-135) hat den lateinischen Titel „De Logistica per Calculos“ und den französischen „De la Logistique par Getons“ (Über die Rechenkunst mit Jetons; auf lateinisch also calculi, Rechensteine). Im ersten Satz verwendet der Autor die französische Bezeichnung *l'eschelle* (heute ohne s) *ou arbre*, die Stufenleiter (oder Rangordnung) oder der Baum, doch übersetzt er *arbre* nicht auf lateinisch, sondern spricht nur von *scala*.

5) *L'arithmétique ou l'Art de Compter toute sorte de Nombres, Avec la Plume, & les Jettons, Par le P. (Père) Jean François de la compagnie de Jesus* (Die Arithmetik oder die Kunst alle Arten von Zahlen zu berechnen, Mit der Feder, & den Jettons, Von dem Pater Jean François [eigentlich Jean-François Charnage, 1586-1668; einer der Lehrer von Descartes] von der Gesellschaft Jesu [Jesuiten]), Rennes, 1653, befindet sich in der Wiener Universitätsbibliothek. (Andere Auflagen von 1655, 1659 und 1661.) Die Anleitungen für das Rechnen mit Jetons sind an mehreren Stellen am Anfang des Buches, und die Jetons sind als kleine Kreise wie der Buchstabe O dargestellt. Der Autor verwendet ebenfalls die Bezeichnung *Arbre*.

6) *L'Arithmétique en sa Perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers, gens de pratique, banquiers, et marchands, contenant une ample & familière explication des ses Principes, tant en nombres entiers qu'en fractions... Et un autre Traité d'arithmétique aux Jettons... Par F. (François) Le Gendre, Arithmétiqueien* (Die Arithmetik in ihrer Vollendung, in die Praxis gesetzt gemäß dem Gebrauch der Finanzleute, Leute der Praxis, Bankiers und Händler, eine umfassende und vertraut gemachte Erklärung ihrer Prinzipien, sowohl in ganzen Zahlen als auch in Brüchen enthaltend... Und eine andere Abhandlung der Arithmetik mit Jettons. Von F. Le Gendre, Arithmetiker) ist der Titel eines anderen Buches im Besitz des Referenten. Es erschien 1718 in Paris. Doch die erste Auflage kam 1657 in Paris heraus und es gab rund 25 Auflagen in verschiedenen Städten, die letzte 1812 in Paris. Die Wiener Universitätsbibliothek besitzt ein Exemplar aus dem Jahr 1727. Im Exemplar des Referenten befindet sich die Abhandlung über die Arithmetik mit Jettons mit Abbildungen am Ende des Buches auf 26 Seiten.

Sie beginnt mit dem Satz: „Diese Arithmetik ist ebenso nützlich wie jene, die man mit der Schreibfeder macht.“ Le Gendre schreibt auch: „Diese Art zu rechnen wird von den Frauen mehr praktiziert als von den Männern...“, offenbar weil sie seltener schreiben und lesen können. (In *Osiris I* (1936), 510-518 erschien eine Abhandlung von Vera Sanford: François le Gendre, Arithmétiqueien.)

Nun die rein lateinischen Anleitungen zum Rechnen mit Jetons:

7) *Ars supputandi tam per calculos quam per notas arithmeticas suis quidem regulis eleganter expressa Judoci Clichtovi Neoportuensis* (Die Kunst des Rechnens sowohl

mit Rechensteinen als auch mit arithmetischen Schriftzeichen, mit seinen Regeln wirklich elegant dargestellt von [dem Theologen] Judocus Chlichtoveus [Josse Clichtove, 1472/73-1543; studierte in Paris und lehrte dort] aus Nieuwpoort [Flandern, Belgien]), ist die zweite von fünf Abhandlungen, die der Humanist, Philosoph und Arzt Ioannes Caesarius Iuliacensis (Johann Kaiser, Kayser? aus Jülich, um 1468-1550; studierte ebenfalls in Paris) in einem Sammelwerk ohne einen Haupttitel und ohne Ort 1507 herausgab. Es enthält keine Abbildungen der *Calculi*. Ein Exemplar des Buches befindet sich in der Österreichischen Nationalbibliothek.

8) *Ars arithmetica Ioannis Martini Silicei: in Theorice & Praxim scissa: omni hominum conditioni perquam utilis & necessaria* (Die arithmetische Kunst des Ioannes Martinus Siliceus, aufgeteilt in Theorie & Praxis, jeder Stellung der Menschen überaus nützlich & unentbehrlich), Paris, 1514. Die Österreichische Nationalbibliothek besitzt ein Exemplar. (Andere Auflagen: 1513, 1518, 1519, 1526, 1529, 1542, 1544.) Bei der 9. Tagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Mai 2005 in Rummelsberg bei Nürnberg hielt Wolfgang Breidert einen Vortrag mit dem Titel *Zur „Arithmetica“ von Siliceus*. Siliceus (Kieselstein), eine Latinisierung seines spanischen Namens Guijano oder Gujaro, geboren 1477, 1485 oder 1486 und gestorben 1557, studierte in Sevilla und an der Pariser Universität. Er war Professor an der Universität von Salamanca und wurde, nachdem er sechs Jahre Hauslehrer des Prinzen Philipp II., des zukünftigen Königs von Spanien, gewesen war, 1541 Bischof von Cartagena, 1546 Erzbischof von Toledo und 1555 Kardinal.

In der *Praxis* der Arithmetik behandelte er im *Tractatus secundus* auf 18 Seiten mit Abbildungen, auf denen die *nummi* (Münzen) übereinander liegen, die Rechnung auf den Linien, und zwar *numeratio*, *additio*, *subtractio*, *multiplicatio* und *divisio*. Das Tätigkeitswort ist *ponere*.

9) *R. P. (Reverendissimi Patris) Claudii Francisci Milliet Dechales Camberiensis e Societate Jesu Cursus seu Mundus Mathematicus* (Mathematikkurs oder die mathematische Welt des hochwürdigen Paters Claudius Franciscus [Claude François] Milliet Dechales [1621-1678] aus Chambéry von der Gesellschaft Jesu), Lyon 1690, befindet sich in der Wiener Universitätsbibliothek. „*Arithmeticae Liber Quartus*“, das vierte Buch der Arithmetik im ersten Band des großformatigen Buches hat den Titel „*Arithmetica calculatoria, et divinatoria*“ (Jeton- und Rate-Arithmetik) und beginnt mit den Worten „*Calculatoria Arithmetica differt à vulgari, quòd calculis, aut metallicis nummis pro characteribus utatur...*“ (Die Jeton-Arithmetik unterscheidet sich von der gewöhnlichen dadurch, dass Rechensteine/Jetons oder vielmehr Metallmünzen als Zahlzeichen verwendet werden...) Das *Spacium* von Adam Ries, in welchem das Fünffache der Linie liegt, heißt hier *intervallum*. *Linea* und *intervallum* zusammen werden *sedes* (Sitz, Rang) genannt. Dechales gibt aber auch die Methode an, den Jeton für 5 und die restlichen Jetons einer Zehnerpotenz *nebeneinander, aber mit einem Abstand*, anzuordnen. Auf diese Weise macht er auch alle Rechenbeispiele.

Ich möchte noch ein spanisches Buch über das Rechnen mit Rechenpfennigen behandeln, und zwar

10) *Arismetica, Pratica, y Especulativa, del Bachiller Iuan Perez de Moya. Agora nvevamente corregida, y añadidas por el mismo autor muchas cosas...* (Praktische und theoretische Arithmetik, von dem Baccalaureus Juan Perez de Moya [1513?-1596]. Jetzt neu korrigiert und vom selben Autor viele Sachen hinzugefügt...), Madrid, 1598, ebenfalls in der Österreichischen Nationalbibliothek.

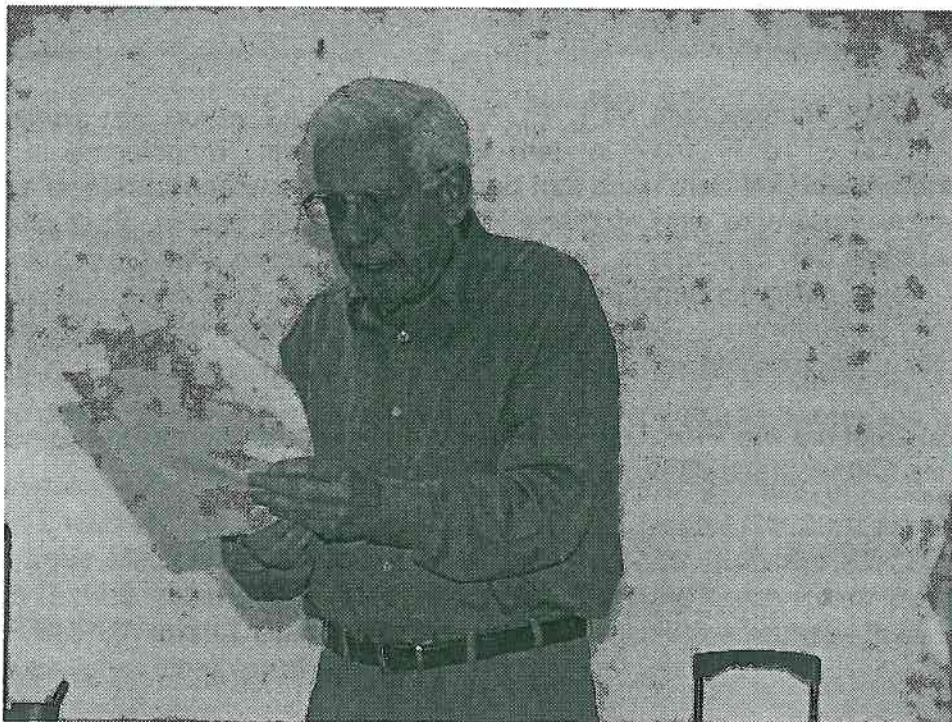
Capitulo XIII. Trata las reglas, que dizen calculatorias. (Kapitel XIII. Behandelt die Regeln, die Rechenpfennigregeln genannt werden.) Es beginnt mit den Worten: „Die



Methode, mit *calculos* oder *contadores* zu rechnen, ist auf zwei Arten. Die erste, Linien machend und in der ersten von unten eine *piedra* (einen Stein) oder *contador* legend um 1 und 2 bis 4 zu bezeichnen, und um 5 zu bezeichnen, lege 1 in den Zwischenraum, den diese erste Linie oben hat bis sie die zweite erreicht, derart, dass man in der ersten Linie mit ihrem Zwischenraum [die Zahlen] von 1 bis 9 legen kann." Dann folgt das Zahlenbeispiel 7916 mit einer Zeichnung. „Die zweite Methode zu rechnen macht man ohne Linien, aber an ihre Stelle legt man *contadores* auf die Weise, die in der Figur erscheint.“ Die Zeichnung zeigt den *französischen Zählbaum*. Es werden *Dezena de Millar* (Zehntausend), *Millar* (Tausend), *Centena* (Hundert), *Dezena* (Zehn) und *Unidad* (Einheit) jeweils durch einen Kreis angezeigt und die Rechenpfennige durch kleinere Kreise. Die Zahl 8002 ist aufgelegt. „Und so kann man andere Zahlen von kleinerer oder größerer Quantität legen und nennen.“ Dann werden Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren gezeigt, doch über das Dividieren steht nur: „Das Partir (Dividieren) des Gesagten kann der Wissbegierige folgern und durchführen, wie es ihm am besten erscheint.“

Die frühesten bekannten französischen *Jetons* stammen aus der Zeit um 1250. Die letzten kamen nach der französischen Revolution heraus. Ich besitze neben anderen zwei *Jetons* mit dem Kopf von König Ludwig XVI. (geboren 1754, König seit 1774) und der Umschrift „LOUIS XVI ROI DE FRANC(E)“ auf der Vorderseite (Avers), die auf der Rückseite (Revers) die Umschrift „SOL REGNI ABIIT“ (die Sonne des Königreichs ist untergegangen), eine drapierte Aschurne mit der Aufschrift LOUIS XVI, auf dem Boden liegend links eine umgestürzte Krone und rechts ein Zepter und unten die Inschrift „D 21 IAN 1793“ (*defunctus*, gestorben, oder *decapitatus*, enthauptet, am 21. Januar 1793) zeigen. Die *Jetons* sind ein Sammelobjekt der Numismatiker und es gibt viele Nachschlagwerke mit Abbildungen über sie.

LITERATUR: Barnard Francis Pierrepont, *The Casting-counter and the Counting-board. A Chapter in the History of Numismatic and Early Arithmetic*, 1916 (Nachdruck 1981), Schärliq Alain, *Compter avec des Jetons*, 2003.



## STAFFEL – und SPROSSENRADMASCHINEN

Gerhard Lindbichler, Wien, Mai 2006

Im Gegensatz zu einfachen Rechenhilfen hat eine mechanische Rechenmaschine einen Mechanismus aus Zahnrädern, Rasten, Federn, Hebeln und anderen Bauteilen. Nur wenn der *Zehnerübertrag* während des Rechenvorgangs *automatisch* durchgeführt wird, spricht man von einer *Rechenmaschine*, andernfalls von einem *Recheng Gerät*.

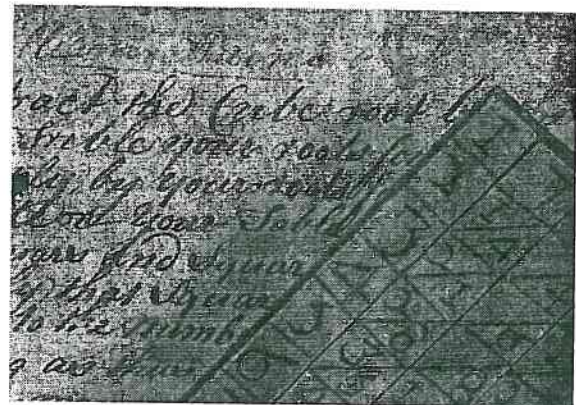
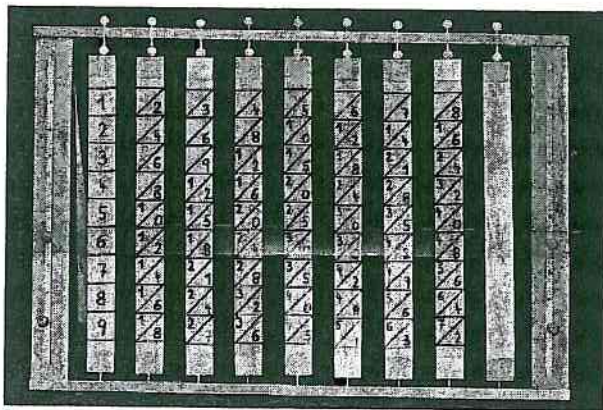
Als Beispiele für RECHENGERÄTE werden kurz besprochen und vorgeführt: *Kugeladditionsgerät*, *Multiplikationsgerät nach Napier* und ein *Addiator Produx*.

*Wilhelm Schickard* (1592 – 1635) und *Blaise Pascal* (1623 – 1662) bauten die ersten RECHENMASCHINEN, die allerdings nur Addieren und Subtrahieren konnten.

*Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1716) entwarf mit *Staffelwalzen – und Sprossenradmaschinen* die ersten „*Vierspeziesmaschinen*“.

Als Beispiele für RECHENMASCHINEN werden ausführlich besprochen und vorgeführt: *CURTA*, *ORIGINAL ODHNER*, *BRUNSVIGA* und *DOPPELBRUNSVIGA*

### NAPIER – MULTIPLIKATIONSGERÄT



Das für das HDMA nachgebaute MULTPLIKATIONSGERÄT wurde von *John Napier of Merchiston* (1550 – 1617) 1617 in dem kleinen Büchlein *Rabdologiae* in *Edinburgh* erstmalig veröffentlicht: Mit dem nach ihm benannten *Napier-Rechenstäben* erfand er für breitere Bevölkerungskreise eine einfache Hilfe für die Multiplikation. Statt *Multiplizieren*, also ohne Kenntnis des *Einmaleins*, musste man nur *Addieren*. Das Grundprinzip basiert auf der aus Indien stammenden *Gelosia – Methode*. 1614 publizierte Napier das erste Tafelwerk mit Logarithmen. Dank dieser Veröffentlichung wurden Logarithmen als wissenschaftliche Rechenhilfe sehr schnell bekannt.

Das linke Foto zeigt die von Prof. Otto Eisenbock nachgebaute Multiplikationsmaschine, das rechte eine Originaldarstellung mit der Handschrift von *J. Napier*.

Beispiel:  $345 \times 7 = 2415$

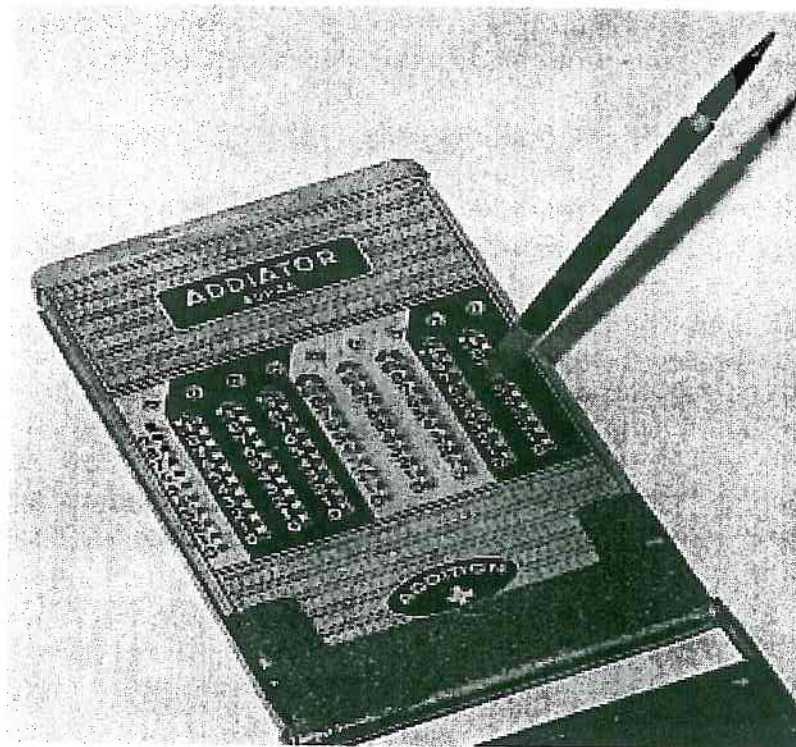
$$\begin{array}{r} 2415 \\ 33 \end{array}$$

2/1    2/8    3/5    2415



## ZAHLENSCHIEBER

ADDIATOR PRODUX (1920), ADDIATOR SUPRA (1930), ADDIATOR DUPLEX (1950)



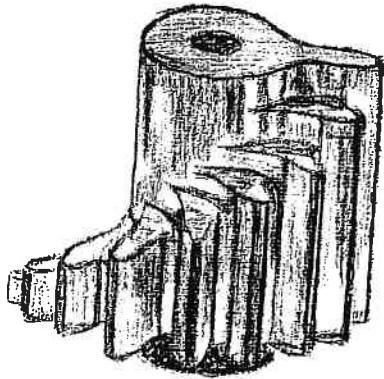
Die Urtypen der Zahlenschieber zählen zu den ältesten Rechenmaschinen. Um 1660 erfand der französische Architekt und Naturforscher **Claude Perrault** eine einfache Addiermaschine, die Zahlenwerte durch das Verschieben vertikal angeordneter Zahnstangen addierte. Aufwändiger war die Konstruktion des Mathematikers **Christian-Ludwig Gersten** von 1735. Während **Perraults** und **Gerstens** Addierer den Zehnerübertrag auf einfache Weise von selbst ausführen, besitzen die eigentlichen Zahlenschieber keinen automatischen Zehnerübertrag. Man bewegt bei ihnen einfach Schieber, die entweder selbst Ziffern tragen oder unter einer bezifferten Schlitzmaske laufen. Der jeweils eingestellte Zahlenwert ist sofort in Schaulöchern ablesbar. Der Zehnerübertrag muss jedoch mit der Hand ausgeführt werden. Deshalb verfügt eine große Anzahl von Geräten über primitive oder verfeinerte Hilfseinrichtungen, die den manuellen Zehnerübertrag erleichtern.

Den ersten wirklichen Zahlenschieber baute 1720 der Franzose **Cace**. Für den lästigen Zehnerübertrag entwarf der Russe **Kummer** 1847 eine wirkungsvolle Hilfseinrichtung, die bis 1920 immer wieder von anderen Erfindern aufgegriffen wurde. Es handelt sich dabei um den so genannten **Haken-Zehnerübertrag**. Dieser ist eine gebogene Verlängerung des Einstellschlitzes neben der Position 9, in die man mit dem Einstellstift fährt, woraufhin die Zahnstange der nächsthöheren Dezimalstelle um eine Position weitergerückt wird.

Ab 1890 wurden weltweit eine große Anzahl von Zahlenschiebern verschiedener Firmen erzeugt. 1912 kam mit dem **TRICK – ADDIATOR** von **Christel Hamann** ein Gerät auf den Markt, das neue Maßstäbe setzte. Der **TRICK** enthielt alle sinnvollen Details seiner Vorgänger und darüber hinaus eine zentrale Löschvorrichtung durch einen Zugbügel (siehe **ADDIATOR SUPRA** und **ADDIATOR DUPLEX**). Zahlenschieber wurden in vielen Modellen bis in die 70er Jahre hinein produziert.

## STAFFELWALZE

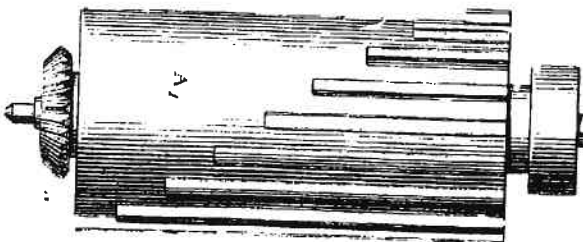
Das „Herz“ einer Rechenmaschine für die vier Grundrechenarten (Spezies) sind Darstellungselemente für die Zahlen 0 bis 9. Sie repräsentieren mechanisch den Wert der eingestellten Ziffer und übertragen ihn in das Resultatwerk. Sie müssen so konstruiert sein, daß jede Ziffer von 0 bis 9 Übertragungssicher mechanisch dargestellt werden kann.



Staffelwalze von Leibniz, um 1700.

Gottfried Wilhelm Leibniz hatte als erster zwei prinzipielle Ideen zur mechanischen Zahlendarstellung. Die eine, nämlich die *Staffelwalze*, verwendete er ab 1673 in seinen Rechenmaschinen.

Eine Staffelwalze ist ein Zylinder mit einer Anordnung von Zahnrippen gestaffelter Länge. Leibniz nannte sie anschaulich „Wendeltreppe“. Die längste Rippe repräsentiert die Ziffer 1. Die längste und die



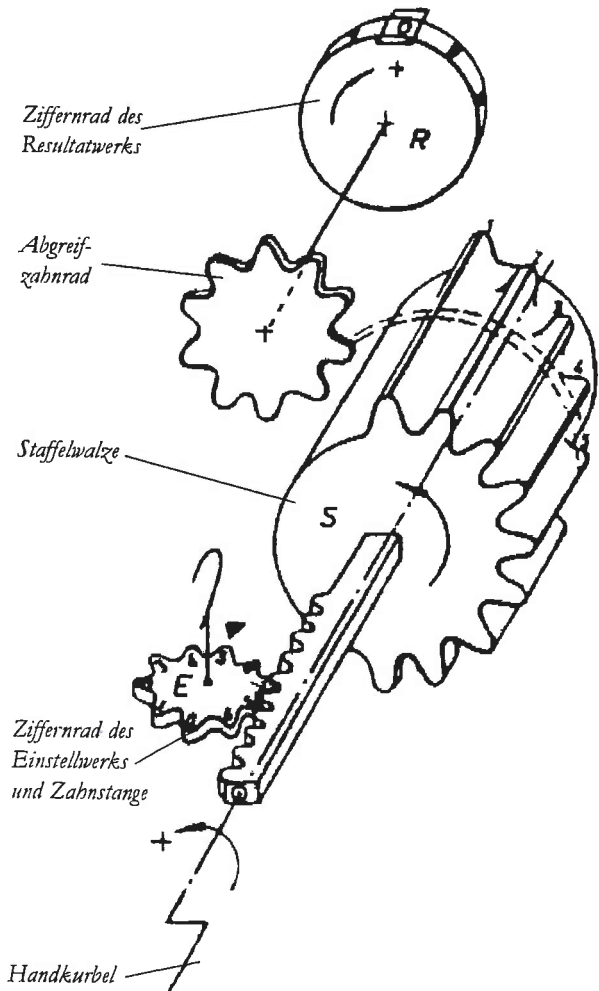
Industriell gefertigte Staffelwalze, 1879.

zweitlängste Rippe stellen die Ziffer 2 dar, alle neun Rippen die Ziffer 9.

Und so funktioniert es:

Das Ziffernrad des Einstellwerks wird von Hand eingestellt. Dabei verschiebt es über eine Zahnstange die Staffelwalze in horizontaler Richtung und positioniert sie so, daß das Abgreifzahnrad des Resultatwerks die dem eingestellten Ziffernwert entsprechende Anzahl an Zahnrippen abgreift.

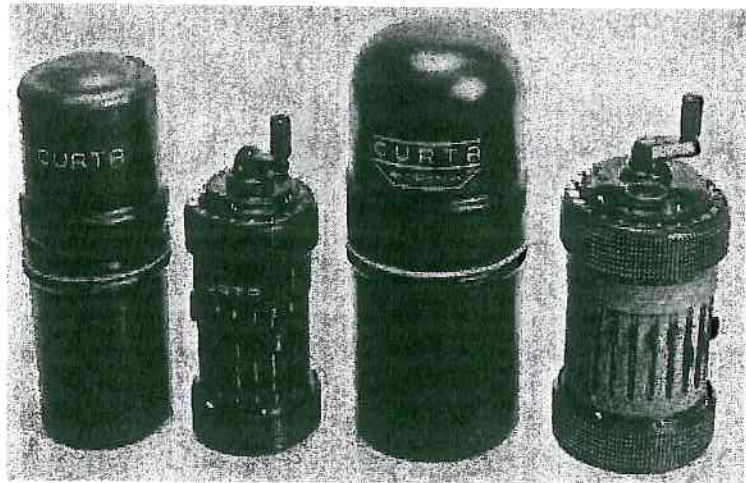
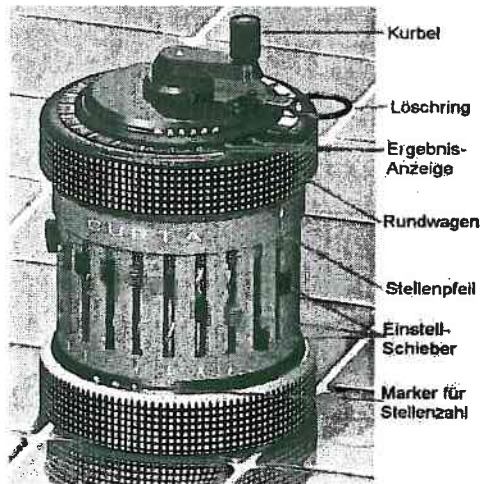
Kann das Abgreifzahnrad über 5 Rippen gleiten, wird das Ziffernrad des Resultatwerks um 5 Zähne weiterbewegt; greift es aber schon nach 3 Rippen ins Leere, so werden nur 3 Zähne weitergeschaltet.





## CURTA

Die Geschichte der **CURTA** ist die Geschichte von **CURT HERZSTARK** (1902 -1988)



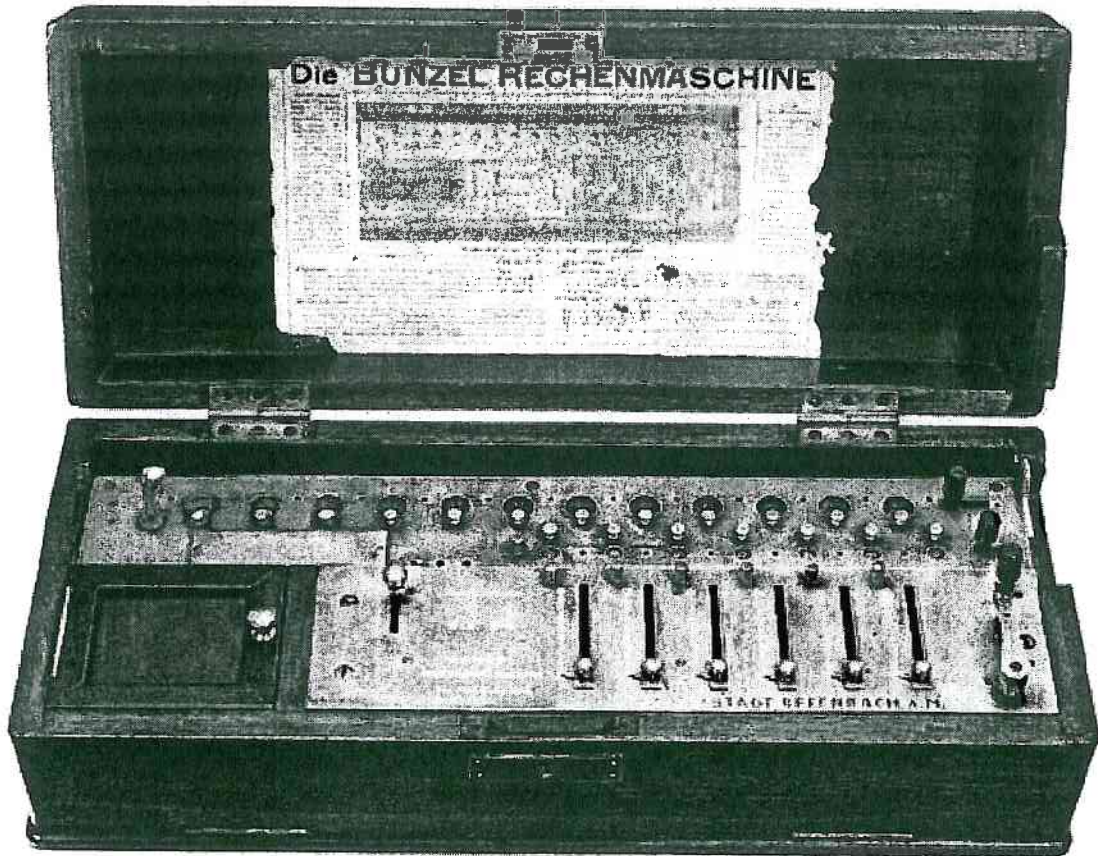
**C. H.** war der Sohn des Wiener Rechenmaschinen - Fabrikanten **Samuel Jacob Herzstark**.

Auf Reisen durch ganz Europa verkaufte C. H. die Maschinen seines Vaters, die als Staffelwalzenmaschinen nach dem Prinzip von **Charles Xavier Thomas** (1785 – 1870) gebaut wurden. Überall vernahm er dabei den Kundenwunsch nach einer kleinen Taschenrechenmaschine. 1937 führten seine Überlegungen zum Patent einer „Komplementären Staffelwalze“. Ein Jahr später gab es bereits ein erstes primitives, aber funktionsfähiges Modell. Im gleichen Jahr wurde C. H. von den Nationalsozialisten verhaftet und ins KZ *Buchenwald* gebracht. Der SS war seine Erfindung bekannt und man wollte sie dem „Führer“ als Siegesgeschenk überreichen. So erhielt C. H. die Gelegenheit, seine Entwicklungen im geheimen *Gustloff – Werk* fortzusetzen. 1944 waren die Pläne zu seiner „Lilliput“ genannten Maschine in der endgültigen Form fertig gestellt. Am 11. April 1946 befreiten amerikanische Soldaten das KZ *Buchenwald*. Weltweit hatten viele Firmen starkes Interesse die CURTA, wie sie nun hieß, zu produzieren. Unter den Interessenten war auch **Fürst Josef der II von Liechtenstein**. Er wollte die Industrie in seinem Lande mit neuen Produkten aufbauen. Nach einer Einladung ins *Palais Liechtenstein* in Wien wurde die *Cortina AG* gegründet und C. H. zum technischen Direktor bestellt. Die CURTA war kleiner, schneller, billiger und leiser als alle anderen Vierspeziesmaschinen zuvor. Sie konnte sich am Anfang sogar gegen die ersten elektronischen Tischrechner behaupten, die noch sehr groß und teuer waren. Als aber die ersten elektronischen Taschenrechner preiswert auf dem Markt erschienen, war das auch 1970 das Ende für die CURTA. Bis zu diesem Zeitpunkt wurden etwa 140 000 Maschinen gebaut und zwar in zwei Ausführungen:

Modell	Jahr	Einstellwerk	Umdrehungszähler	Resultatswerk	Stückzahl
I	ab 1947	8 stellig	6 stellig	11 stellig	80000
II	ab 1954	11 stellig	8 stellig	15 stellig	60000

Die im HdMa befindliche Maschine ist vom Typ I und leicht beschädigt.

## BUNZEL DELTON NO 5



Die Rechenmaschine **BUNZEL DELTON No 5** ist eine seltene *Staffelwalzenmaschine*, die vom *Bunzel-Delton-Werk*, Fabrik automatisierter Schreib- und Rechenmaschinen, Wien X, Favoritenstraße 194, zwischen 1908 – 1915 gebaut wurde. 6 x 7 x 12, Handbetrieb, Schiebereinstellung, ohne Zehnerübertrag im Zählwerk, im anklappbaren Holzkasten mit abnehmbarem Deckel (48 cm x 19,8 cm x 15,5 cm). Bei dieser Maschine war es möglich von *Addition-Multiplikation* auf *Subtraktion-Division* (und umgekehrt) umzuschalten. Der Designer der Maschine war **Hugo Bunzel**, ein Lehrer für Schönschreibkunst und ehemaliger Maler aus Prag. 1915 wurde die Produktion mit dem Tod des Fabrikeigentümers eingestellt. Die Maschine wurde am 25. April 2005 von Herrn **Hermann Moser**, 1020 Wien, dem HdMa geschenkt. Sie kommt der von **C.X.Thomas** (s.u.) entwickelten Maschine in Form und Funktion am nächsten.

Eine Staffelwalze ist ein Zylinder, der auf  $\frac{1}{3}$  seines Umfanges 9 Zähne mit gestaffelter Länge hat, so dass bei einer Umdrehung ein verschiebbares Zahnrad im Ergebniswerk je nach seiner Stellung von einstellbar vielen Zähnen weitergestellt wird. Dieses Prinzip wurde 1672 von **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) entwickelt. Seine Maschine arbeitete aber nicht fehlerfrei. **Charles Xavier Thomas** (1785-1870) aus **Kolmar** entwickelte um 1820 das *Arithmometer*, die erste serienmäßig gefertigte Rechenmaschine überhaupt. Staffelwalzenmaschinen werden deshalb auch *Thomas-Maschinen* oder in Deutschland auch *Glashütten-Maschinen* genannt.

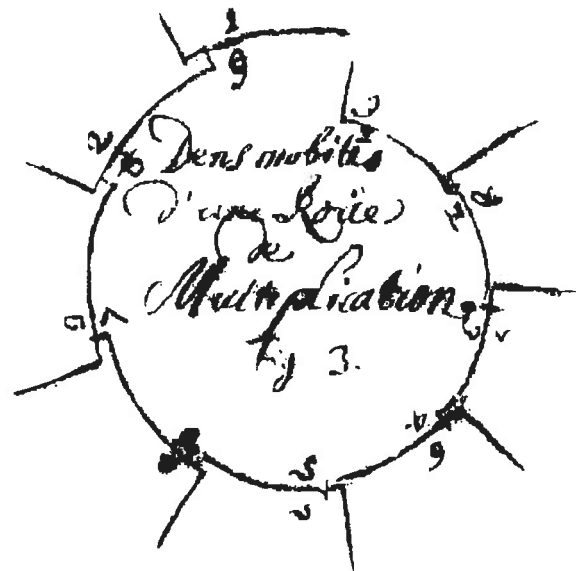
Ausmaße: 41 cm x 20 cm x 16 cm, Masse: ca. 5 kg, Seriennummer: 7409; Inschrift auf der Maschine: Factory 17 Graben Vienna.



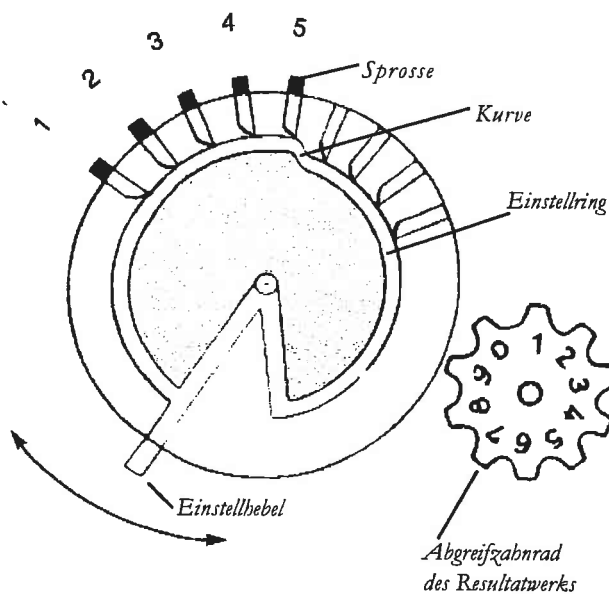
## SPROSSENRAD

Neben der Staffelwalze erfand *Leibniz* auch das *Sprossenrad* zur mechanischen Zahlendarstellung. Das Sprossenrad ist ein Zahnrad, bei dem neun bewegliche Zähne ein- und ausgefahren werden können. So kann der Wert einer eingestellten Ziffer mechanisch dargestellt und in das Resultatwerk übertragen werden.

Leibniz hat das Sprossenrad in einem undatierten Manuskript entworfen, bei seinen Rechenmaschinen aber wohl nicht verwendet.



*Sprossenrad, gezeichnet von G. W. Leibniz.*

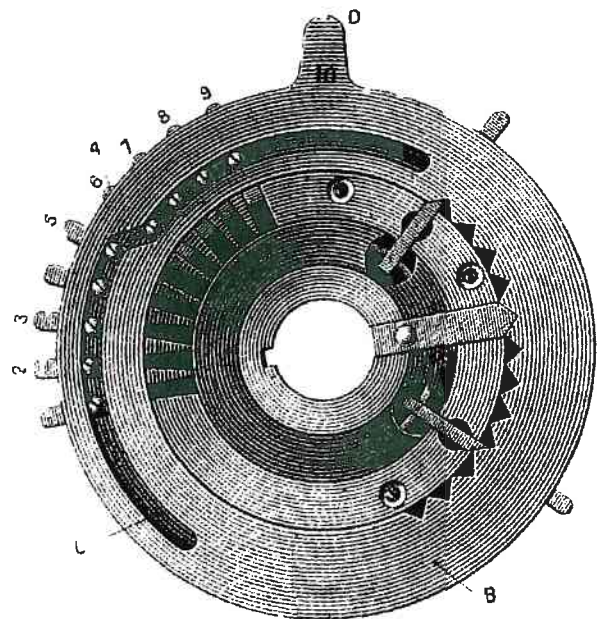


Wie das Staffelwalzen-Prinzip wurde das Sprossenrad-Prinzip im 19. und 20. Jahrhundert zu einem wichtigen Übertragungsprinzip für mechanische Rechenmaschinen. Das nebenstehende Modell ist den frühen industriellen Varianten des Sprossenrads aus der Zeit um 1875 nachgebildet.

*Und so funktioniert es:*

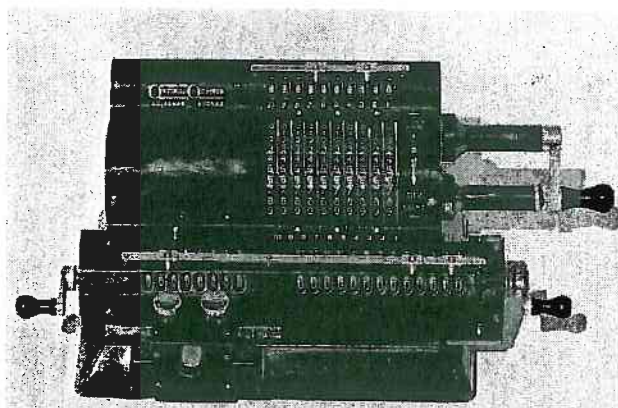
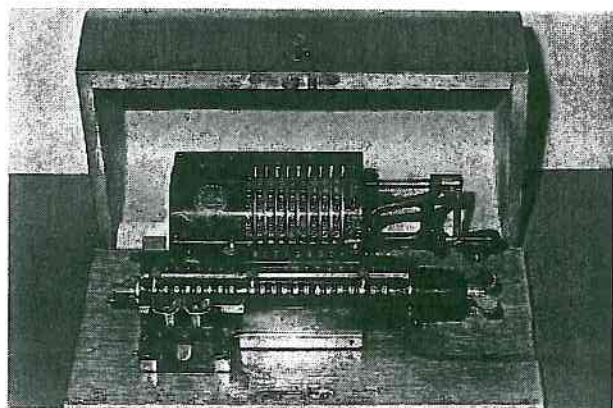
*Der Einstellring des Sprossenrads bewegt eine Kurve, mit der bis zu neun Sprossen nacheinander nach außen gedrückt werden.*

*Wird das Sprossenrad in Bewegung gesetzt, so rücken die herausgedrückten Sprossen das Abgreifzahnrad des Resultatwerkes um die entsprechende Zähnezahl weiter.*



*Industriell gefertigtes Sprossenrad, um 1890.*

## ORIGINAL ODHNER



Zwei Erfinder prägen die Entwicklung der industriell gefertigten **Sprossenradmaschine**:

Der Amerikaner **Frank S. BALDWIN** (1838 – 1925) konstruierte ab 1870 in *St. Louis* eine Sprossenradmaschine, für die er 1875 ein amerikanisches Patent erhielt.

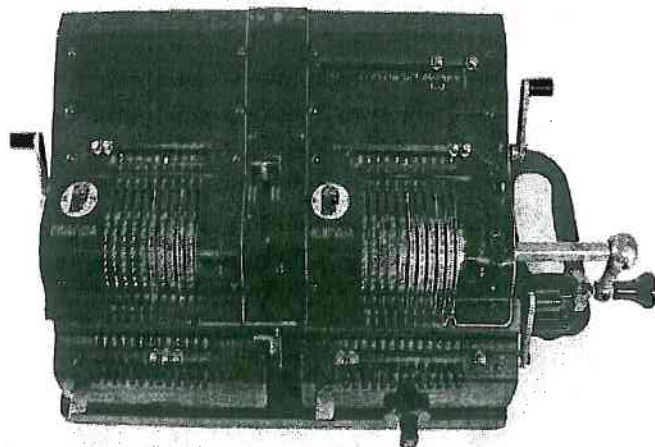
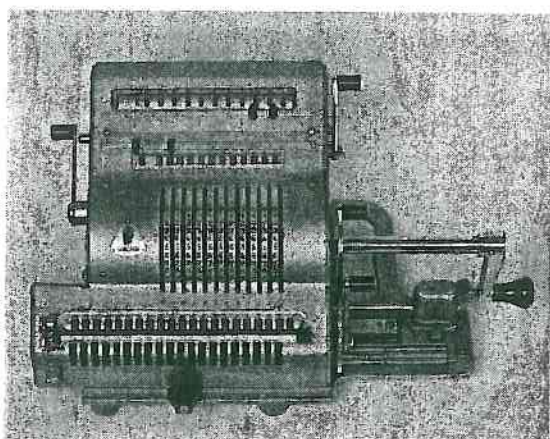
Der Schwede **Willgodt T. ODHNER** (1845 – 1905), Ingenieur in den *St. Petersburger Werken* von **Ludwig Nobel**, stellte 1874 das erste Exemplar einer Sprossenradmaschine fertig. Ein Patent dafür erlangte er jedoch erst 1878. Bis 1914 wurden in *St. Petersburg* 30.000 Exemplare hergestellt. Eine geschickte Lizenzvergabe sorgte dafür, dass *Odhner Maschinen* in Europa (erzeugt in *Göteborg*) und Amerika bis 1942 als **ORIGINAL - ODHNER** vertrieben wurden.

Der junge schwedische Ingenieur **Willgodt Theophil Odhner** (1845 – 1905) arbeitete zu Beginn seines langjährigen Aufenthalts in Russland auf dem Gebiet der Landvermessung. Er kannte das *Arithmometer* des Franzosen **Charles Xavier Thomas**, das unhandlich, sehr teuer und selten vorhanden war. *Odhner* beschloss eine eigene Rechenmaschine zu konstruieren, die handlich und preiswert sein sollte, geeignet für den täglichen Rechenbedarf. Durch Ausbildung und Beruf besaß *Odhner* beste Voraussetzungen für das Gelingen des Projekts. Am 10. August 1845 im Norden der schwedischen Provinz *Värmland* geboren, wurde er mit 12 Jahren nach Stockholm geschickt, um eine kaufmännische Lehre zu beginnen. *Odhner* fand jedoch mehr Gefallen an der Technik und wechselte nach drei Jahren in die Werkstatt des Instrumentenbauers *Lyth*. Von 1864 bis 1866 absolvierte er am *Königlichen Institut für Technik* ein Ingenieurstudium. Anschließend ging *Odhner* nach Russland, wo er zunächst bei der Landaufteilung mitwirkte, bevor er die von ihm angestrebte Anstellung bei *Ludvig Nobel*, Bruder des Dynamiterfinders *Alfred Nobel*, in *St. Petersburg* erhielt. Im russischen Werk von *Ludvig Nobel* wurden u. a. Gewehre hergestellt und somit konnte *Odhner* die industriellen Anforderungen einer Massenfertigung kennen lernen. *Ludvig Nobel* unterstützte sehr das Projekt seines jungen Landsmannes. Für die Konstruktion seiner Rechenmaschine orientierte sich *Odhner* an einem Übertragungsprinzip, das schon vor ihm einige Erfinder benutzt hatten, das **Sprossenrad**.

Es ist uns nicht bekannt, welche Vorbilder *Odhner* wirklich gekannt hat. Wahrscheinlich orientierte er sich an dem Patent des Engländers *Wertheimer*, das eine Zeichnung enthält, die dem *Odhner-Sprossenrad* auffallend ähnelt. Bereits 1876 waren einige Versuchsmaschinen aus *Odhners* Werkstatt vorhanden. Ab 1878 erlangte *Odhner* erste Patente (in Deutschland: DRP 7393). In der Folgezeit verbesserte *Odhner* sein *Arithmometer* im Sinne einer Massenproduktion, die 1886 endgültig anlaufen konnte (durch Lizenzvergaben in ganz Europa). *W. T. Odhner* starb am 15. September 1905 in *St. Petersburg*. Sein Sohn *Alexander* und sein Schwiegersohn *Karl Siewert* übernahmen die Firmenführung. Nach der russischen Revolution (1917) verlegten sie den Betrieb nach *Göteborg* in Schweden. Wir wissen, dass bis 1914 in *St. Petersburg* 30 000 Maschinen erzeugt wurden (Maschine im HdMa hat die No.:12 693, also wurde diese vor 1914 gebaut.)



## BRUNSVIGA – DOPPELBRUNSVIGA



Die Vierspezies - Rechenmaschine **Brunsviga, Modell Nova 13**, ist eine manuelle Zehntastatur Sprossenradmaschine der Firma *Brunsviga* in *Braunschweig* (BRD). Die Braunschweiger Nähmaschinenfirma *Grimme, Natalis&Co.* begann 1892 mit der Herstellung einer Sprossenradmaschine nach der Lizenz von *Odhner*. Mit *Franz Trinks* als Produktionsleiter und innovativem Kopf der Firma begann ein steiler Aufschwung. 1912 hatte man bereits mehr als 20.000 Maschinen in 15 Modellen abgesetzt. Die *Brunsviga Nova 13* wurde ab 1928 gebaut. *Brunsviga* Rechenmaschinen, teils elektrisch betrieben, wurden bis 1969 hergestellt

Die Doppelrechenmaschine **Brunsviga D 13 Z** (um 1935) ist eine wissenschaftliche Spezialrechenmaschine (Vierspezies-Sprossenradmaschine) für geodätische Zwecke, nach dem Motto „*doppelt rechnet besser*“. Sie besteht aus zwei gekoppelten Maschinen des *Modells 13 Z*. Die beiden Teil-Maschinen können parallel oder einzeln bedient werden. Diese Maschine verfügt zudem über eine Zusatzeinrichtung zum Einstellen konstanter Werte. Stellenzahl: 10 x 13 x 8.

Ein breites Anwendungsgebiet mechanischer Rechenmaschinen befand sich im Vermessungswesen („*trigonometrische Landvermessung*“), wobei bei der Festlegung und Berechnung von Grundstücken eine Fülle von Daten verarbeitet werden musste. Nachdem die mechanischen „*Vierspezies-Rechenmaschinen*“ eine sichere Funktionsweise gewonnen hatten, lieferten vor allem Vermessungstechniker Ideen für spezielle Zusatzeinrichtungen. Schon um 1914 wurden die ersten Maschinen mit einem zweiten Resultats- oder Umdrehungszählwerk ausgestattet. Die Zwillingmaschine der österreichischen Firma **S. Jakob Herzstark** (siehe auch *CURTA*) von 1913 dürfte die erste Maschine dieser Art gewesen sein. Sie enthielt zwei komplette Staffelwalzengetriebe und zwei Resultatwerke. Ab 1920 kamen auch die ersten Doppelsprossenradmaschinen auf den Markt. Diese enthielten den vollständigen Übertragungsmechanismus zweimal. Die bekannteste Doppelmaschine wurde von der Firma **Brunsviga** ab 1925 gebaut. Vom Modell *D 13 Z*, ab 1930 erhältlich, wurden bis 1947 über 3000 Exemplare hergestellt.

Die im HdMa befindliche *D 13Z* stammt aus der Sammlung *Johann Orth* (Bezirkmuseum *Floridsdorf, Wien*) und wurde im Februar 2005 von Herrn *HR DI Helmut Meckel* dem HdMa übergeben.

Ausmaße: 41,2 cm x 21,5 cm x 16,5 cm; Masse: 15 kg; Seriennummer 172 006

Fotos: Daniele Lindbichler, Wien

## Anspruchsvolle mathematische Probleme in einem byzantinischen Manuskript von 1436<sup>1</sup>

Stefan Deschauer

Der *Codex Vindobonensis phil. Gr. 65*, der in der *Österreichischen Nationalbibliothek* aufbewahrt wird, ist ein mathematisches Manuskript, das von zwei anonymen Autoren verfasst wurde (hier *A* und *B* genannt). Es enthält 163 Blätter mit 36 Zeilen pro Seite.

Bei dem kürzeren Text von *B* handelt es sich um eine Sammlung arithmetischer Aufgaben, die wahrscheinlich in Saloniki um das Jahr 1430 – bereits unter türkischer Herrschaft – geschrieben wurde. Es werden das positionelle Dezimalsystem (mit einem Punkt für 0) und – worauf besonders hinzuweisen ist – auch Dezimalbrüche verwendet. Der Text wurde im Jahre 1963 von HUNGER/VOGEL herausgegeben, übersetzt und kommentiert.<sup>2</sup>

Auf der anderen Seite gehen 149 Blätter auf den Schreiber *A* zurück. Er verfasst zunächst ein methodisches Rechenbuch (von ihm selbst „1. Buch“ genannt), in dem dem dezimalen Stellenwertsystem (mit einem besonderen Symbol für 0) eine besondere Rolle zukommt<sup>3</sup>. Aber zusätzlich – in seinem „2. Buch“ – bietet er Methoden zur näherungsweise Berechnung von Wurzeln zweiten bis vierten Grades, **Algebra** und Geometrie.<sup>4</sup> Bis heute ist kein anderer algebraischer Text aus der byzantinischen Mathematik bekannt!

Zweifellos ist die algebraische Methode von *A* der damaligen italienischen entlehnt: Es handelt sich um eine reine „Wortalgebra“, ohne jede Symbolik. Ganz offensichtlich hat *A* die italienischen Fachausdrücke weitgehend gräzisiert: Aus *numero* (Konstante), *cosa* (Ding, unser  $x$ ), *censo* (Vermögen, Potenz, unser  $x^2$ ), *cubo* (Kubus, unser  $x^3$ ) und *quadro* (Quadrat, unser  $x^4$ ) wurden ἀριθμός (*arithmós*), πρᾶγμα (*prāgma*), τζένσον (*tzénson*), κούβον (*kúbon*), und κάδρον (*kádrón*) oder τετράγωνον (*tetrágonon*).<sup>5</sup>

Im folgenden Beitrag möchte ich eine Reihe von anspruchsvollen Problemen aus Zahlentheorie und Algebra vorstellen, die ich im „2. Buch“ von *A* gefunden habe.

Es handelt sich um folgende Aufgaben, deren Originallösung mit modernen Lösungsmethoden verglichen werden sollen.

<sup>1</sup> Mein Beitrag bezieht sich also im Rahmen des Tagungsthemas auf das Medium „Handschrift“. Einerseits kann man ohne Übertreibung davon sprechen, dass dieser Codex einen Höhepunkt der späbyzantinischen Mathematik darstellt, andererseits ist wohl auszuschließen, dass er so kurz vor dem Zusammenbruch Konstantinopels noch einen nennenswerten Einfluss auf die mathematische Bildung der Byzantiner ausgeübt hat. Als Medium „Buch“ hätte er noch Verbreitung im Westen finden können. Als Mathematikhistoriker dürfen wir dennoch froh sein, dass sich diese wichtige Handschrift bis auf den heutigen Tag erhalten hat.

<sup>2</sup> HUNGER, HERBERT / VOGEL, KURT: Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts – 100 Aufgaben aus dem *Codex Vindobonensis phil. Gr. 65*. Text, Übersetzung und Kommentar. Denkschriften der phil.-hist. Kl. der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 78. Band, 2. Abh. Wien 1963

<sup>3</sup> Aus einer Multiplikationsaufgabe (Berechnung der Tage nach Christi Geburt) geht das Abfassungsjahr 1436 hervor.

<sup>4</sup> Inzwischen ist der Text von *A* vollständig analysiert, außerdem existiert eine (noch unveröffentlichte) Transkription des „1. Buchs“.

<sup>5</sup> Dabei gehörten τζένσον, κούβον und κάδρον nicht zum griechischen Vokabular.



### Kap. 140 (Ein Problem aus der Zahlentheorie)

Welches ist der (nicht notwendig ganzzahlige) Teiler von 13, wenn der Quotient eine gemischte Zahl mit 5 als Ganzzahl und 4 als Zähler sein soll?<sup>6</sup>

Unsere Lösung:

$$13: \frac{a}{b} = 5 + \frac{4}{n}, (a, b) = 1, (4, n) = 1, 4 < n$$

Es folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{13n}{5n+4} \text{ mit } n = 2n'+3, n' \in \mathbb{N}^* \text{ wegen } (a, b) = 1, n > 4$$

und daher

$$\frac{a}{b} = \frac{26n'+39}{10n'+19} \quad (n' \in \mathbb{N}^*).$$

Wenn  $d$  ein gemeinsamer Teiler des ungeraden Zählers und Nenners ist, dann ist  $d$  auch Teiler von  $13(10n'+19) - 5(26n'+39) = 52$ .

Es folgt  $d = 1 \vee d = 13$ .

Im letzteren Fall suchen wir  $n' \geq 1$  so, dass  $10n'+19$  durch 13 teilbar ist.

Wegen  $(13, 10) = 1$  durchläuft der Term  $10n'+19$  zusammen mit  $n'$  ein vollständiges Restsystem modulo 13.

Dabei erzeugt  $n'_0 = 2$  als einziger Wert im Intervall  $1 \leq n' \leq 13$  ein Vielfaches von 13.

Daher ist  $n' = 13\lambda + 2$  ( $\lambda \in \mathbb{N}$ ) die allgemeine Lösung für Vielfache von 13.

Als Ergebnis erhalten wir die beiden folgenden Lösungstypen:

$$13: \frac{26n'+39}{10n'+19} = 5 + \frac{4}{2n'+3} \quad (n' \in \mathbb{N}^*, n' \neq 13\lambda + 2, \lambda \in \mathbb{N}) \text{ und}$$

$$13: \frac{26\lambda+7}{10\lambda+3} = 5 + \frac{4}{26\lambda+7} \quad (\lambda \in \mathbb{N})$$

Der erste Fall wird durch  $a = 13n$ ,  $b = 5n + 4$  charakterisiert, der zweite durch

$$a = n, b = \frac{5n+4}{13}.$$

Der Autor führt – ohne weitere Erklärung – die folgende Rechnung vor:

Sein erster Schritt ist  $13 - 4 = 9$ .

Dann sucht er nach natürlichen  $m$ , für die  $9 + 13m$  durch 5 teilbar ist, und findet  $m = 2$ .

Seine weitere Rechnung ist  $9 + 2 \cdot 13 = 35$ ,  $35 : 5 = 7$ ,  $35 + 4 = 39$ ,  $39 : 13 = 3$ ,  $7 : 3 = 2 \frac{1}{3}$ ,

und er gelangt zu  $13 : 2 \frac{1}{3} = 5 \frac{4}{7}$ . Es handelt sich um unseren 2. Lösungstyp, speziell mit  $\lambda = 0$ .

Ein Vergleich mit unserer Rechnung zeigt:  $13 - 4 + 13m = 13(m+1) - 4 = 13b - 4 = 5n$

mit  $m = 2$ ,  $b = 3$ , also  $a = n = 7$  (d. h.  $n'_0 = 2$ ,  $\lambda = 0$ ).

Verallgemeinerung:

Offenbar war die Primzahleigenschaft von 13 für die obige Herleitung unabdingbar.

Wir ersetzen 13 durch eine Primzahl  $p$ , 5 durch  $k$  und 4 durch  $l$  ( $k, l \in \mathbb{N}$ ).

<sup>6</sup> Das Problem aus diesem Kapitel scheint aus anderen Texten nicht bekannt zu sein.

Jetzt ist die Gleichung  $p : \frac{a}{b} = k + \frac{l}{n}$  mit gegebenen  $p, k, l$  zu untersuchen.

(Der triviale Fall  $l = 0$  führt zu  $\frac{a}{b} = \frac{p}{k}$ , falls  $p \nmid k$ , oder  $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{k}{p}}$ , falls  $p \mid k$ .)

Wir suchen nach  $a, b, n \in \mathbb{N}^*$  mit  $(a, b) = 1, l < n, (l, n) = 1$ .

Dazu betrachten wir die rechte Seite von  $\frac{a}{b} = \frac{pn}{kn+l}$  mit  $(l, n) = 1$ .

Wenn  $d$  ein gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner ist, dann ist  $d$  auch Teiler von  $pn$  und von  $p(kn+l) - kpn = pl$ . Es folgt:  $d \mid (pn, pl) = p$ , d. h.  $d = 1 \vee d = p$

Im letzteren Fall erhalten wir  $\frac{a}{b} = \frac{n}{\frac{kn+l}{p}}$  mit  $p \nmid n$  wegen  $(l, n) = 1$ ,

und es treten die Unterfälle  $p \mid k$  oder  $p \nmid k$  auf:

$p \mid k$  impliziert  $p \mid l$ :  $\frac{a}{b} = \frac{n}{k'n+l'}$  mit  $k' = \frac{k}{p}, l' = \frac{l}{p}$

$p \nmid k$ :

Der Term  $kn+l$  durchläuft zusammen mit  $n$  ein vollständiges Restsystem modulo  $p$ . Daher existiert genau ein  $n_0, 2 \leq n_0 \leq p+1$ , mit  $p \mid kn_0+l$ . Es folgt  $p \mid k(n_0 + \lambda p) + l$  für alle  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $n = n_0 + \lambda p$  das generelle  $n$ , das Vielfache von  $p$  erzeugt:

$$\frac{a}{b} = \frac{n_0 + \lambda p}{\frac{kn_0+l}{p} + k\lambda}$$

Insgesamt ergeben sich die drei folgenden Lösungstypen:

$$a = pn, b = kn+l, \text{ d. h. } p : \frac{pn}{kn+l} = k + \frac{l}{n},$$

falls  $l < n, (l, n) = 1, p \nmid kn+l$

$$a = n, b = \frac{k}{p}n + \frac{l}{p}, \text{ d. h. } p : \frac{n}{k'n+l'} = k'p + \frac{l'p}{n},$$

falls  $k' = \frac{k}{p} (\in \mathbb{N}), l' = \frac{l}{p} (\in \mathbb{N}), l'p < n, (l', n) = 1$

$$a = n, b = \frac{kn+l}{p}, \text{ d. h. } p : \frac{n_0 + \lambda p}{\frac{kn_0+l}{p} + k\lambda} = k + \frac{l}{n_0 + \lambda p},$$

falls  $p \nmid k \wedge p \mid kn_0+l$  ( $2 \leq n_0 \leq p+1$ ),  $l < n_0 + \lambda p$  ( $\lambda \in \mathbb{N}$ ), und  $(l, n_0 + \lambda p) = 1$

In seinen Beispielen betrachtet der Autor nur den letzten Lösungstyp:

$$1) 13 : \frac{a}{b} = 5 + \frac{4}{n} \quad p = 13, k = 5, l = 4, n_0 = 7, \lambda = 0: \quad 13 : 2\frac{1}{3} = 5\frac{4}{7}$$

$$2) 31 : \frac{a}{b} = 7 + \frac{5}{n} \quad p = 31, k = 7, l = 5, n_0 = 17, \lambda = 0: \quad 31 : 4\frac{1}{4} = 7\frac{5}{17}$$

$$3) 53: \frac{a}{b} = 10 + \frac{9}{n} \quad p = 53, k = 10, l = 9, n_0 = 15, \lambda = 0: 53:5 = 10 \frac{9}{15} (!)$$

### Kap. 142 (Spezielle Systeme zweier linearer Gleichungen)

Der Autor gibt hier spezielle Methoden zur Lösung von Zahlenrätseln<sup>7</sup> an, die auf bestimmte Systeme zweier linearer Gleichungen führen. Diese Methoden sind richtig, aber im Text fehlt jede Begründung.

$$1. \quad x = \frac{1}{2}y, \quad y = \frac{2}{3}x + 10$$

$$\text{Autor: } 10: \frac{2}{3} = 15 = y, \quad \frac{1}{2} \cdot 15 = 7 \frac{1}{2} = x$$

Unsere Erklärung: Sei allgemein  $x = ay$ ,  $y = bx + c$  mit  $abc \neq 0$ . Dies führt zu

$$y(1 - ab) = c, \text{ aber es gilt } y = \frac{c}{b} \text{ gemäß der Methode. Daher hat man}$$

$1 - ab = b$ , d. h.  $(a + 1)b = 1$  (notwendige und hinreichende Bedingung).

Dies ist z. B. erfüllt für  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{2}{3}$  und jedes  $c \neq 0$ .

$$2. \quad x = \frac{2}{3}y, \quad y = \frac{3}{4}x + 10$$

$$\text{Autor: } 10: \frac{3}{4} = 13 \frac{1}{3} = x, \quad \frac{2}{3} \cdot 13 \frac{1}{3} = 20 = y$$

Unsere Erklärung:

$$x = ay, \quad y = bx + c \text{ führt zu } x(1 - ab) = ac; \text{ also gilt } x = \frac{c}{b} \text{ genau dann, wenn } ab = \frac{1}{2}.$$

Dies ist z. B. erfüllt für  $a = \frac{2}{3}$ ,  $b = \frac{3}{4}$  und jedes  $c \neq 0$ .

$$3. \quad x = \frac{3}{4}y, \quad y = \frac{4}{5}x + 10$$

$$\text{Autor: } 10: \frac{4}{5} = 12 \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{2} \cdot 12 \frac{2}{4} = 18 \frac{3}{4} = x, \quad 2 \cdot 12 \frac{2}{4} = 25 = y$$

Unsere Erklärung:

$$\text{I. Allg. erhalten wir } y(1 - ab) = c; \text{ daher gilt } y = \frac{2c}{b} \text{ genau dann, wenn } 2(1 - ab) = b,$$

d. h.  $(2a + 1)b = 2$ . Dies ist z. B. erfüllt für  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{4}{5}$  und jedes  $c \neq 0$ .

$$4. \quad x = \frac{4}{5}y, \quad y = \frac{5}{6}x + 10$$

$$\text{Autor: } 10: \frac{5}{6} = 12, \quad 2 \cdot 12 = 24 = x, \quad \frac{4}{5} \cdot 24 = 30 = y$$

Unsere Erklärung:

<sup>7</sup> wahrscheinlich aus islamischer Tradition

I. Allg. erhalten wir  $x(1-ab) = ac$ ; daher gilt  $x = \frac{2c}{b}$  genau dann, wenn  $2(1-ab) = ab$ ,  
 d. h.  $ab = \frac{2}{3}$ . Dies ist z. B. erfüllt für  $a = \frac{4}{5}$ ,  $b = \frac{5}{6}$  und jedes  $c \neq 0$ .

Andererseits betont der Schreiber, dass die obigen Methoden nicht allgemeingültig sind, und er löst in einem anderen Kapitel allgemeine Systeme zweier linearer Gleichungen.

### Kap. 153 (Schiffsreisen)

**Jemand unternahm Schiffsreisen und führte Gulden ( $\phi^8$ ) mit sich.**

Nach der 1. Reise hatte er  $\frac{1}{3}$  des ursprünglichen Betrags hinzugewonnen und noch 1  $\phi$  dazu.

Nach der 2. Reise hatte er  $\frac{1}{3}$  des letzten Betrags hinzugewonnen und noch 2  $\phi$  dazu usw.

Die Anzahl der Schiffsreisen stimmte mit der ursprünglichen Zahl der Gulden überein.  
 Am Ende besaß er 15  $\phi$ .

Wie viele Schiffsreisen hatte er unternommen?

Wie viele Gulden führte er ursprünglich mit sich?<sup>9</sup>

Lösung des Autors:

Er schätzt die Zahl der Reisen: 3 oder 4 (!). Daher ist sein Ansatz  $(3+x)$  Reisen, das bedeutet auch  $(3+x)$   $\phi$  Anfangsbetrag.

Nach der 1. Schifffahrt hat der Schiffsreisende  $\left( (3+x) + \frac{1}{3}(3+x) + 1 \right) \phi = \left( 5 + 1\frac{1}{3}x \right) \phi$ .

Nach der 2. Schifffahrt hat er  $\left( \left( 5 + 1\frac{1}{3}x \right) + \frac{1}{3} \left( 5 + 1\frac{1}{3}x \right) + 2 \right) \phi = \left( 8\frac{2}{3} + 1\frac{7}{9}x \right) \phi$ .

Nach der 3. Schifffahrt hat er  $\left( 14\frac{5}{9} + 2\frac{10}{27}x \right) \phi$ .

Nun schreibt der Autor:

*Nimm, verursacht durch  $x$ , noch eine 4. Schifffahrt an.* (Denn es gilt  $14\frac{5}{9} < 15$ .)

Er fährt mit folgender Rechnung fort:  $\left( \frac{1}{3} \left( 14\frac{5}{9} + 2\frac{10}{27}x \right) + 4 \right) \phi = \left( 8\frac{23}{27} + \frac{64}{81}x \right) \phi$

Die anschließende Multiplikation mit  $x$  ergibt  $8\frac{23}{27}x + \frac{64}{81}x^2$ . Damit linearisiert er das Problem für die verbleibenden  $\phi$ !

<sup>8</sup> Abkürzung der Münzeinheit  $\phi\lambda\upsilon\rho\iota$  (phluri), pl.  $\phi\lambda\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}$  (phluriá) in der Handschrift

<sup>9</sup> Ähnliche Aufgaben sind bei PIERO DELLA FRANCESCA (um 1440), LUCA PACIOLI (1494), ESTIENNE DE LA ROCHE (1520) und MICHAEL STIFEL (1544) zu finden – s. TROPFKE, JOHANNES: Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band I: Arithmetik und Algebra (neu bearb. v. Vogel, Kurt / Reich, Karin / Gericke, Helmuth). Berlin/New York 1980, S. 544).



Danach addiert er  $14\frac{5}{9} + 2\frac{10}{27}x$  (Betrag vor der letzten Schiffsreise) und erhält – die Summe muss gleich 15 sein:  $14\frac{5}{9} + 11\frac{6}{27}x + \frac{64}{81}x^2 = 15$

Schließlich löst er die quadratische Gleichung und gelangt mithilfe einer Näherung für die Quadratwurzel<sup>10</sup> zu  $x = \frac{5}{128}$ .

Resultat: Der Schiffsreisende unternahm  $3\frac{5}{128}$  Fahrten und besaß zu Beginn genauso viele  $\varphi$ .

Verallgemeinerung:

Sei  $a_0$  der Anfangsbetrag und  $a_n$  der Betrag nach der  $n$ -ten Reise.

Wir ersetzen den Bruch  $\frac{1}{3}$  durch  $\frac{1}{k}$  für beliebiges  $k > 0$ .

Es ergibt sich die rekursive Formel  $a_n = \left(1 + \frac{1}{k}\right)a_{n-1} + n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , aus der man die explizite

Formel  $a_n = \left((a_0 + k(1+k))\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n - k(1+k+n)\right)$  herleiten kann.

Die speziellen Werte des Autors waren  $k = 3$ ,  $a_0 = n$ ,  $a_n = 15$ .

Tatsächlich hätte er die folgende Exponentialgleichung lösen müssen:

$$15 = (n+12)\left(\frac{4}{3}\right)^n - 3(n+4) \quad (n \approx 3,046)$$

Sein durch Linearisierung erzieltetes Ergebnis  $n = 3\frac{5}{128} \approx 3,039$  führt näherungsweise zu 14,934 auf der rechten Seite.

## Kap. 157 (Die Spieler)

**3 Männer haben *hyperpyra* (<sup>11</sup>). Einer nach dem anderen verdoppelt das Geld der jeweils anderen Männer. Schließlich hat jeder von ihnen 8  $\parallel$ . Wie viel Geld hatte jeder von ihnen am Anfang?**

Hinweis: Die Summe der  $\parallel$  ist konstant.

1.	2.	3.	
8 $\parallel$	8 $\parallel$	8 $\parallel$	
4 $\parallel$	4 $\parallel$	16 $\parallel$	3.
2 $\parallel$	14 $\parallel$	8 $\parallel$	2.
13 $\parallel$	7 $\parallel$	4 $\parallel$	1.

Der Autor rechnet rückwärts.

Zum besseren Verständnis ist die oben stehende Tabelle nützlich.

<sup>10</sup> In einem früheren Teil seines "zweiten Buchs" behandelt der Autor verschiedene Methoden zur Approximation von Wurzelwerten, worauf er hier zurückgreift.

<sup>11</sup> Abkürzung der Münzeinheit in der Handschrift

Die konstante Summe der  $\text{''}$  ist 24.

Vor der letzten Verteilung (1. Zeile) hat der 3. Mann die  $\text{''}$  der anderen zu verdoppeln, also hatte er 16  $\text{''}$  und die anderen jeweils 4  $\text{''}$  (2. Zeile).

Eine Runde vorher hatte der 2. Spieler das Geld der anderen zu verdoppeln: Die Verteilung war 2  $\text{''}$ , 14  $\text{''}$ , 8  $\text{''}$ . (3. Zeile)

Der nächste Schritt führt zur Ausgangsverteilung; hier hatte der 1. Spieler die Beträge der anderen zu verdoppeln.

Resultat: Am Anfang hatte der 1. Mann 13  $\text{''}$ , der zweite 7  $\text{''}$  und der dritte 4  $\text{''}$ . (4. Zeile)

Der Autor variiert das Problem mehrfach. Sein schwierigster Fall ist der folgende:

**4 Männer haben *hyperpyra* ( $\text{''}$ ). Einer nach dem anderen verdreifacht das Geld der jeweils anderen Männer. Schließlich hat jeder von ihnen 9  $\text{''}$ . Wie viel Geld hatte jeder von ihnen am Anfang?**

(Die konstante Summe der  $\text{''}$  ist 36.)

Der Schreiber gibt die richtige Lösung an, allerdings ohne jeden Kommentar:

$$1.: \frac{217}{81} \cdot 9 \text{ ''} = 24 \frac{1}{9} \text{ ''} \quad 2.: \frac{73}{81} \cdot 9 \text{ ''} = 8 \frac{1}{9} \text{ ''} \quad 3.: \frac{25}{81} \cdot 9 \text{ ''} = 2 \frac{7}{9} \text{ ''} \quad 4.: \frac{9}{81} \cdot 9 \text{ ''} = 1 \text{ ''}$$

Auf den damaligen Leser müssen die Faktoren ziemlich rätselhaft gewirkt haben.

**Verallgemeinerung:**

**$n$  Männer haben *hyperpyra* ( $\text{''}$ ). Einer nach dem anderen ver- $k$ -facht das Geld der jeweils anderen Männer ( $k \in \mathbb{N}^*$ ). Schließlich hat jeder von ihnen  $1 \text{ ''}^{12}$ . Wie viel Geld hatte jeder von ihnen am Anfang?**

(Die konstante Summe der  $\text{''}$  ist  $n$ .)

Wir verfolgen die schrittweise Veränderung der  $n$  Geldbeträge rückwärts. Das Geld desjenigen, der gerade die Beträge der anderen ver- $k$ -facht hat, ist fett gedruckt. Rechts davon finden sich die Beträge der Männer, die diese Aktion bereits durchgeführt haben, links davon die Beträge derer, die noch an die Reihe kommen. Die Unterklammerung gibt die Anzahl der Terme an.

1. Schritt rückwärts:

$$\left( \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, 1 \right) \rightarrow \left( \underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{n-1}, n - \frac{n-1}{k} \right) = \left( \underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{n-1}, \frac{nk-n+1}{k} \right)$$

2. Schritt rückwärts:

$$\begin{aligned} \left( \underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{n-2}, \frac{1}{k}, \frac{nk-n+1}{k} \right) &\rightarrow \left( \underbrace{\frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^2}}_{n-2}, n - \frac{n-2}{k^2} - \frac{nk-n+1}{k^2}, \frac{nk-n+1}{k^2} \right) = \\ &= \left( \underbrace{\frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{k^2}}_{n-2}, \frac{nk^2-nk+1}{k^2}, \frac{nk-n+1}{k^2} \right) \end{aligned}$$

$s$ . Schritt rückwärts ( $1 \leq s \leq n$ , durch Induktion):

<sup>12</sup> Normierung o. B. d. A.

$$\left( \underbrace{\frac{1}{k^{s-1}}, \dots, \frac{1}{k^{s-1}}}_{n-s}, \frac{1}{k^{s-1}}, \underbrace{\frac{nk^{s-1} - nk^{s-2} + 1}{k^{s-1}}, \dots, \frac{nk - n + 1}{k^{s-1}}}_{s-1} \right) \rightarrow$$

$$\left( \underbrace{\frac{1}{k^s}, \dots, \frac{1}{k^s}}_{n-s}, n - \frac{n-s}{k^s} - \frac{nk^{s-1} - nk^{s-2} + 1}{k^s} - \dots - \frac{nk - n + 1}{k^s}, \underbrace{\frac{nk^{s-1} - nk^{s-2} + 1}{k^s}, \dots, \frac{nk - n + 1}{k^s}}_{s-1} \right)$$

Bringt man den zweiten Term auf den gemeinsamen Nenner  $k^s$ , so erhält man den Zähler  $nk^s - n + s - nk^{s-1} + nk^{s-2} - nk^{s-2} + nk^{s-3} \mp \dots - nk^2 + nk - nk + n - (s-1) \cdot 1$

$= nk^s - nk^{s-1} + 1$  (Teleskopsumme).

Daher führt der  $s$ . Rückwärtsschritt zu

$$\left( \underbrace{\frac{1}{k^s}, \dots, \frac{1}{k^s}}_{n-s}, \frac{nk^s - nk^{s-1} + 1}{k^s}, \underbrace{\frac{nk^{s-1} - nk^{s-2} + 1}{k^s}, \dots, \frac{nk - n + 1}{k^s}}_{s-1} \right).$$

Schließlich haben wir für  $s = n$

$$\left( \frac{nk^n - nk^{n-1} + 1}{k^n}, \underbrace{\frac{nk^{n-1} - nk^{n-2} + 1}{k^n}, \dots, \frac{nk - n + 1}{k^n}}_{n-1} \right).$$

In der Tat beträgt die Summe der  $n$  Terme  $\frac{(nk^n - n) + n}{k^n} = n$ .

Vgl. die Beispiele des Autors:  $n = 3, k = 2: \left( \frac{13}{8}, \frac{7}{8}, \frac{4}{8} \right)^{13}$ ;  $n = 4, k = 3: \left( \frac{217}{81}, \frac{73}{81}, \frac{25}{81}, \frac{9}{81} \right)$

## Kap. 158

(Ein wohlbekanntes Problem mit einer bemerkenswerten Lösungsmethode)

3 Männer haben Gulden ( $\varphi$ ).

Der erste sagt zu den anderen: Gebt mir  $\frac{1}{3}$  von eueren  $\varphi$  and 5  $\varphi$  dazu. Dann habe ich das Dreifache eurerer  $\varphi$  zuzüglich 4  $\varphi$ .

Der zweite sagt zu den anderen: Gebt mir  $\frac{1}{2}$  von eueren  $\varphi$  and 3  $\varphi$  dazu. Dann habe ich das Vierfache eurerer  $\varphi$  abzüglich 5  $\varphi$ .

Der dritte sagt: Ich habe  $\frac{2}{3}$  eurerer  $\varphi$  zuzüglich 5  $\varphi$ .

Wie viele Gulden hatte jeder?

Dieses wohlbekannte Problem der Unterhaltungsmathematik<sup>14</sup> führt auf ein lineares Gleichungssystem (3x3-System).

<sup>13</sup> Diesen Fall findet man auch in frühen deutschen Rechenbüchern, z. B. bei JOHANNES WIDMANN (1489) und CHRISTOFF RUDOLFF (1525) – s. TROPFKE (1980, S. 647 f.).

<sup>14</sup> s. TROPFKE (1980, S. 609-611)



$$(1) \quad x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3) + 5 = 3 \left( \frac{2}{3}(x_2 + x_3) - 5 \right) + 4$$

$$(2) \quad x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + 3 = 4 \left( \frac{1}{2}(x_1 + x_3) - 3 \right) - 5$$

$$(3) \quad x_3 = \frac{2}{3}(x_1 + x_2) + 5$$

Der Autor verfolgt eine bemerkenswerte algebraische Lösungsmethode, die sich auf eine einzige Variable beschränkt.

Er wählt den Ansatz, dass die drei Männer zusammen  $x$  y besitzen, d. h.

$$(4) \quad x_1 + x_2 + x_3 = x.$$

Wir wollen die wesentlichen Lösungsschritte des Autors in unserer Terminologie wiedergeben und beschränken uns dabei auf seine Auswertung von (1).

Sei

$$(5) \quad x_1' = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3) + 5, \quad x_2' + x_3' = \frac{2}{3}(x_2 + x_3) - 5 \quad \text{mit}$$

$$x_1' + x_2' + x_3' = x_1 + x_2 + x_3 = x$$

a) Annäherung:  $x_1' = 3(x_2' + x_3')$  impliziert  $x_1' : (x_2' + x_3') = 3 : 1$ .

Der Autor erhält  $x_1' = \frac{3}{4}x$ ,  $x_2' + x_3' = \frac{1}{4}x$ .

b) Korrektur: Statt dessen gilt  $x_1' = 3(x_2' + x_3') + 4$ . Daraus ergibt sich

$(x_1' - 4) : (x_2' + x_3') = 3 : 1$  und  $x_1' - 4 = \frac{3}{4}(x - 4)$ ,  $x_2' + x_3' = \frac{1}{4}(x - 4)$ . Somit ist

$$(6) \quad x_1' = \frac{3}{4}x + 1, \quad x_2' + x_3' = \frac{1}{4}x - 1.$$

c) Situation vor der Übergabe von 5 y:

Sei

$$(7) \quad x_1'' = x_1' - 5, \quad x_2'' + x_3'' = x_2' + x_3' + 5 \quad \text{mit} \quad x_1'' + x_2'' + x_3'' = x \quad \text{gemäß (5)}.$$

Mit (6) folgt

$$(8) \quad x_1'' = \frac{3}{4}x - 4, \quad x_2'' + x_3'' = \frac{1}{4}x + 4.$$

Andererseits gilt gemäß (5)

$$(9) \quad x_1'' = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3), \quad x_2'' + x_3'' = \frac{2}{3}(x_2 + x_3).$$

Mit (4) folgt aus (8) and (9)  $\frac{2}{3}(x - x_1) = \frac{2}{3}(x_2 + x_3) = \frac{1}{4}x + 4$  mit dem Ergebnis

$$(10) \quad x_1 = \frac{5}{8}x - 6.$$

Nach derselben Methode erhält der Autor aus den anderen Gleichungen (2) and (3):

$$(10') \quad x_2 = \frac{3}{5}x - 8 \quad (10'') \quad x_3 = \frac{2}{5}x + 3$$

Im Hinblick auf (4) führt die Addition auf die Gleichung  $x = 1\frac{5}{8}x - 11$ , die der Autor löst:

$$x = 17\frac{3}{5} \text{ zieht } x_1 = 5, \quad x_2 = 2\frac{14}{25}, \quad x_3 = 10\frac{1}{25} \text{ nach sich.}$$

### Kap. 162 (Löschen einer Schiffsladung)

3 Männer wollen eine Schiffsladung löschen.

Wenn der zweite und der dritte 7 Tage arbeiten, beendet der erste die Arbeit in 3 Tagen.

Wenn der erste und der dritte 8 Tage arbeiten, beendet der zweite die Arbeit in 4 Tagen.

Wenn der erste und der zweite 6 Tage arbeiten, beendet der dritte die Arbeit in 2 Tagen.

Wie viele Tage benötigt jeder von ihnen, wenn er die Ladung allein löschen müsste?

1.	2.	3.
3	7	7
8	4	8
6	6	2

Tabelle im Text

Ansatz des Autors: 1 Tag(esleistung) des zweiten =  $x$  Tages(leistungen) des ersten

Mit den Bezeichnungen  $TL(n)$  für die Tagesleistung des  $n$ -ten Mannes ( $n = 1, 2, 3$ ) and  $GL$  für die insgesamt zu erbringende Leistung erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(11) \quad (3 + 7x) TL(1) + 7 TL(3) = GL$$

$$(12) \quad (8 + 4x) TL(1) + 8 TL(3) = GL$$

$$(13) \quad (6 + 6x) TL(1) + 2 TL(3) = GL$$

Wenn man 1  $TL(1)$  als Einheit betrachtet, bleiben die Variablen  $x$ ,  $TL(3)$  und  $GL$  zu bestimmen.

Ein Vergleich von (11) mit (12) führt den Autor zu

$$(14) \quad 1 TL(3) = (-5 + 3x) TL(1).^{15}$$

Diese Gleichung multipliziert er mit 7 und substituiert (11) mit dem Ergebnis

$$(15) \quad (28x - 32) TL(1) = GL.$$

Eine weitere Substitution von (14) in (13) führt zu

$$(16) \quad (12x - 4) TL(1) = GL.$$

Jetzt bildet der Autor die Differenz der linken Seiten von (15) and (16):

$$(28x - 32) - (12x - 4) = 16x - 28.^{16}$$

Danach löst er die Gleichung  $16x = 28$ :  $x = 1\frac{3}{4}$

<sup>15</sup>Ganz selbstverständlich geht er mit negativen Zahlen und Termen um. Der Term in Klammern lautet bei ihm:  $\pi\alpha\rho\acute{\alpha} \epsilon' \kappa\alpha\iota \gamma' \pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha$  (weniger 5 und 3  $\pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha$ )

<sup>16</sup>mit den Worten des Autors:  $\kappa\eta' \pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha \pi\alpha\rho\acute{\alpha} \lambda\beta' \pi\alpha\rho\acute{\alpha} \iota\beta' \pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha \pi\alpha\rho\acute{\alpha} \delta' \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota \iota\epsilon' \pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha \pi\alpha\rho\acute{\alpha} \beta\eta'$ . (28  $\pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha$  weniger 32 weniger 12  $\pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha$  weniger 4 ist gleich 16  $\pi\rho\acute{\alpha}\gamma\mu\alpha\tau\alpha$  weniger 28.)

Gemäß seinem früheren Ansatz und im Hinblick auf (14) erhält er

$$(17) \quad 1 TL(2) = 1 \frac{3}{4} TL(1), \quad 1 TL(3) = \frac{1}{4} TL(1)$$

mit der Folge

$$(18) \quad 7 TL(1) = 4 TL(2) = 28 TL(3).$$

Nun zeigt sein Vergleich von (18) beispielsweise mit dem 1. „Dienst“ (3 / 7 / 7):

$$\begin{aligned} GL &= \frac{3}{7} \cdot 7 TL(1) + \frac{7}{4} \cdot 4 TL(2) + \frac{7}{28} \cdot 28 TL(3) = \left( \frac{3}{7} + \frac{7}{4} + \frac{7}{28} \right) \cdot 7 TL(1) \\ &= 2 \frac{3}{7} \cdot 7 TL(1) = 2 \frac{3}{7} \cdot 4 TL(2) = 2 \frac{3}{7} \cdot 28 TL(3) \end{aligned}$$

Damit kommt er schließlich zur Lösung

$$(19) \quad GL = 17 TL(1) = 9 \frac{5}{7} TL(2) = 68 TL(3).$$

Er vergleicht (18) außerdem noch mit den anderen „Dienst“, (8 / 4 / 8) bzw. (6 / 6 / 2), und auf diese Weise vergewissert er sich, dass sein Ergebnis richtig ist.

Der Autor weist hier seine Fähigkeit nach, 3x3-Systeme linearer Gleichungen nur mithilfe einer expliziten Variablen zu lösen. Wir begegnen der Vergleichs-, der Subtraktions- und der Substitutionsmethode. Dabei geht er völlig unbefangen mit negativen Zahlen und Termen um und benutzt das Wort παρά (pará) für „minus“.

Dieses Leistungsproblem ist wegen seiner Kombination von gleichzeitiger Arbeit und Folgearbeit besonders reizvoll. Hier wird nicht die sonst übliche Frage gestellt, in welcher Zeit die Ladung gelöscht wird, wenn alle drei gleichzeitig arbeiten (hier:  $5 \frac{2}{3}$  Tage)<sup>17</sup>.

### Eine „leichtere Methode“

Der Autor behauptet:

Wenn die Spaltensummen im Diagramm gleich sind, kann man die Lösung unmittelbar ablesen.

Wir sehen, dass die Spalten im obigen Diagramm die gemeinsame Summe 17 haben, aber im Allgemeinen müssen diese Summen nicht gleich sein. Dies zeigt z. B. folgendes Diagramm mit den Summen 6 oder 5:

1.	2.	3.
1	2	2
2	1	2
3	3	1

(Hier erhalten wir  $GL = 9 TL(1) = 9 TL(2) = 3 TL(3)$ .)

Der Autor belegt seine Behauptung u. a. an folgendem Beispiel:

1.	2.	3.
3	7	7
8	4	8
9	9	5

$\Sigma \quad 20 \quad 20 \quad 20$

Ohne jede Rechnung gibt er hier das korrekte Ergebnis an:

$$GL = 20 TL(2) = 80 TL(1) = 11 \frac{3}{7} TL(3)$$

(Ausgehend von  $GL = 20 TL(2)$  können die entsprechenden Beziehungen zwischen  $GL$  und  $TL(1)$ ,  $TL(3)$  nicht direkt verifiziert werden, sondern hierfür ist noch ein System von – allerdings nur noch

<sup>17</sup> TROPFKE (1980, S. 578-581) führt bei den Leistungsproblemen nur diesen leichteren Typ an.

zwei – linearen Gleichungen zu lösen.)

Aber der Autor erklärt nicht, warum ausgerechnet  $TL(2)$  die Spaltensumme als Faktor hat. Ist dasselbe auch mit den anderen  $TL$  möglich? Und wenn ja, wie trifft man die richtige Wahl?

Tatsächlich ist ein Gegenbeispiel leicht zu finden:

1.	2.	3.
2	7	7
9	4	9
6	6	1

$$\Sigma \quad 17 \quad 17 \quad 17$$

Die Rechnung führt zu

$$GL = 21 \frac{1}{4} TL(1) = 8 \frac{1}{2} TL(2) = 85 TL(3)$$

mit Faktoren, die alle von der Spaltensumme 17 verschieden sind.

Wir wollen das vorliegende Problem allgemeiner untersuchen:

1.	2.	3.
$a_1$	$a_2$	$a_2$
$b_1$	$b_2$	$b_1$
$c_1$	$c_1$	$c_2$

$$\Sigma \quad d \quad d \quad d$$

Sei  $1 TL(2) = x TL(1)$ ,  $1 TL(3) = y TL(1)$  mit der Einheit  $1 TL(1)$ , d. h.  $1 TL(1) := 1$ .

Aus dem Diagramm entnehmen wir das Gleichungssystem

$$a_1 + a_2(x + y) = GL$$

$$(20) \quad b_1(1 + y) + b_2 x = GL$$

$$c_1(1 + x) + c_2 y = GL$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$(21) \quad a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_1 = a_2 + b_1 + c_2 = d.$$

Addition der linken und der rechten Seite von (20) führt zu

$$(22) \quad d(1 + x + y) = 3 GL.$$

Nach (22) erhalten wir  $a_2(1 + x + y) = \frac{3a_2}{d} GL$ , und mit der 1. Gleichung von (20) folgt

$$(23) \quad \left( \frac{3a_2}{d} - 1 \right) GL = a_2 - a_1.$$

Damit wird eine Fallunterscheidung erforderlich:

a) Aus  $3a_2 = d$  folgt  $a_2 = a_1$  und nach (21)  $b_2 = b_1$ ,  $c_2 = c_1$ .

Dies führt wegen (20) zu  $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2$ . Das System (20) reduziert sich auf eine einzige Gleichung, nämlich  $a_1(1 + x + y) = GL$ , die mit konstanten  $a_1$  und  $GL$  unterbestimmt ist. Um die Behauptung des Autors näher zu prüfen, setzen wir  $GL = d TL(i)$ ,  $i = 1$  oder  $i = 2$  oder  $i = 3$ , d. h. es gilt  $GL = 3a_1$  oder  $GL = 3a_1 x$  oder  $GL = 3a_1 y$ . Dies ist nur für  $x + y = 2$  bzw.  $2x - y = 1$  bzw.  $2y - x = 1$  erfüllt, also nicht allgemein.

β)  $3a_2 \neq d$  führt zu

$$(24) \quad GL = \frac{(a_2 - a_1)d}{3a_2 - d}.$$

Um  $x, y$  zu berechnen, greifen wir auf die 2. Gleichung von (20) und wieder auf (22) zurück: Nach Eliminierung von  $x$  erhalten wir

$$(25) \quad (b_1 - b_2)(1 + y) = \frac{1}{d}(d - 3b_2) GL.$$



Offenbar führt  $b_1 = b_2$  wieder auf den Fall  $\alpha$ ). Für  $b_1 \neq b_2$  ergibt sich

$$(26) \quad 1 + y = \frac{d - 3b_2}{(b_1 - b_2)d} GL,$$

zusammen mit (22) also  $x = \frac{3b_1 - d}{(b_1 - b_2)d} GL$ .

Nun liefert (24) und  $a_2 - a_1 = b_1 - b_2$  gemäß (21)

$$(27) \quad x = \frac{3b_1 - d}{3a_2 - d}.$$

In gleicher Weise erhält man aus (26), (24) und  $a_2 + b_2 = d - c_1$  gemäß (21)

$$(28) \quad y = \frac{3c_1 - d}{3a_2 - d}.$$

Auf dem Hintergrund von (24), (27) und (28) sind wir nun in der Lage, Kriterien für  $GL = d TL(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , d. h. für  $GL = d$  oder  $GL = dx$  oder  $GL = dy$ , anzugeben.

Es gilt

(29)  $GL = d$  genau dann, wenn  $d = a_1 + 2a_2$ .  
(Summe aus der 1. Zeile im Diagramm)

(30)  $GL = dx$  genau dann, wenn  $d = 3b_1 - a_2 + a_1$  bzw.  $d = 2b_1 + b_2$  (gemäß (21)).  
(Summe aus der 2. Zeile im Diagramm)

(31)  $GL = dy$  genau dann, wenn  $d = 3c_1 - a_2 + a_1$  bzw.  $d = 2c_1 + c_2$  (gemäß (21)).  
(Summe aus der 3. Zeile im Diagramm)

### Resultat:

Wenn die **Spaltensummen** im obigen  $3 \times 3$ -Diagramm den gemeinsamen Wert  $d$  mit  $d \neq 3a_2$  haben<sup>18</sup>, dann gilt für  $i = 1, 2, 3$

$GL = d TL(i)$  genau dann, wenn die Summe aus der  $i$ -ten **Zeile** im Diagramm ebenfalls gleich  $d$  ist.

### Bemerkung:

In beiden Beispielen des Autors sind die Spaltensummen jeweils gleich (17 bzw. 20).

Beim ersten ist (nur) die Summe aus der 2. Zeile ebenfalls 17, und es gilt  $GL = 17 TL(1)$ .

Beim zweiten ist (nur) die Summe aus der 2. Zeile ebenfalls 20, und es gilt  $GL = 20 TL(2)$ .

## Kap. 163 (Eine Bewegungsaufgabe)<sup>19</sup>

Zwei Wanderer brechen zur selben Zeit auf, der eine (A) geht von Florenz nach Rom, der andere (B) geht von Rom nach Florenz. Die Entfernung beträgt ungefähr 200 Meilen.

A geht am ersten Tag 1 Meile, am zweiten Tag 2 Meilen usw.

<sup>18</sup> Letzteres bedeutet: Unterschiedlich bezeichnete Zahlen im Diagramm haben nicht denselben Wert.

<sup>19</sup> Vgl. TROPFKE (1980, S. 588-598), insbesondere S. 590, "Typ B b)".

**B geht täglich 10 Meilen.**

**Wann und nach wie vielen Meilen treffen sie zusammen?**

Autorenlösung:

Sie gehen 12 oder 13 Tage (ohne Begründung!), also gehen sie  $(12 + x)$  Tage.

In dieser Zeit geht B  $(120 + 10x)$  Meilen.

Nach 12 Tagen hat A  $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13$  Meilen = 78 Meilen zurückgelegt, aber weil es sich um

$(12 + x)$  Tage anstatt um 12 Tage handelt, geht er  $(12 + x) \cdot x$  Tage zusätzlich. (!)

Daher geht A insgesamt  $(78 + 12x + x^2)$  Meilen.

Die weitere Rechnung:

$$120 + 10x + 78 + 12x + x^2 = 198 + 22x + x^2 = 200$$

Daraus folgt  $2 = 22x + x^2$  mit der Lösung  $x = \sqrt{123} - 11$  und  $12 + x = \sqrt{123} + 1 \approx 12 \frac{20}{221}$ .

Daher treffen sie sich nach ungefähr  $12 \frac{20}{221}$  Tagen.

B legt bis zum Aufeinandertreffen  $10(\sqrt{123} + 1)$  Meilen  $\approx 120 \frac{200}{221}$  Meilen zurück, woraus

für A folgt, dass dieser bis zum Treffpunkt etwa

$$\left(200 - 120 \frac{200}{221}\right) \text{ Meilen} = 79 \frac{21}{221} \text{ Meilen gelaufen ist.}$$

Der Autor macht noch eine Gegenprobe:

A geht  $(78 + (12 + x)x)$  Meilen mit  $x = \sqrt{123} - 11$ .

Daher geht er  $(190 - 10\sqrt{123})$  Meilen  $\approx \left(190 - 110 \frac{200}{221}\right)$  Meilen =  $79 \frac{21}{221}$  Meilen in

Übereinstimmung mit obigem Ergebnis.

Verallgemeinerung:

Wir nehmen  $k$  anstatt 10 Meilen für den Wanderer B,  $d$  anstatt 200 Meilen für die Entfernung der beiden Städte.

Das Aufeinandertreffen der beiden finde nach  $(n + x)$  Tagen ( $0 \leq x < 1$ ) statt.

Somit verwendet der Autor die Wegegleichung

$$(Au) \quad \frac{1}{2}n(n+1) + x(n+x) + k(n+x) = d \quad \left( d = 200, k = 10: n = 12, x = \sqrt{123} - 11 \approx \frac{20}{221} \right).$$

Anschließend stellt er weitere Aufgaben desselben Typs vor und probiert zwei andere Methoden für die Behandlung des letzten Tages aus – die “falsche Linearisierung” (fL), d. h. die Linearisierung des  $n$ -ten Tages, sowie die “richtige Linearisierung” (rL), d. h. die Linearisierung des  $(n+1)$ -ten Tages.

Diese Probleme löst er nun ohne Algebra. Wir wollen hier nur die Lösung des Autors mithilfe (rL) ohne seine Wegeberechnung vorstellen (in allgemeinen Termen).

Nach  $n$  Tagen haben die beiden Wanderer insgesamt  $\frac{1}{2}n(n+1) + kn$  Meilen zurückgelegt.

Ihr Abstand voneinander beträgt noch  $d - \frac{1}{2}n(n+1) - kn$  Meilen. Wenn sie noch den ganzen  $(n+1)$ -ten Tag gehen würden, dann wären  $(n+1+k)$  Meilen anstatt  $d - \frac{1}{2}n(n+1) - kn$  Meilen zu addieren. Deshalb benötigen sie vom letzten Tag nur noch den Anteil  $\frac{d - \frac{1}{2}n(n+1) - kn}{n+k+1}$ , und ihr Aufeinandertreffen findet nach  $n + \frac{d - \frac{1}{2}n(n+1) - kn}{n+k+1}$  Tagen statt.

(Man vergleiche diesen Wert mit  $n + x_1$  in der Gleichung für (rL) weiter unten.)

Ohne Begründung schreibt der Autor, dass die Methode gemäß (rL) richtig sei, die Methoden (Au) und (fL) hingegen seien falsch.<sup>20</sup>

Wir wollen nun noch Interpolationsmethode (I) hinzunehmen und die vier Wegegleichungen miteinander vergleichen. Das Aufeinandertreffen der beiden Wanderer finde nach  $(n + x_i)$  Tagen,  $0 \leq x_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , statt:

$$(rL) \quad \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)x_1 + k(n+x_1) = d$$

$$(I) \quad \frac{1}{2}(n+x_2)(n+x_2+1) + k(n+x_2) = d$$

$$(Au) \quad \frac{1}{2}n(n+1) + x_3(n+x_3) + k(n+x_3) = d$$

$$(fL) \quad \frac{1}{2}n(n+1) + nx_4 + k(n+x_4) = d$$

Für  $d = 200$ ,  $k = 10$  erhalten wir

$$n = 12 \text{ und } x_1 = \frac{2}{23}, x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2041} - 45), x_3 = \sqrt{123} - 11, x_4 = \frac{1}{11}.$$

Allgemein lässt sich zeigen:  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$

Darüber hinaus gilt:

Wenn zwei  $x_i, x_j$  ( $1 \leq i, j \leq 4$ ,  $i \neq j$ ) gleich sind, dann verschwinden  $x_i$  und  $x_j$ .

In diesem Fall treffen die Wanderer nach genau  $n$  Tagen aufeinander, d. h. es gilt sogar  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ .

<sup>20</sup> Daher hat er auch seine vorherigen Ausführungen durchgestrichen.





Handwritten header text at the top of the page, including a date and possibly a title or reference.

Main body of handwritten text, consisting of several paragraphs of dense script in a historical German dialect.

Vertical handwritten text on the right margin, likely a commentary or correction.

Der Autor auf der Suche nach der richtigen Lösung seiner Bewegungsaufgabe von Kap. 163 (fol. 97)

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Stefan Deschauer  
Technische Universität Dresden  
Fachrichtung Mathematik – Professur für Didaktik der Mathematik  
D-01062 Dresden

Email: [Stefan.Deschauer@tu-dresden.de](mailto:Stefan.Deschauer@tu-dresden.de)



Seminarraum (Foto: Marko Razpet)

von links nach rechts: Peter Schmitt, Herwig Säckl, Wolfgang Breidert, Menso Folkerts, Detlef Gronau, Jasna Fempl-Madjarevic, Ligia Arantes Sad, Sergio Nobre, Nada Razpet, Christa Binder, Michael von Renteln, Franz Pichler, Gert Schubring, Magdalena Hykšová.



EQUATIONS THROUGH HISTORY – HER MAJESTY “THE EQUATION”

Jasna Fempl-Madjarevic – Belgrade

„A lesson - how to get to know all unclear, difficult things, all secrets that objects hide in them ...  
From Ahmes' papyrus containing the problems which are solved today by first-degree equations!

INTRODUCTION

In the past:

An enigma about the length of Diophant's life – ( L )

One-sixth part of his life Diophant spent as a boy, and one-twelfth part as a young man! Before marriage, Diophant spent one-seventh part of his life, and after 5 years his son was born! One half of his life was the length of his son's life, 4 years he spent suffering from pain before he died. The answer is very easy thanks to Her Majesty – the Equation – even the linear one.

$$L = ax + b$$

The equation – a notion which confuses a mathematical layman and excites a mathematical connoisseur. Although devoid of both conceptual and denominative notation and form, equations were also present in the „childhood“ of mathematics, algebra in particular (ancient Chinese used to solve the systems of linear equations with the abacus, as did the Egyptians and the Babylonians who had developed methods for solving both the linear and some quadratic equations – quadratic equations were also solved by ancient Greeks, much credit particularly goes to Diophant for the development of various types of equations with one, two or more unknowns, and for working with the so-called equations. Let us recall that the Greeks did not solve equations with negative numbers or with zero. That is why the story about „Her Majesty the Equation“ as a notion (which is common for all types – all are „exceptional“ for the areas which, if possible, they dominantly represent and describe) is unbreakably linked with the history of mathematics and its development through centuries, and that story touches upon all principal mathematical themes and flows. Also, equations allow and provide a specific insight into what moves and inspires the mathematicians and scientists in general. They „shape“ the reality in unrepeatable mathematical way – to express with an equation a certain ratio or event from reality, space and time often means extraction of hidden information and ratios understandable only to those „dedicated“ to their solving or to the solving of systems! Anything „given by equation“ is also frequently an answer to the most intricate questions of nature. Let us not forget that nature is our inspiration and that one finds in it the most perfect forms – and equations are precisely a mathematical „device“ for their explanation. Various practical happenings often get copied to corresponding equation systems which catch a given problem as if with a specific device. Here, the dominant role is played by physics which has „the soul and the spine“ of mathematics – it may happen that with 100 kilos of mathematics we get 5 grams of

physics. Which mathematics? Naturally, the entire systems of equations (differential, integral, partial, exponential, logarithmic, trigonometric) is needed; however, solutions are only possible for some cases, linear and quadratic –higher degree equations are complicated, while the 5th degree equation, as Abel proved, is unsolvable!. And those „5 grams of physics“ is often an answer to fundamental questions; however, inversion is also present. Isn't the interpretation of the universe grandiose and simple through Einstein's famous equation  $E = mc^2$ , which in extremely simple mathematical way gives the ratio of the key parameters of nature, and/or their ratios of energy, mass and the speed of light – eternal cosmic constants and the mysterious light.

In a word, equations connect the fundamentals of mathematics – they make the world global and by diversity they respect each problem individually. Further, they connect the fundamentals of mathematics created as early as by Pythagoras with the most complex ideas of modern mathematics (naturally, with completely different symbols). They often create the biggest enigmas in the history of mankind and disclose them thereafter as something easily understandable and „within reach“. Equations also allow us to understand that even the most complex things are essentially very simple; however, this in no way means that the path leading to such complex things is simple. Let us remember the variety of equations or systems whose solution is, said by the language of mathematics, highly complicated because they are using „hard“ mathematics. And when it comes to their symbol in particular, it is by no means simple. Although many equations are still „unsolvable“ the attempts made through history to solve them often led or contributed to the creation of an amazingly valuable arsenal of mathematical techniques and tools (recently the famous Fermat's theorem was solved– in 1997 by Andrew Wiles–  $x^n + y^n = z^n$ , for  $n > 2$  – there is no solution by integers.

### Introduction of the Notion of Unknown Number

Introduction of the notion of unknown number and the symbol for the same can be taken as a very important moment in the expansion of equations. With the Egyptians it is a „heap“ (hay) with a special symbol; the names and symbols of the Babylonians, ancient Greeks, the people of Central Asia and others are new in terms of their form and other secondary properties, but identical in terms of their essence. For example, the method FAN-CHEN appears in old Chinese solutions of linear equations: here, the basic symbols for given numbers is in the form of a grid and then, on the corresponding columns of the counting board (the abacus) the necessary subtractions and multiplications of numbers are made, as well as other operations. All is done mechanically. Evidently, these operations are similar to matrix transformations, but in the form of the working rule of the ancient Egypt, Babylon and others.

Here follows an example of a „false position“ used by ancient Egyptians in solving the problems. It was used for several thousands of years and served as a model to many nations – this method had „won“ not only the space but also the time – it was in application even in the 18th century. Essentially, it is a method of assumption typical in modern arithmetic.



The problem from Ahmes' papyrus: „a heap, its seventh part, the heap entire. To make 19.“ Or, said in modern language, – which number increased by its seventh part gives 19? ( $x + x/7 = 19$ ).

Here is the Egyptian logic shown as a table:

* . 7	. 8	* . 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
* $\frac{1}{7} \equiv 1$	* .. 16	* .. 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
	* $\frac{1}{2}$ 4	* .... 9 $\frac{1}{2}$
	* $\frac{1}{4}$ 2	heap 16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$
	* $\frac{1}{8}$ 1	$\frac{1}{7}$ 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
		altogether 19

Naturally, there are also other similar examples among which also interesting is the example of Leontiy Filipovich Magnicky who applies the method of „two false positions“ to a known problem:

*„A pupil's father asked the teacher how many pupils he teaches, and the teacher answered that if the number of pupils were twice as many as he currently had plus a half of that plus the son of the father asking him about the number of pupils, he would exactly have 100 pupils.“*

Presently, one would easily get the solution algebraically by applying the equation  $x ( 1 + 1 + 1/2 + 1/4 ) + 1 = 100$ , or arithmetically

$$(100 - 1) : ( 1 + 1 + 1/2 + 1/4 ) = \dots = 36$$

Also from Ahmes' calculus, from the Moscow papyrus, the problem marked as the 6<sup>th</sup> problem is presented in modern form, and as we will see, in the text are simultaneously given both the problem and the method determining the solution, as well as the solution itself:

*„If you are asked about a figure of 12 which has the width which is  $\frac{3}{4}$  of the length, you must divide 1 by  $\frac{3}{4}$ . Now take this 12 times  $1\frac{1}{3}$ , and the result is 16. Now*

*you have to find the number which multiplied by itself gives 16; so, the result is 4 for the length, and for the width it is  $\frac{3}{4}$  of which, namely, 3“.*

As we can see, the method is one-sided, it does not offer logical explanations, there is neither induction nor deduction, only a bare sequence is given which has to be logically followed.

It is a „working rule“ whose types and the sequence of operations (in this problem) will serve as a model for other problems of similar nature and structure, and which were using the Egyptian method which is concrete, without generalization, abstraction and rules. Such method also appeared elsewhere, in China and Babylon (there is not a single representative of all rectangulars). Modern solution would be as follows:

$$A = 12, y = \frac{3}{4}x, x \cdot \frac{3}{4}x = 12 \dots x^2 = 16, x = 4, y = 3$$

A great mathematician Mohammed Ibn Musa Al-Hwarizmi (\*780 + 850) with his two major works „Kitab al-Jabr va-l-Mukabala“ and „Kitab al-djamva-t-tafrik“ which reached Europe, exerted a great influence on the expansion of mathematics and, accordingly, on the solution of equations. He found in the Arabic language excellent expressions in connection with equations, while in solving linear equations with one unknown he is quite concrete, i.e. he reduces it to (1) shifting the members from one to the other side (al-djebr), and (2) the arrangement of similar members (walmukabala). His methods have a planetary application – it is just a part of merits of the Arabs for the expansion of mathematics to and in Europe.

Actually, apart from Al-Hwarizmi, enormous credits for the development of algebra also go to Arab mathematician and poet Omar Hayyam (\*1048 + 1131). They applied equations in many ways and by solving practical problems of „different origin and type“ they exerted a strong influence on the formation of the attitude of Europeans towards algebra as universal arithmetic (Newton, Euler, and others), which is a typical issue even nowadays.

The way of writing the equations similar to their present-day form was introduced in the 17th century (Vieta, Harriot, Descartes), while the equality sign and brackets have been in use only since the 18<sup>th</sup> century (Euler introduced the brackets).

Finally, the origin and method of solving the systems of linear equations with, for example, 2 unknowns have their roots in India, China and with the Arabs. They appeared in Europe only in the 13<sup>th</sup> century (Leonardo of Pisa – 13<sup>th</sup> century, Paccioli – 15<sup>th</sup> century, Stiefel – 16<sup>th</sup> century. As systems are also in the focus nowadays, let us mention that the method of opposite coefficients was the **first** to appear, and only later the method

of substitution and comparison. All of the three methods are in Newton's lectures (published as a separate book in 1707).

Currently, many equation systems, the linear in particular, and others as well are solved by computers. Thanks to the „prince“ of mathematics, Evariste Galois, approach to the theory of groups and sets differ completely from the one practised in the past. Nevertheless, the equation still has a leading role in mathematical modeling of the reality. There are dozens of types of different equations today which are exploited by different sciences – serving as „slaves“. However, the notion of the equation is so important that it allows to largely replenish and at the same time preserve the famous Al-Hwrazmi's sentence by which he finalized all his lectures and statements: „The world rests on 4 elements only: the erudition of the sage, the impartiality of the noble, the prayer of the innocent, and the courage of the brave“. If there were no equations, this attitude eroded by the time would not have support in all its elements.

Jasna Fempl – Madjarević,  
5th Belgrade Gymnasium,  
KMM Arhimedes and  
Mathematical Institute  
e-mail: [jasnaf@Eunet.yu](mailto:jasnaf@Eunet.yu)  
Home address: Vidikovacki venac 27  
11000 Belgrade, Serbia

### Literature:

1. Slaviša Prešić: Misaona vidjenja 1 – 6, Plato, Belgrade, 2000-2004
2. Slavko N. Nedović: Matematičko-istorijski mozaik, Arhimedes, Belgrade, 2004
3. Heureka, translation from English, Mladost, Zagreb 1978
4. Marinkovic Bogoljub, Arhimed, „Archimedes“ Magazine, Belgrade 1973
5. Eric Temple-Bell: „Matematika kraljica i ropkinja nauke“, Moscow 1981
6. Bashmakova I.G.: „Diofant i Diofantove jednačine“, Moscow, 1981
7. The 22<sup>nd</sup> International Congress for the History of Science, Beijing, China, 2005

## **Influence of computers on teaching geometry**

Nada Razpet, Faculty of Education Koper, Faculty of Education Ljubljana

**Abstract:** Geometry is certainly one of the oldest branches of mathematics and was taught in all schools from the ancient times. In the old times the main problems were connected to the use of ruler and compasses when solving different construction problems. In modern computer times the contents and methods of teaching geometry have changed. Computer programs for dynamic geometry enable interactive investigations of connections between different geometrical elements. Students autonomously use computer programs to search for relations between geometrical elements. Simultaneously they may check their predictions. At the end the students can reflect the lesson and by that strengthen gained knowledge. We shall limit our presentation to a study of the influence that the program Cabri Geometry has to a teaching of geometry in our schools.

## **Preface**

The teaching of geometry has changed through history or, to be precise, some things now appear in different form. We will focus on two Slovenian authors of text books: dr. Fran Močnik and dr. France Križanič. Computer analysis of some of their exercises will be discussed as examples of what new technology can do.

## **Močnik's legacy**

Močnik's text books of geometry were written in German, first translations in Slovenian language were published sometimes around 1870. Major subjects from these text books (volumes I and II) for lower grammar school were:

Volume I starts with basics of the geometrical solids, defines the straight lines, the curves, the segments and the angles. It continues with the angles on skew and parallel lines, the adjacent, the opposite and the corresponding angles before it proceeds to the triangles (its characteristics and construction tasks), the quadrilaterals (a square, a rectangle, a parallelogram) and the polygons. The next subjects are Pythagoras' theorem and transformation of geometrical objects into objects of equal areas. Volume ends with the properties of similar figures.

Volume II starts with the circle (a radius, a cord, a centre angle, an angle at the circumference), relationship between a line and a circle, relationship between

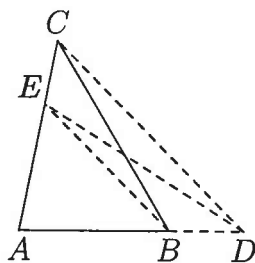


the two circles, a cyclic quadrilateral and a circle-tangent regular polygon, calculation of a circle or a circle segment's (a perimeter and an area). Next, the text book describes an ellipse, a hyperbola and a parabola followed by plane geometry. The main subject of this volume is the use of Pythagoras' theorem. The last two chapters cover three-dimensional geometry (relationship between the straight lines and a plane and relationship between the two planes) and the geometrical solids such as a prism, a pyramid, the regular solids, a cylinder, a cone, a sphere and a frustum of a cone and a pyramid.

Basic terminology is explained in each of the chapters along with descriptions of geometrical solids and their dressmaker's patterns. Short description of how to approach each exercise are added to solutions.

Exercises are rather classic: calculation of the triangle's angles, construction of the triangles using ruler and compasses. The use of Pythagoras' theorem and transformation of the geometrical objects into the objects of the equal areas are the main tasks in these exercises. Several exercises have a use in everyday life or have some connection with physics.

An example: Equi-areal triangles.

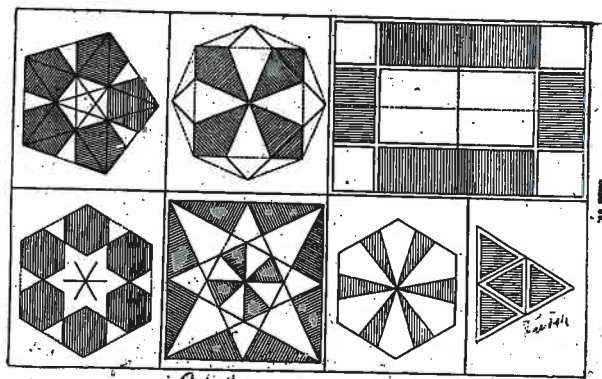


A given triangle is  $ABC$  and a given side of a new triangle is  $AD$ . A construction of a new triangle is as follows: first we connect  $D$  and  $C$ , then  $EB \parallel DC$ . The new, transformed triangle is  $ADE$ . Explanation:

- $\triangle EBC$  and  $\triangle EBD$  have equal areas (they share one side and the altitude).
- $p_{ABE} + p_{EBD} = p_{ADE}$
- $p_{ABE} + p_{EBC} = p_{ABC}$
- $p_{ABC} = p_{ADE}$

In the book of geometry for "young townswomen" many patterns are added (Geometric morphology). Girls were constructing them by ruler and compasses.

In the last section of the book the general properties of transformation is given (translation, rotation and dilation). The dilation (enlargement) were important (for girls?) to cut out the proper size of a dress.



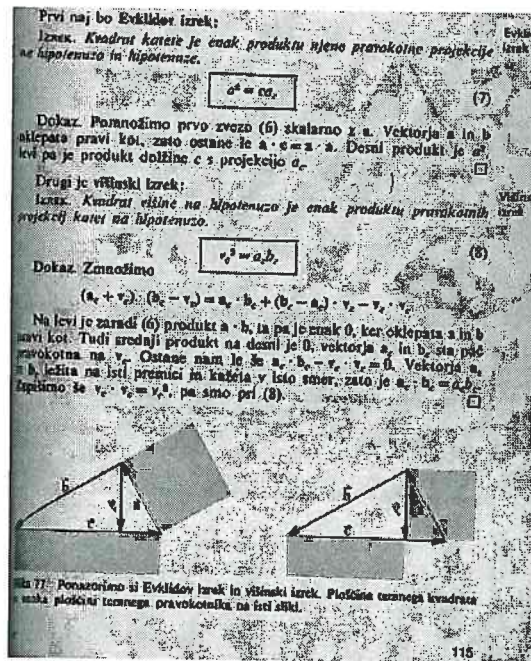
An example of figures from Močnik schoolbook for girls.

In later text book for grammar-schools (around 1957) the authors added some sections like how to draw a clear figure in three-dimensions and how to inscribe one geometrical figures into other (or to circumscribe a geometrical figures about other).

To the end of seventies geometry classes in the middle school began with the classic Euclidean geometry. Students learned axioms and theorems and used them to prove relationships between the geometrical objects. The same subjects were also studied in elementary schools, however in middle schools, trigonometric identities and logarithms were added. Grammar schools included coordinate geometry problems such as finding the equation of the tangents and the normals to the given curves at a given point, finding the intersection between a parabola and a line and so on. Like in all geometry classes, construction tasks with ruler and compasses were standard exercise.

### The dr. France Križanič text books

A school reform (one of the many later reforms) in the early 1980's resulted in new text books. Dr. France Križanič introduced geometry through the Euclidean vector space. This was a challenge for students who now had to approach tasks using vectors and scalar (and vector) products of two vectors. But, another reform came and the old Euclidean geometry with less strict axiomatic approach was reestablished in schools.



The proof of the theorem in a right-angled triangle (from the Križanič's first book).

## Cabri Geometry

Formal Euclidean geometry has been very difficult for students, because they were given theorems to learn and apply them to mostly meaningless problems. The use of computers with appropriate software such as DERIVE and Cabri Geometry has changed the way of learning and teaching geometry. In the beginning, these programs run in DOS environment but today they are mostly used in Windows operating system.

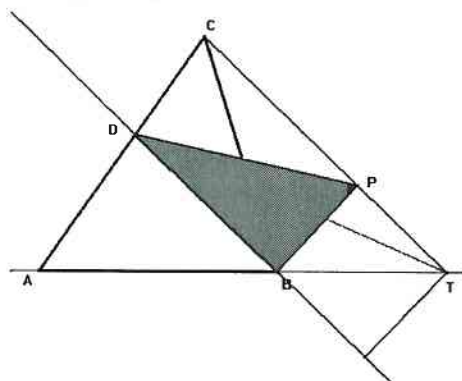
What are the capabilities of geometry software?

It allows the exploration of any aspect of mathematics capable of a geometric interpretation. This includes properties of the triangles, the circles, the polygons or curves and their relationships, rotation, transformation, projections and dilation. Software enables automatic measurement of the segments, the angles, the polygons perimeters and the areas. It provides new opportunities for the interactive generation of the loci (the locus is the path followed by a dependent point related to some other independent point which is itself constrained to move on predetermined path). We can use it for examples: in the heuristic phase of solv-

ing construction task, when we verify the construction results or when we like to construct the conics. The possibilities to define macro-construction as a graphic function enable to spend less time for future construction.

The teaching of geometry has changed in the last few decades. Construction tasks with ruler and compasses have almost dissappear. Computer programs enable students to solve construction problems and to work on open-ended tasks. It is easier for students to prove the theorems because they can verify the relation between objects first and then connect the relation with the axioms and theorems. The coordinate geometry task can also be solved by students in elementary schools, because the intersection of curves (subject not covered in elementary schools) can be calculated with program. By using ruler and compasses, some difficult tasks take too much time to solve them in designated time, the use of computers allow students to tackle more demanding tasks then previously. Constructions can also be saved and used later.

Here is an example on the use of Cabri Geometry for solving a task from Močnik's text book.



The triangle  $DBP$  can transform into a triangle  $BDT$ . We vary the position of a point  $P$  along the segment  $CT$  and measure the respective area. It is constant. WHY? Because the segment  $BP$  is parallel to  $CD$  so the altitude of the triangle with base  $PD$  is constant.

We end our list of application with the following task: Two squares are inscribed in an equilateral triangle with the base  $c$ , the altitude  $v$  and the angle  $\alpha$  (the figure below). The point  $P \in AC$  could be move along the side. It is easy to see, that the sum of the bases of two squares is constant.

We would like to know, when the sum of the areas of the both squares is minimal. Let be the sum of the two bases of the square  $t$

$$t = a_1 + b_1 \quad b_1 = t - a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1^2 + (t - a_1)^2 = p,$$

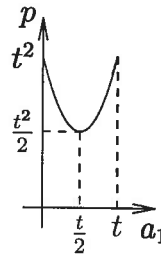
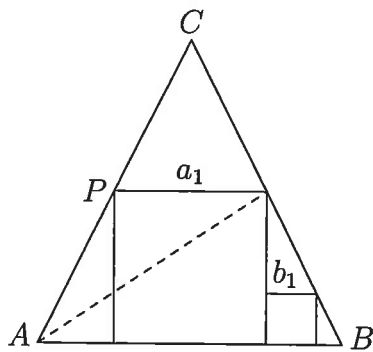


REFERENCES

where  $p$  is the sum of the areas of the two squares. How the sum of the areas is related with the side  $a_1$ ?

$$p = a_1^2 + t^2 - 2ta_1 + a_1^2 \quad p = 2a_1^2 - 2ta_1 + t^2 = 2\left(a_1 - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{2}$$

The sum is a quadratic function of  $a_1$ . This relation can be discovered with using the loci function. The graph of  $p(a_1)$  is a parabola. The least value of  $p(a_1)$  is in the vertex  $T(t/2, t^2/2)$ .



The sum has least value when:

$$a_1 = \frac{t}{2} \quad b_1 = t - a_1 = \frac{t}{2} \quad a_1 = b_1 = \frac{cv}{c + 2v} \quad p = \frac{2c^2v^2}{(c + 2v)^2}$$

Conclusion: the two squares are congruent. The common side is on the altitude of the triangle.

We can see (and calculate) that the largest inscribed square has one vertex on the side  $AC$  and one on the side  $BC$  and the smaller square is inscribed beside the big square on the left or the right side of the triangle.

The calculation is hard for elementary school students, but the hypotheses can be formed and tested visually and numerically using computer software. Using computer software, Euclidean geometry can be made easier to understand by elementary school students.

References

[1] dr. Fr. vitez Močnik, prevedel J. Celestina, Geometrija za nižje gimnazije, Prvi del, Ljubljana 1891

REFERENCES

7

- [2] dr. Fr. vitez Močnik, prevedel J. Celestina, Geometrija za nižje gimnazije, Drugi del, Ljubljana 1884
- [3] dr. France Križanič, Matematika 1, Prvo berilo, DZS, 1989, Ljubljana
- [4] Heinz Schumann, David Green, Discovering Geometry with a Computer, Chartwell-Bratt, 1994



## Stabilität und Wandel: Vergleich von Entwicklungs-Mustern für eine Geschichte mathematischer Lehrbücher seit der Antike.

Gert Schubring

### **Kurzfassung**

Thomas Kuhn hat den Lehrbüchern eine wesentliche Funktion in der Wissenschaftsentwicklung eingeräumt, allerdings beschränkt auf die Phasen "normaler" Wissenschaft. In der Tat gibt es in der Mathematikgeschichte bemerkenswerte, auch kulturübergreifende Beispiele einer hohen Stabilität von Lehrbüchern. Andererseits waren es aber in der Mathematikgeschichte auch immer wieder Lehrbücher, die Wandel eingeleitet haben. Es ist gerade dieses Spannungsverhältnis von Stabilität und Wandel, das Aufschluss über die Funktion von Lehrbüchern in unterschiedlichen Kontexten gibt und das im Vortrag dazu benutzt werden wird, um charakteristische Phasen der Entwicklung der Mathematik voneinander abzugrenzen.

### **Moderne „Klassiker“**

Mathematik-Lehrbücher bilden offenbar Paradigmen für Klassiker, für Stabilität in der Lehrbuch-Produktion, wo Generationen von Lernenden mit dem gleichen Lehrtext konfrontiert sind. Zunächst möchte ich einige eindruckliche Beispiele für solche Stabilität zeigen, bevor ich zu der Diskussion übergehe, wie Wandel in diesen Bereich der Stabilität eindringen kann.

Ein solches Beispiel aus Deutschland ist die Aufgabensammlung von Ernst Bardey (1828-1897), die zuerst 1875 erschienen ist, und von der es 1925 - nicht gerechnet die vielen regionalen Ausgaben und Überarbeitungen die 33. Auflage gab:

Dr. E. Bardeys Aufgabensammlung: methodisch geordnet; mehr als 8000 Aufgaben enthaltend über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Alte Ausg., 33. Aufl. (Leipzig: Teubner, 1925).

Ein weiteres klassisches Beispiel aus Deutschland ist die Aufgabensammlung von Eduard Heis (1806-1877) - zuerst 1838 erschienen, als der Autor noch Lehrer in Aachen war. Später war er Mathematikprofessor an der Akademie in Münster. 1900 erschien bereits die 101. Auflage:

Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra; in systemat. Folge bearb. für Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen u. Gewerbschulen von Eduard Heis. - 99.-101. Aufl. (Köln: DuMont-Schauberg, 1900).

Ein besonders bemerkenswertes Beispiel ist die Elementargeometrie von Andrey Petrovich Kiselev (1852-1940): deren erste Auflage erschien 1893, noch im zaristischen Rußland. Nach der Oktoberrevolution blieb das Buch ein Klassiker und wurde in den Schulen der Sowjetunion bis zu den 1960er Jahren benutzt, als es von der Modernisierung des Mathematikunterrichts verdrängt wurde. Aber in den 1990er Jahren wurde es wieder populär - 1996 erschien eine neue Auflage, basierend auf der Ausgabe von 1931!

Kiselev, Andrej Petrovic: Elementarnaja geometrija: kniga dlja ucitelja. (Moskva: Prosvescenie, 1996).

### **Historische „Klassiker“**

Diese recht modernen Repräsentanten von Stabilität kann man ergänzen durch noch wesentlich langlebigere und noch stärker international verbreitete Lehrbücher:

- die Elemente der Geometrie, von Euklid, ca. 300 v.u.Z., und als Gegenstück zu diesem Jahrtausende hindurch wirkungsvoller Klassiker in Europa



- für China *Jiu Shang Suan Shu*, von einem unbekanntem Autor, um ca. 200 v.u.Z., zumeist übersetzt als *Nine Chapters of Arithmetic*. Da aber sowohl arithmetische Methoden dargestellt werden, als auch deren Anwendung in der Geometrie, könnte man den Titel besser als "Neun Kapitel des Sachrechnens" übersetzen.<sup>1</sup>

- Diesen beiden Paradigmen der Stabilität möchte ich noch ein Beispiel aus der arabischen Zivilisation an die Seite stellen:

*Miftah al-Hisab*, von Jamshid al-Kashi (ca. 1390-1450), von ca. 1440: Der Schlüssel zum Rechnen (oder besser: zum Sachrechnen). Dieses Buch ist nicht eigentlich ein klassisches Lehrbuch geworden, da es ein umfangreiches Handbuch darstellt, das praktisch das bekannte Wissen der elementaren Mathematik enthält, jedoch hat sein Titel die Lehrbücher in zahlreichen Kulturen zur Übernahme des Titels "Schlüssel" angeregt.

Die genannten Beispiele belegen das durchgängige Muster von hoher Stabilität; es ist schwer zu identifizieren, wie Wandel entstehen kann - jedenfalls wenn mehr als bloße textliche Redaktionen gemeint sind.

### „Normal science“ versus „Vulgata“

Solche invarianten Strukturen werden auch gerade von der bestehenden historischen Literatur bestätigt. Eine sehr einflußreiche und wichtige - und mehrfach übersetzte - einschlägige Studie ist eine Arbeit von André Chervel von 1988. Chervel, Forscher am *Service d'Histoire d'Éducation* des INRP in Paris, argumentiert darin intensiv für die Unabhängigkeit der Geschichte der Schulfächer von der Geschichte der Erziehung, da letztere die Inhalte des Unterrichts ausblendet, zugunsten der implizierten sozialen Prozesse.

Lehrbücher, als Kernelemente der Geschichte jedes Schulfaches, erfahren durch den Autor praktisch eine Apotheose. Ihm zufolge macht der umfangreiche Bestand an Lehrbüchern das Phänomen einer „Vulgata“ in praktisch allen Lehrfächern deutlich:

„Innerhalb jeder Epoche ist der Unterricht, wie er von den Lehrern gegeben wird, im wesentliche identisch. Alle Lehrbücher, oder fast alle, stellen dann die gleichen Dinge dar, oder fast die gleichen. Die gelehrten Begriffe, die benutzte Terminologie, die Einteilung in Abschnitte und Kapitel, [...], sind identisch, bis auf einige Varianten“ (Chervel 1988, 95; meine Übers., G.S.).

Den jeweiligen Grundtypus nennt Chervel die *Vulgata* des Schulfachs und erklärt die Beschreibung und Analyse dieser *Vulgata* zur Hauptaufgabe des Historikers eines Schulfaches. Chervel hat aber auch Brüche zwischen Epochen reflektiert. Die Geschichte eines Schulfaches alterniere oft zwischen Perioden der Stabilität („paliers“) und grundlegenden Veränderungen, ja Umwälzungen. Dann ersetze eine neue *Vulgata* die bisherige und begründe eine neue Phase von Stabilität, unabhängig von den unvermeidlichen Varianten. Die Phasen der Stabilität seien voneinander getrennt durch Phasen des Übergangs oder der Krise, in der die bisherige Lehre Turbulenzen erfahre und in denen das Alte und das Neue nebeneinander bestehen. Schließlich setze sich aber ein Lehrbuch als dominierend durch und bestimme, was jetzt die neuen, anerkannten Methoden sind. Es definiere jetzt die neue *Vulgata* (ibid.).

Chervel hat also versucht, sowohl Stabilität wie Wandel und deren Verhältnis zu reflektieren – unter evidenter Nutzung von Thomas Kuhns Begriffen des Paradigmas, der *normal science* und der wissenschaftlichen Revolution, allerdings diese Ausdrücke ersetzend durch die theologisch geprägten der *Vulgata*.

<sup>1</sup> Die Neun Kapitel sind vor kurzem in einer vorzüglichen und umfangreich kommentierten Edition erschienen: *Les neuf chapitres : le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* . - Éd. critique bilingue, nouvelle présentation / trad., présentée et annotée par Karine Chemla et al. (Paris: Dunod, 2005).

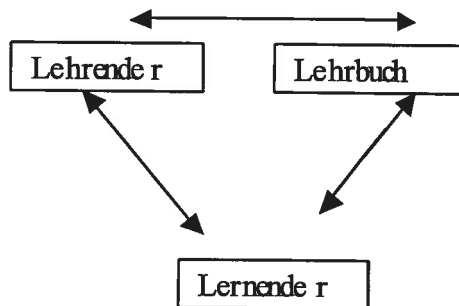


Chervels Studie hat das Verdienst, systematisch die Reflexion auch auf Umbruchphase gelenkt zu haben. Es gibt jedoch keine Hinweise auf Untersuchungen zu möglichen Ursachen für Umbrüche, für ihre Abfolge und für die schließliche Wendung zu neuer Normalität. Wenn man jedoch nicht an Geschichte als einer bloßen Sammlung von Daten interessiert ist, sondern an einer strukturellen Geschichte, sollte man nicht nur den Ursachen für tiefgehende Umschwünge nachforschen, sondern auch versuchen, die Strukturen und Muster aufzudecken, die Stabilität bestimmen.

## **Wandel und Kontexte**

Für eine solche Strukturgeschichte ist Chervels Ansatz allerdings nicht hilfreich, da sich bei näherer Betrachtung zeigt, daß er nur ein einziges Muster von Entwicklung voraussetzt und nicht unterschiedliche Muster begrifflich fasst. In der Tat besteht das bei ihm vorausgesetzte Muster in der französischen zentralistischen Praxis von Unterrichtspolitik. Um jedoch allgemeinere strukturelle Muster ermitteln zu können, sind Vergleiche zwischen unterschiedlichen Bildungssystemen und Kulturen erforderlich.

Eine erste Annäherung an übergreifende strukturelle Muster ergibt sich durch die vorgängige Systematisierung der Situationen, wo und wie Lehrbücher genutzt werden. Die Reflexion dieses Rahmens macht bereits evident, daß die Funktion von Lehrbüchern im Lehr- und Lernprozeß historisch enorm variiert hat und daß sie von vielfältigen kulturellen Faktoren abhängig ist. Phasen der Normalität und von „Revolutionen“ erfolgen daher nicht uniform, sondern zu unterschiedlichen Zeitpunkten und aus unterschiedlichen Anlässen in den verschiedenen Ländern und Kulturen. Ein Schema – praktisch ein didaktisches Dreieck - soll dazu dienen, um die Grundstrukturen und deren Veränderlichkeit zu illustrieren:



Benutzung, Rolle und Funktion von Lehrbüchern hingen von einer Vielzahl materieller, sozialer und kultureller Faktoren ab. In der Tat gab und gibt es zwei Medien im Lehr- und Lernprozeß: das Lehrbuch und den Lehrer.

## **Wandel der Funktionen innerhalb des „Dreiecks“**

Die erste – und bislang zeitlich längste – Epoche war diejenige vor Erfindung der Druckerpresse. Lehrtexte waren für diese Epoche Manuskripte. Schon weil die Herstellung bzw. Erhaltung der Manuskripte aufwendig und schwierig war – siehe Keilschrifttafeln, Papyri oder Palmblätter – existierte zumeist nur ein Exemplar eines Manuskripts für eine gegebene Lernsituation. Und diese Kopie war in der Hand des Lehrenden. Zugleich ist als allgemeines Strukturelement festzuhalten, daß kulturübergreifend *Oralität* die beherrschende Form insbesondere auch der Wissensübermittlung war. Diese Strukturelemente gemeinsam

bewirkten, daß der Lehrende das „Organ“ des Lehrbuchs war, daß also das Lehrbuch das entscheidende Element im didaktischen Dreieck war:

- der Lehrende diktierte den in Manuskript-Form vorhandenen Text und überwachte dessen korrekte Übermittlung/Auffassung durch die Lehrenden; er musste nicht spezifisch fachlich qualifiziert sein;
- die Lernenden mussten das Diktierte memorisieren; ihre Rolle war passiv, aufnehmend.
- das Wissen war statisch; es gab keine Anregung zur Weiterentwicklung. Im Gegenteil ging es darum, die klassischen Texte korrekt zu tradieren.
- in diesem Sinne fungierte ein Lehrbuch durchaus als *Vulgata* – aber es waren unterschiedliche *Vulgatae* in verschiedenen Ländern. Siehe das Beispiel des Gegensatzes der Elemente Euklids und der Neun Kapitel, mit ihren gegensätzlichen Methodologien einer deduktiven Struktur vs. Prozeduren zur Problemlösung.

Die Erfindung der Druckerpresse bewirkte in den Ländern, in denen sie eingesetzt wurde, erstmals strukturelle Veränderungen innerhalb des didaktischen Dreiecks. Das Manuskript wurde zum gedruckten Lehrbuch und konnte auch in die Hand des Lernenden gelangen.

Dadurch veränderte sich die Rolle der Oralität:

- die Lernenden waren nunmehr grundsätzlich in der Lage, nicht mehr nur passiv aufnehmen zu müssen, sondern anhand eigener Arbeit mit dem Lehrbuch eine aktive Rolle gegenüber Lehrbuch und Lehrendem einzunehmen;
- gleichzeitig waren die Lehrenden nicht mehr notwendig dem Lehrbuch untergeordnet; sie wurden fähig, selbst über das zu lehrende Wissen zu arbeiten und dazu auch eigene, neue Lehrbücher zu publizieren.
- Insgesamt konnte jetzt gegenüber der Orthodoxie und Tradition eine Dynamik der Entwicklung von Wissen eingeleitet werden.

Auf der anderen Seite wurden nunmehr soziale und politische Faktoren wirksam, die solche Dynamik sich nur in beschränkter Weise wirksam werden ließen. Solange noch kein staatlich organisiertes allgemeines Bildungssystem bestand, also vor dem 19. Jahrhundert, fehlten die Voraussetzungen, um den Lehrenden eine eigenständige Funktion im didaktischen Dreieck zu ermöglichen.

Charakteristisch dafür sind die *Kollegs/collèges/colegios* des Jesuitenordens, der dominierenden Form höherer Schulen in den katholischen Territorien, die dort auch keine universitäre Form der Lehre entstehen ließen. Dort durfte nur ein zentral vorgeschriebenes Lehrbuch benutzt werden. Und die Lehrer - Novizen des Jesuitenordens - waren weithin nicht spezifisch für diesen Unterricht qualifiziert. Trotz erheblich eingeschränkter Rolle der Oralität und trotz der Benutzung gedruckter Lehrbücher hatte auch hier noch das Lehrbuch die dominierende Rolle inne.

### **Die Französische Revolution – ein Wandel auch der Lehrbuchfunktionen**

Es war schließlich ein politisches Ereignis, das die erste effektive "Revolution" in Einsatz und Funktion von Lehrbüchern bewirkte: die Französische Revolution von 1789. Ihr erster Effekt bestand allerdings darin, die Dominanz des Lehrbuchs noch zu verstärken. Da alle *collèges* und Universitäten als traditionelle Korporationen aufgelöst worden waren, bestand eine *tabula rasa* im Bildungssystem. Man wollte keine neuen Korporationen entstehen lassen und konzipierte daher keine Institutionen für Lehrerbildung. Vielmehr sollten neue, wissenschaftsorientierte Lehrbücher, die sog. *livres élémentaires*, im Sinne der Aufklärung die weitere Verbreitung von Vorurteilen verhindern und modernes Wissen unter den Bürgern

verbreiten. Die erste konkret ergriffene Maßnahme war daher 1794 die Ausschreibung eines *concours*, zur Erstellung der besten Lehrbücher für insgesamt zehn Lehrdisziplinen. Anhand der so erwarteten Modell-Lehrbücher sollten sich Lehrer bilden und Schulen eröffnen (s. Schubring 1982).

Der *concours* endete aber mit einem Scheitern: einerseits dauerte die ganze Prozedur einschließlich Auswertung und Entscheidung darüber insgesamt zwei Jahre; andererseits war das Ergebnis des *concours* ernüchternd mager. Da das Bildungssystem nicht solange blockiert bleiben konnte, wurde 1795 die *École Normale* gegründet, als erste Hochschule für wissenschaftliche Lehrerbildung. Führende Wissenschaftler Frankreichs wurden dort als Dozenten tätig. In revolutionären Kursen von nur vier Monaten Dauer sollten Lehrer ausgebildet werden, die in den Distrikten Schulen eröffnen sollten. Das eigentliche Ziel von Primarlehrerbildung wurde nicht erreicht, eher der Ausbildung von Lehrern höherer Schulen (*ibid.*)<sup>2</sup>

Dafür realisierten die Wissenschaftler an der *École Normale* erstmals eine führende Funktion des Lehrenden, zudem in einer neuen Form von Oralität: Ihre Lehre beruhte nicht auf bestehenden Lehrbüchern, sie schufen vielmehr neue: ihre ganz innovative Lehre diente der Elementarisierung des modernen Standes der jeweiligen Wissenschaft, dank dessen Integration in die neu entwickelten Grundlagen des Faches. Die mündlich vorgetragenen Neustrukturierungen wurden von Stenographen mitgeschrieben - gleichfalls eine entscheidende Innovation für die Umkehrung der Rollen im didaktischen Dreieck! -, gedruckt, von den Dozenten sofort korrigiert und diese Druckbogen den Studenten schon nach wenigen Tagen ausgehändigt, so daß sie in Skriptenform wissenschaftliche Lehre als Lehrbuch erhielten.

### **Zentralismus versus methodische Autonomie**

Diese innovative Praxis war nicht von langer Dauer. Unter Napoleon erfolgte die Rückkehr zur Dominanz des Lehrbuchs; in der neuen Form eines strikt zentralisierten öffentlichen Schulsystems.

Tatsächlich schärfte das Unterrichtsgesetz von 1802, mit dem die *écoles centrales* aufgelöst und durch die *lycées* ersetzt wurde, den Lehrern ein, keinerlei andere Lehrtexte als das zentral vorgeschriebene Lehrbuch zu benutzen:

"Le professeur ne pourra, sous quelque prétexte que ce soit, enseigner d'autres ouvrages" (zit. n. Schubring 1984, 371).

Zugleich erfolgte ein Wandel der kulturellen und sozialen Werte. Nicht mehr standen die Mathematik und die Naturwissenschaften in höchstem Ansehen, gemäß ihrer Funktion in der Aufklärung, mit modernem Wissen die *préjugés* zu bekämpfen - es setzte wiederum eine Orientierung auf Literatur und das Altertum ein. Das Konzept der *livres élémentaires* wurde daher durch das der *livres classiques* ersetzt.

In dieser Unterrichtspolitik gelang es einem Lehrbuchautor, Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), sich praktisch als den Monopolisten des Lehrbuchmarktes für den Mathematikunterricht zu etablieren. 1803, bei der ersten Festlegung der Schulbücher für ganz Frankreich, waren nur seine Lehrbücher für Mathematik zugelassen (Schubring 2003, 104).

---

<sup>2</sup> Mit dieser ersten Etablierung eines öffentlichen gesamtstaatlichen Bildungssystems differenzierten sich nunmehr auch Lehrbücher für die Hochschulen und Lehrbücher für das Schulwesen. Auf deren sich herausbildende strukturelle Differenzen kann hier nicht eingegangen werden.



Es ist diese Situation eines strikten Zentralismus, die in Chervels Konzeptualisierung des Wirkens von *Vulgatae* vorausgesetzt ist.<sup>3</sup>

Dieses französische Modell des zentralen Vorschreibens eines einzigen Lehrbuchs für das betreffende Schulfach oder -teilmfach hat in anderen Ländern immer wieder eine große Attraktivität ausgeübt.<sup>4</sup> Es war verbunden mit der Leitidee, es sei möglich und erreichbar, "das beste" Lehrbuch für ein Fach zu finden. Diese Leitidee hat sich aber immer wieder als Illusion erwiesen.

Ein zu Frankreich ganz konträres Modell ist im 19. Jahrhundert in Deutschland, und dort insbesondere in Preußen praktiziert worden - aufgrund unterschiedlicher politischer, sozialer und kultureller Bedingungen. Es war insbesondere das Programm der neuhumanistischen Bildungsreform, das auf dem Imperativ der Selbsttätigkeit beruhte, das dem Lehrer an den reformierten höheren Schulen, den Gymnasien, einen hohen sozialen Rang zusprach, das eigene wissenschaftliche Produktion förderte und ihm dann den Status eines Gelehrten zusprach. Die unmittelbare Konsequenz und Anwendung war, daß der Lehrer eine weitgehende Autonomie im Beruf genoß, daß ihm die "Freiheit der Methode" zustand und mithin auch die Auswahl des Lehrbuchs.

Es ist nun charakteristisch, daß eine große Anzahl gerade der guten Lehrer eine eigene selbständige Auffassung sowohl von der Methode wie der Epistemologie der Mathematik hatten und es demzufolge vorzogen, statt fremde Lehrbücher zu benutzen ein Lehrbuch nach der eigenen Konzeption zu verfassen. Tatsächlich ergibt eine vergleichende Auswertung der Produktion mathematischer Lehrbücher von 1775 bis 1829 in verschiedenen europäischen Ländern mit denen in den größeren deutschen Staaten einen enormen Unterschied zwischen der Anzahl sogar in Frankreich und der Anzahl in Preußen alleine aber noch massiver mit der in allen deutschen Staaten (Schubring 1990, 126).

Diese starken Unterschiede haben durch das ganze 19. Jahrhundert hindurch bestanden (vgl. etwa Greve/Rau 195x). Aufgrund der so erheblich differierenden epistemologischen und methodischen Auffassungen der Mathematiklehrer zeigte die große Anzahl der Lehrbücher in Deutschland in der Tat auch deutliche Unterschiede; sie waren keineswegs mehr oder weniger identisch. Walther Lietzmann hat die Unterschiedlichkeit der Auffassungen der Mathematik, die zu der großen Anzahl publizierter konkurrierender Lehrbücher führte als "mathematischen Subjektivismus" der Mathematiklehrer kritisiert - eine bemerkenswerte Kritik angesichts der vielbeschworenen Objektivität der Mathematik (Lietzmann 1909).

### **Differenzierungen in den Funktionen**

Neben diesem Wandel in den gegenseitigen Grund-Verhältnissen des "didaktischen Dreiecks" gibt es weitere Dimensionen in Produktion und Einsatz von Lehrbüchern, in denen Wandel erfolgen kann - und auch wiederum unterschiedlich in verschiedenen Kontexten.

Eine erste solche Dimension bildet die Erstellung unterschiedlicher Formen von Lehrbüchern für verschiedene Nutzer. Die wichtigste solche Unterscheidung ist die eines eigenen Handbuchs für Lehrer, gegenüber den Lehrbüchern für die Hand der Schüler. Die Unterscheidung zwischen diesen zwei Formen ist zuerst von Condorcet 1792 vorgeschlagen worden. Zum ersten Mal realisiert worden ist sie von J. B. Sarret 1794, der damit ein Konzept Condorcets ausgearbeitet und den Preis für Mathematik im *concours* gewonnen hat (Schubring 1988a).

<sup>3</sup> Die verschiedenen Phasen und Formen der staatlichen Zulassung von Schulbüchern in Frankreich im 19. Jahrhundert sind analysiert in Choppin 1986. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts bestand teilweise das System des "veto", des erst nachträglichen Ausschlusses von für ungeeignet gehaltenen Schulbüchern.

<sup>4</sup> Siehe den gescheiterten Versuch von A. L. Crelle 1829, in Preußen ein zentrales Lehrbuch vorzuschreiben (Schubring 1988).



Dieses neue Konzept ist zunächst auch in Preußen aufgegriffen worden, mit den Lehrer-Handbüchern zu J. A. Matthias' heuristischem Leitfaden von 1813 (1814-15) und zu Ernst Gottfried Fischers Lehrbuch der Elementarmathematik, 1820-1824. Doch diese beiden frühen Lehrbuchwerke der neuhumanistischen Gymnasialreform blieben auch die einzigen. Es setzte sich dann die Meinung durch, daß solche Lehrerhandbücher im Gegensatz stehen zur Autonomie des Lehrers, zu seiner methodischen Freiheit. Die bevorzugte Form in Preußen wurde eine andere Paarung: ein kurzer Leitfaden für die Hand des Schülers, der mit der methodischen und epistemologischen Konzeption des jeweiligen Mathematiklehrers übereinstimmte, und eine Aufgabensammlung, auch für die Hand des Schülers: da die Aufgaben relativ neutral waren gegenüber den Mathematik-Auffassungen, konnten sie mit den meisten Lehrbüchern zusammen zur Übung und Festigung eingesetzt werden.

### **Wandel in der Wissenschaft**

Die letzte wesentliche, hier zu besprechende Dimension für die Lehrbuchgeschichte und für das Verhältnis von Stabilität und Wandel ist die Auswirkung von Wandel in der Wissenschaft Mathematik auf die Inhalte von Mathematik-Lehrbüchern. Es ist merkwürdig, daß diese Dimension in Chervels Studie weder diskutiert noch überhaupt erwähnt ist. Der Grund ist offenbar, daß er eine Unabhängigkeit des Schulwissens postuliert - eine jedenfalls für die Mathematik ganz ungeeignete Auffassung.

In der Tat bildet es eine wichtige und zentrale Herausforderung zu untersuchen, aufgrund welcher Prozesse Veränderungen in der Wissenschaft Mathematik sich in der Lehre der Mathematik niedergeschlagen haben - sei es im Hochschulbereich, oder sei es, insbesondere seit dem 19. Jahrhundert, in den höheren Schulen -, und wie dabei die Schulmathematik ergänzt oder überhaupt rekonstruiert worden ist.

Einen Schlüsselgegenstand sowohl für die Entwicklung der Mathematik wie für die Architektur der Schulmathematik bildet das Verhältnis von Geometrie und Arithmetik/Algebra. Historisch läßt sich diese Grundrelation aufschlußreich an der Rezeption der Proportionentheorie in Euklids V. Buch studieren. Aus einem ursprünglich geometrischen Konzept zum Operieren mit inkommensurablen Größen entwickelte sich schließlich die arithmetisierte Theorie der reellen Zahlen.

Im Vortrag wurden die Konflikte zwischen den unterschiedlichen Sichtweisen auf das Verhältnis von Geometrie und Algebra in verschiedenen mathematischen Kulturen am Fall der divergierenden Rezeptionen von Adrien Marie Legendres (1752-1833) berühmten Geometrielehrbuch *Eléments de Géométrie* (1794) aufgezeigt. Analysiert wurden insbesondere die Rezeptionen in Frankreich, Griechenland, Italien, England und den USA - mit dem Ergebnis, daß z.B. in den USA am Ende des 19. Jahrhunderts die von Charles Davies bearbeiteten Ausgaben kaum noch eine Ähnlichkeit mit dem Original aufwiesen.<sup>5</sup>

Im Gegensatz zur Auffassung von Thomas Kuhn sind Lehrbücher jedenfalls für die Mathematik nicht nur der Ausdruck von *normal science*, sondern durchaus auch von Wandel.

### **Bibliographie**

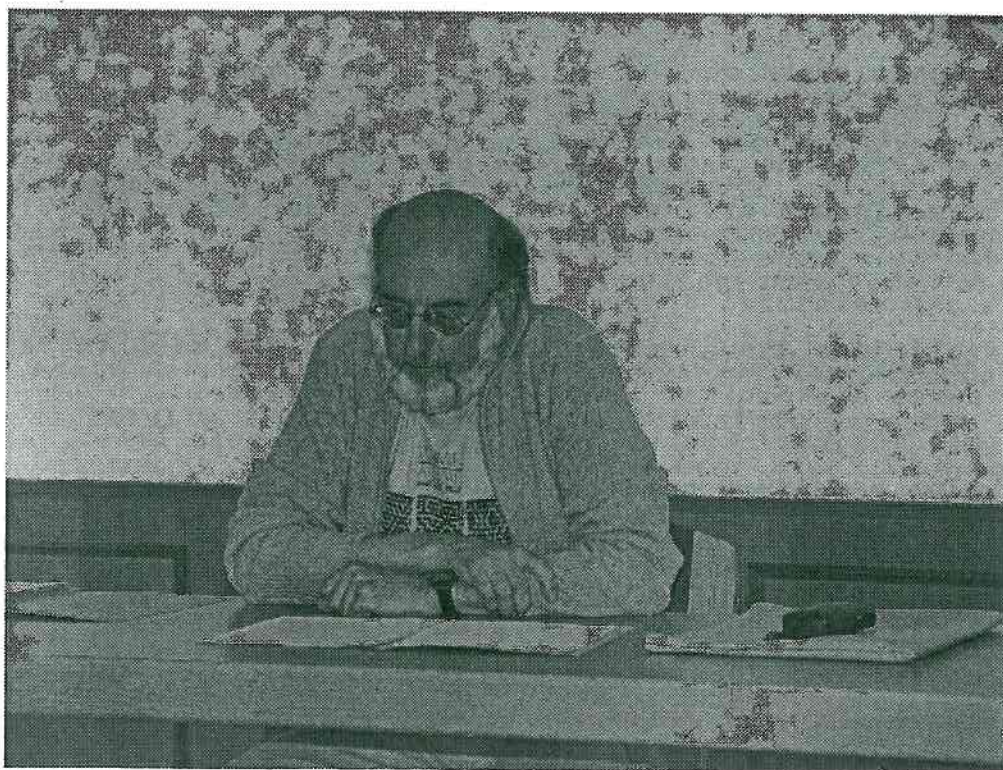
André Chervel, „L'histoire des disciplines scolaires. Réflexions sur un domaine de recherche“, *Histoire de l'éducation*, no. 38, mai 1988, 59-119.

---

<sup>5</sup>

Insbesondere zur Rezeption und Kritik in Italien siehe Schubring 2004.

- Alain Choppin, „Le cadre législatif et réglementaire des manuels scolaires. I. De la Révolution à 1939“, *Histoire de l'éducation*, no. 29, 1986, 21-58.
- Erika Greve/Heinz Rau, „Schulbücher für den mathematischen Unterricht im 19. Jahrhundert, *Mathematisch-physikalische Semesterberichte*, 1959, 6: 311-336.
- Walther Lietzmann, *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen: auf Grund der vorhandenen Lehrbücher* (Leipzig: Teubner, 1909).
- Gert Schubring, "Die Mathematik an der Ecole Normale des Jahres III - Wissenschaft und Methode", *Wissen und Bewußtsein. Studien zur Wissenschaftsdidaktik der Disziplinen*, Hrsg. F. Schmithals. (Hamburg: Arbeitsgemeinschaft für Hochschuldidaktik, 1982), 103-133.
- Gert Schubring, "Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, particulièrement en France et en Prusse", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1984, 5, 343-385.
- Gert Schubring, "Der Lehrer: "ein Organ seines Lehrbuchs"? Staatliche Vorschrift kontra methodische Autonomie (1829)", *Der Mathematikunterricht*, 1988, 34:1, 4-29.
- Gert Schubring, Introduction: "Un savant des lumières - Un livre élémentaire pour la république", *CONDORCET - Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Appareil critique - études, notes, commentaires, bibliographie*. (Paris: ACL-éditions 1988). 157-175. [1988a]
- Gert Schubring, "Probleme vergleichender Analyse historischer Lehrbücher", Hrsg. Hans-Georg Steiner, *Mathematikdidaktik, Bildungsgeschichte, Bildungsgeschichte II* (Köln: Aulis 1990). 123-136.
- Gert Schubring, *Análise Histórica de Livros de Matemática. Notas de Aula* (Campinas: Editora Autores Associados, 2003).
- Gert Schubring, "Neues über Legendre in Italien", *Mathematik im Fluss der Zeit*. Algorismus, Heft 44, Hrsg. W. Hein, P. Ullrich (Augsburg: ERV Rauner, 2004), 256-274.



## JOHANN SEBASTIAN BACH UND DIE MATHEMATIK

Miloš Čanak, Beograd

## I

Johann Sebastian Bach/Eisenach 21 März 1685, Leipzig 28 Juli 1750/ war einer der grössten Tonmeister aller Zeiten. Er steht an der Wende zweier Stilepochen. Seine Kunst stellt eine gewaltige Synthese der alten polyphonen Musik mit dem konzertierenden Stil der neuen, in Italien entstandenen, harmonisch gebundenen Musik. Sie ist der krönende Abschluss der Epoche linear kontrapunktischer Vielstimmigkeit, die durch Charakteristik und Logik der Stimmführungen und durch kühne, ausdrucksstarke Harmonik bereichert wird.

Seinen Zeitgenossen war Bach im allgemeinen nur als unvergleichlicher Orgelvirtuos bekannt. Die wenigen Werke, die zu seinen Lebzeiten im Druck erschienen waren, wurden bald vergessen. Erst etwa fünfzig Jahre nach seinem Tode wies Forkel auf den grossen Meister hin. Beethoven bewunderte Bachs Werk "Das wohltemperierte Klavier". Aber erst die Aufführung der Mathäuspassion durch Mendelssohn in Berlin hundert Jahre nach ihrer Entstehung /1829/ lenkte die allgemeine Aufmerksamkeit auf Bach. Man erkannte seine überragende Bedeutung. Die Unerschöpflichkeit der melodischen und harmonischen Erfindung, der Reichtum der vielgestaltigen Rhythmik, die zwingende Klarheit des formalen Aufbaus, die Grosse und Tiefe der geistigen Konzeption, haben seinen Schöpfungen in der Folgezeit jene Ausnahmestellung verliehen, die sich in der Bewunderung durch die Musiker aller Richtungen spiegelt.

Die Musikerforscher haben ausführlich sein Leben, seine Werke und seine Bedeutung untersucht. Aber man kann eine andere Frage stellen: Warum sind die Mathematiker mit Bach so begeistert und welche "Mathematik" erfinden sie in seinen Werken?

Viele Verfasser befassen sich mit dem erwähnten Thema. In diesem Artikel macht man einen Spaziergang durch die Literatur über die Zusammenhang zwischen den Werken von Johann Sebastian Bach und der Mathematik.



## II

In seinem Buch "Mathematik im Reich der Töne"/siehe [1]/ gibt Eberhard Schröder eine mathematische Erklärung des chromatisch-temperierten Tonsystems.

Als erstes stellt man die Forderung, die Oktave rein zu bieten. An einem Instrument /z.B. Klavier/ sind weiterhin innerhalb einer Oktave zwölf Tonschritte einzubauen. Zwei Tonintervalle sind für unser musikalisches Empfinden genau dann gleich, wenn die Quotienten ihrer Frequenzen miteinander übereinstimmen. Andererseits soll sich die Frequenz- auf zwölf Tonschritte gleich verteilt- verdoppeln. Beide Forderungen sind erfüllt, wenn der Quotient der Schwingungszahlen zweier benachbarter, sonst beliebig wählbarer Töne  $q = \sqrt[12]{2}$  ist, denn es muss gelten  $q^{12} = 2$ . So ergibt sich folgende Lösung für die Verhältnisse der Tonfrequenzen:

c	des	d	es	e	f	fis	g	as	a	b	h	c'
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[6]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2

was eine geometrische Folge darstellt.

Die ausserordentliche Überlegenheit des temperierten Systems liegt jedoch darin begründet, dass sie den Bau von Instrumenten fester Tonlage mit optimaler Modulationsfähigkeit ermöglicht. Bei den Klaviaturen derart gestimmter Instrumente ist die Tastenanordnung für die anschlagbaren Töne so getroffen, dass jede Tonart technisch spiebar ist.

Eine erste Anregung für die "gleichschwebend temperierte" Stimmung gab bereits 1482 der Italiener Bartolomé Ramos/um 1440-1491/ in Bologna in seinem Buch "De musica tractatus". Eine mathematische Ausarbeitung dieses Stimmungsprinzips enthält das Buch "Harmonie universelle" des französischen Mathematikers Marin Mersenne. Bahnbrechend für die gleichschwebend temperierte Stimmung wirkte der Halberstädter Organist Andreas Werckmeister/1645-1706/ durch sein 1691 erschienenes Buch mit dem umfänglichen Titel: "Musikalische Temperatur, oder deutlicher und warer mathematischer Unterricht/Wie man durch Anwendung des Monochordi ein Klavier/sonderlich die Orgelwerke/Positive, Regale, Spinnetten/und dergleichen wohl temperiert stimmen könne ....."/siehe [1]/. Johann Sebastian



Bach trat gleichfalls als Komponist und virtuoser Organist mit allem Nachdruck für das neue Tonsystem ein. Seine Instrumente Klavichord und Spinett waren in entsprechender Weise gestimmt. Ferner schrieb er die berühmten achtundvierzig Präludien und Fugen für das "Wohltemperierte Klavier". Damit suchte er zu beweisen, dass auf dem gleichschwebend temperierten Instrument alle Tonarten technisch spielbar sind, ohne dass dabei ungewollte Dissonanzen in den Akkorden und Verfälschungen in der Melodie auftreten.

### III

Im Buch "Die Zahl e - Geschichte und Geschichten" von Eli Maor /siehe [2]/ wurde diese Idee durch einen interessanten Parallelismus zwischen der Familie Bach und Bernoulli weiter verarbeitet.

Unausweichlich vergleicht man die Bernoullis mit den Bachs. Beide Familiendynastien wirkten fast über den gleichen Zeitraum etwa 150 Jahre hindurch. Es gibt aber auch deutliche Unterschiede. Insbesondere überragt ein einziger Johann Sebastian Bach, alle anderen Angehörigen der Familie. Seine Vorfahren und seine Söhne waren alle begabte Musiker, von denen einige, wie Carl Philip Emanuel und Johann Christian, auch als Komponisten einen Ruf erlangten. Die überragende Gestalt von Johann Sebastian Bach stellte sie jedoch alle in den Schatten.

Im Falle der Bernoullis sind es drei, die über den anderen stehen: die beiden Brüder Jakob und Johann und der zweite Sohn des letzteren, Daniel. Die Familie Bach lebte in Harmonie miteinander: Väter, Onkel und Söhne widmeten sich friedvoll der Musik. Im Gegensatz hierzu waren die Bernoullis für ihre erbitterten Fehden und Rivalitäten bekannt, die sie untereinander, aber auch mit anderen ausfochten.

Mit Johann Sebastian Bach erreicht die Ära des Barock ihren Höhepunkt. Gleichzeitig kommt in einem grossen Finale eine Periode der Musik zum Abschluss, die fast zwei Jahrhunderte gewährt hatte. Die Bernoullis dagegen legten die Grundlagen für einige neue Gebiete der Mathematik, zu denen die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Variationsrechnung gehören. Gleich den Bachs taten sich auch die Bernoullis als Lehrer hervor und ihren Anstrengungen ist es zu ver-

danken, dass die gerade erfundene Infinitesimalrechnung auf dem europäischen Kontinent bekannt geworden ist.

Von den vielen Kurven, die seit der Einführung der analytischen Geometrie durch Descartes im Jahre 1637 das Interesse der Mathematiker geweckt hatten, nahm die logarithmische Spirale  $r = e^{a\theta}$  /Bild 1/ einen besonderen Platz ein. Sie war die Lieblingskurve von Jakob Bernoulli. Ihre wichtigste

Eigenschaft ist folgende: Lässt man den Winkel  $\theta$  um gleiche Beträge wachsen, dann vervielfacht sich der Abstand  $r$  vom Pol in gleichen Verhältnissen, das heisst, in einer geometrischen Folge.

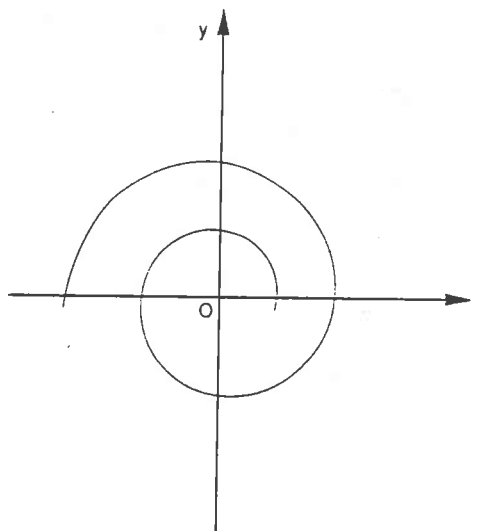


Bild 1

E. Maor stellt in seinem Buch die Frage: "Ist irgendein Mitglied der Familie Bach jemals einem der Bernoullis begegnet" und antwortet: Wahrscheinlich nicht. Im siebzehnten Jahrhundert war eine Reise ein Unterfangen, dem man sich nur aus zwingenden Gründen unterzog. Abgesehen von einer zufälligen Begegnung wäre der einzig denkbare Grund für ein derartiges Treffen ein übergrosses Interesse an der Tätigkeit des jeweils anderen gewesen. Dennoch drängt sich der Gedanke auf, dass ein solches Treffen stattgefunden haben könnte. Und E. Maor stellt uns eine mögliche Begegnung zwischen Johann Bernoulli/Johann I/ und Johann Sebastian Bach im Jahr 1740 vor. Jeder der beiden ist auf dem Gipfel seines Ruhmes. Bach ist im Alter von fünf- und fünfzig Jahren Organist, Komponist und Kapellmeister an der Thomaskirche in Leipzig. Der dreiundsiebzigjährige Bernoulli ist der bedeutendste Professor der Universität Basel. Die Begegnung findet in Nürnberg statt, ungefähr auf halbem Wege zwischen ihren Heimatstädten. Sie führen ein Gespräch, wobei Johann Bernoulli über die Eigenschaften der logarithmischen Spirale/Lieblingskurve seines Bruders Jakob/ spricht. Johann Sebastian Bach erklärt ihm das temperierte Tonsystem. Dann ersehen die beiden, dass die logarithmische Spirale gleichzeitig dieses Tonsystem beschreibt /Bild 2/.

Man soll die zwölf gleichen Halbtöne darauf eintragen. Um ein Stück von einer Tonleiter in eine andere zu transponieren, muss man die Spirale so drehen, dass der erste Ton der Tonleiter auf die x-Achse fällt. Die übrigen Töne kommen automatisch auf ihren Platz und man hat wirklich mit einer Art musikalischer Rechenschieber zu tun.

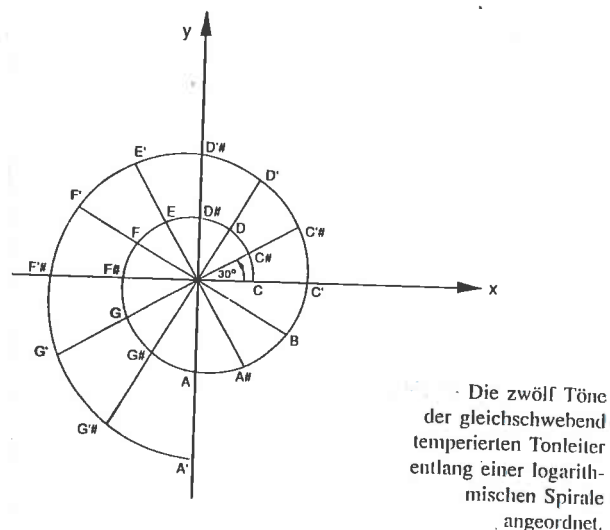


Bild 2

## IV

Das Thema "Musik und Mathematik" war Gegenstand des 15. Salzburger Musikgespräches 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan/siehe [3]/. Die Teilnehmer dieses Ostersymposiums repräsentierten ein breites Spektrum von der Musikwissenschaft bis zur Musikinterpretation und Komposition, von der Mathematik bis zur Informatik.

Mehrmals wurde Bach und seine Kunst der Fuge im Lichte der mathematischen Musiktheorie erwähnt. In seiner Arbeit "Musiktheorie und Mathematik /siehe [4]/ analysiert Rudolf Wille die Untersuchungen von Wolfgang Graeser /siehe [5]/ und zitiert ihn: "Bauen wir einmal ein kontrapunktisches Werk auf. Da haben wir zunächst ein Thema. Dies ist eine Zusammenfassung gewisser Töne, also eine Menge, deren Elemente Töne sind. Aus diesem Thema bilden wir eine Durchführung in irgendeiner Form. Immer wird die Durchführung die Zusammenfassung gewisser Themeinsätze zu einem Ganzen sein, also eine Menge, deren Elemente Themen sind. Da die Themen selber Mengen von Tönen sind, so ist die Durchführung eine Menge von Mengen. Und eine kontrapunktische Form, ein kontrapunktisches Musikstück ist die Zusammenfassung gewisser Durchführungen zu einem Ganzen, also eine Menge, deren Elemente Mengen von Mengen sind, wir können also sagen: eine Menge von Mengen von Mengen/ [5], Seite 17/". Zur Veranschaulichung der Graeserschen Begriffsbestimmung ist die erste Notenseite des Contrapunktus I aus Bachs "Kunst der Fuge" als

Mengendiagramm dargestellt.

Herbert von Karajan/[3],S.86/

hat gesagt:"Manche, besonders Bach, haben, ohne es wahrscheinlich überhaupt zu wissen, einfach von Natur aus dieses Gefühl gehabt. Wenn Sie die Kunst der Fuge genauer durcharbeiten, können Sie nicht anders als denken, dass Bach mit einem ungeheuren, mathematischen und auch zusammenfassenden Geist begabt war, der ihm das möglich gemacht hat und, obwohl er es nicht gewusst, sondern nur instinktiv gefühlt hat, ist eben dieses Kunstwerk herausgekommen. Wir haben in London eine Fuge von einem Computer herstellen lassen. Er war genau informiert über die Form und die Stimmführungsregeln. Es wurde ein vollkommen richtiges Stück. Nur es war keine Musik".

CONTRAPUNCTUS I

Fuga a 4 voci

JOHANN SEBASTIAN BACH  
(1685-1750)



V

In seinem Buch "Geometrie der Töne-Elemente der mathematischen Musiktheorie"/siehe[6]/ entwickelte Guerino Mazolla eine lokale Theorie der Symmetrien in der Musik. Eine von dieser Symmetrie ist die Symmetrie des Krebses. Sie ist anschaulich gesprochen die Spiegelung des Zeitablaufes an einem bestimmten Zeitpunkt. Die gewohnte Form des Krebses betrifft zwei Parameter: Einsatzzeit und Dauer. Er setzt sich zusammen aus einer Spiegelung in der Einsatzzeit, gefolgt von einer Scherung in Richtung Einsatzzeit, welche diese um die Dauer des gespiegelten Tones vermindert.

Insgesamt definiert man eine Symmetrie  $K_s / \cong$  Krebs/ die auf einen Punkt (E,D) der Ebene der Einsatzzeiten E und Dauern D so wirkt/Bild 4/

$$K_s(E,D) = (s - E - D, D) \quad .$$



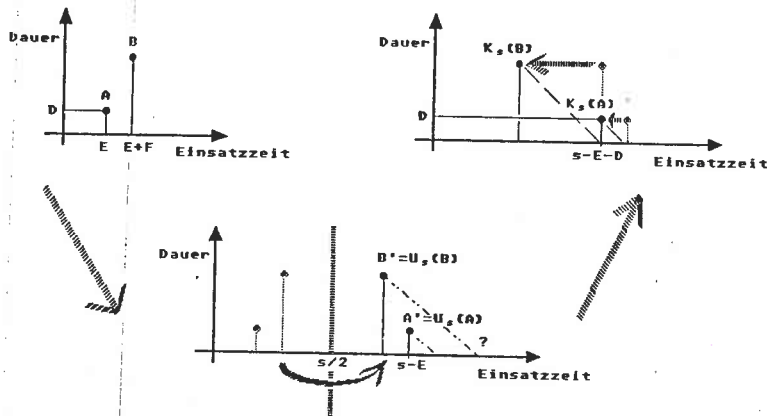


Bild 4

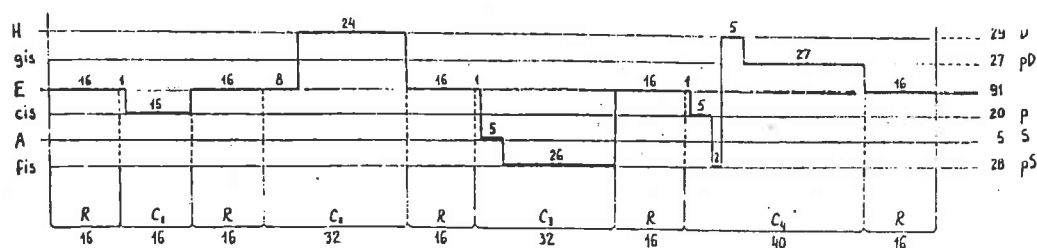
Als das beste Beispiel wählt Mazzola den Krebskanon von Bach aus dem Werk "Musikalisches Opfer"/siehe [7]/.

1. Canon a 2 cancrizans



VI

Der bekannte serbische Komponist und Musiktheoretiker D. Despić hat die dreiteilige Monographie "Tonalitätstheorie"/siehe [8], [9], [10]/ geschrieben, wo alle relevante Aspekte dieser Theorie mit verschiedener Beispiele aus der Musikpraxis verarbeitet werden. Ein solches Beispiel ist die Tonalitätsanalyse des Werkes "Gavotte en Rondeau" aus der Partita N.3, E-dur für Violine solo /Bild 6/. Die Tonalitätslinie liegt in einem mathematisch-musikalisches Koordinatensystem, wo die x-Achse gleichzeitig die Dauer/in Takten ausgedrückt/ darstellt.



Auf Grund dieser Analysis hat M.Čanak [11] alle mathematische Tonalitätsparameter ausgerechnet. Die Ergebnisse korrespondieren in einem grossen Teil mit der musikalischen Realität.

- - - - -

L I T E R A T U R

[1] Schröder E., "Mathematik im Reich der Töne", Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982.

[2] Maor E., "Die Zahl e - Geschichte und Geschichten", Engl. übers. von Manfred Stern-Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 1996.

[3] Götze H., Wille R., "Musik und Mathematik"-Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1985.

[4] Wille R., "Musiktheorie und Mathematik", Salzburger Musikgespräch 1984 ... s.4-31.

[5] Graeser W., "Bachs "Kunst der Fuge", In: Bach Jahrbuch 1924, 1-104.

[6] Mazzola G., "Geometrie der Töne-Elemente der mathematischen Musiktheorie", Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1990.

[7] Bach J.S.: Krebskanon aus: Musikalisches Opfer/BWV 1079/, Neue sämtl. Werke, Ser. VIII, Bd. 1. Bärenreiter, Kassel 1978.

[8] Despić D., "Teorija tonaliteta", Umetnička akademija u Beogradu, Beograd 1971.

[9] Despić D., "Opažanje tonaliteta", Univerzitet Umetnosti, Beograd 1981.

[10] Despić D., "Kontrast tonaliteta", Univerzitet Umetnosti, Beograd 1989.

[11] Čanak M., "Tonalitätstheorie im Lichte der mathematischen Musiktheorie", Dissertation, Beograd, 1996.

- - - - -

## Walshfunktionen und Anwendungen - ein historischer Überblick

Von Franz Pichler, Linz

### 1. Einleitung

Der amerikanische Mathematiker Joseph L. Walsh ( 1895- 1973 ) führte im Jahre 1923 ein vollständiges orthogonales Funktionensystem für den Hilbertraum der über dem Einheitsintervall quadratisch integrierbaren Funktionen ein, das sich durch besondere Eigenschaften auszeichnet ( Walsh 1923). Jede Funktion dieses System ist stückweise konstant und nimmt nur die Werte  $+1$  und  $-1$  an. Des weiteren ist das System gegenüber der Multiplikation abgeschlossen und bildet eine Gruppe, wobei die konstante Funktion mit Wert  $+1$  das Einheits-element ist und jede Funktion zu sich selbst invers ist. Diese Eigenschaften haben nicht nur in der Mathematik selbst das Interesse erweckt sondern es sind auch verschiedene praktische Anwendungen, besonders in neuerer Zeit bekannt geworden. Dabei ist besonders der Beitrag des aus Wien stammenden österreichischen Wissenschaftlers Henning F. Harmuth zu nennen, der bereits sehr früh die Bedeutung dieses Funktionensystems, nunmehr allgemein als das System der Walshfunktionen bekannt, für die Nachrichtentechnik erkannte (Harmuth 1969 ).

In diesem Beitrag sollen einige historische Fakten zur Entwicklung der Theorie der Walshfunktionen und deren Anwendungen in der Nachrichtentechnik behandelt werden, wobei sich der Autor auf seine eigene Erfahrung dabei beruft. Dazu gab auch schon ein früherer Artikel Gelegenheit ( Pichler 1989). Walshfunktionen und ihre Theorie finden auch heute noch das Interesse in der Mathematik, wie das im Jahre 1990 erschienene Buch über „Walsh Series“, auf das hier besonders, auch wegen der darin zu findenden historischen Notizen, hingewiesen werden soll ( Schipp 1990). Zum Kennenlernen der verschiedenen möglichen Anwendungen von Walshfunktionen kann immer noch mit Vorteil das Buch von Beauchamp „Walsh Functions and their Applications“ aus dem Jahre 1975 herangezogen werden (Beauchamp 1975).

### 2. Walshfunktionen

Im Jahre 1923 erschien von Joseph L. Walsh im Amer. Journal of Mathematics die Arbeit „ A closed set of normal orthogonal functions“ (Walsh 1923). Joseph L. Walsh erhielt sein Doktorat in Mathematik im Jahre 1920 von der Harvard Universität an der er auch später über viele Jahre als Professor tätig war. In den USA ist er später durch seine Bücher als Vater der Approximationstheorie bekannt geworden. Seine „Jugendarbeit“, die ihn wegen der darin behandelten Funktionen heute allgemein bekannt gemacht hat, spielte dabei keine besondere Rolle. Norbert Wiener beschreibt in seiner bekannten Autobiographie seinen Mathematikerkollegen „Joe Walsh“ als er ihn 1920 in Paris traf wie folgt „er ist ein großer, warmherziger Mensch mit einer tiefen dröhnenden Stimme, und sein blondes Haar stand damals fast senkrecht über seiner hohen Stirn“ ( Wiener 1965). Als der Autor im Jahre 1970 anlässlich seines Aufenthaltes an der Universität von Maryland, College Park, USA, Prof. Walsh kennen lernte, waren seither 50 Jahre vergangen, ebenso die senkrecht über der Stirn stehenden blonden Haare. Prof. Walsh, damals als Emeritus am Department für Mathematik, war jedoch sehr an den damals verfolgten modernen Anwendungen seiner Funktionen interessiert. Dass er auch Humor hatte beweist die Tatsache, dass er bei einer Kaffeestunde in seinem Haus eine von seiner Frau gemachten Krawatte mit eingestickten Walshfunktionen trug.

An die Arbeit von Walsh des Jahres 1923 schlossen sich in den nachfolgenden Jahren zahlreiche Arbeiten von Mathematikern aus verschiedenen Ländern an. Zu erwähnen ist hier auf jeden Fall die

Arbeit des jungen britischen Mathematikers R.E.A.C. Paley, ein Schüler von Littlewood, der zum erstenmal die Walshfunktionen als Produkt der bereits seit dem Jahre 1922 bekannten Rademacherfunktionen darstellte (Paley 1932). In der Theorie wird heute diese Definition der Walshfunktionen bevorzugt, während die ursprüngliche von Walsh benutzte rekursive Definition, da sie die Funktionen nach der Anzahl der Sprungstellen ordnet, in Anwendungen öfters bevorzugt wird.

Eine wichtige Erweiterung der Walshfunktionen auf die positive reelle Zahlengerade wurde vom amerikanischen Mathematiker N.J. Fine angegeben, wobei auch die Theorie des Walsh-Fourier Integrals behandelt wurde (Fine 1950). Fine erkannte auch zugleich mit dem russischen Mathematiker N.J. Vilenkin die Beziehung der Walshfunktionen zur dyadischen Gruppe (bestehend aus den Binärdarstellungen der Zahlen des Einheitsintervalls) und ihre Eigenschaft als Charakterfunktionen dieser Gruppe. Damit waren die Walshfunktionen auch als „wesensgleich“ zu den Kreisfunktionen  $\cos(kx)$  und  $\sin(kx)$  erkannt und konnten in das allgemeine Gebiet der „Abstrakten harmonischen Analyse“ eingegliedert werden (Rudin 1962). Ähnlich zu den Funktionen  $\cos(kx)$  und  $\sin(kx)$  gibt es für die Walshfunktionen ein „Multiplikationstheorem“ und einen „Verschiebungssatz“ mit dem angegeben wird, um wie viel eine symmetrische Walshfunktion zu verschieben ist um deckungsgleich mit der entsprechenden schiefsymmetrischen Funktion zu sein (Pichler 1967).

### 3. Diskrete Walshfunktionen

Im Zuge der späteren Anwendungen der Walshfunktionen in digitalen Kommunikations- und Computersystemen zeigte es sich, dass dafür genügt, die Walshfunktionen für das endliche diskrete Intervall der Zahlen  $0, 1, \dots, N-1$ , wobei  $N$  eine Zweierpotenz ist, zu definieren. Damit kann dann jedes System von endlichen diskreten Walshfunktionen durch eine  $(N, N)$ -Matrix mit Einträgen  $+1$  und  $-1$  angegeben werden. Diese ist auch als Walsh-Hadamard Matrix bekannt. Die zugehörige dyadische Gruppe reduziert sich in diesem Falle auf die Menge der  $n$ -stelligen Binärzahlen mit der „Addition modulo 2“ komponentenweise genommen, als Addition. Mehr algebraisch kann die zu den endlichen diskreten Walshfunktionen gehörige dyadische Gruppe auch als  $n$ -faches direktes Produkt der zyklischen Gruppe der Ordnung 2 gesehen werden.

Diese mit der Digitalisierung der Systeme in den Anwendungen eingetretenen Vereinfachung freuten die Techniker nicht aber so sehr die Mathematiker. Die schöne mit Hilfe der Analysis aufgebaute Theorie reduzierte sich damit auf eher einfache Aussagen aus der Linearen Algebra. Die technischen Zielsetzungen blieben jedoch gleich so dass nun mit einfachen mathematischen Mitteln aber nach dem Muster der bisherigen Ergebnisse vorgegangen werden konnte. Ein wichtiger Beitrag, der nun mit algebraischen Mitteln geleistet werden konnte, war die Entwicklung eines schnellen Algorithmus für die Ausführung der Diskreten Walshtransformation DWT. Diesem entspricht, analog zum entsprechenden Fall bei der Diskreten Fouriertransformation DFT eine gewisse Faktorisierung der entsprechenden Walsh-Hadamard Matrix (Welchel 1968). Von besonderer Wichtigkeit war die Möglichkeit eines schnellen Algorithmus dieser Art für die Anwendungen der Diskreten Walshtransformation in der Digitalen Bildverarbeitung (Pratt 1969).

Die Hinwendung zu den endlichen diskreten Walshfunktionen belebte auch das Interesse an den entsprechenden Verallgemeinerungen, wie solche vor allem von Vilenkin eingeführt wurden (Vilenkin 1952). Die Rolle der dyadischen Gruppe der diskreten Walshfunktionen wird dabei von einem direkten Produkt von zyklischen Gruppen verschiedener Ordnung eingenommen. Es konnte gezeigt werden, dass sich auch in diesem Falle die zugehörige verallgemeinerte



Fouriertransformation durch einen schnellen Algorithmus realisieren lässt (Nicholson 1971). Allgemein kann diese von den diskreten Walshfunktionen stammende Verallgemeinerung auch als eine mehrdimensionale Diskrete Fouriertransformation angesehen werden, wobei die zyklischen Gruppen die jeweilige diskrete Struktur in den einzelnen Dimensionen bestimmen.

#### 4. Notizen zu Anwendungen in der Nachrichtentechnik und Signalverarbeitung

Der bereits früher genannte Wissenschaftler Henning F. Harmuth, Professor Emeritus der Catholic University in Washington D.C., hat wie viele andere zuvor die Walshfunktionen für sich selbst erfunden ( bei Harmuth zuerst als „Mäanderfunktionen“ bezeichnet) und setzte sie erfolgreich für seine Vorschläge zu neuartigen nachrichtentechnischen Systemen ein ( Harmuth 1964a,b,c). In diesem Zusammenhang war Harmuth bestrebt die zugrundeliegende mathematischen Ergebnisse zu verbessern und suchte Kontakt zum Mathematischen Institut der Universität Innsbruck, wo an der Theorie der Walshfunktionen gearbeitet wurde ( Liedl 1964, Weiß 1967a). In diesem Zusammenhang entstand auch die Dissertation des Autors ( Pichler 1967) und weitere Arbeiten, die zur mathematischen Unterstützung der Ideen von Harmuth gedacht waren ( Pichler 1968,1970). Unabhängig davon war auch dies in Innsbruck der Anlass sich mit Anwendungen der Walshfunktionen im Gebiet der Codierungstheorie zu befassen ( Weiß 1967b,c).

Die von Harmuth vorgeschlagene Methode einzelne analoge Nachrichtenkanäle als Alternative zur bekannten Frequenzteilung oder Zeitteilung mittels Orthogonalteilung zu multiplexen, d.h. zu einem einzigen Übertragungskanal zusammen zu fassen, konnte erst im Zeitalter der weitgehenden Digitalisierung elektronischer Systeme, in dem wir uns jetzt befinden, praktische Anwendung finden. Sie wird in wesentlicher Weise heute sowohl beim amerikanischen von der Firma Qualcomm entwickelten mobilen Funknetz als auch bei UMTS in Europa angewendet, wo Walshfunktionen als Trägerfunktionen zur Modulation digitaler Kanäle eingesetzt werden. Eine interessante Anwendung der Diskreten Walsh Fouriertransformation DWT liegt im Gebiet der Kryptographie bei folgender Problemstellung vor: Zur Kopplung von kryptologisch schwachen Pseudorandomfolgen um damit eine kryptologisch starke Pseudorandomfolge zu erreichen kann eine boolesche Funktion  $f$  dienen, deren Diskrete Walsh Fouriertransformierte  $DWT(f)$  folgende Eigenschaften aufzuweisen hat: Damit  $f$  wie kryptologisch gewünscht „korrelationsimmun von der Ordnung  $k$ “ ist, muss  $DWT(f)$  an allen Stellen die zu Walshfunktionen gehören, die sich aus einem Produkt von weniger als  $k$  Rademacherfunktionen zusammensetzen den Wert 0 haben. Eine Methode zur Konstruktion korrelationsimmuner boolescher Funktionen wurde in (Pichler 1986) angegeben. Zum Abschluss sei noch auf eine in das 19'te Jahrhundert zurückgehende Anwendung der endlichen diskreten Walshfunktionen in der Telegraphen- und Telefontechnik hingewiesen. Bei der Führung von mehreren Leitungspaaren über Land kann durch Induktionswirkung ein unerwünschtes Übersprechen von einer Leitung auf eine benachbarte Leitung auftreten. Um dies zu vermeiden, können die einzelnen Leitungen nach einem bestimmten Schema in gewissen Abständen gekreuzt werden, wodurch die störende Induktionswirkung kompensiert wird. Dieses als Kreuzungsplan von Pinkert bezeichnete Schema entspricht den Walshfunktionen, wobei durch deren Orthogonalität die gewünschte Wirkung erzielt wird (Feyerabend 1929).

**Literaturverzeichnis**

(Bauchamp 1975)

K.G. Beauchamp: Walsh Functions and their Applications. Academic Press, London 1975.

(Feyerabend 1929)

E.Feyerabend et al.: Handwörterbuch des Elektrischen Fernmeldewesens. Bd 1 und Bd 2, Springer Verlag, Berlin 1929, Bd 1., S. 666-671.

(Fine 1950)

N.J. Fine: The generalized Walsh-Functions. Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950),66-77.

(Harmuth 1964a)

H. Harmuth: Die Orthogonalteilung als Verallgemeinerung der Zeit-und Frequenzteilung. Archiv der Elektrischen Übertragung, 18 (1964),43-50.

(Harmuth 1964b)

H.Harmuth: Verallgemeinerung des Fourier-Integrals und des Begriffes „Frequenz“. Archiv der Elektrischen Übertragung,18 (1964),439-451.

(Harmuth 1964c)

H. Harmuth: Grundzüge einer Filtertheorie für die Mäanderfunktionen  
Archiv der Elektrischen Übertragung, 18 (1964), 544-554.

(Harmuth 1969)

H. Harmuth: Transmission of Information by Orthogonal Functions  
Springer Verlag, Berlin 1969.

(Liedl 1964)

R. Liedl: Über eine spezielle Klasse von stark multiplikativ orthogonalen Funktionensystemen  
Monatshefte für Mathematik 68 (1964), 130-137.

(Nicholson 1971)

P.J. Nicholson: Algebraic Theory of the Finite Fourier Transform  
J. of Comp. and Systems Science 5 (1971), pp. 524-547.

(Paley 1932)

R.E.A.C. Paley: A remarkable series of orthogonal functions  
Proc. London Math. Soc. 34 (1932),pp. 241-279.

(Pichler 1967)

F. Pichler: Das System der sal-und cal-Funktionen als Erweiterung des Systems der Walsh-Funktionen und die Theorie der sal- und cal-Fouriertransformation  
Inauguraldissertation Universität Innsbruck 1967.

(Pichler 1968)

F. Pichler: Synthese linearer periodisch zeitvariabler Filter mit vorgeschriebenem Sequenzverhalten. Archiv der Elektrischen Übertragung 22(1968), 150-161.

(Pichler 1970)

F.Pichler: Walsh-Fourier Synthese optimaler Filter  
Archiv der Elektrischen Übertragung 24 (1970),350-360.

(Pichler 1986)

F.Pichler: On the Walsh-Fourieranalysis of correlation-immune switching functions  
EUROCRYPT 86, Linköpping 1986, abstracts of papers.

(Pichler 1989)

F. Pichler: Some historical remarks on the theory of Walsh-Functions and their applications in Information Engineering. In "Theory and Applications of Gibbs Derivatives" (ed. Paul L. Butzer and Radomir S. Stankovic), Math. Institute Beograd 1989, pp.XXV-XXX.

(Pratt 1969)

W.K. Pratt, J. Kane and H.C. Andrews: Hadamard transform image coding.  
Proc. IEEE 57,1,pp 58-68.

(Schipp 1990)

F. Schipp, W.R.Wade, P.Simon: Walsh Series. An introduction to dyadic harmonic analysis  
Akademémiai Kiadó, Budapest 1990.

(Vilenkin 1952)

N.J. Vilenkin: Zur Theorie der Fourier-Integrale auf topologischen Gruppen  
Math. Sbornik 30 (1952), 233-244.

(Walsh 1923)

J.L. Walsh: A closed set of normal orthogonal functions. Amer.J.of Math. 45 (1923),pp.5-24.

(Weiß 1967a)

P. Weiß: Zusammenhang von Walsh-Fourierreihen mit Polynomen  
Monatshefte für Mathematik 71(2), 1967, 165-179.

(Weiß 1967b)

P. Weiß: Über die Verwendung der Walshfunktionen in der Kodierungstheorie.  
Archiv der Elektrischen Übertragung 21 (1967), 255-258.

(Weiß 1967c)

P. Weiß: Die Darstellung der zyklischen Codes mit Hilfe der Walshfunktionen  
Archiv der Elektrischen Übertragung 21 (1967), 481-482.

(Whelchel 1968)

J.E. Whelchel and D.F. Guinn: The fast Fourier-Hadamard transform and its use in signal representation and classification. Techn. Report PRC 68-11. Melpar Inc. Falls Church, Va 22046, 1968.

(Wiener 1965)

N. Wiener: Mathematik mein Leben.Fischer Bücherei, Frankfurt am Main, 1965, S. 59.

## Hopfs elementare Bemerkung zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen

Karl-Heinz Schlote (Leipzig)

Im Juni 1927 begründete Eberhard Hopf (1902-1983) in einer von Erhardt Schmidt (1876-1959) der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegten Arbeit das sog. Maximum- und Minimumprinzip für partielle Differentialgleichungen. Im Folgenden soll kurz skizziert werden, wie dieses Prinzip aus dem bekannten Maximumprinzip für harmonische Funktionen auf elliptische partielle Differentialgleichungen verallgemeinert wurde. Beim klassischen Maximumprinzip handelt es sich um die Aussage, dass eine in einem abgeschlossenen beschränkten Gebiet  $G$  nicht konstante harmonische Funktion  $u$  ihre Extremwerte nur auf dem Rand von  $G$  annehmen kann. Es ist eine Folgerung aus dem schon von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) formulierten Sachverhalt: Ist  $K$  eine Kugel vom Radius  $r$  um den Mittelpunkt  $P$ , so gilt für eine in  $K$  harmonische und in  $K$  sowie auf dem Rand  $\partial K$  der Kugel stetige Funktion

$$u : u(P) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K} u d\sigma, \text{ wobei } d\sigma \text{ das Flächenelement auf dem Rand von } K \text{ ist.}$$

Der Zusammenhang mit dem Thema der Tagung ergibt sich einfach dadurch, dass die Art der Verallgemeinerung, die Einfachheit des Beweises die Anwendung des Resultates in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wesentlich beeinflusst haben. Die entscheidende Publikation von Hopf umfasste ganze fünf Seiten und hatte die Schönheit und Eleganz einer Mozart'schen Symphonie und die Brillanz eines Gemäldes von Vermeer.<sup>1</sup>

### Die Vorgeschichte

Gauß hat das oben erwähnte Resultat 1839 in seiner Abhandlung über die „Allgemeine(n) Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte“ formuliert. Es gehörte dann sehr bald zum Grundbestand der funktionentheoretischen Kenntnisse. Es dauerte aber bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts, ehe die Verallgemeinerung auf elliptische Differentialgleichungen ernsthaft in Angriff genommen wurde. Die Ansätze dazu entstanden in jenem breiten Strom der funktionentheoretischen Forschungen, die sich mit der Analytizität von Funktionen, speziell der Analytizität von Lösungen partieller Differentialgleichungen beschäftigten und die ihren Niederschlag im 19. Hilbert'schen Problem fanden. David Hilbert (1862-1943) formulierte das Problem in der Frage: „Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?“ und führte dann weiter aus: „Eine der begrifflich merkwürdigsten Tatsachen in den Elementen der Theorie analytischer Funktionen erblicke ich darin, dass es partielle Differentialgleichungen gibt, deren Integrale sämtlich notwendig analytische Funktionen der unabhängigen Variablen sind, die also, kurz gesagt, nur analytischer Lösungen fähig sind.“<sup>2</sup> Hilbert betrachtete dann die sog. regulären Variationsprobleme, auf die man bei vielen Fragen der Geometrie, der Mechanik und der mathematischen Physik geführt wird. Es galt dann zu entscheiden, „ob jede Lagrangesche partielle Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems die Eigenschaft hat, dass sie nur analytische Integrale zulässt – selbst wenn man, wie bei dem Dirichletschen Potentialproblem, der Funktion irgendwelche stetige, aber nicht analytische Randwerte aufzwingt.“<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Hopf 2002, S. 9

<sup>2</sup> Aleksandrov 1971, S. 67f.

<sup>3</sup> Aleksandrov 1971, S. 68f.



Erste Beiträge zu diesem Thema hatte Emile Picard (1856-1941) bereits im Jahrzehnt vor Hilberts Pariser Vortrag geleistet. Er bewies unter anderem, dass alle Lösungen  $z$  der Differentialgleichung

$$z_{xx} + z_{yy} + az_x + bz_y + cz = 0,$$

wobei  $a$ ,  $b$  und  $c$  analytische Funktionen der Veränderlichen  $x$  und  $y$  sind, ebenfalls analytisch sind, wenn die ersten und zweiten Ableitungen von  $z$  endlich und stetig sind. Picard hat seine Ergebnisse 1905 in der zweiten Auflage seines „Traité des analyse“ zusammenfassend dargestellt. In diesem Kontext vermerkte er dann unter Hinweis auf die Herleitung eines analogen Resultats für die Lösungen der Laplace-Gleichung, dass die Lösungen der Gleichung

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y = 0$$

kein Maximum bzw. Minimum in dem zugrunde gelegten Definitionsgebiet annehmen können. Die Koeffizienten der Gleichung wurden in diesem Gebiet als analytische Funktionen von  $x$  und  $y$  vorausgesetzt und sollten die Relation  $b^2 - ac < 0$  erfüllen.<sup>4</sup> Der Beweis basierte wesentlich auf der Analytizität der Lösungsfunktion  $u(x, y)$  und der Transformation der Hilfsgleichung auf die Laplace-Gleichung.

Als Sergej N. Bernstein (1880-1968) 1903 begann, sich mit dem 19. Hilbert'schen Problem zu beschäftigen, knüpfte er sowohl an die Forschungen Picards als auch an Ideen Hilberts an, die dieser von einigen seiner Schüler für einige Spezialfälle hatte realisieren lassen. Für die hier untersuchte Verallgemeinerung des Maximumprinzips können diese Arbeiten übergangen werden. Bernstein bestätigte die Aussagen Picards für die allgemeinere Gleichung

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

wobei  $F$  eine analytische Funktion sei und  $4F'_{z_{xx}} F'_{z_{yy}} - (F'_{z_{xy}})^2 > 0$  für alle  $x, y$  des betrachteten Gebietes und alle  $z$  gelte. Doch auch bei ihm waren die Aussagen über die Maxima und Minima eine Folgerung aus den diffizilen Betrachtungen zur Analytizität der Lösungen. Nach über 40 Seiten des Nachweises analytischer Lösungen für verschiedene elliptische Differentialgleichungen wird das Maximumprinzip förmlich als Randbemerkung angefügt und der Beweis dem Leser überlassen:

„On vérifiera aussi facilement les deux propositions suivantes:

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

étant une équation elliptique admettant la solution  $z = 0$ , 1° aucune de ses solutions ne peut avoir ni maxima, ni minima, 2° une solution régulière dans tout le plan se réduit à une constante.“<sup>5</sup>

### Die veränderte Sicht auf das Maximumprinzip

Wenige Jahre nach Bernsteins Publikation, 1911, deutete sich dann in den Untersuchungen von Leon Lichtenstein (1878-1933) eine Änderungen in der Betrachtungsweise an. Zwar ging es auch ihm in der Hauptsache darum, die Voraussetzung für das Auftreten analytischer Lösungen abzuschwächen, und der Beweis des Maximum- und Minimumprinzips war unverändert eine Folgerung aus den vorangegangenen Betrachtungen zur Analytizität der Lösungen, aber er wies der Aussage einen eigenen Paragraphen zu. Man darf hier zumindest vermuten, dass Lichtenstein die eigenständige Bedeutung der Aussage über Maxima und Minima erkannte und entsprechend hervorheben wollte. Dies wird gestützt durch die Tatsache, dass er 1924, als er in einer weiteren Arbeit wieder lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus studierte, den Satz unter den allgemeinen Eigenschaften der Lösungen einreichte.

<sup>4</sup> Picard 1905, S. 29f.

<sup>5</sup> Bernstein 1904, S. 69

Drei Jahre später machte Hopf dann das Maximum- und Minimumprinzip zum alleinigen Gegenstand seiner Arbeit. Er würdigte einleitend die Beiträge von Picard, Bernstein und Lichtenstein und bemerkte dazu: „Während die genannten Autoren dabei von tiefer liegenden besonderen Darstellungen der Lösungen ausgehen, geben wir in dieser Note eine gänzlich elementare Begründung und Weiterführung jener Resultate.“<sup>6</sup> Er führte dann den linearen partiellen Differentialausdruck zweiter Ordnung von elliptischem Typus  $L(u)$  ein:

$$L(u) = \sum_{\nu, \mu=1}^n a_{\nu\mu} u_{x_\nu x_\mu} + \sum_{\nu=1}^n b_\nu u_{x_\nu} .$$

$a_{\nu\mu}$  und  $b_\nu$  seien stetige Funktionen des Punktes  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  eines  $n$ -dimensionalen

Gebietes  $T$  und die quadratische Form  $\sum_{\nu, \mu=1}^n a_{\nu\mu}(P) \lambda_\nu \lambda_\mu$  sei in  $T$  überall positiv definit. Für

diesen Operator bewies er den folgenden Satz:

„Genügt die in  $T$  mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung versehene Funktion  $u(P)$  dort überall der Ungleichung  $L(u) \geq 0$  und ist, wenn  $P_0$  ein fester Punkt von  $T$  ist,  $u(P) \leq u(P_0)$  überall in  $T$ , so ist in  $T$   $u(P) \equiv u(P_0)$ . Dasselbe folgt, wenn  $L(u) \leq 0$ ,  $u(P) \geq u(P_0)$  in  $T$  ist.“<sup>7</sup>

Hopf beschränkte sich der Übersichtlichkeit halber auf den Beweis für  $n = 2$ , für den allgemeinen Fall verlief der Beweis analog. Er gab einen indirekten Beweis und nahm an, dass es einen ganz in  $T$  gelegenen Kreis  $K'$  gibt, in dessen Innern stets  $u(P) < M = u(P_0)$  gilt und auf dessen Rand mindestens ein Punkt  $P_1$  mit  $u(P_1) = M$  existiert. In  $K'$  sei ein weiterer Kreis  $K$  einbeschrieben, der vollständig in  $K'$  liegt und diesen nur in  $P_1$  berührt. Für alle Punkte  $P$  von  $K$  (einschließlich des Randes, außer im Punkt  $P_1$ ) gilt dann  $u(P) < M$ . Der entscheidende Schritt des Beweises ist, dass Hopf nach der Festlegung weiterer Kreise eine Hilfsfunktion  $h(P)$  einführt, die in einem der Kreise der Bedingung  $L(h) > 0$  genügt und mit deren Hilfe er einen Widerspruch ableiten kann. Diese Idee der Hilfsfunktion war es, die den Beweis vereinfachte und die Tür zu vielfältigen Anwendungen öffnete.

Eine sehr wichtige Verallgemeinerung gelang Hopf noch in der angegebenen Arbeit, indem er die Aussage für nichtlineare Gleichungen herleitete. Gleichzeitig erhielt er noch Folgerungen für die Lösung der Differentialgleichung, falls diese unter gewissen Voraussetzungen in einem Punkt ein Extremum annahm. In diesem Fall musste die Lösung den Extremalwert in einer ganzen Umgebung dieses Punktes annehmen. Auf diesem Weg ergab sich u. a. ein Satz über die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet-Problems für die entsprechenden nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen, was Hopf aber nur erwähnte, ohne es genauer zu erläutern.

Die Hopf'sche Arbeit war der Ausgangspunkt für zahlreiche weitergehende Studien zur Theorie der Differentialgleichungen und hat somit eine sehr stimulierende Wirkung auf die ganze Entwicklung ausgeübt. Das fördernde Medium lag hier in der Mathematik selbst. Die Entflechtung der beiden Problemstellungen und Hopfs Einsicht, die Untersuchungen zum Maximumprinzip ohne die Betrachtungen über die Analytizität der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen durchführen zu können, ermöglichten eine grundlegende Vereinfachung des Beweises, sowohl im Aufbau als auch hinsichtlich der Heranziehung anderer Beweismittel. Dies konsequent durchgeführt zu haben, ist das Verdienst von Hopf und darauf fußt auch die Bedeutung seiner Arbeit. Ein wichtiger Vorteil des Maximum- und Minimumprinzips besteht darin, dass es für die mit den jeweiligen Differentialgleichungen verknüpfte 1. Randwertaufgabe eine Apriori-Abschätzung der Lösung liefert, d. h. allein aus der Annahme, dass eine Lösung des vorgelegten Problems existiere, erhält man Abschätzungen, die jede mögliche Lösung erfüllen muss. Die Methode der Apriori-Abschätzungen hat sich inzwischen zu einem wichtigen Werkzeug in der Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen entwickelt und

<sup>6</sup> Hopf 2002, S. 3

<sup>7</sup> Hopf 2002, S. 3

die Untersuchungen zum Maximum- und Minimumprinzips für partielle Differentialgleichungen fühlen ganze Monographien.

### **Zu Leben und Werk von Eberhard Hopf**

Zur Abrundung sei abschließend Eberhard Hopf, als wichtigster, der erwähnten Akteure, mit einigen biographischen Angaben kurz vorgestellt.



Eberhard Hopf wurde am 17. April 1902 in Salzburg geboren. Er studierte von 1920 bis 1926 in Berlin, unterbrochen vom Sommersemester 1924, das er an der Universität Tübingen verbrachte. Seine Lehrer waren vor allem Erhard Schmidt und Issai Schur (1875-1941), bei Ersterem promovierte er 1925. Ab 1926 arbeitete er als Assistent im Astronomischen Rechenzentrum der Berliner Universität. Im Januar 1927 legte er noch das Staatsexamen ab und habilitierte sich im Juli 1929 für Mathematik und Astronomie. Als Stipendiat der Rockefeller Foundation ging er im Oktober 1930 für zwei Jahre an das Trinity College in Oxford und an das Observatorium der Harvard Universität in Cambridge (Mass.) und lehrte dann als Assistant Professor am dortigen Massachusetts Institute of Technology (MIT). 1936 kehrte er nach Deutschland zurück und lehrte an der Leipziger Universität. Die Berufung zum Ordinarius am Mathematischen Institut erfolgte im Juli 1937 rückwirkend zum 1. Mai 1937. Die Rückkehr ins faschistische Deutschland und die Annahme der Professur ist Hopf von



vielen Kollegen verübelt worden, obwohl er diesen Schritt später selbst als Fehler bezeichnet hat.<sup>8</sup> 1942 wurde er zu wissenschaftlichen Forschungsarbeiten an die aerodynamische Abteilung der Deutschen Forschungsanstalt für Segelflug nach Ainring in Bayern eingezogen, blieb aber Angehöriger der Leipziger Universität. Zwei Jahre später wechselte er jedoch als Nachfolger von Constantin Carathéodory (1873-1950) nach München.

Nach dem Krieg ermöglichte insbesondere Richard Courant (1888-1972) Hopfs Rückkehr in die USA, indem er ihm eine Gastprofessur am Courant-Institute verschaffte. 1948 wechselte Hopf dann an die Indiana University in Bloomington, wo er bis zu seiner Emeritierung 1972 forschte und lehrte. Nach langer Krankheit ist er am 24. Juli 1983 in Bloomington gestorben.

Eberhard Hopf hat zu vielen Gebieten der Mathematik wesentliche Beiträge geliefert und deren Entwicklung maßgeblich beeinflusst. Der hier besprochene Beweis des Maximumprinzips gehört zu seinen Forschungen über Differentialgleichungen, mit denen er seine wissenschaftliche Karriere begann und auf die er später wiederholt zurückkam. Die bei der Herausarbeitung des Maximum- und Minimumprinzips für Differentialgleichungen als Ausgangspunkt auftretende Frage nach der Analytizität der Gleichungslösungen hat er ebenfalls untersucht und um vielbeachtete Ergebnisse bereichert. Als im Zusammenhang mit Studien zur Hydrodynamik, vor allem in den 50er und 60er Jahren, Differentialgleichungen wieder stärker Hopfs Aufmerksamkeit fanden, trat er u. a. mit der Anwendung der Theorie der schwachen Lösungen auf die Navier-Stokes-Gleichung hervor.

Ein zweiter Problemkreis, dem sich Hopf nach seiner Promotion zuwandte, war das Strahlungsgleichgewicht von Sternen. Dies führte ihn zur Lösung von linearen Integralgleichungen, insbesondere von singulären Integralgleichungen von Faltungstyp

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f(y)dy.$$
 Zusammen mit Norbert Wiener (1894-1964) fand er 1931 eine

Methode zur Lösung dieser Gleichung mit Hilfe der Fourier-Transformation und baute eine Lösungstheorie auf. Die Lösungsmethode wird heute oft mit den Namen von Wiener und Hopf verbunden und die obige Gleichung bzw. der Spezialfall, wenn der Kern  $K$  durch eine  $e$ -Funktion gegeben wird, als Wiener-Hopf-Gleichung bezeichnet. Da diese Gleichung sehr häufig in der Mathematik und ihren Anwendungen (z. B. Probleme der Mechanik, Elektrodynamik, Geophysik) auftritt, ist die Wiener-Hopf'sche Lösungsmethode und deren Weiterentwicklung heute von zentraler Bedeutung.

Einen dritten Themenkreis in den Forschungen von Hopf bildete die Ergodentheorie und das Studium dynamischer Systeme. Hopf kommt hier das Verdienst zu, als einer der Ersten zu Beginn der 30er Jahre erkannt zu haben, dass man, um die Bewegung dieser Strömungen und mechanischen Systeme im Großen mathematisch adäquat zu erfassen, die Maßtheorie verwenden muss. Er erweiterte und verallgemeinerte bereits vorliegende Resultate und bewies neue Ergodensätze. Zu den wichtigsten Resultaten zählten seine Erkenntnisse über die Ergodizität von Strömungen längs geodätischer Linien auf Flächen mit konstanter negativer Krümmung. 1937 erschien sein bekannter Ergebnisbericht in der Springer-Reihe „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“, der vielen Mathematikern einen ausgezeichneten Überblick über den aktuellen Forschungsstand in der Ergodentheorie vermittelte.

Abschließend seien noch Hopfs Überlegungen zur mathematischen Behandlung von Turbulenzerscheinungen und zur sog. Hopf-Bifurkation, d. h. zur Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialgleichungssystems erwähnt, ohne dass damit ein vollständiger Überblick über die Beiträge von Hopf zur Mathematik des 20. Jahrhunderts erreicht wäre.

<sup>8</sup> Siegmund-Schultze 1998, S. 138. Man beachte auch die von Siegmund-Schultze teilweise zitierte Passage aus N. Wieners Autobiographie bezüglich Hopf, der Situation am MIT und der Stimmungen unter einigen Emigranten. (Wiener 1962, S. 170ff.) Die von Wiener behauptete Hinwendung Hopfs zu den Nazis wird durch die Leipziger Akten nicht bestätigt.



So wie Hopf im Falle des Maximumprinzips haben andere Mathematiker durch Fortsetzung und Erweiterung oder durch eine verbesserte, vereinfachte Darstellung mehrere Ideen und Methoden von Hopf wiederum in eine für eine breite Rezeption und Anwendung geeignete Form gebracht und fest im Wissenskorporus der Mathematik verankert.

### Literatur

- Aleksandrov, Pavel S. (Hrsg.): Die Hilbertschen Probleme. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Aleksandrov. Verantwortl. Herausgeber der deutschen Übersetzung: Hans Wußing, Akad. Verlagsgesell. Geest & Portig K.-G., Leipzig 1971
- Beckert, Herbert: Eberhard Hopf. 17.4.1902-24.7.1983. In: Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Jahrbuch 1983-1984. Akademie Verlag, Berlin 1986, S.238-245
- Bernstein, Sergej: Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. *Mathematische Annalen* 59(1904), S. 20-76
- Denker, Manfred: Eberhard Hopf. 04-17-1902 to 07-24-1983. Jahresber. Deutsche Math. Verein. 92(1990), S. 47-57
- Hopf, Eberhard: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-math. Kl. 1927, S. 147-152. In [Hopf 200], S. 3-8
- Hopf, Eberhard: Selected Works with Commentaries. Ed. Cathleen S. Morawetz. American Math. Soc., Providence (RI) 2002 (Collected works series, vol. 17)
- Lichtenstein, Leon: Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 33(1912), S. 201-211
- Lichtenstein, Leon: Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Math. Zeitschr.* 20(1924), S. 194-212
- Picard, Emile: *Traité d'analyse*. Tome II, 2. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1905
- Siegmund-Schultze, Reinhard: *Mathematiker auf der Flucht vor Hitler. Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft*. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesell. Braunschweig, Wiesbaden 1998
- Wiener, Norbert: *Mathematik – Mein Leben*. Fischer Bücherei Frankfurt/Main, Hamburg 1965

ÜBER DIE HISTORISCHE ENTWICKLUNG UND DIE HARMONISCHE  
BEDEUTUNG DER VEKUASCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

Miloš Čanak, Beograd

I

Das System der partiellen Differentialgleichungen

$$u'_x = v'_y \quad , \quad u'_y = -v'_x \quad (1)$$

mit den unbekanntenen Funktionen  $u(x,y)$  und  $v(x,y)$  die den bestimmten Bedingungen genügen, stellt einerseits das einfachste elliptische Gleichungssystem und andererseits die Definitionsrelation für die analytischen Funktionen der komplexen Veränderlichen  $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  dar.

E. Beltrami ([1], [2], 1867/68, 1878) gab die Idee, dass man durch Verallgemeinerung dieses Systems auch andere Klassen der komplexen Funktionen erhalten kann. E. Picard ([3], 1891) untersuchte die Systeme der Form

$$v'_x = au'_x + bu'_y \quad , \quad v'_y = cu'_x + du'_y$$

wobei die Koeffizienten  $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$  und  $d(x,y)$  der Bedingung  $(a-d)^2 + 4bc < 0$  genügen.

Diese Idee entwickelten weiterhin L. Bers ([4], 1953), G. N. Položij ([5], 1947) und I. N. Vekua ([6], 1952). Sie haben die sgn.  $\Sigma$ -monogenen,  $p$ -analytischen,  $(p,q)$ -analytischen und verallgemeinerten analytischen Funktionen durch folgende Definitionsrelationen

$$\mathcal{G}_1(x)u'_x = \mathcal{T}_1(y)v'_y \quad , \quad \mathcal{G}_2(x)u'_y = -\mathcal{T}_2(y)v'_x \quad (\Sigma)$$

$$pu'_x = v'_y \quad , \quad pu'_y = -v'_x \quad (p)$$

$$pu'_x + qu'_y - v'_y = 0 \quad , \quad -qu'_x + pu'_y + v'_x = 0 \quad (p,q)$$

$$u'_x - v'_y = au + bv + f \quad , \quad u'_y + v'_x = cu + dv + g \quad (V)$$

eingeführt, wobei  $p, q, a, b, c, d, f, g$  gegebene Funktionen von  $x$  und  $y$  sind, die den bestimmten Bedingungen genügen. Alle diese Funktionen besitzen zahlreiche Eigenschaften, die den entsprechenden Eigenschaften für die analytischen Funktionen analog sind.

Auf der Menge der komplexen Funktionen  $w(z, \bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$  hat G. Kolossov ([7], [8], [9], 1909, 1914, 1914) den Operator

$$Dw = u'_x - v'_y + i(v'_x + u'_y) = 2w'_z \quad (2)$$

eingeführt, und er nützte denselben zur Integration verschiedener Sy-

steme der Differentialgleichungen, die in der mathematischen Physik und in der Elastizitätstheorie erscheinen.

Weiterhin zeigte Kolossov dass sich die komplexen Differentialgleichungen der Form

$$F(z, \bar{z}, w, Dw, D^{(2)}w \dots D^{(n)}w) = 0 \quad (3)$$

auf eine ähnliche Art und Weise wie die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

lösen können. Bei Übergang von der gewöhnlichen Gleichung auf die komplexe Gleichung soll man anstatt  $x$  die Veränderliche  $\bar{z}/2$  einsetzen, anstatt der gewöhnlichen Ableitung  $y'$  die areoläre Ableitung  $D$  nehmen und beliebige Konstante mit beliebiger analytischen Funktion vertauschen.

Einige, für die Praxis wichtige komplexe Differentialgleichungen hat S. Fempł ([10], [11]) gelöst. Das gilt speziell für die lineare, komplexe Differentialgleichung vom Vekuaschen Typus

$$U'_{\bar{z}} = MU + L \quad (4)$$

Fempł hat gezeigt, dass ihre allgemeine Lösung die Form

$$U(z, \bar{z}) = e^{\int (M)} [Q(z) + \int (Le^{-\int (M)})] \quad (5)$$

besitzt, wobei  $\int$  den Integraloperator, der dem Operator  $\partial / \partial \bar{z}$  invers ist, darstellt.

D. Pompeiu ([12], [13], 1905, 1912) suchte eine solche Formel, die der Cauchyschen Integralformel für die analytischen Funktionen analog ist, und kam zum Ausdruck

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m(G_n)} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_n} w(z) dz$$

wobei  $m(G_n)$  den Flächeninhalt des Gebietes  $G_n$  bezeichnet und die Schreibweise  $n \rightarrow \infty$  die Tatsache ausdrückt, dass sich die Kurve  $\Gamma_n$  unter Abnahme ihrer Länge auf einen Punkt  $z$  zusammenzieht. Dieser Ausdruck wurde als areoläre Ableitung der nichtanalytischen Funktion  $w(z)$  genannt. Seine Nachfolger G. Calugareano, M. Nicolesco und N. Theodorescu haben zahlreiche Eigenschaften dieser Ableitung und des inversen Integraloperators

$$T_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta$$

untersucht. Erst später nützte I. N. Vekua diese Operatoren in seiner Theorie der elliptischen Systeme partieller Differentialgleichungen.

## II

In der Theorie der verallgemeinerten analytischen Funktionen spielt das Integral vom Cauchyschen Typus

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \tau \in L \quad (6)$$

eine wichtige Rolle. Dabei ist  $L$  eine einfache, glatte geschlossene oder nichtgeschlossene Kontur und  $\psi(\tau)$  eine gegebene stetige Funktion. Das Integral (6) stellt eine analytische Funktion in der ganzen Ebene ausser der Punkte auf der Kontur dar.

Die Grundfrage in der Theorie des Integrals vom Cauchyschen Typus ist die Untersuchung des Betragens dieses Integrals auf der Integrationskontur. J.V. Sochocki ([14], 1873) hat die folgenden wichtigen Formeln

$$\phi^+(t) = \frac{1}{2} \psi(t) + \phi(t)$$

$$\phi^-(t) = -\frac{1}{2} \psi(t) + \phi(t)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$\phi^+(t) - \phi^-(t) = \psi(t)$$

ausgeführt, wobei  $\phi^+(t)$  und  $\phi^-(t)$  die Grenzwerte der analytischen Funktion  $\phi(z)$  sind, wenn  $z$  nach dem Punkt  $t$  innerhalb oder ausserhalb der Kontur  $L$  strebt.

Eine grosse Wichtigkeit haben die Arbeiten von J. Plemelj ([15], [16], 1908). Er hat wieder die Sochockische Formeln in einer neuen Formulation und genug streng ausgeführt. Weiterhin hat er auch den folgenden Grundsatz über das Betragen der Grenzwerte des Integrals vom Cauchyschen Typus bewiesen.

Satz: Wenn  $L$  eine glatte geschlossene Kontur ist und wenn die Funktion  $\psi(t)$  der Höldersche Bedingung

$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| < A |t_2 - t_1|^\lambda, \quad (0 < \lambda \leq 1)$$

genügt, so genügen die Grenzwerte  $\phi^+(t)$  und  $\phi^-(t)$  des Cauchyschen Integrals auch dieser Bedingung im Falle  $0 < \lambda \leq 1$ .

Plemelj nützte das Integral vom Cauchyschen Typus als ein mathematischer Apparat für das Auflösen der konkreten Randwertaufgaben in der Theorie der analytischen Funktionen.

Eine weitere Entwicklung dieser Theorie und der Anwendungen des Integrals vom Cauchyschen Typus ist mit den Namen der sovje-



tischen Mathematiker I.I.Privalov (1918) und N.I.Mushelišvili (1922) gebunden.

III

In seinen bekannten Monographien: "Obobščenie analitičeskie funkcion" ([17], 1958) und "Sistemi differencialnih uravnenii pervogo porjadka elliptičeskogo tipa ... " ([6], 1952) wie auch in vielen anderen Arbeiten entwickelte Ilja Nestorovič Vekua (1907 - 1977) eine ausführliche Theorie der elliptischen Systeme partieller Differentialgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} u'_x - v'_y &= a(x,y)u + b(x,y)v + f(x,y) \\ u'_y + v'_x &= c(x,y)u + d(x,y)v + g(x,y) \end{aligned} \tag{7}$$

wobei  $a(x,y), b(x,y), c(x,y), d(x,y), f(x,y)$  und  $g(x,y)$  gegebene, stetige Funktionen sind. Wenn man die zweite Gleichung (7) mit  $i$  multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man eine einzige komplexe Differentialgleichung

$$U'_z = AU + B\bar{U} + F \tag{8}$$

mit

$$\begin{aligned} U &= u + iv, \quad \bar{U} = u - iv, \quad A = (a + d + ic - ib)/4 \\ B &= (a - d + ic + ib)/4, \quad F = (f + ig)/2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung nennen wir weiterhin Vekuasche komplexe Differentialgleichung.

Zuerst hat Vekua eine "neue Definition der Operation  $\partial/\partial z$ " eingeführt. Es sei  $U(z) = u + iv$  eine im Gebiet  $T_0$  stetige Funktion von  $z = x + iy$ , die dort stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach  $x$  und  $y$  hat. In diesem Falle gilt für jedes Gebiet  $T$ , das von einer einfachen, geschlossenen, rektifizierbaren Kurve  $L$  begrenzt wird und ganz in  $T_0$  liegt, die Gauss-Ostrogradskische Formel

$$\iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} dT = \frac{1}{2i} \int_L U(t) dt \tag{9}$$

(Hier verstehen wir unter  $\partial U/\partial \bar{z}$  den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Nunmehr möge sich die Kurve  $L$  unter Abnahme ihrer Länge in beliebiger Weise auf den Punkt  $z = x + iy$  zusammenziehen. Dann erhalten wir aus (9)

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \lim_{L \rightarrow z} \frac{1}{2i|T|} \int_L U(t) dt \quad (10)$$

wobei  $|T|$  den Flächeninhalt des Gebietes  $T$  bezeichnet.

Die Beziehung (10) haben wir unter Annahme der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von  $U$  nach  $x$  und  $y$  hergeleitet. Es kann jedoch der Fall eintreten, dass die rechte Seite dieser Beziehung auch für eine solche stetige Funktion existiert, die keine partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  besitzt. Ein solches Beispiel ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{e^{2i\varphi}}{\log \frac{1}{r}}, \quad (re^{i\varphi} = z)$$

Sie besitzt im Punkt  $z = 0$  keine partielle Ableitungen aber die komplexe Ableitung  $\partial U / \partial \bar{z}$  existiert im Sinne der Definition (10).

Vekua zeigte weiterhin dass die Funktion

$$U(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_T \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{t - z}, \quad (t = \xi + i\eta)$$

der Bedingung  $\partial U / \partial \bar{z} = f(x, y)$  genügt und dass sie diesen Integraloperator definiert, der dem Differentialoperator  $\partial U / \partial \bar{z}$  invers ist.

Die Untersuchung der Vekuaschen Differentialgleichung hat eine grosse praktische Bedeutung, weil viele Probleme der Mechanik dichter Medien auf derartige Gleichung führen. Das gilt speziell für die Fragen der Theorie elastischer Schalen.

Die Erscheinung der konjugierten unbekanntenen Funktion  $\bar{U}$  stellt etwas neues im Bezug auf die Gleichungen (3) von Kolossov dar. Dieses Glied erschwert wesentlich das Auflösensverfahren und es gibt keine Analogie mit den reellen Differentialgleichungen.

#### IV

Durch Substitution  $U = w U_0$ , wo  $U_0$  eine reguläre, partikuläre Lösung der Gleichung  $U'_z = AU$  ist, die man leicht bestimmen kann (siehe [10]), geht die Gleichung (8) in die sgn. kanonische Form

mit 
$$w'_z = C\bar{w} + D \tag{11}$$

$$C = \frac{B \cdot \bar{U}_0}{U_0}, \quad D = \frac{F}{U_0}$$

über.

Vekua hat gezeigt, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (11) folgende Form

$$w(z, \bar{z}) = \phi(z) + \iint_T \Gamma_1(z, t) \phi(t) dT + \iint_T \Gamma_2(z, t) \overline{\phi(t)} dT - \frac{1}{\pi} \iint_T \Omega_1(z, t) D(t) dT - \frac{1}{\pi} \iint_T \Omega_2(z, t) \overline{D(t)} dT \tag{12}$$

mit

$$\Omega_1(z, t) = \frac{1}{t-z} + \iint_T \frac{\Gamma_1(z, \zeta)}{t-\zeta} dT_\zeta, \quad \Omega_2(z, t) = \iint_T \frac{\Gamma_2(z, \zeta)}{\bar{t}-\bar{\zeta}} dT_\zeta$$

$$\Gamma_1(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j}(z, t), \quad \Gamma_2(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j+1}(z, t)$$

$$K_1(z, t) = -\frac{C(t)}{\pi(t-z)}, \quad K_n(z, t) = \iint_T K_1(z, \zeta) \overline{K_{n-1}(\zeta, t)} dT_\zeta$$

besitzt, wobei  $\phi(z)$  eine beliebige analytische Funktion ist.

Die Lösung (12) ist praktisch unanwendbar, weil sie neben den unendlichen Reihen und Rekurrenzen auch die singulären Doppelintegrale vom Cauchyschen Typus enthält und diese lassen sich im allgemeinen Fall nicht in einer endlichen Form ausrechnen.

In vielen Problemen der Physik, Mechanik und Technik besitzt der reelle und imaginäre Teil der Lösung eine bestimmte physikalische Bedeutung. Wenn die allgemeine Lösung der Vekuaschen komplexen Differentialgleichung in einer "schönen", endlichen, geschlossenen und expliziten Form

$$w = w(z, \bar{z}, Q(z), \overline{Q(z)}) \tag{13}$$

dargestellt wird, wobei  $Q(z)$  eine beliebige analytische Funktion ist, dann ist es möglich, ihren reellen und imaginären Teil zu trennen. Aber man konnte solche Beispiele in der Literatur nicht finden.

In seiner Arbeit "Über die explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen" ([18], 2003) hat M. Čanak die sgn. Grundfamilie der Vekuaschen Differentialgleichungen

$$w'_z = -\frac{\psi'(z)}{\psi + \bar{\psi}} \bar{w} \tag{14}$$

erfunden, wobei  $\psi(z)$  gegebene analytische Funktion ist. Die allgemeine Lösung der Gleichung (14) besitzt die Form

$$w = Q'(z) - (Q + \bar{Q}) \frac{e'(z)}{e + \bar{e}} \quad (15)$$

wobei  $Q(z)$  eine beliebige analytische Funktion ist. Aus der Grundfamilie (14) kann man weiterhin andere Klassen der explizit-lösbaren Gleichungen ausführen.

V

Harmonikale Bedeutung der Vekuaschen Differentialgleichung ersieht man durch das Ganzheits- und Dualitätsprinzip. Das Ganzheitsprinzip gilt für diejenige Objekte und Phänomene, die sich ganz rekonstruieren lassen, wenn nur ein ihrer Teil bekannt ist. Dieses Prinzip können wir mit folgenden Beispielen illustrieren.

1. Es sei  $L$  eine einfache glatte geschlossene Kontur, die das Gebiet  $D$  begrenzt. Für jeden Punkt  $z$  innerhalb  $D$  gilt die Cauchysche Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt = f(z) \quad , \quad z \in D \quad (16)$$

wobei  $f(z)$  eine analytische Funktion in  $D$  ist. Diese Formel illustriert das Ganzheitsprinzip, weil sie die Ausrechnung des Funktionswertes im jeden Punkt des Gebietes ermöglicht, wenn die Werte dieser Funktion auf der Kontur  $L$  bekannt sind. Dadurch ermöglicht diese Formel das Auflösen der Grundrandwertaufgabe für die analytischen Funktionen.

Für die verallgemeinerten Vekuaschen analytischen Funktionen gilt die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Omega_1(z, t) U(t) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \Omega_2(z, t) \overline{U(t)} d\bar{t} \quad (17)$$

Sie drückt die Werte einer in  $D$  regulären Lösung der Vekuaschen Differentialgleichung

$$U'_z - A(z) \overline{U} = 0 \quad (18)$$

durch die Randwerte dieser Lösung aus. Die Funktionen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  nennen wir die Kerne der Formel (17).

Für  $A = 0$  geht die Gleichung (18) in die Cauchy-Riemannsche über und die Formel (17) in die gewöhnliche Cauchysche Integralformel (16) für analytische Funktionen.



2. In der Theorie der Vekuaschen Differentialgleichungen haben die Randwertaufgaben von Riemann, Hilbert und Carleman eine grosse theoretische und praktische Bedeutung wie auch zahlreiche Anwendungen. Auf Grund der gegebenen Randbedingung auf einer einfachen glatten geschlossenen Kontur  $L$ , bestimmt man die Vekuasche verallgemeinerte analytische Funktion im ganzen Gebiet  $D$ .

3. Betrachten wir die Vekuasche Differentialgleichung

$$w'_z = A(z, \bar{z})\bar{w} \quad (19)$$

wobei  $A(z, \bar{z})$  eine gegebene stetige komplexe Funktion ist. Auf Grund der Formel (15) suchen wir die allgemeine Lösung der Gleichung (19) in folgender Form

$$w = C \cdot Q'(z) + (Q + \bar{Q})u_0 \quad (20)$$

wo  $u_0$  eine partikuläre Lösung dieser Gleichung ist und  $C$  eine beliebige reelle Konstante darstellt. M. Čanak [18] hat gezeigt dass es möglich ist, wenn der Koeffizient  $A$  folgende Form

$$A = -\psi'(z)/(\psi + \bar{\psi}) \quad (21)$$

besitzt und das gilt für die Grundfamilie der explizit-lösbaren Vekuaschen Gleichungen. Das bedeutet weiterhin, dass für diese Familie das Ganzheitsprinzip gilt, weil ein Teil (partikuläre Lösung) die Information über die Ganzheit (allgemeine Lösung) gibt.

Das Dualitätsprinzip dieser Gleichungsfamilie gilt im Bezug auf das Vorzeichen und die Form der Koeffizient  $A$  wie auch auf die Form der allgemeinen Lösung.

1. Wenn  $w$  eine Lösung der Gleichung (19) ist, so ist  $v = iw$  eine Lösung der Gleichung

$$w'_z = -A(z, \bar{z})\bar{w} \quad (22)$$

und umgekehrt. Die Gleichung (19) und (22) nennen wir zueinander assoziierte Differentialgleichungen.

2. Neben der Familie der explizit-lösbaren Vekuaschen Gleichung (14) existiert auch die duale Familie in der Form

$$w'_z = -[\psi'(z)/(\psi - \bar{\psi})]\bar{w} \quad .$$

3. Die allgemeine Lösung der vekuaschen Gleichung (14) kann man in der Form

$$w = c \cdot Q'(z) + (Q + \bar{Q})u$$

wie auch in der dualen Form

$$w = c \cdot Q'(z) + (Q - \bar{Q})u$$

suchen.

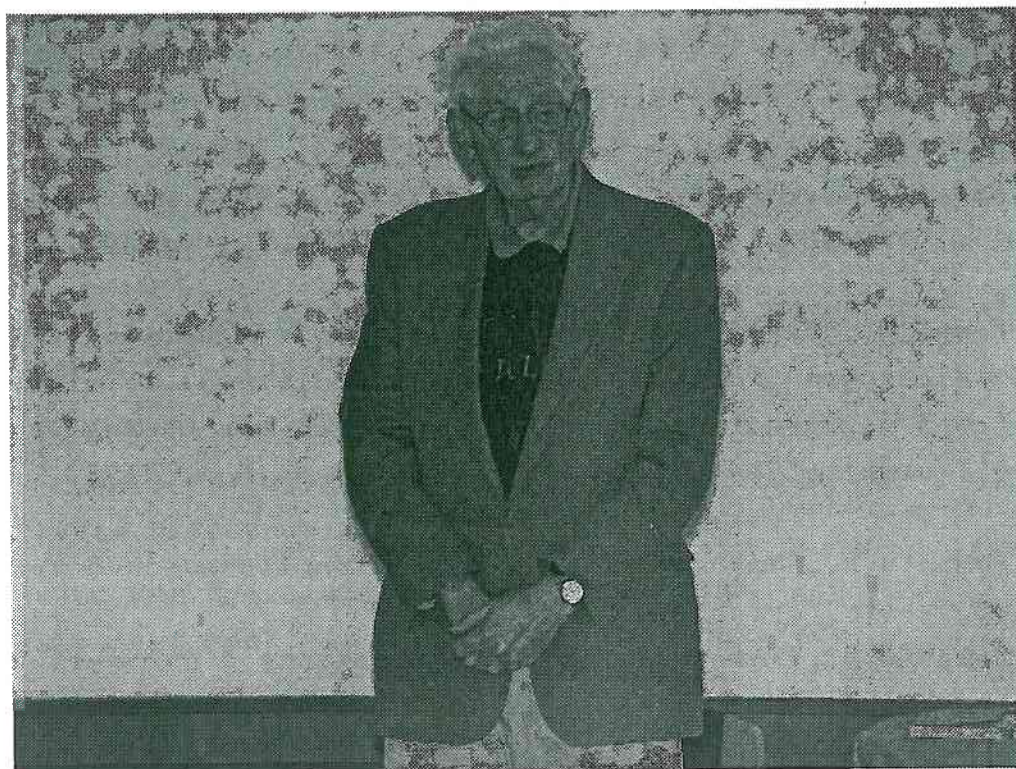
- - - - -  
L I T E R A T U R

- [1] Beltrami E., "Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque", Ann. Mat. pura appl. (1) 2 (1867/68), 329-366.
- [2] Beltrami E., "Sulle funzioni potenziali di sistemi intorno ad un asse", Rend. Ist. Lombardo Sci. Lett. (11) 2 (1878), 668-680.
- [3] Picard E., "Sur une generalisation des equations de la théorie des fonctions d'une variable complexe", C. R. Acad. Sci. Paris 112 (1891), 1399-1403.
- [4] Bers L., "Theory of pseudoanalytic functions", New York 1953.
- [5] Položij G. N., "Über p-analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen", Doklady Akad. Wiss., UdSSR 58, 7 (1947), 1275-1278.
- [6] Vekua I. N., "Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben", Matematičeskii sbornik, Moskva 1952, t. 31 73 .N. 2, 217-314.
- [7] Kolossov G., "Ob odnom prilozhenii teorii funkcion kompleksnogo peremennogo k ploskoi zadače matematičeskoi teorii uprugosti", Jurjev 1909.
- [8] Kolossov G., "Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie", Z. Math. Phys. 62 (1914), 384-409.
- [9] Kolossov G., "O soprjaženih differencialjnih uravnenijah s častnimi proizvodnimi ...", Ann. Inst. electrot. Petrograd, 11 (1914) 179-199.
- [10] Fempl S., "Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen", Publ. Inst. Math. Bgd. 4 (18), (1964), 115-120.
- [11] Fempl S., "Areoläre Exponentialfunktion als Lösung einer Klasse Differentialgleichungen", Publ. Inst. Math. Bgd., 8 (22), 1968, 138-142.
- [12] Pompeiu D., "Sur la continuité des fonctions d'une variable complexe", Thesis, Paris, 1905.
- [13] Pompeiu D., "Sur une classe des fonctions d'une variable complexe", Rend. Circ. Mat. Palermo 33 (1912), 108-113 et 35 (1913), 277-281.
- [14] Šohockii J. V., "Ob oppredelennih integralah i funkcijah upotrebljaemih pri razložanii v rjadi", S. Peterburg, 1873.

- [15] Fiemelj J., "Ein Ergänzungssatz ... ", Monatsh. Math. und Phys. XIX, 1908, 205-210.
- [16] Fiemelj J., "Riemannsche Funktionenschaaren", Ibid 211-245.
- [17] Vekua I.N., "Obobščenie analitičeskie funkcii", Moskva, 1958.
- [18] Čanak M., "Über die explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen", Publ. Inst. Math. Bgd., Nouvelle serie, tome 74(88), 2003, 103-110.

- . - . - . - . - . - . - . - . -

Anschrift: Prof. Dr. Miloš Čanak  
11000 Beograd  
Brzakova 4  
Serbien und Montenegro



## The Media and Mathematics Look at Each Other

### ABSTRACT

Mathematicians complain that media treatments of their subject are scanty. The media complain that mathematicians give them nothing that is comprehensible or arouses interest. My complaint is that media treatments (from papers to novels to movies and plays) go for the sensational and avoid the mathematizations that characterize contemporary life. To what extent do the media treatments affect the public's conception of mathematics? The word **media** will mean here not only the newspapers and television, but also novels, stories, plays, movies, museums; in short, all modes of popular communication of that might shed light on mathematics.

### An Abridged Version of a Larger Manuscript

#### **A few selected classic views about mathematicians.**

In *Gulliver's Travels* (1726), Jonathan Swift mocks the Laputian mathematicians:

"And although they are dexterous enough upon a piece of paper in the management of the rule, the pencil, and the divider, yet in the common actions and behavior of life, I have not seen a more clumsy, awkward, and unhandy people, nor so slow and perplexed in their conceptions upon all other subjects, except those of mathematics and music. They are very bad reasoners, and vehemently given to opposition, unless when they happen to be of the right opinion, which is seldom their case."

In Arthur Conan Doyle's *The Final Problem* (1893) the mathematical genius is a criminal:

"[The arch-criminal Col. James Moriarty] is a man of good birth and excellent education, endowed by nature with a phenomenal mathematical faculty. At the age of twenty-one he wrote a treatise upon the binomial theorem, which has had a European vogue. On the



strength of it he won the mathematical chair at one of our smaller universities, and had, to all appearances, a most brilliant career before him."

### **The complaints of mathematicians.**

Briefly: mathematics gets very little coverage of recent developments in the papers. It would like much more. And when mathematics is treated by the papers, they frequently get it wrong. Technical details are mostly omitted and their "take" or point of view is irksome.

Dr. James Crowley, CEO of SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) wrote me:

" Media professionals (writers, reporters) will often tell you that what they seek are items that have "human interest" or that deal with controversial issues. Unfortunately, for mathematics, "human interest" usually involves a stereotypically nerdy or flaky representation of a mathematician. And controversy [which is stock in trade of the papers] is hard to find within mathematics. We tend not to make statements of global warming or stem cell research, but rather whether a given theorem is true or not -- hardly the kind of thing to generate heated debates among people on the street.

My main complaint about the treatment of mathematics in the media is that mathematics is **not** treated in the media. One need only look at the *Science Times* on Tuesdays to verify that there is little covered in our area of research. I think this is a general problem, though, and not entirely the fault of the media itself. Look at the press releases issued by the National Science Foundation. One sees very little having to do directly with mathematics or mathematicians."

In 1994, Fields Medallist William Thurston wrote a well received article in the *Bulletin of the American Mathematical Society*. Here are a few quotes:

"We mathematicians need to put far greater effort into communicating mathematical ideas. To accomplish this, we need to pay more attention to communicating not just our definitions, theorems, and

proofs, but also our ways of thinking. We need to appreciate the value of different ways of thinking about the same mathematical structure.

We need to focus far more energy on understanding and explaining the basic mental infrastructure of mathematics... This entails developing mathematical language that is effective for the radical purpose of conveying ideas to people who don't already know them."

### **The complaints of the media.**

Gina Kolata , a widely read science writer for the New York Times, wrote me

"You have to ask what newspapers are trying to do. There are hundreds of articles every day crying for our readers' attention. And every article has to tell a reader: 'why am I reading this and why am I reading this now?' The news can feature something incredible, like the solution to Fermat's last theorem or the cloning of a dog, or it can involve some issue that has a big impact on society like health care, or it can be a discovery of something quirky. Newspapers are not there to educate or to teach people about the mathematics that underlies search engines unless there is something you can say about that mathematics that makes it new and compelling. The fact that the mathematics is there is not enough. With most things we use -- a car, a iPod, a DVD, most of us don't really care how it works."

Rob Finer, a former editor of the New York Times wrote

"Mathematics has no emotional impact. What physicists do challenges peoples' notion of origins and creations, Mathematics doesn't change any fundamental beliefs or what it means to be human."

In view of the fact that the increasing mathematization of life is changing what it means to be human, this strikes me as a completely imperceptive view of the matter.

### **Novels, plays, and movies with a mathematical underlay.**

In the last two decades, these have come thick and fast. To name just a few *Morte Di un Matematico Napoletano*, *Good Will Hunting* (1997), *Arcadia* (1999) by Tom Stoppard, *Fermat's Last Tango* (2000) A Musical. Won an Emmy Award *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*. (English translation, 2000) *A Beautiful Mind* (2001) This movie won four Academy Awards. *Proof* (2005 ) won a Pulitzer Prize.

The solid impression gained from these stories is that mathematicians are strange and peculiar people. This impression is confirmed by consulting a large database of mathematical fiction etc. compiled by Prof. Alex Kasman of the College of Charleston, South Carolina, a mathematician, an author, and an archivist for literary works with a mathematical underlay. The database contains brief summaries and opinions of about 500 works.

I estimate that about half of the individual works catalogued **sensationalist**. What is clear to me is that there is much material in what I have found that can easily support the assertion that the popular stereotype of the mathematician, as brilliant, somewhat mad, socially inept or reclusive, obsessive, living in the clouds, given to the arcane, the fantastic, is not in error. The mathematicians or mathematics depicted in these works come wrapped in the following sensational themes: magic, codes, espionage, the devil, ghosts, secret messages , other worlds, futurism, madness, autism, apocalypticism, mysticism, the occult, obsessions, prizes, dystopias, evil mathematical productions and cults, machines that turn in to sorcerers' apprentices, alternate time concepts. Apparently, there is a steady market for this kind of literature and mathematicians themselves are writers, producers, and readers of it. Mathematics is often regarded by the average person as a kind of magic and this view fits right in with the fictional themes. Moreover, there is no doubt that the community of professional mathematicians likes to write this kind of material.

### **Is there any reality to these stereotypes ?**

There is some reality, and its perception starts from the simple observation that certain people are good at mathematics and some are not. Some people care about mathematics deeply; they think about it constantly. Other people couldn't care less. Nature and nurture ? Presumably, and on the side of nature, common observation leads to the speculation that some people are "hard wired" for mathematics (whatever that expressions might mean.)

If we humans are hard wired, we appear to be not all wired at the same level. At the very far end of creativity, consider Asperger's Syndrome (Hans Asperger, 1906-1980, Austrian pediatrician,) about which there has been much speculation. This is a psychiatric condition, a certain type of autism, often characterized by poor social interactions, repetitive behavior patterns and numerous eccentricities. The mathematical talent displayed by people with this syndrome can be very considerable. And mathematical candidates suggested for Asperger have included some of the most famous, As anthropologist Clifford Geertz wrote: "The rational beauties of mathematical proof are guarantees of no mathematician's sanity."

### **Where does the difficulty of communication lie and what can be done ?**

There is, paradoxically, a disconnect between the substantial mathematization of everyday life to which everyone is subjected and the extreme reluctance of the general public to learn anything of the subject beyond grade school material. Why should they know more when today relevant numbers and implications are spewed out automatically?

Where does the difficulty lie? Does it lie with mathematics education in the lower grades, often taught by teachers for whom the subject is poison ? Doesn't every specialized activity from cooking to dentistry have its specialized terms that the public becomes familiar with ? Shouldn't grades K-12 provide a basic vocabulary and infrastructure of understanding so that the average newspaper reader will not turn the page rapidly upon encountering the word "mathematics" ? Does the difficulty lie with the nature of mathematics which, at its higher reaches, is a difficult subject requiring much more time for absorption and patience on the part of readers than newspaper articles do ? Does the difficulty lie therefore with the nature of the media with its promise of instant information and understanding ? Does it lie with the journalists who write about recent accomplishments in the field ? With the mathematicians themselves who, in the opinion of many outsiders constitute a priesthood of obsessive specialists ? It would appear that all of the above are operative.

A West Coast mathematical sciences writer with a BA in the subject said to me recently that there are now many books written by professionals to popularize their specialties. "And you know what ? After five pages, they've lost me."



### What Kind of Reportage Would I Like To See ?

As an antidote for sensational reportage, I would suggest that newspapers run articles that give a semblance of understanding of the degree to which mathematics that underlies today's world -- yes a semblance. We are living in an age which is mathematized and is increasingly so. To realize this, take a look at the front page of a newspaper and count the number of numbers that are on it. Some numbers invoke trivial mathematics; some less so. Go to the business section and do the same. Go to the sports section and do the same.

Just think what a different (perhaps better) life we would lead if IQ's were not around to tell us who is "intelligent" and who is not. How would we live if there were no blood pressure or cholesterol numbers to advise us; if there were no pre-election polling on every conceivable issue; if the trajectory of a missile or of a rocket to Mars were computed by pre-Newtonian theories or by guesswork; if, when we went to the supermarket, the checkout clerk took a pencil from behind his ear, marked down the prices of our 18 items and toted them up. Have you looked at a weather map with its isobars and isotherms? There are mathematical algorithms that underlie the production of these pictures. What meaning can be ascribed to the statement that "it will rain tomorrow with 40% probability" ? Do you know that the diffusion equations have been invoked to advise orchid growers how often to water their plants?

Each of these experiences and hundreds more, have been created by calling in an underlay mathematical ideas and methods, some trivial, some deep and by no means within the abilities of the general public, and as yet few of them have been called to the attention of the public as something worthy of its attention.

I should think that at the very least it should be possible for a newspaper to educate us to the fact that mathematics is formatting a good portion of today's life and to point out where this is occurring. It need not even give the readers a semblance of understanding of the technical mathematics; that is too much to expect. But I should hope that clever writers might point out how mathematics is altering our lifestyles.

Philip J. Davis, Division of Applied Mathematics, Brown University  
Providence, R.I.

## The reception of Gödel's 1931 incompleteness theorems by mathematicians

I. Grattan-Guinness

June 2006

### Summary

Among those concerned with mathematical logic and axiomatics, the impact of Gödel's 1931 theorems on first-order arithmetic was fairly rapid and positive. But the reception in the mathematical community in general was much slower and more muted. Evidence for this impression will be presented from the literature. The slowness is itself evidence of the ambiguous attitude that mathematicians have usually shown toward logic.

### 1. Introduction

Around 1930 developments in the foundations of mathematics were becoming dominated by the programme of metamathematics led by David Hilbert (1862-1943), and the reasonable expectation that all logical and mathematical theories that could be axiomatised would be shown to be complete and consistent. Gödel's own *Dissertation* at the University of Vienna was of this kind, as in it he showed that the first-order predicate calculus (as we now call it) with identity passed muster; a lightly revised revision was published as (Gödel 1930). But in that year he unexpectedly changed the direction of research, for ever. In a paper (Gödel 1931) that was to be accepted as his *Habilitation* at the University, he showed two properties of the system P of axiomatised first-order arithmetic. In his first theorem he proved that, if P was  $\omega$ -consistent, then it contained more truths than theorems. Some months later he proved the second theorem, that any proof of the consistency of P would require a logically richer theory than that of P itself, not a poorer one.

The history of the early reception of Gödel's paper by logicians has been well recorded (see especially Dawson 1985; also Grattan-Guinness 2007, sec. 3). This article summarises the reception by the mathematical community in general. Three tables of references to primary literature for the mathematicians are presented in section 7. To avoid duplicating references, items from these tables are cited in the text in curled brackets, with the table number followed by a forward slash and then the author and date code; for example, '{2/Rosser 1953}'. The bibliography of all other references follows section 8, and items listed there are cited in the usual way using in round brackets.

### 2. The significance of Gödel's theorems

The first theorem sunk the programme for mathematics that had been developed by A.N. Whitehead (1861-1947) and Bertrand Russell (1872-1970) in their three-volume *Principia mathematica* (1st edition 1910-1913, 2nd edition 1925-1927; hereafter '*PM*'). They held that that 'all' mathematics (or at least quite a lot of it) could be derived *solely* from mathematical logic including set theory (Grattan-Guinness 2000a); but they had only hoped for consistency and completeness without having any means at hand to exhibit them. This theorem also did not do much good for metamathematics either.

The second theorem sunk the conception of metamathematics that Hilbert had been developing in recent years; for, though he was not always explicit about it, he saw the hierarchy of mathematics, metamathematics, ... as an ascent into simplicity. The theorem also did not do much good for logicism either. The proof method was rich in

consequences in its own right, for the method of ‘Gödel numbering’ (as it became known) played a major role in the growth of recursion theory and the formation of companion impossibility theorems and conjectures in other contexts by Alan Turing (1912-1954), Alonzo Church (1903-1995) and others.

In addition but rarely noted,  $\infty$  recognised the *central* importance of distinguishing theory from metatheory, logic from metalogic, signs from their referents, and so on in all contexts. The distinction was not new, metamathematics being one distinguished partial anticipation; but elsewhere it was not well grasped or followed. (*PM* was a disaster in this respect, especially with its all-purpose implication.) Around the same time the Pole Alfred Tarski (1901-1983) had been coming to the same conclusion partly from other considerations (Feferman and Feferman 2004, esp. int. 3), and both men deserve the credit for this *major* change in conception of logic. To most of their predecessors logic was some vast all-embracing body of knowledge relative to which metalogic could not be formed; but from now on hierarchies were essential, whether in standard bivalent logic within which Gödel’s theorem lay, or in any other logic to come.

### 3. The reception among mathematicians: the technical literature

Those closely linked to Gödel’s concerns recognised his theorems and their consequences quite soon.<sup>1</sup> The field of formal logic, along with related topics such as axiomatic set theory and aspects of model theory, progressed steadily, its social status raised by the launch in 1935 in the USA of the Association of Symbolic Logic and its *Journal* the following year. By then Gödel’s theorems formed part of the furniture for logicians.

But the extent and manner of the reception of the theorems among mathematicians in general was very different from that of the logicians. Let us start with the technical works from formal logic that mathematicians could have seen had they wanted.

3.1 Some logicians wrote books with a broader audience than fellow specialists in mind, and mathematicians may have read them. I note some principal examples.

Just before the Second World War Bernays published the second volume of his survey of metamathematics, including proofs of both theorems in detail {1/Hilbert and Bernays 1939}; however, ensuing events must have limited its circulation. During the War and later various writings of Tarski are relevant; for example, the logic textbook {2/Tarski 1941}, which appeared in various languages. After the War such books included the substantial presentation by Stephen Kleene (1909-1994) of metamathematics {1/Kleene 1952}, and the technical monograph by Andrzej Mostowski (1913-1975) on Gödelian results for arithmetic {1/Mostowski 1952}. Some years later Martin Davis published a broad account of recursion theory; naturally the main hero was Turing, but Gödel was duly noted {1/Davis 1958}.

However, there is also the account of ‘logic for mathematicians’ by Barkley Rosser (1907-1989), in which he summarised the treatment of mathematics given in *PM* but deliberately avoided details of the theorems and referred to Gödel rarely {2/Rosser 1953}. This decision is regrettable, especially as the resumé of *PM* itself is of course very capable.

<sup>1</sup> On the history of logic in general up to the early 1960s see, for example, (Mostowski 1966) and (Mangione and Bozzi 1993, chs. 5-7).

## Gödel reception 3

3.2 Another foundational area of mathematics affected by Gödel's theorems was axiomatic set theory. The two main systems were those launched by Ernst Zermelo (1871-1953) in the late 1900s, and by John von Neumann (1903-1957) 20 years later; both were modified by others later, including Gödel. Since first-order arithmetic is expressible within each of them, then they are both incompletable, as Gödel mentioned in the first paragraph of his paper. In the 1950s there began to appear books on axiomatic or general set theory for a broader audience, and so one would expect that this important feature would be explained. However, several of them were silent, although they noted Gödel's later consistency results on set theory.

An important example is Abraham Fraenkel (1891-1965), one of the modifiers of Zermelo's system. He was well familiar with Gödel's paper, for he wrote an excellent review of it for the mathematics reviewing journal *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* {1/Fraenkel 1938} (the tardy publication reflects the declining state of the journal). He had also heard Gödel lecture on his theorems in September 1931 at the annual meeting of the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, where he had spoken himself on set theory.<sup>2</sup> Nevertheless, most of his books do not mention the theorems: his account of 'abstract set theory', though Gödel's paper was listed in the superb bibliography that graced the first edition {3/Fraenkel 1953}; Bernays's book, to which he contributed a lengthy historical introduction {3/Bernays 1958}; or even his own short account of 'logic and set theory' {3/Fraenkel 1959}. The only one of his books where incompleteness received some notice was in the one written with Yehoshua Bar-Hillel (1915-1975) {1/Fraenkel and Bar-Hillel 1958, esp. pp. 303-308}, making the silence elsewhere all the more noticeable.

Some of these books were presented as textbooks (at an advanced level). Several others on or including axiomatic set theory came out in the ensuing years (including in 1973 a revision of Fraenkel's and Bar-Hillel's book by Azriel Levy, with still more details). Discussion of incompleteness in connection with sets was patchy: none in {3/Suppes 1960}, some in {1/Stoll 1961, ch. 9 on first-order theories}, and not really in {1/Kneebone 1963, ch. 11} though the theorems themselves were treated in ch. 8. The account by W.V.O. Quine (1909-2001) of the relationship between set theory and logic, which naturally gave some space to the set theories embedded in his own logical systems, did note incompleteness, though rather sparingly {2/Quine 1963, esp. pp. 110, 305, 325}.

#### 4. The reception among mathematicians: the general literature

The other main source for mathematicians was popular writings on mathematics that covered the pure sides and/or foundations and axiomatics; in many cases the authors themselves were not specialists in logic or set theory.

4.1 The earliest item of this kind was review of Gödel's paper in the new reviewing journal *Zentralblatt für Mathematik*, by the philosopher Walter Dubislav (1895-1937) {1/1932a}. Among popular(ish) books, the first quartet that contain more than passing mentions are in three different languages: a survey of current philosophies

<sup>2</sup> The third speaker at this special session on foundations was Zermelo, who was trying to prove the completeness of mathematics using a vague proto-theory of infinitely long proofs. The aftermath included a superb letter on his theorems that Gödel wrote to Zermelo; it was published in (Grattan-Guinness 1979), and now also in Gödel *Works*, vol. 5, 422-429, without the annoying typesetting errors that of the first printing.



of mathematics by Dubislav {1/1932b, esp. pp. 20-22}, together with a recognition of the 'epoch-making work of K. Gödel' in the review of the book by Heinrich Scholz (1884-1956) {2/Scholz 1933}; a similar survey by Friedrich Waismann (1896-1959), like Gödel a member of the Vienna Circle (1/Waismann 1936, esp. sec. 9A); a discussion of axiomatics and formalism by the French philosopher Jean Cavaillès (1903-1944) {1/1938, esp. pp. 143-149}; and a general account of the development of mathematics by the American historian E.T. Bell (1883-1960). Typically, Bell presented the theorems as concerning logic rather than arithmetic {1/Bell 1940, 575-578}; on the other hand, his account formed part of a substantial survey of various recent foundational studies that would not have been familiar to many of his readers.

4.2 Another book of this kind appeared in 1940: a review of 'mathematics and the imagination' by two New York authors {3/Kasner & Newman 1940}. Since they included a chapter on paradoxes and Russell's work (ch. 6), then Gödel could have arisen naturally; but nothing was said. However, the situation for the junior author was to change so substantially that he becomes a major figure in our story.

James Roy Newman (1907-1966) trained as a lawyer at Columbia University in New York. Early in his career he formed a passion for popularising mathematics: the first manifestation was the book just noted, for which Edward Kasner (1878-1955) was a professor in mathematics at Columbia. Soon after the book appeared Newman conceived of editing a large collection of articles on all aspects of mathematics for a general audience; it eventually appeared in 1956 as a four-volume set entitled 'the world of mathematics'. Among several articles concerning axiomatics and logic, Newman wrote one called 'Gödel's proof' with his old philosophy professor at Columbia, Ernest Nagel (1901-1985) {1/Nagel and Newman 1956b}. A somewhat different version of it with the same title appeared that year in the popular journal *Scientific American*, of which Newman was a member of the editorial board {1/Nagel and Newman 1956a}.<sup>3</sup> Two years later they extended the articles into a short book of the same title {1/Nagel and Newman 1958}. It was shorter than they intended, because they wanted to include an English translation of the original paper; but unfortunately Gödel imposed such unreasonable conditions on the whole project (*Gödel Works*, vol. 4, 2-8 and vol. 5, 135-154) that the plan had to be abandoned.

These three publications raised considerably the visibility of the theorems in the mathematical community, and indeed beyond. The role of Newman is a remarkable example of highly effective popularisation of mathematics led by someone outside the profession.

4.3 The importance of the USA in this story is enhanced further. Weyl had played a valuable role before Newman: in 1927 he had published in German a survey of the philosophy of mathematics and of science, and when it was translated into English he added several appendices, including a substantial one on the theorems and their historical and philosophical context {1/Weyl 1949, app. A}.

Five years later another distinguished mathematician with a serious interest in foundational issues, R.L. Wilder (1896-1982), published a general book on foundations,

<sup>3</sup> The differences between the two versions of the article seem to be due only to copyright concerns; there is no substantial variation in content.

No historical work seems to have been done on Newman; for further information consult his own declaration in *Who's who in America*, vol. 4 (1968), 701.

including a section on the theorems {1/Wilder 1953, 256-261}. This work had an educational echo five years later, when the mathematics educators Howard Eves (1911-2004) and Carroll Newsom (1924-1986) published a book with a very similar title but set at a level for undergraduates {2/Eves and Newsom 1958}.<sup>4</sup> They followed an historical approach to foundations — Eves was a good historian of mathematics — and ended with Gödel's theorems. They stated that the details were above the level of their book, but they had nicely revealed the context in which the theorems arose. Further, in a revised edition of their book in 1965 they did provide some of the details in a new appendix.

Quite different results came from another American textbook of the same period. In outlining 'logic in elementary mathematics' the mathematics educators Robert M. Exner (1914-2001) and Myron F. Roszkopf adopted quite a formal approach to logic {3/Exner and Roszkopf 1959}. All was ready for Gödel; yet silence reigned in the mathematical chapters of the book, since they did not treat arithmetic at all. A nice opportunity was missed.

### 5. Reception on some other countries

The last section was dominated by Americans, a fact that forms part of my general conclusions. But a rounder picture should be given by considering some other countries where English was not the mother tongue. My impression is that the main reception of the theorems in other countries dates largely from the 1960s onwards.

5.1 France is an obvious case: an exceptionally important mathematical country for some centuries, and also well known for its long derision of logic. How did they react to the theorems? Since our story starts in the 1930s, to a substantial extent the question becomes: how did the Bourbaki group react to the theorems?

The tone was set by Jean Dieudonné (1906-1992) in the 1939 volume of the popular journal *Revue scientifique* with an article on 'modern axiomatic methods and the foundations of mathematics' {3/Dieudonné 1939}. The title fits Gödel pretty exactly; but Dieudonné ignored him even though he noted Hilbert's ambition to 'prove the non-contradiction of mathematics'! He just emphasised some aspects of rigour, deduction from (vaguely known) primitives, and set theory. Similarly, four years later in the same journal Henri Cartan (b. 1904) mused 'On the logical foundation of mathematics', surely a Russellian title {3/Cartan 1943}. However, he largely set aside 'logistic' and focussed instead on transfinite arithmetic, axiomatic set theory, and some aspects of logic, including quantification theory and even the 'Entscheidungsproblem', and a mention of his compatriot logician Jacques Herbrand (1908-1931).

After the War the first numbers of Bourbaki's *Éléments des mathématiques* began to appear, with historical notes in some of them. Gödel was absent, of course, though about 25 years later the newer members of the group were aware of him (see the references in the collection (Bourbaki 1969), for example; and also the head of section 7).

At that time François Le Lionnais edited a substantial volume on current developments in mathematics {3/Le Lionnais 1948}. Three articles are relevant: Bourbaki on 'the architecture of mathematics', emphasising structure and axiomatics; Dieudonné on aspects of the achievements of Hilbert (who had died in 1943); and two other authors on 'the logical synthesis of results and researches'. Silence reigned once

<sup>4</sup> The influence of Wilder upon Eves and Newsom is clear, as the authors state that one of them had been his student; however, neither of them took a doctorate under his direction.

more. In 1962 the book was reissued, and the editor added to it a reprint of Dieudonné's 1939 article; so *encore rien*.

The Bourbakists were much concerned with rigour and accuracy in mathematics, but they drew little upon logic as a discipline in its own right to fulfil their purposes. This attitude was made very clear by André Weil (1906-1998) in a lecture delivered before the Association of Symbolic Logic late in 1948, where he outlined the 'foundations of mathematics for the working mathematician' {3/Weil 1949}. He noted some features of logic, such as well-formed formulae and quantification, and some set theory, but that was all.

5.2 Concerning other countries, Gödel's own part of the world, central Europe, is a good example: most major logicians and several mathematicians had emigrated after the arrival of Hitler, and logic was judged to be a degenerate academic subject. After the War there were still logicians prosecuting the subject, but our concern is with the mathematical community in general.

In Germany the second edition of the *Encyclopädie der mathematischen* which included two articles on logic where the theorems were described {1/Schmidt 1950, 1/Hermes and Scholz 1952}. No articles on logic appeared in the first edition (1898-1935); but in contrast to that massive achievement, the second edition petered out rather quickly, and so these articles may not have been widely read.

In 1956 was a popular book on mathematics by Herbert Meschkowski (1909-1990) contained a short section {1/1956, ch. 11}, and a passage from Gödel's paper was quoted in the German source book for 'formal logic' by the Pole Innocentius M. Bochenski (1902-1995) {1/1956} (an English edition of that book appeared five years later). A pioneering philosophical muse on 'incompleteness and undecidability' was offered by Wolfgang Stegmüller {1/1959, esp. ch. B}, though I doubt that many mathematicians would have read it.<sup>5</sup> Most of the impact seems to have been made from the 1960 onwards; that is, later than the level of publicity achieved in American English writing. For example, the 1958 book of Nagel and Newman was translated into German only in 1964, while the new material in Weyl's philosophy book of 1949 (section 5.3) did not come out in German until the third edition of 1966.

## 6. Concluding remarks

One cites the case of an eminent university figure who, in a recent lecture given at Princeton in the presence of Gödel, would say that nothing new had been done in Logic since Aristotle!

(Bourbaki 1969, 14).

6.1 The evidence presented suggests that the mathematical community did not become generally aware until around 25 years after publication; and Americans authors, especially the non-mathematician Newman, played the major role. In this section I discuss these conclusions.

This survey is knowingly incomplete in respects other than that concerning countries. Firstly, for reasons of space I have not cited all the items listed in the three

<sup>5</sup> This remark is not intended as a criticism of Stegmüller's book. But mention of it suggests another interesting historical question that to my knowledge has not been studied: what is the history of the reception of Gödel's theorems in the philosophical community?



tables below; but the others corroborate the impression conveyed. Secondly, there must be literature in the dominant languages that I have not tracked down; since the theorems relate to such a basic part of mathematics, there might be discussions by mathematicians anywhere within a wide range of interests, making all of them very hard to locate. Thirdly, mathematicians specialising in certain areas sometimes become familiar with other ones (to give a lecture course on them in their institution, for example), but do not leave a published trace in the form of papers or books; doubtless formal logic formed such an alternative for some mathematicians. For example, the Briton G.H. Hardy (1877-1947) on occasion lectured both on logicism and on metamathematics; but he did not include any foundational topics in his own popular book on mathematics {3/Hardy 1940}.

6.2 Despite these caveats I think that the conclusions drawn are broadly correct, especially the difference in speeds of reception between logicians and mathematicians. Moreover, I do not find the differences surprising. In my years of studying the history of mathematics and the history of logic I have long been aware not only of the long history of both disciplines but especially that they usually had *little* to do with each other. For example, despite great efforts at publicity even leading mathematician Hilbert was unable to convince mathematicians in large numbers from the 1920s onwards to follow leading logician Hilbert and take up metamathematics as a field of study, or even of teaching.

Among many differences between formal logic and mathematics, logic is the broader discipline, and many of its concerns are and have been profitably pursued without paying any special attention to mathematics; for example, some books on formal logic published in the period covered by this article have not been cited precisely for this reason. The main points of contact lie in some aspects of axiomatics and (since around 1900) model theory (Peckhaus 1999, Grattan-Guinness 2000b). But otherwise, to a mathematician logic is certainly important for supplying rules of deduction such as *modus ponens* and proof by contradiction, and maybe to help in the well-formation of formulae; to him there is no special need to study matters that to a logician are central, such as *why* or in what circumstances a deduction is valid, nor to consider other foundational aspects of mathematical theories. The common attitude of mathematicians is exemplified, in a markedly forceful way, by the Bourbakists (section 6.1); indeed, to some extent it shows their influence upon the mathematical community.

One aspect of mathematical theories rarely considered by mathematicians but well noted by logicians is the forms and role of definitions (Dubislav 1931). Gödel's proof of the first theorem rests on a sequence of 46 definitions that had to be tight because of the need to keep logic and metalogic rigidly apart. If a mathematician were to work his way through the sequence, he would find a level of rigour that is very likely much higher than that obtains even in so-called 'rigorous' mathematics, so that Gödel's theorems would not apply to his way of doing mathematics.

To logicians mathematicians are rather sloppy and none too familiar with logic, while to mathematicians logicians are fussy and none too familiar with mathematics. The quotation at the head of this section typifies both sides, not only because of its content but also for its context, namely that Aristotle's writings 'encourage philosophers in their neglect of the study of mathematics and block the progress of formal Logic' (Bourbaki 1969, 14).

The wide gap between mathematics and formal logic was evident to me even before I began to work on history. Around 1960 I was studying for a degree in mathematics: that is, three years of proving theorems and proving theorems and proving



theorems, but bereft of significant reflections on proof *theory*. In particular, Gödel's theorems were not mentioned in any course, though we did study the completeness theorem of 1930 in one on sets and models (with the logic explained in a few lines). I record these memories because I am sure that my experience was quite typical of its time, for all or at least many countries.

In these contexts the difference between the speeds of reception of Gödel's theorems is to be expected; indeed, without Newman the gap might have been still greater. It has reduced somewhat from the 1960s onwards, especially because of the steadily increasing use of computers in general and the companion rise of computer science as an academic discipline, and (partly for this reason) the continual growth of work in formal logic. Gödel (and also Tarski and Turing) grew to be very well known, and his theorems became quite popular; for example, three English translations of the paper appeared, in 1962, 1965 and 1967. Formal logic became even somewhat trendy, with many textbook publishers wanting a book on it (maybe including some mathematics) in their list.

### 7. Three bibliographical tables

#### 7.1. General(ish) works in which Gödel's theorems are reviewed or discussed.

Year	Author, (short) title	Comments
1932a	W. Dubislav, Review of Gödel's paper, <i>Zent. Math.</i> , 2, 1	
1932b	W. Dubislav, <i>Philosophie der Mathematik in der Gegenwart</i> , Berlin	
1936	F. Waismann, <i>Einführung in das mathematische Denken</i> , 1st ed., Vienna	6 pp. English trans. 1951
1938	J. Cavailles, <i>Méthode axiomatique et formalisme</i> , 3 pts., Paris	4 pp.
1938	A.A. Fraenkel, Review of Gödel's paper, <i>Jbch. Fort. Math.</i> , 57(1931), 54	
1939	D. Hilbert and P. Bernays, <i>Grundlagen der Mathematik</i> , vol. 2, Berlin	By Bernays. Available outside Germany?
1940	E.T. Bell, <i>The development of mathematics</i> , New York & London	3 pp. in 30 pp. on foundations; faulty
1949	H. Weyl, <i>Philosophy of mathematics and natural science</i> , Princeton	17 pp.. Only in German in 3rd ed. (1966)
1950	A. Schmidt, 'Mathematische Grundlagen', <i>Enc. Math. Wiss.</i> , 2nd ed., vol.1, sec.1, pt.2, 1-48	Widely read?
1952	S.C. Kleene, <i>Introduction to metamathematics</i> , Amsterdam and Groningen	
1952	H. Hermes & H. Scholz, 'Mathematische Logik', <i>Enc. Math. Wiss.</i> , 2nd ed., vol.1, sec.1, pt.1, 1-82	Widely read?
1952	A. Mostowski, <i>Sentences undecidable in formalised arithmetic</i> , Amsterdam	Technical monograph
1953	R.L. Wilder, <i>Introduction to the foundations of mathematics</i> , New York	6 pp.
1956	I.M. Bochenski, <i>Formale Logik</i> , Freiburg & Munich	Source book; English trans. 1961
1956	H. Meschkowski, <i>Wandlungen des mathematischen Denkens</i> , Braunschweig	2nd ed. 1960; English trans. 1965

## Gödel reception 9

1956	F. Desua, 'Consistency and completeness — a review', <i>Amer. math. monthly</i> , 63, 295-305	Gödel's theorems prominent
1956a	E. Nagel & J.R. Newman, 'Gödel's proof', <i>Sci. Amer.</i> , 194, no. 6, 71-86	Pioneer popularisation
1956b	[Version of previous], in J.R. Newman (ed.), <i>The world of mathematics</i> , 4 vols., New York, 1668-1695	Parts of book on axiomatics & on logic
1958	E. Nagel & J.R. Newman, <i>Gödel's proof</i> , New York	Book version of articles: German trans. 1964
1958	M. Davis, <i>Computability and unsolvability</i> , New York	Book focussed around recursion
1958	A.A. Fraenkel & Y. Bar-Hillel, <i>Foundations of set theory</i> , Amsterdam	Section in ch. 5; more in 2nd ed. 1973
1959	E.W. Beth, <i>The foundations of mathematics</i> , Amsterdam	A chapter; Gödel's paper not cited!
1959	W. Stegmüller, <i>Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit</i> , Vienna	Philosophical discourse
1961	R.R. Stoll, <i>Set theory and logic</i> , San Francisco	Textbook; short section
1962	K. Gödel, <i>On formally undecidable propositions</i> , Edinburgh	1st English trans.; intro. by R.B. Braithwaite
1962	W. & M. Kneale, <i>The development of logic</i> , Oxford	History; 13 pp.
1963	G.T. Kneebone, <i>Mathematical logic and the foundations of mathematics</i> , London	Textbook; ch. 8 (14 pp.) & other mentions

## 7.2 General(ish) works in which the theorems are mentioned.

1933	H. Scholz, review of {1/Dubislav 1932b}, <i>Jber. Dtsch. Math.-Ver</i> , 43, 88-90.	
1934	A. Heyting, <i>Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie</i> , Berlin	
1939	R. Carnap, <i>Foundations of logic and mathematics</i> , Chicago	Part of 'International encyclopedia'
1941	A. Tarski, <i>Introduction to logic</i> , 1st ed., New York	Later eds. and trans.
1941	R. Courant & H. Robbins, <i>What is mathematics?</i> , New York	Small note; to 4th ed. 1947
1946	H. Weyl, 'Mathematics and logic', <i>Amer. math. monthly</i> , 53, 2-13	General review of foundations
1949	L. Chwistek, <i>The limits of science</i> , London	Polish orig. 1935
1951	E.T. Bell, <i>Mathematics queen and servant of science</i> , New York	Quote from Weyl (1946)
1953	E.R. Stabler, <i>An introduction to mathematical thought</i> , Cambridge (Mass.)	Only corollary properly conveyed
1953	J.B. Rosser, <i>Logic for mathematicians</i> , New York	Theorems deliberately minimised
1955	E.W. Beth, <i>Les fondements logiques des mathématiques</i> , 2nd ed., Paris	Also mentions in other of his books
1958	H. Eves & C.V. Newsom, <i>An introduction to the foundations &amp; fundamental concepts of mathematics</i> , New York	Some details given in appendix to 2nd ed (1965)
1961	R.R. Stoll, <i>Set theory and logic</i> , San Francisco	Textbook

1963	W.V. Quine, <i>Set theory and its logic</i> , Cambridge (Mass.)	2nd ed. 1969
------	---	--------------

## 8.3. General(ish) works in which the theorems are not mentioned.

1933	H. Hahn, <i>Logik, Mathematik und Naturekennen</i> , Vienna	French trans. 1935
1935	E.R. Stabler, 'An interpretation and comparison of three schools of thought in the foundations of mathematics', <i>The mathematics teacher</i> , 28, 5-35	Covers logicism, metamathematics and postulation theory
1939	J. Dieudonné, 'Les methodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques', <i>Rev. sci.</i> , 77, 224-232	Repr. in Le Lionnais (1948), 1962 repr.
1940	G.H. Hardy, <i>A mathematician's apology</i> , Cambridge	Author well familiar with foundations
1940	E. Kasner & J.R. Newman, <i>Mathematics and the imagination</i> , New York & London	Ch. on paradoxes & foundations
1943	W.W. Sawyer, <i>Mathematician's delight</i> , Harmondsworth	Foundations not handled
1943	H. Cartan, 'Sur le fondement logique des mathématiques', <i>Rev. sci.</i> , 81, 2-11	'Logistic' deliberately minimised
1944	'Russell's mathematical logic', in P.A. Schilpp (ed.), <i>The philosophy of Bertrand Russell</i> , New York, 192-226	Reviews only <i>Principia mathematica</i> : no mention of his theorems
1948	F. Le Lionnais (ed.), <i>Les grands courants de la pensée mathématique</i> , Paris; repr 1962	3 related articles, inc. one by Bourbaki
1949	A. Darbon, <i>La philosophie des mathématiques</i> , Paris [posthumous]	Detailed study of Russell, but no <i>PM</i> ; done < 1910?
1949	N. Bourbaki, 'Foundations of mathematics for the working mathematician', <i>J. symb. logic</i> , 57, 221-232	Lecture delivered to the Association of Symbolic Logic by A. Weil
1940s	N. Bourbaki, <i>Eléments des mathématiques</i> , Paris	A few mentions in later eds.
1951	A. Bakst, <i>Mathematics, its magic and mystery</i> , Princeton	Mostly on heuristics
1952	L. Couffignal, <i>Les machines à penser</i> , Paris	Popular book on computing; no Turing
1953	B.V. Bowden (ed.), <i>Faster than thought</i> , London	Mainly on computers
1953	A.A. Fraenkel, <i>Abstract set theory</i> , Amsterdam	Paper only in the (huge) bibl.
1958	K. Menninger, <i>Zahlwort und Ziffer</i> , 2nd ed., Göttingen	Historical, but not on foundations
1958	P. Bernays, <i>Axiomatic set theory</i> , Amsterdam [Historical preface by Fraenkel]	Incompleteness not explicitly mentioned
1959	A.A. Fraenkel, <i>Mengenlehre und Logik</i> , Berlin	Ditto re incompleteness. English trans. 1966
1959	R.M. Exner & W.F. Rosskopf, <i>Logic in elementary mathematics</i> , New York	Textbook level; arithmetic excluded!
1960	P. Suppes, <i>Axiomatic set theory</i> , Princeton	
1962	T. Dantzig, <i>Number the language of science</i> , 4th ed., New York	Historical work; includes sets

1964	<i>The mathematical sciences. Essays for COSRIMS</i> , Cambridge (Mass.)	No foundations, but article on continuum hypothesis
------	---	--

### Bibliography

- Bourbaki, N. (1969). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris (Hermann).
- Dawson, J.W. Jr. (1985). The reception of Gödel's incompleteness theorems. In PSA 1984, East Lansing, Michigan (PSA), vol. 2, 253-271. [Also in S.G. Shanker (ed.), *Gödel's theorem*, London (Croom Helm), 1988, 74-95. Also in T. Drucker (ed.), *Perspectives on the history of mathematical logic*, Boston (Birkhäuser), 1991, 84-100.
- Dubislav, W. (1931). *Über die Definition*. 3rd ed., Leipzig (Meiner).
- Feferman, A. B. and Feferman, S. (2004). *Alfred Tarski: life and logic*. Cambridge (Cambridge University Press).
- Gödel, K. *Works. Collected works*, 5 vols. Oxford (Oxford University Press), 1986-2003.
- Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, 349-360 [Also in *Works*, vol. 1, 102-123.]
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173-198. [Also in *Works*, vol. 1, 145-195.]
- Grattan-Guinness, I. (1979). In memoriam Kurt Gödel: his 1931 correspondence with Zermelo on his incompleteness theorem. *Historia Mathematica*, 6, 294-304.
- Grattan-Guinness, I. (2000a). *The search for mathematical roots, 1870-1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton (Princeton University Press).
- Grattan-Guinness, I. (2000b). Mathematics and symbolic logics: some notes on an uneasy relationship. *History and philosophy of logic*, 20 (1999: publ. 2000), 159-167.
- Grattan-Guinness, I. (2007) The reception of Gödel's 1931 incompleteness theorems by mathematicians, and some logicians, up to the early 1960s. In the proceedings of the Gödel centenary conference, to appear.
- Mangione, C. and Bozzi, S. 1993. *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*. [Milan] (Garzanti).
- Mostowski, A. (1966). *Thirty years of foundational studies*. Oxford (Blackwell).
- Peckhaus, V. (1999). 19th century logic between logic and philosophy. *Bulletin of Symbolic Logic*, 5, 433-450.



*Die Herausgabe der Weierstraßschen  
„Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche  
der elliptischen Functionen“  
durch Hermann Amandus Schwarz*

PETER ULLRICH

Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz, Mathematisches Institut  
Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz, Deutschland

Der Briefwechsel zwischen KARL WEIERSTRASS (1815–1897) und seinem Lieblingsschüler HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921) erstreckte sich über die Jahre von 1866 bis 1893 und umfaßt insgesamt fast 200 Schreiben. Man findet darin, wie zu erwarten, den Austausch mathematischer Gedanken und auch Kommunikation über Kollegen, vor allen Dingen, was Berufungsangelegenheiten betrifft.

Unterstellt man jedoch – im Anschluß an FELIX KLEIN (1849–1925) [1, S. 283] –, WEIERSTRASS habe unter einer prinzipiellen Abneigung gegen Druckerschwärze gelitten, so erlebt man eine Überraschung: Zahlreiche Briefe befassen sich mit der Herausgabe der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen“ [4], die SCHWARZ auf der Basis WEIERSTRASSscher Ergebnisse unternahm.

Insbesondere im Jahre 1881, in dem die ersten 6 der insgesamt 12 Bogen dieses Werks erschienen, dominierte dieses Thema völlig die Briefe von SCHWARZ. Dieser war generell nicht unbedingt lakonisch in seinen Äußerungen, und gerade bei der Herausgabe eines auf seinen akademischen Lehrer zurückgehenden Textes wollte er sich offenbar bei diesem stets rückversichern, ob Einwände bestünden, – und vielleicht auch diesem klarmachen, wie ernst er, SCHWARZ, diese Aufgabe nahm, und wie viel Mühe er investierte. Diese Mitteilungsfreude liefert eine vollständige Dokumentation der Entstehung des genannten Werks, ausgehend von den Vorstellungen von WEIERSTRASS und SCHWARZ zu dessen Inhalt und Adressatenkreis, über die Wahl des Vervielfältigungsverfahrens und die finanzielle Kalkulation bis zu typographischen Fragen wie der Gestaltung

einzelner Bleiletern. Hier liest man auch von jenen Details und Problemen, die SCHWARZ in seiner Einleitung zur zweiten Auflage nicht erwähnte [4, 2. Auflage, S. V–VIII].

## 1 Urheberschaft und Adressatenkreis

Die Inhalte der „Formeln und Lehrsätze . . .“ [4] stammen aus der WEIERSTRASSschen Theorie der elliptischen Funktionen, wie auch deren Untertitel „Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz“ bekundet. Die eigentliche Ausgestaltung lag aber völlig in der Hand von SCHWARZ, was auch WEIERSTRASS so sah, etwa wenn er an SCHWARZ von „Ihre[r] Formelsammlung“ [11, 9.4.1881 und 3.3.1883] schrieb. Dies bedeutete allerdings auch, daß WEIERSTRASS dies nicht mehr als eine Angelegenheit ansah, deren Fortschritt hohe Priorität für ihn hatte:

So äußerte er erst den Wunsch, die partiellen Differentialgleichungen der  $\sigma$ -Funktion sollten ausführlicher behandelt werden als von SCHWARZ geplant [6, 9.4.1881], und lieferte auch am 25. Juni 1881 ein Manuskript dafür [11, 25.6.1881], verlangte dieses aber schon am nächsten Tag wieder zurück, um es stattdessen als Abhandlung „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ [9] in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie zu publizieren [11, 26.6.1881]. Und der Theorie der Transformationen elliptischer Funktionen, die SCHWARZ als die „grösste Zierde der Sammlung“ [6, 9.4.1881] bezeichnet hatte, weil dies ein Abschnitt sein sollte, den WEIERSTRASS selbst geschrieben hätte, erging es noch viel schlechter: SCHWARZ schrieb am 25. März 1886 an WEIERSTRASS, der das Manuskript fünf Jahre lang schuldig geblieben war, jetzt aber an Ausarbeitungen über Abelsche Funktionen und über Variationsrechnung dachte [6, 25.3.1886]:

„Ferner erlaube ich mir, Sie um freundliche Zusendung des mir versprochenen Beitrages zur Formelsammlung, betreffend die Transformation der elliptischen Functionen zu bitten. Es muss doch die Formelsammlung endlich einmal fertig werden und ich werde nicht eher an der Ausarbeitung der Variationsrechnung mit voller Kraft arbeiten können, als ich nicht sehe, dass die Formelsammlung glücklich zu Ende geführt ist.“

Wohlgemerkt: Die ersten Bogen der ersten Auflage von [4] erschienen 1881, die letzten 1885; es gab eine zweite Auflage im Jahre 1893 beim Springer-

Verlag. In allen fehlt die Theorie der Transformationen elliptischer Funktionen, sogar im Nachdruck aus dem Jahre 1962.

Trotz dieser Disharmonien waren sich WEIERSTRASS und SCHWARZ einig, was die generelle Struktur der „Formeln und Lehrsätze . . .“ betrifft: Beide hatten offenbar zu Anfang – was in diesem Fall den Beginn der 1870er Jahre bedeutet – an eine reine Formelsammlung gedacht, die primär als Hilfe für Studenten im Vorlesungsbetrieb dienen und auch den Lehrenden von der Anschreibearbeit entlasten sollte. Weiterhin sollte sie eine Referenzquelle für Forscher bilden und nicht zuletzt, wie gerade SCHWARZ betonte [6, 2.10.1874 und 6.2.1875], die WEIERSTRASSsche Theorie dokumentieren und dadurch ihre Position gegenüber anderen akademischen Schulen stärken.

Im Jahr 1874 jedoch erschienen die zweibändigen „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“ [2] des ältesten, aber recht problematischen WEIERSTRASS-Schülers LEO KOENIGSBERGER (1837–1921), und WEIERSTRASS teilte SCHWARZ mit, daß die Formelsammlung [11, 1.9.1874]

„jetzt, nach dem Erscheinen des Königsberger'schen Buches unter allen Umständen mit einer Einleitung versehen [werden] muss, worin ich meine Methoden klar darlege und rechtfertige“.

SCHWARZ hatte zwar sehr viel an KOENIGSBERGERS Buch auszusetzen [6, 2.10.1874], betonte aber dennoch den Wert auch einer reinen Formelsammlung [6, 6.2.1875], möglicherweise in der Ahnung, daß es sehr lange dauern könnte, bis WEIERSTRASS die geplante Einleitung geschrieben hätte; in der Tat ist diese in der publizierten Fassung [4] nicht enthalten. Der Stillstand wurde noch dadurch verschärft, daß WEIERSTRASS ab Ende der 1870er, Anfang der 1880er Jahre durch der Herausgabe der Gesammelten Werke von CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804–1851) und JACOB STEINER (1796–1863) mit Beschlag belegt war. Erst als SCHWARZ sich entschied, davon abzugehen „blosse Formeln den Zuhörern in die Hände gegeben zu wollen“ [6, 31.1.1881], also zu Formeln *und* Lehrsätzen überzugehen, und, viel entscheidender, WEIERSTRASS anzubieten, daß er, SCHWARZ, die „Formeln und Lehrsätze . . .“ aufschreiben würde, kam wieder Bewegung in die Angelegenheit. Dabei versäumte SCHWARZ es nicht, den immer die finale Darstellungsform anstrebenden WEIERSTRASS da-

rauf hinzuweisen, dies würde nur eine vorläufige Fassung darstellen, die man mit der Zeit verbessern könnte [6, 31.1.1881].

Der Adressatenkreis war dabei derselbe wie zu Anfang, hauptsächlich die Hörer der beiden Beteiligten in Berlin bzw. Göttingen. Für SCHWARZ bedeutete dies, daß [6, 9.4.1881]

„für die in Frage stehende Veröffentlichung eine Auflage von tausend Exemplaren angemessen sein wird, damit nicht allzubald die immerhin erhebliche Mühe sich wiederholt“.

## 2 Technische Fragen der Vervielfältigung

Daß die bei Vorlesungsmitschriften übliche Reproduktionstechnik des Abschreibens mit der Hand für solch ein Unternehmen nicht in Frage kam, war klar. Somit stellte sich die Frage nach der Vervielfältigungstechnik:

Neben dem klassischen Bleisatz, wie er für Bücher und Zeitschriftenartikel verwendet wurde, stand dem 19. Jahrhundert mit dem lithographischen Druck eine weitere Reproduktionstechnik zur Verfügung. Bei diesem wird die Druckplatte aus Stein oder auch Metall, insbesondere Zink, so vorbehandelt, daß diejenigen Teile, die später drucken sollen, fettanziehend werden und daher die fetthaltige Druckerfarbe annehmen, während die nichtdruckenden Teile wasseranziehend werden und daher die Druckerfarbe abstoßen. Besonders beliebt für die Vervielfältigung von Handschriften war der autographische Druck: Man schrieb (oder zeichnete) mit einer speziellen autographischen Tinte auf Papier, das mit einer wasserlöslichen Kleisterschicht überzogen war. Von diesem wurde die Schrift als Negativ auf den Druckstein bzw. die Druckplatte übertragen, wovon – nach entsprechender chemischer Weiterbehandlung – dann die Drucke als Positive abgezogen werden konnten.

Zwar läßt dieses Verfahren im Vergleich zum Bleisatz nur geringe Druckgeschwindigkeiten zu, und es ist auch nicht ganz problemlos, von einer solchen Druckvorlage eine zweite Auflage zu erstellen. Für mathematische Texte jedoch hatte das autographische Verfahren gegenüber dem Druck mit Lettern den beachtlichen Vorteil, dass der Formelsatz nur von der Geschicklichkeit des Schreibers (oder der Schreiberin) abhing.

Daher ist es nicht verwunderlich, daß dieses Verfahren auch verwendet wurde, um Ergebnisse von WEIERSTRASS unter die Interessenten zu brin-



gen. Das bekannteste Beispiel ist wohl der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz aus der Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Dieser wurde 1879 veröffentlicht als einer von „Einige[n] auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veraenderlichen sich beziehende Saetze“ [8], die wie der Untertitel verrät, „[z]usammengestellt und dem mathematischen Verein zu Berlin zur Veroeffentlichung uebergeben [waren] von Professor Dr. C. Weierstrass“. Vervielfältigt wurden sie im Jahre 1879 als „Autogr[aphischer] Druck“. Sieben Jahre später, 1886, ließ WEIERSTRASS sie dann konventionell setzen und mit anderen

„Abhandlungen (über die Theorie der eindeutigen Funktionen) ... im Verlage von Springer wieder abdrucken (mit Verbesserungen und Zusätzen)“

[11, 18.4.1885], den „Abhandlungen aus der Functionenlehre“ [10]. Über das Ergebnis der klassischen Drucktechnik war er jedoch nicht sehr begeistert: „In den „Abhandlungen aus der Funktionenlehre“ finden sich leider viele Druckfehler.“ [11, 29.3.1886] Noch zu seinen Lebzeiten, im Jahre 1895, erschienen die Arbeit [8] nochmals in Blei gesetzt, im Band 2 seiner „Mathematische[n] Werke“ [12].

Für den Druck der „Formeln und Lehrsätze ...“ hatte SCHWARZ zunächst an die Alternativen autographischer Zinkdruck oder Bleisatz in der REIMERSchen Buchdruckerei in Berlin gedacht, die große Erfahrung mit dem Satz mathematischer Texte hatte. Von der zweiten Möglichkeit ging man jedoch nach Rücksprache mit LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) ab, da die Wartezeit dafür zu lang gewesen wäre [11, 9.4.1881]. SCHWARZ selbst schloß nach einiger Überlegung auch die Vervielfältigung mittels Zinkdruck aus, da diese [6, 9.4.1881]

„den Nachtheil [hat], dass sie bei einer grösseren Auflage viel Zeit erfordert. Da nun für die in Frage stehende Veröffentlichung eine Auflage von tausend Exemplaren angemessen sein wird [...], so fällt dieser Punkt sehr ins Gewicht“.

Daher hatte er die Alternative Steindruck ins Auge gefaßt, aber durch Preisvergleich festgestellt, [6, 9.4.1881]

„dass der Preisunterschied für die Herstellung mittelst Stein-druckes und diejenige mittelst Buchdruckes bei einer Auflage von

500 Exemplaren allerdings sehr bedeutend ist, dagegen bei den mir gegenwärtig gemachten Offerten schon bei einer Auflage von 1000 Exemplaren garnicht mehr in Betracht kommt.“

Daher entschied er sich, die „Formeln und Lehrsätze . . .“ bei der „Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)“ in Göttingen im Bleisatz drucken zu lassen.

### 3 Finanzielle und typographische Fragen

Dies hatte allerdings zur Konsequenz, dass zum einen die Herstellung der Druckvorlage bezahlt werden mußte (unter besonderer Berücksichtigung etwaiger Autorenkorrekturen) und dass zum anderen die notwendigen Satztypen vorhanden sein mußten. Die Dieterichsche Buchdruckerei hatte zwar Erfahrungen mit dem Satz mathematischer Texte beim Druck von Bänden der Werke von CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) gemacht; es zeigten sich aber bald – teilweise erhebliche – Probleme.

#### 3.1 Die kaufmännische Kalkulation

SCHWARZ hatte zunächst gehofft, daß der Vertrieb einerseits über den Berliner Mathematischen Verein und andererseits über einen Verleger in Kommission erfolgen würde, und dabei gleich an „eine „anständige“, wohlbekannte Firma“ [6, 9.4.1881] wie REIMER oder DÜMMLER in Berlin gedacht. WEIERSTRASS mußte ihn aber auf den Boden der Tatsachen zurückbringen [11, 11.4.1881]:

„Ich fürchte [. . .], die hiesigen Buchhändler würden Ihrem – von mir durchaus gebilligten – Vorhaben, auch durch den hiesigen Mathematischen Verein Exemplare, und zwar an die Studenten zu einem billigen Preise verkaufen zu lassen, entgegen sein.“

So blieb SCHWARZ nichts anderes übrig, als den buchhändlerischen Vertrieb durch den Göttinger Buchhändler PEPPMÜLLER erfolgen zu lassen unter den Bedingungen [6, 20.5.1881]:

„Commissionsverlag, Anteil des Herausgebers 50 % des Ladenpreises, Vertrieb an die Studenten in Berlin durch den Berliner mathematischen Verein“.

Das verlegerische Risiko trug wohlgerne SCHWARZ selbst, und er machte auch in seinem Brief vom 9. April 1881 die Kalkulation:

Für einen Bogen (zu 8 Seiten) rechnete er bei einer Auflage von 1000 Exemplaren mit Kosten von 70 Mark. (Um die Preise in Relation zu setzen, sei angemerkt, daß SCHWARZ bei seiner Berufung als Ordinarius nach Göttingen ein Festgehalt von 2.400 Mark jährlich angeboten bekommen hatte [11, 5.6.1875], das sich aber durch die Hörergelder in der Regel weit mehr als verdoppelte.) Von den Herstellungskosten machten Satz und Druck ohne Papier 36 Mark aus.

Auf der anderen Seite setzte er für die Berliner Studenten einen Subskriptionspreis von 20 Pfennig pro Bogen an [6, 9.4.1881]:

„Noch billiger den Preis anzusetzen hat keinen Sinn, denn wer nicht 20 Pfennig pro Bogen zahlen kann, der braucht überhaupt nicht zu studieren.“

Bei einem vollständigen Absatz der Auflage hätte SCHWARZ also einen Rohgewinn von 130 Mark pro Bogen gemacht, und das bei zuletzt insgesamt 12 Bogen. Ob und wie er den Berliner Mathematischen Verein für dessen Vertriebsarbeit entschädigen würde, behielt sich SCHWARZ dabei sogar noch vor [6, 20.5.1881].

Allerdings mußte dieser Betrag auch sein Honorar als Herausgeber und Autor abdecken und – die Kalkulation ging nicht so ganz auf! Wie die Geschichte des Springer-Verlags vermeldet [3, S. 128]:

„Schwarz stellte höchste Ansprüche an die typographische Korrektheit des Formelsatzes.“

Und dies hatte seinen Preis, wie er WEIERSTRASS schon am 20. Mai 1881 berichten mußte [6, 20.5.1881]:

„So wenig Formeln auch der erste Bogen enthält, so betragen doch die Kosten für die sogenannten „Veränderungen“ d. h. für die Änderungen im Satze, welche ich im Interesse grösserer typographischer Schönheit der Formeln habe eintreten lassen, für diesen Bogen allein nicht weniger als M 11.50, so dass die Herstellungskosten für diesen Bogen sich auf 80 M erhöhen.“

Dies gab sich nicht etwa mit der Zeit, sondern für die Bogen 3 und 4, wenn auch zusammen, erhielt er eine Zusatzrechnung über 37 Mark [6, 26.6.1881].

Was den Verkaufspreis betrifft, so gab es offenbar genügend auch zahlungskräftige Abnehmer: Bereits 1883 wurden Bogen in einem Antiquariatskatalog zum Zehnfachen des Subskriptionspreises angeboten, worüber sich SCHWARZ erheblich aufregte [6, 28.7.1883].

Der reguläre Absatz lief offenbar nicht schlecht: Bereits am 17. Juni 1881 konnte WEIERSTRASS aus Berlin melden, dass 130 Exemplare abgesetzt waren [11, 17.6.1881]. Die letzten Bogen der „Formeln und Lehrsätze ...“ wurden erst 1885 gedruckt, und bereits am 30. Oktober 1890 plante SCHWARZ eine Neuauflage, bei der er, aus Erfahrung klug, versuchte, möglichst viel des Formelsatzes durch stereotypisches Abformen von den alten Druckplatten unverändert zu erhalten [6, 30.10.1890].

### 3.2 Typographische Probleme

SCHWARZ war keinesfalls ein weltfremder Ästhet, der sich noch nie mit den Problemen des Bleisatzes auseinandergesetzt hatte: Schon vor dem 18. April 1881 hatte er sich „[h]insichtlich des Typographischen [...] der Hülfe des Herrn *Barich* vergewissert“ [6, 18.4.1881]. C. BARICH war der technische Leiter („Factor“) der REIMERSchen Buchdruckerei in Berlin, seine – keinesfalls kostenlose – Unterstützung erwies sich als außerordentlich hilfreich [6, 20.5.1881]:

„derselbe hat mich bereits auf sehr viele Einzelheiten aufmerksam gemacht, auf welche ich gewiss nicht geachtet haben würde.“

Und auch den direkten Umgang mit dem Setzerblei scheute SCHWARZ nicht:

„Man sagt Schwarz gar nach, daß er bei einem unbefriedigenden Satzbild den Korpus der Zeichen selbst abfeilte, um eine gewünschte Unterschneidung zu erreichen.“

Dieses Zitat aus einer Darstellung des Springer-Verlags [3, S. 128–129] gewinnt an Glaubhaftigkeit, wenn man die Details zur Erstellung von Drucktypen zur Kenntnis nimmt, die SCHWARZ in seinem Brief vom 26. und 27. Juni 1881 berichtete.

So wurden für nicht oder nicht in hinreichender Qualität vorhandene Schrifttypen die Gießformen in Leipzig bei (dem Musikverlag) Breitkopf & Härtel hergestellt. Besonders stolz war SCHWARZ auf die Typen für die  $\sigma$ -Funktionen; er schickte WEIERSTRASS Bleiabgüsse, also die eigentlichen



Satz-Typen, verbunden mit dem Angebot, ihm auch die – von SCHWARZ selbst bezahlte – Gießform für den Druck einer von dessen Abhandlungen (vermutlich [9]) zur Verfügung zu stellen.

Die Anfertigung der Schrifttypen in Leipzig war zeitaufwendig, und so ging SCHWARZ dazu über, selbst „auf galvanoplastischem Wege für die Typenverbindungen Giessformen“ herzustellen [6, 26.6.1881]. Umgekehrt ließ er bei den Typen  $\tilde{\eta}$  und  $\tilde{\omega}$  den Buchstaben und die Schlange darüber einzeln gießen, um beide später getrennt verwenden zu können [6, 15.4.1881].

Ähnliche Sonderanfertigungen wurden im Laufe der Herstellung immer wieder notwendig, so bei dem sehr formellastigen Bogen 9, dessen Typen mit zusätzlichen 80 Mark zu Buche schlugen [6, 28.2.1883]. Für die letzten beiden Druckbogen, 11 und 12, ließ SCHWARZ 1885 sogar extra kleine Typen für  $\wp$  und  $\sigma$  anfertigen, die einen dichteren Formelsatz ermöglichten und mit denen er sehr zufrieden war [6, 27.5.1885].

So hatten mit der Zeit SCHWARZ und die Dieterichsche Druckerei zu einer guten Zusammenarbeit gefunden. Hatte SCHWARZ noch 1881 geklagt [6, 26.6.1881]:

„die hiesige Druckerei ist eben doch nicht in ausreichender Weise mit den zu verwendenden Typen versehen, oder die Typen sind schlecht, undeutlich; [...]“,

so bat er im Jahre 1886 den Springer-Verlag sogar darum [3, S. 128], seine „Gesammelte[n] Mathematische[n] Abhandlungen“ [5]

„in der hiesigen Universitätsbuchdruckerei (W. Fr. Kästner) ausgeführt (zu) sehen, welche für mathematischen Satz gut eingerichtet ist.“

Nachdem WEIERSTRASS mit dem 1886 in Berlin erfolgten Druck seiner „Abhandlungen aus der Functionenlehre“ [10] nicht zufrieden gewesen war ([11, 29.3.1886 und 19.5.1890], siehe hierzu und zur Publikation von [5] auch [7]), war es daher nur natürlich, daß auch die ersten Bände von WEIERSTRASS' „Mathematische[n] Werken“ [12] in der Dieterischen Buchdruckerei gedruckt wurden, auch wenn SCHWARZ Göttingen schon 1892 verlassen hatte, um die Nachfolge seines akademischen Lehrers in Berlin anzutreten. (Herrn BARICH war übrigens wieder als typographischer Berater mit dabei.)

## Literatur

- [1] FELIX KLEIN: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, I.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **24**. Julius Springer: Berlin 1926.
- [2] LEO KOENIGSBERGER: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionenlehre*, 2 Bände. Teubner: Leipzig 1874.
- [3] HEINZ SARKOWSKI: *Der Springer-Verlag, Stationen seiner Geschichte, Teil I: 1842–1945*. Springer: Berlin et al. 1992.
- [4] HERMANN AMANDUS SCHWARZ: *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz*. Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner): Göttingen 1881–1885. Zweite Auflage bei Julius Springer: Berlin 1893. Nachdruck Physica-Verlag: Würzburg 1962.
- [5] —: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 2 Bände. Julius Springer: Berlin 1890.
- [6] —: Briefe an KARL WEIERSTRASS. Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Nachlaß Schwarz, Nr. 1254; hier zitiert nach der maschinenschriftlichen Abschrift.
- [7] PETER ULLRICH: Wie Karl Weierstraß und Hermann Amandus Schwarz zum Springer-Verlag kamen. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 2000, Heft 1, 38–42.
- [8] KARL WEIERSTRASS: *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veraenderlichen sich beziehende Saetze. Zusammengestellt und dem mathematischen Verein zu Berlin zur Veroeffentlichung uebergeben von Professor Dr. C. Weierstrass*. Autographischer Druck von H. S. Hermann: Berlin o. J. (1879); auch in [10, S. 105–164] und [12, Band 2, S. 135–188].
- [9] —: Zur Theorie der elliptischen Functionen. *Aus dem Sitzungsbericht der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 27. April 1882*, S. 443–451; auch in [12, Band 2, S. 245–255].
- [10] —: *Abhandlungen aus der Functionenlehre*. Julius Springer: Berlin 1886.
- [11] —: Briefe an HERMANN AMANDUS SCHWARZ. Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Nachlaß Schwarz, Nr. 1175; hier zitiert nach der maschinenschriftlichen Abschrift.
- [12] —: *Mathematische Werke*, 7 Bände. Mayer & Müller: Berlin 1894–1927; Reprint Georg Olms: Hildesheim and Johnson Reprint: New York o. J.



Ernst Weyr



## EMIL WEYR AND SOME HIS ACTIVITIES

Martina Bečvářová

Emil Weyr (1848–1894) was a great Czech geometer. His scientific career was predominantly influenced by the trainee-ship in Italy in the years 1870–1871, above all by encountering Luigi Cremona (1830–1903). After his Italian stay he became an adjunct professor of mathematics at the Czech polytechnic in Prague and since 1875 he was appointed as a full professor at the university in Vienna. In the following text we are trying to describe his life and some of his scientific activities which were important for the international development of mathematics.

### Youth of Emil Weyr

Emil Weyr was born on September 1, 1848, in Prague as the second of ten children of Marie Rumplová (1825–1889) and František Weyr (1820–1889), secondary school professor of mathematics and physics.

From 1859 to 1865 he attended the German realschule in the Mikulandská street in Prague. Actually at that time he inquired into higher mathematics lead by his father. During the years 1865–1868 he studied at the Prague Polytechnic, where he started to employ himself with new geometry lectured by the German mathematician Wilhelm Fiedler (1832–1912). Emil Weyr was an excellent student. Already during his studies Emil Weyr started to publish his first works and his talent attracted attention.

In September 1868 Emil Weyr became an assistant of the higher mathematics chair of the German professor H. Durège (1821–1893). From March 1869 to January 1870 he was doing his one-year volunteer military service. On May 5, 1869, he gained a doctorate in philosophy at the Leipzig University. Encouraged by the physicist and philosopher Ernst Mach (1838–1916), Emil Weyr applied for habilitation at the Prague University; on May 3, 1870, he was appointed as private docent of new geometry. In the years 1869–1870 he published two treatises by Teubner in Leipzig: *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse* (156 pages) and *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung* (175 pages). By the year 1870 (inclusive) he had published another 29 works.

### Trainee-Ship in Italy, Weyr's Diary and Significance of Italian Stay

In autumn 1870, Emil Weyr started to prepare himself for the trainee-ship in Paris (he gained the state scholarship of 1000 golden), where Ch. Hermite (1822–1901), J. A. Serret (1819–1885), M. Chasles (1793–1880) and other great mathematicians of that time held lectures. Nevertheless, the German-French war changed his plan. On November 7, 1870, he left for the study in Milan. First he travelled by the train to Trieste, then he continued to Venice, where he went sightseeing for several days. He arrived at Milan as late as on November 17. From the end of November till mid-January he spent his time at home in Bohemia again. Therefore he began to attend the lectures of Luigi Cremona and Felice Casorati (1835–1890) at the polytechnic not until the beginning of February. In April 1871, he interrupted the studies, travelled through Italy, visited several Italian universities (Padova, Bologna, Pisa, Florence, Roma, Napoli), he also climbed Vesuvio, and made contacts with other prominent Italian scientists. Emil Weyr stayed in touch with many



mathematicians<sup>1</sup> and some astronomers<sup>2</sup>, also the poet Domenico Carbone (1823–1883) and engineer Quintino Sella (1827–1884) were his friends. Towards the end of May 1871, he had to return to Prague, where the occupation of the chair of an adjunct professor at the Czech Polytechnic was being decided.

In the Archive of the Academy of Sciences of the Czech Republic there is deposited a diary, written by Emil Weyr during his stay in Italy with several later notes. It is a small notepad (11,8 x 18,4 cm) inside a damaged thin blue cover with a blue-white label. The first record was made on November 7, 1870; the diary was written in German until March 2, 1871, since then it was written in Czech. The last entry was dated on April 23, 1871. The records were written in pencil or black ink. Some parts are poorly legible, Czech notes are full of grammatical and syntactic mistakes. The diary is interesting not only for a description of contacts of Emil Weyr with Italian mathematicians and an atmosphere in the Italian scientific community. It also illustrates cultural and political events in Italy; above all it provides information on collecting first experiences of a young mathematician in his 23 years, his view of world, as well as his struggle with the Czech language, his youthful enthusiasm and his eagerness for all new and free.

During his stay in Italy Emil Weyr established a lifelong friendship with Luigi Cremona, as it is supported by his 27 letters from the years 1870–1891 preserved in Cremona's inheritance deposited in Istituto Guido Castelnuovo, Università La Sapienza, Roma. At the beginning, Emil wrote his letters as Cremona's student; they were formal, very polite and impersonal. Later he wrote as Cremona's colleague, friend and admirer. The letters contain information on Weyr's mathematical explorations and papers, activities in the Union of Czech Mathematicians and Physicists and at the Czech Polytechnic, on Weyr's family and his Italian friends. They give an evidence of the lifelong friendship between both mathematicians and show that Emil Weyr established a friendship with many other Italian scientists and artists. In the letters we can also find mathematical problems with which Weyr turned to Cremona, words of thanks for advice, suggestion, help with grammatical corrections of papers, etc. Let us remark that Weyr's stay in Italy was immensely important and inspirational for his further scientific work. He acquainted himself with the latest achievements in projective and synthetic geometry and wrote several treatises that helped him to gain an attention of European geometers.

As a reaction to his stay in Italy, Emil Weyr wrote 22 works in 1871 (13 German, 8 Italian, 1 Czech), 11 works in 1872 (6 German, 3 Czech, 2 Italian), and 11 works in 1873 (5 German, 4 Czech, 2 Italian). Italian papers were published in journals *Rendiconti di Real Istituto Lombardo* and *Annali di matematica pura ed applicata* (thanks to the co-operation with L. Cremona) and in *Giornale di matematiche* (thanks to the co-operation with G. Battaglini).

### Subsequent Life Story of Emil Weyr – his Activities in Prague

On October 15, 1871, Emil Weyr was entrusted with a deputization of an adjunct professorship at the Czech Polytechnic in Prague. On December 1871, his appointment as an adjunct professor of mathematics was confirmed. Together with the lectures at polytechnic he also started to lecture as a private docent at the university.

<sup>1</sup> Angelo Armenante (1844–1878), Eugenio Bertini (1846–1933), Giuseppe Battaglini (1826–1898), Francesco Brioschi (1824–1897), Giulio Ascoli (1843–1896), Ulisse Dini (1845–1918), Ernesto Padova (1845–1896), Giusto Bellavitis (1803–1880), Enrico D'Ovidio (1842–1933), Eugenio Beltrami (1835–1900).

<sup>2</sup> Giovanni Virginio Schiaparelli (1835–1910) and Angelo Secchi (1818–1878).

From February 6, 1870, Emil Weyr was a member of the *Jednota českých matematiků* (Union of Czech Mathematicians), which arose in 1869 from the students' society named *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fysiky* (Association for Free Lectures in Mathematics and Physics) established in 1862. At the plenary session on July 7, 1872, he was elected a chairman of the Union. In the first half of the seventies, he significantly participated in the development of the social life, in publishing activities, in creating a scientific library, he initiated an exchange of publications with foreign societies etc. He was also one of the first redactor of the Czech mathematical journal *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* (Journal for Cultivation of Mathematics and Physics)<sup>3</sup> which was founded in the spring of 1872.<sup>4</sup> Emil Weyr asked Luigi Cremona to collaborate with the journal. On February 15, 1872, Emil Weyr wrote:

*Ich darf nicht schließen ohne eine ergebene Bitte vorzubringen. Wenn Sie gelegentlich eine wissenschaftliche (selbst elementare) Kleinigkeit z.B. einen einfachen Beweis irgend eines mathematischen Satzes u.s.w. mir, für das im Frühjahr bei uns zu erscheinende Journal zur Verfügung zu stellen die Güte hätten so würde ich Ihnen hochgeehrter Herr Professor vom ganzen Herzen hiefür dankbar sein. Um meinen Brief nicht unmäßig zu verlängern, behalte ich mir vor in meinem nächsten Briefe einige Aufklärungen über diese meine Bitte zu geben.*<sup>5</sup>

On May 30, 1872, Emil Weyr repeated his demand. He wrote:

*Die Redaktion besteht aus Prof. Studnička, Prof. Blažek, Dr. Neumann<sup>6</sup> und mir, und erlaubt sich der geehrten Redaktion der "Annali di Matematica" die beiden ersten bereits erschienenen Nummern zu übersenden. Es wäre für uns eine hohe Ehre wenn die Redaktion der Annali geneigt wäre auf einen Austausch der beiden Zeitschriften einzugehen. Die einzig und allein Vortheil habenden wären freilich nur wir. Da jedoch die böhmische Zeitschrift vom Vereine böhmischer Mathematiker edirt wird, so fällt selbstverständlich jedes durch Austausch erworbene Werk dem Vereine zu, und von diesem Standpunkte aus betrachtet, würden Sie hochgeehrter Herr Professor unserem Vereine und ich kann wohl sagen unseren Bestrebungen – den Bestrebungen einer nach ihrem Rechte und nach geistiger Bildung ringenden Nation – einen Samariterdienst leisten, wenn Sie die besondere Güte hätten einen Austausch der beiden Journale zu fördern. Ich erlaube mir zu bemerken, daß das Giornale di Matematiche von Neapel bereits auf einen derartigen Austausch eingegangen ist und uns die diesjährigen Hefte zugesandt hat. Da Sie Herr Professor derzeit Generalsecretär des Kgl. Lombardischen Institutes sind so darf ich es vielleicht wagen auch in Bezug auf diese hohe Gesellschaft die Anfrage zu richten, ob es in ähnlicher Weise nicht möglich*

<sup>3</sup> The volumes of the *Journal for cultivation of Mathematics and Physics* from 1(1872) up to 75(1950) are available in the digital version on the www page: <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D93748>.

<sup>4</sup> The body of editors was consisted of František Josef Studnička (a redactor in chief), Gabriel Blažek, Emil Weyr, Mírúmil Neumann and August Seydler.

<sup>5</sup> Luigi Cremona never wrote any article for this journal.

<sup>6</sup> František Josef Studnička (1836–1903) was a Czech professor of mathematics. From 1864 up to 1871 he taught at the Polytechnic in Prague, from 1871 he taught at the University in Prague. He was interested in algebra (theory of determinants), analysis, physics, astronomy, meteorology, history of sciences. He was one of the most well known representatives of the Czech scientific and cultural life in the Czech lands in the second half of the 19<sup>th</sup> century. For more information see M. Němcová-Bečvářová: *František Josef Studnička (1836–1903)*, edition *Dějiny matematiky*, volume 10, Prometheus, Praha, 1998.

Gabriel Blažek (1842–1910) was a Czech mathematician and politician. He was a professor of mathematics at the Polytechnic in Prague, during the years 1887 and 1900 he was a deputy in Wien, from 1907 he was a general director of Hypotéční banka království Českého v Praze. For more information see M. Bečvářová: *Z historie Jednoty 1862–1869*, edition *Dějiny matematiky*, volume 13, Prometheus, Praha, 1999.

Mírúmil Neumann (1843–1873) was a Czech physicist and assistant of physics at the University in Prague by the professor Ernst Mach (1838–1916).

wäre deren Schriften für unseren, für uns so sehr wichtigen Verein zu erwerben. Ich sehe mit Spannung Ihrer freundlichen dießzüglichen Eröffnung entgegen.<sup>7</sup>

Together with his brother Eduard he published two volumes of a textbook *Základové vyšší geometrie* (Foundations of Higher Geometry, 1871, 114 pages; 1874, 186 pages). Emil Weyr also translated two Cremona's books: *Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných* (Cremona's Geometric Transformations of Plain Figures, 1872, 47 pages) and *Úvod do geometrické teorie křivek* (Introduction to Geometric Theory of Curves in Plain, 1873, 176 pages).<sup>8</sup> Emil Weyr consulted his Czech translations with Luigi Cremona during his Italian studies and trips and also through the wide correspondence between them. He was also involved in the work on Rieger's educational dictionary. Weyr's translation was one of the first translations of Cremona's book in Europe.

In April 1873, Emil Weyr was again in Italy (accompanied by August Seydler,<sup>9</sup> later his brother-in-law). The travel was mainly motivated by consultations with Cremona and official dealings concerning translation of Cremona's second book. Emil Weyr spent holidays 1874 in Paris, where he contacted M. Chasles. He also visited Bordeaux, where G. J. Hoüel (1823–1886) was working, having close relations to the Union from earlier time (honorary member since 1873). After a reconstitution of the Union in 1874, Emil Weyr became its permanent secretary. In July 1874, the Union founded an international journal *Archiv matematiky a fysiky* (Archive of Mathematics and Physics). Emil Weyr became its editor, published three papers there (in German, French and Italian) and attracted various collaborators (e.g. G. J. Hoüel).

Already in 1873 the board of professors of the polytechnic tried to reach Weyr's appointment as a full professor. Nevertheless, it was not accomplished.

### Emil Weyr's Activities in Vienna

On September 26, 1875, Emil Weyr was appointed as a full professor at the Vienna University. By that time he had published more than 80 papers in journals. On November 7, at the general meeting of the Union, he was elected its honorary member and Weyrova cena (Weyr's award) was founded on the suggestion of F. J. Studnička. It was intended it would be awarded every five years for the best achievements in new geometry. Weyr's moving to Vienna was understood as an honour for a Czech mathematician, but also as a significant loss for the Czech mathematical life. Termination of the *Archiv matematiky a fysiky* was most likely connected with Emil's leaving for Vienna.

When Emil Weyr left Prague, he stopped playing an important role in the Czech mathematical community and basically he did not published in Czech.

We have no detailed information on his further years. In 1877, he married Marie Waniek (1860–1934) in Vienna; they had three children: František (1879–1951), who became a famous lawyer (professor of Masaryk University in Brno, president of the State Statistical Office, co-author of the

<sup>7</sup> Emil Weyr's letters to Luigi Cremona from 1870 up to 1891 are in Cremona's estates at the Istituto matematico Guido Castelnuovo, Università La Sapienza, Roma.

<sup>8</sup> In Italian language their titles were *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 1863, 1865, and *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Bologna, 1862.

<sup>9</sup> August Seydler (1849–1891) was a Czech physicist, assistant at the observatory in Prague (from 1870), associate professor of physics (from 1872) and full professor of physics and astronomy at the University in Prague (from 1882). His wife Anna Weyrová was a younger sister of Emil Weyr.



Czechoslovak constitution from the year 1920; we cite many times from his extended memoir here), Jindřich (1880–1957) and Marie (1883–?).

Emil Weyr taught at the university in Vienna from the winter semester 1875/76 up to the summer semester 1892/93.<sup>10</sup> In the seventieth he lectured the analytic geometry, spherical trigonometry, projective geometry and theory of curves and surfaces. He had from 5 up to 11 hours a week.<sup>11</sup> From the eightieth Emil Weyr taught differential and integral calculus, algebra and geometry (7–13 hours a week). Since the winter semester 1876/77 the two-hour mathematical seminar (Übungen im mathematischen Seminar) and from the school year 1885/86 the one-hour special seminar (Mathematisches Proseminar) were opened and Emil Weyr became one of its director.

Let us remind Emil Weyr's colleagues and his most talented students at the university in Vienna. In the 1877 Leo Königsberger (1837–1921) was appointed as a full professor of mathematics in Vienna but in 1884 he left his place for the better position at the university in Heidelberg. In the same year Gustav Ritter von Escherich (1849–1935) was appointed on Königsberger's place and he stayed there up to his superannuation in 1920. After Emil Weyr's death Franz Carl Josef Mertens (1840–1927) was named a full professor of mathematics. During Weyr's teaching at the university in Vienna the following mathematicians became privat-docents<sup>12</sup>: V. Dantscher (1847–1921), V. Sersawy (1848–1901), M. Ungar (born 1850), G. Kohn (1859–1921), O. Peithner Freiherr von Lichtenfels (1852–1923), W. Wirtinger (1865–1945) and A. Tauber (1866–1942). Under Emil Weyr's influence and thanks to his reviews mathematicians given bellow became doctors<sup>13</sup>: F. Hocevar, V. Sersawy, O. Freiherr von Lichtenfels, M. Ungar, O. Biermann, G. Pick, A. Lanner, K. Sigmondy, A. Kaluža, L. Spitzer, K. Zirngast, J. Kleinpeter, K. Bruno, I. Seyfried, K. Ott and R. Daudlebsky von Sterneck. Emil Weyr helped them with their studies, with their theses and used his contacts with German mathematicians to help them publish their articles and works. We can remind some words from the correspondence between Felix Klein and Adolph Mayer:

*Eine höchst wunderbare Sendung allerdings habe ich ebene T.[eubner] zurückgebracht: Aufsätze von A. Ameseder, ord. Hörer der tech. Hochschule Wien, von Emil Weyr an Schlömilch gesandt u. von diesem an Teubner geschickt mit den Worten:*

*"An Manuscriptüberfluß leidend, sende ich Ihnen 3 Aufsätze mit der Bitte zu, dieselben der Redaction der Math. Annal. zustellen zu wollen. En Einsender Prof. Em. Weyr werde ich hiervon benachrichtigen."*

*Dr. Schmidt will an Weyr schreiben, daß er mittheilen möchte, ob er di Aufnahme in die Annalen wünsche, in welchen Falle die Arbeiten Ihnen für Begutachtung zugeschickt warden sollten. Es sind 2 Aufsätze über die Fußpunktencurven der Kegelschnitte u. einer über das Erzeugniß eines eindeutigen Büschels u. eines 2deutigen Strahlensystems 2. O. mit zusammen 6 Figuren.<sup>14</sup>*

<sup>10</sup> For more information see *Öffentliche Vorlesungen an der k.k. Universität zu Wien*.

<sup>11</sup> In the Zentralbibliothek für Physik in Wien there are Weyr's lectures on the analytic geometry from winter semester 1875/76 (232 pages), on the curves of second degree from the summer semester 1875/76 (124 pages) – both were written by Joh. Vorel. They were published by E. Grafs as the so-called *annograph. Aufzeichnungen*. In the Fachbibliothek für Mathematik, Statistik und Informatik an der Universität Wien there are Weyr's lectures on the theory of the curves of third degree from the summer semester 1876/77 (from 16. 4. up to 28. 6., 94 pages) which were written by G. Albrecht.

<sup>12</sup> For more information see *Übersicht der Akademischen Behörden, Professoren, Privatdozenten, Lehrer, Beamten etc. an der k.k. Universität zu Wien für das studien-Jahr ...*

<sup>13</sup> For more information see *Dissertation-Verzeichnis der Philos. Fakultät der Universität in Wien*, Band 3, Wien, 1936.

<sup>14</sup> A. Mayer's letter from Leipzig 4. 3. 1879. Oscar Schlömilch founded in 1856 his mathematical journal *Zeitschrift für Mathematik und Physik* which became very famous later. In 1891 Adolf Ameseder became an assistant of geometry at



In 1878, the third volume of the textbook *Základové vyšší geometrie* (Foundations of Higher Geometry) of brothers Weyrs (167 pages) was published. In eighties Emil Weyr published in Vienna *Beiträge zur Curvenlehre* (1880, 64 pages), two-volumes book *Die Elemente der projectivischen Geometrie* (1883, 1887, 231 + 228 pages) and a small treatise *Über die Geometrie der alten Aegypter* (1884, 35 pages).

### The Last Period of Emil Weyr's Life

In the last three years of his life Emil Weyr was ill ("general tuberculosis"). He spent his holidays in spas; in spring of the year 1892 he was in the spa Helouan in Egypt (nearby Cairo), during the holidays in 1893 he was in a sanatorium Purkersdorf near Vienna. His illness lead up to the loss of is hearing. On January 25, 1894, Emil Weyr died in less than 46 years; he was buried in a family grave in Olšany in Prague on January 30.<sup>15</sup>

On February 18, 1894, David Hilbert (1862–1943) from Königsberg wrote to Felix Klein (1849–1925) on Emil Weyr's death:

*Soeben schreibt mir Kohn aus Wien, dass Weyr gestorben, und macht nun die grösssten Anstrengungen, dass für ihn etwas geschieht.*<sup>16</sup>

### The significance of Emil Weyr's work

Emil Weyr (1848–1894) was a great Czech geometer. The list of his journal papers contains 137 items; these works were written in German (100), Czech (16), Italian (14) and French (7). Separate publications were mentioned in the text above; they were written in German (6) and Czech (5). The majority of the works was devoted to projective geometry. Emil Weyr published his important results in foreign languages. In the last decade of his life he was therefore considered the greatest Austrian geometer and an important European mathematician, his achievements in projective geometry were highly appreciated. Czech mathematical community received his international activities and successes with enthusiasm. Nevertheless, at the turn of the 19<sup>th</sup> and 20<sup>th</sup> centuries geometry was substantially transformed; works of Emil Weyr belonged to the topics that subsided gradually and remained without a continuation in modern geometry.

Emil Weyr was awarded various honours. He was an extraordinary member of the Royal Bohemian Society of Sciences (1870), Czech Academy of Sciences and Arts (1890), academies in Milan (1872), Vienna (1875 corresponding, 1882 full member), Zagreb, scientific societies in Bordeaux and Liège and mathematical societies in Paris (1874), Moscow and Charkiv. In 1893 he was appointed as a court counsellor.

---

the Technical University in Vienna. For more information see R. Tobies, D. E. Rowe: *Korrespondenz Felix Klein – Adolph Mayer. Auswall aus den Jahren 1871–1907*, B. G. Teubner, Leipzig 1990, pp. 69–71.

<sup>15</sup> Weyr's death and his burial were described in many newspapers and journals, let us remind the most important articles: *Kleine Chronik*, Neue Freie Presse 26. 1. and 29. 1. 1894; *Prof. dr. Emil Weyr, slavný matematik český*, Národní listy 27. 1. 1894; *Pohřeb dvor. rady dra Emila Weyra*, Národní listy 31. 1. 1894; *Prof. dr. Emil Weyr, slavný matematik český*, Zlatá Praha 11(1894), n. 12 from 2. 2. 1894, pp. 135; A. Sucharda: *Emil Weyr*, Živa 4(1894), pp. 157–159.

<sup>16</sup> G. Frei (ed.): *Der Briefwechsel. David Hilbert – Felix Klein (1886–1918)*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1985, pp. 106–108.

## Emil Weyr's Activities in the European and International Mathematical Community

Emil Weyr wanted to inform the European mathematical community about the Czech mathematical production. Thanks to his international activities and contacts he had the possibility to write several reviews of the treatises of Czech mathematicians. From 1872 up to 1874 he published his reviews in the journal *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik*.<sup>17</sup> He reported on more than 30 articles and he signed reviews on them by the abbreviation W. In 1875, Emil Weyr was superseded by his brother Eduard Weyr (1852–1903) in this role.<sup>18</sup> He wrote reviews only two years. Then František Josef Studnička took over these activities for 18 years and he wrote roughly 260 articles. In the beginning of the year 1895, F. J. Studnička put that position to Antonín Sucharda (1854–1907).<sup>19</sup>

Since 1875 Emil Weyr published reviews of the treatises written by Czech mathematicians in *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*.<sup>20</sup> He was quoted at the title page of this journal as one of the collaborators from 1876 up to his death.

## International bibliographic Congress of Mathematical Sciences

At the International bibliographic congress of mathematical sciences that took place in Paris in July 1889, Emil Weyr was elected a vice chairman and deputed to conduct the bibliographical work in Austria. As a result of these international efforts, a referative journal *Revue semestrielle des publications mathématiques* published by Société mathématique d'Amsterdam started to be printed in 1893.<sup>21</sup>

Emil Weyr wrote on his activities at the International bibliographic congress of mathematical sciences to August Seydler in his letter from the 5<sup>th</sup> of February 1891. He explained the main aim of the bibliographical work and as a chairman in Austria he addressed to A. Seydler to find well-educated people and good mathematicians and physicists disposing for the long time collaboration. Emil Weyr called upon A. Seydler but he was very serious ill and he recommended Josef Theurer.<sup>22</sup> J. Theurer was not willing to collaborate because he had many activities at the Miner Academy in Příbram and in the Union of the Czech Mathematicians and Physicists.<sup>23</sup>

<sup>17</sup> *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik* was published in Berlin from 1868 up to 1942. The volumes of the journal from 1868 up to 1942 are available in the digital version on the www page: <http://www.emis.ams.org/projects/JFM/content.html>.

<sup>18</sup> Eduard Weyr (1852–1903) was a professor of mathematics at the Czech technical University in Prague. For more information see J. Bečvář a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, edition Dějiny matematiky, volume 2, Prometheus, Praha, 1995.

<sup>19</sup> Antonín Sucharda (1854–1907) was a teacher at many Czech secondary schools for long time, in 1900 he was named an extraordinary professor of mathematics at the Czech polytechnic in Brno.

<sup>20</sup> *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* was published from 1870 in Paris, from 1885 under new name *Bulletin des sciences mathématiques*.

<sup>21</sup> For more information see *Projet de Répertoire bibliographique des Sciences Mathématiques*, Paris, Imprimerie Nationale, 1889, A. Favaro: *Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di Bibliografia delle Matematiche*, Rivista di Matematica 1(1891), pp. 72–77, and *Resoluce přijaté mezinárodním kongressem bibliografickým věd mathematických, konaným od 16. do 19. července 1889 v Paříži*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 19(1890), pp. 207–210. Weyr's travel to Paris was supported by the Austrian Academy. According to the materials which are deposited in the Archive of the Academy of Science in Wien Emil Weyr got 500 golden to go to Paris.

<sup>22</sup> Josef Theurer (1862–1928) was named in 1889 a professor of mathematics at the Miner Academy in Příbram.

<sup>23</sup> More information can be find in Emil Weyr's correspondence card to August Seydler from the 15<sup>th</sup> of March 1891 which is deposited in the Archive of the Academy of Sciences of the Czech Republic in Seydler's estate.

Emil Weyr was a good coordinator of the bibliographical work despite of his serious illness. In 1892, he wrote two letters to Henri Poincaré (1854–1912) to brief him on the beginning of bibliographical activities in Austria. In the letter form the 25<sup>th</sup> of April 1892 Emil Weyr wrote:

*... M. le baron de Lichtenfels professeur de mathématiques à l'école polytechnique de Graz s'est changé de déponiller avec moi le journal de Crelle, et Monsieur le Dr. Kohn Privatdocent dans notre université s'occupera avec les Mathematische Annalen. Peut-être que je trouverai des collaborateurs pour les autres recueils. Ayez la bonté, je Vous en prie, de nous envoyer les fishes préparés. La collection de fiches déjà finie, concernant les Sitzungsberichte et les Denkschriften de Vienne et de Prague, les publications polonaises et quelques autres publications Vous parvientra en quelques jours par la poste.*

*Monsieur le professeur Franke à Lemberg, mon collaborateur pour la Pologne autrichienne m'écrit qu'il voudrait bien déponiller les publications mathématiques de la Société fondée en 1870 à Paris du comte Dzyalinski; mais il serait possible que Vous avez déjà quelcun qui fait ce travail. Je Vous pris de bien vouloir communiquer à moi Votre décision dans cette question, et de plus me communiquer le nom du collaborater représentant l'Allemagne dans la commission permanente.*

...<sup>24</sup>

### Monatshefte für Mathematik und Physik

In 1890, together with Gustav von Escherich (1849–1935), he founded a journal *Monatshefte für Mathematik und Physik*, which is still published (since 1952 *Monatshefte für Mathematik*).<sup>25</sup> At the beginning of the 90<sup>th</sup> Emil Weyr contacted the most important European mathematicians to publish their scientific results in the *Monatshefte für Mathematik und Physik*. He got through the strong acceptances by the Austrian and German mathematicians. His colleagues from university and polytechnic, his friends and earlier students wrote for this journal very good articles. (Those authors were e.g. Leopold Gegenbauer, Franz Mertens, Emil Müller, Gustav Kohn, Karl Sigmondy, R. Sterneck von Daudlebsky, Eduard Janisch (1868–1915), Alfred Tauber etc.).

Emil Weyr wrote also to his Italian friends. On February 15, 1891, he addressed to Luigi Cremona:

*Hochverehrter Herr Director!*

*Nach langer Zeit wage ich es wieder einmal Sie durch diese Zeilen zu belästigen, und ich bin beschämt es zu thun um mit einer Bitte an Sie heranzutreten! Mit meinem Collegen v. Escherich (an der hiesigen Universität) und unter dem Schutze unseres Unterrichtsministeriums veröffentliche ich die "Monatshefte für Mathematik und Physik". Heute erlaube ich mir den ersten Jahrgang (1890) an Ihre Adresse zu übersenden, und knüpfe im Namen der Redaction hieran die Bitte um gütigen Austausch gegen Ihre ausgezeichneten "Annali di matematica pura ed applicata". Wir würden uns glücklich schätzen wenn unsere Publication auch in Italien einigen Anklang fände, und wenn sich auch die italienischen Mathematiker derselben zur Veröffentlichung ihrer Arbeiten bedienen wollten. Wir sind in der angenehmen Lage ein bescheidenes Autorenhonorar (16 fl. ÖW per Druckbogen) zu bezahlen, nebst den 25 Separatabdrucken die auch sonst üblich sind. ...*<sup>26</sup>

<sup>24</sup> Emil Weyr's letters form the 25<sup>th</sup> March 1892 and the 25<sup>th</sup> April 1892 are deposited in H. Poincaré's estate in Nancy.

<sup>25</sup> The volumes of journal *Monatshefte für Mathematik und Physik* from 1(1890) up to 29(1918) are available in the digital version on the www page: <http://dieper.aib.uni-linz.ac.at/contactus.html>.

<sup>26</sup> Emil Weyr's letters to Luigi Cremona from 1870 up to 1891 are in Cremona's estates at the Istituto Matematico Guido Castelnuovo, Università La Sapienza, Roma.



Among important contributors of the journal we can find also Italian mathematicians as Gino Fano (1871–1952) and Giuseppe Peano (1858–1922). They published their articles during first ten years of its existence.

Through the August Seydler's mediation Emil Weyr addressed to Seydler's friends and colleagues in the Czech lands.<sup>27</sup> In the first ten volumes of the journal we can find works of these Czech mathematicians: Matyáš Lerch (1860–1922), Eduard Weyr, František Machovec (1855–1892), Jan Sobotka (1862–1931), Antonín Sucharda, František Josef Studnička. They published there most important works on mathematical analysis, geometry and theory of determinants. But the quality level of *Monatshefte für Mathematik und Physik* went down with the German mathematicians teaching at the German school in the Czech lands. We can find there the papers of August Leo Otto Biermann (1858–1909), Karl Bobek (1855–1899), Seligman Kantor (1857–1902), Anton Josef Gmeiner (1862–1927) and Anton Puchta (1851–1903).

#### LITERATURE:

- [1874] *Dr. Emil Weyr*, Světozor 8(1874), pp. 375 (portrait pp. 373)
- [1887] C. von Wurzbach: *Biographisches Lexikon des Kaiserthum Oesterreich*, Bd. 55, Wien, 1887, pp. 203–205
- [1894a] A. Sucharda: *Emil Weyr*, Živa 4(1894), pp. 157–159
- [1894b] *Emil Weyr*, Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 44(1894), pp. 244–250
- [1894c] *Prof. Dr. Emil Weyr*, Světozor 28(1894), pp. 144–145
- [1895a] G. Kohn: *Emil Weyr*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 4(1894/95), pp. 24–33
- [1895b] G. Kohn: *Emil Weyr †*, Monatshefte für Mathematik und Physik 6(1895), pp. 1–4
- [1895c] A. Pánek: *O životě a působení dra Emila Weyra*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 24(1895), pp. 161–224
- [1895d] G. Kohn: *Emilio Weyr*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 9(1895), pp. 260–262
- [1898] *J. C. Poggendorff's biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, Bd. III (1858–1883), Bd. IV (1883–1904), Leipzig, 1898, 1904, pp. 1434–1435, 1623
- [1994] J. Bečvář: *Sto let od smrti Emila Weyra*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 39(1994), pp. 102–107
- [1995] J. Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr 1852–1903*, edition Dějiny matematiky, volume 2, Prometheus, Praha, 1995
- [1999] F. Weyr: *Paměti I. Za Rakouska (1879–1918)*, Atlantis, Brno, 1999
- [2006] J. Bečvář, M. Bečvářová, J. Škoda: *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, edition Dějiny matematiky, volume 28, České vysoké učení technické, Praha, 2006

#### WWW page:

The MacTutor History of Mathematics archive:

[www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Weyr.html](http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Weyr.html)

<sup>27</sup> Emil Weyr informed August Seydler on the foundation of the *Monatshefte für Mathematik und Physik* in his letter from the 24<sup>th</sup> May 1889 and he called upon him to write for the journal. Emil Weyr's letter is deposited in the Archive of the Academy of Sciences of the Czech Republic in Seydler's estate.



The Development of the Cluj  
(Kolozsvár/Klausenburg) School of Mathematics  
between 1872–1919

JÓZSEF KOLUMBÁN  
Babes-Bolyai University, Cluj, Romania

## 1 Prologue

At the centurial commemoration (January 15, 1903) of János Bolyai's birth in Kolozsvár (Cluj) the board of Hungarian Academy of Sciences announced the foundation of the Bolyai prize, intending to award it in five-year periods to a mathematician with outstanding achievements during the previous years. The person who first was honored with this prize was the French mathematician, Henri Poincaré. With respect to this event, Jenő Gergely, who once had been the disciple of Frigyes Riesz, then professor at the Bolyai University in Cluj, related the following story.

Many prominent representatives of the Hungarian scientific life waited in excitement the arrival to the Eastern Railway Station in Budapest of the Paris express. One of the greatest scientists of those times was coming to Budapest to receive the Bolyai prize. After the welcoming speech Poincaré asked: "Where is Feujé?". The Hungarians looked at each other in confusion. Who is Feujé? Suddenly they realized that Poincaré was talking about Lipót Fejér, a professor at the Kolozsvár (Cluj) university, who, despite of his young age (he was only 25 years old at that time), was one of the most famous Hungarian mathematicians of those times. His results related to the trigonometric series had been published in *Comptes Rendus* (Paris) when he had been only twenty years old. Since then the main periodicals published regularly important results achieved by Fejér. Thus we can easily understand Poincaré's wish to meet the young scientist during his short visit to Hungary. What was to be done? Thanks to an efficient mediation a train consisting only of an engine and one carriage started to rush within a few hours from Cluj to Budapest...

Whether it is true or not, the story is interesting, also because it reflects the condition of mathematics in Cluj at that time. Lipót Fejér was not the only mathematician, whose activity had a great influence on the scientific development in the 20th century, and who was working for a while at the university of Cluj. It is remarkable that it was the Franz-Josef University of Cluj, not that one in Budapest among Hungarian universities that first became an important centre of mathematics. During the decades preceding to the world war the

school of mathematics in Cluj became one of the best centres of mathematics in the world. Its representatives gained imperishable merits for themselves and for the Hungarian scientific life. It is not probable that a week day passes unless mentioning somewhere in the world the name of Gyula Farkas, Lipót Fejér, Alfréd Haar or Frigyes Riesz.

How did mathematics in Cluj reach so high at the beginning of the 20th century? What personal conditions, social and economic facts, strategies aiming the scientific life and the development of education contributed to this development?

## 2 The first decades

In 1872, when the university of Cluj was established, the situation concerning mathematics wasn't promising at all. Apart from the activity of the Bolyais the mathematical literature of that time was quite poor here. The main event worthy to mention is related to Sámuel Brassai, who translated into Hungarian the book of Euclid called *Elements*. The first professors in Mathematics and Mathematical Physics were Sámuel Brassai (1800–1897) – a former high-school teacher at Cluj, Lajos Martin (1827–1897) – former officier of the engineer corps, and Mór Réthy (1848–1925). The first two of them have not any worth mentioning original mathematical result.

Mór Réthy was one of the extremely talented young mathematicians, who acquired thorough knowledge and doctor's degree at famous German universities and who started to work at the university of Cluj. He studied at the universities of Vienna, Göttingen and Heidelberg. Taking his doctorate in Heidelberg in 1874, he became in that year extraordinary professor at the university of Cluj, and after two years full professor at the Department of Mathematical Physics. He was the head of the Department of Elementary Mathematics between 1884–1886. After that he moved to the Technical University in Budapest. He was one of the first Hungarian professors in theoretical physics.

In 1874 he presented a lecture in Cluj on Bolyai's geometry; this was the first lecture on this issue in Hungary. We note here that the excellent Austrian mathematician, Johannes Frischauf already had course-like lectures in the academic year of 1871–72 at the university of Graz on the non-Euclidean geometry. These lectures comprised the first detailed overview of János Bolyai's brilliant work, the *Appendix*. The lectures were published in Leipzig in 1872 under the title *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*. This booklet was the only treaty for a long time, which constructed the absolute geometry using elementary methods, relying on the *Appendix*.

We continue the enumeration of important personalities of the university with Gyula Vályi (1855–1913), the most famous disciple of Réthy. He was the first important mathematician teaching at the university of Cluj, who was originated from Transylvania. He graduated his studies in 1877 in Cluj, then supported by the university attended the lectures of Weierstrass, Kirchhoff, Kronecker, Borchardt and Kummer in Berlin for four semesters. He sustained

his thesis entitled Contributions to the theory of second-order partial differential equations in 1880 in Cluj. He became an associate professor in 1881 at the university of Cluj. He was promoted full professor in 1884 of mathematical physics, then in 1886 of elementary mathematics.

According to the curriculum of the university it was Gyula Vályi who first presented course-like lectures on the Appendix in the second semester of the 1891–1892 academic year. He repeated this popular course almost invariably every four years. The lithographed lecture notes of 102 pages were published in 1904 in Cluj, with the title *Bolyai János Appendixéről* (On János Bolyai's Appendix). He completed the original demonstrations by explanations. When comparing the absolute and the hyperbolic geometry he made use of Lobatschewsky's results in some places.

It is also due to Gyula Vályi's enthusiastic work that Cluj became the centre of the Bolyai cult, and many of his disciples had achievements in the further development of the Bolyai geometry.

### 3 New impulses

At the beginning of the last decade of the 19th century important changes occurred in the university life. By that time the number of departments increased to 51, the members of the teaching staff to 68, while the number of the scientific employees comprising the teaching assistants and trainees to 119. During the first 25 years the number of students increased from 233 to 702. Similarly the number of mathematicians also increased.

We must mention the good result of the Hungarian high-school reforms. The law on public education linked with the name of József Eötvös meant major changes in the field of mathematics and physics too. A modern network of schools was built up by the end of the nineties, where the education became demanding and effective. Excellent high-school teachers showed up, whose tireless work won many young people over to sciences.

Loránd Eötvös (1848–1919) and Gyula König (1849–1913) founded in 1891 the Society of Mathematics and Physics. Loránd Eötvös formulated the purpose of the Society as follows: "Let's learn from each other, thus we teach better." The teacher training colleges and training schools established on the basis of the concepts of Mór Kármán (the father of the world-famous physicist, Tódor Kármán) next to the universities in Budapest and Cluj (like the Demonstration School in Budapest) resulted in the increase of the teachers' training level. The specific Hungarian teacher-training model was completed with the establishment of the Eötvös College. In this college talented students could learn under the guidance of famous professors.

The "Hungarian wonder", the *Középiskolai Matematikai Lapok* (High School Mathematics Journal) launched by the young professor from Győr, Dániel Arany in 1893 played an important role in mathematics and physics training. Among such periodicals this is the journal lasting for the longest time in the world. (After three years the legendary teacher of the Lutheran College in Budapest,

László Rátz took over the editing of the journal.) It turned out very soon how useful was when gifted young people were racking their brains on dozens of exercises for years and they wrote down their thoughts. Part of the students educated by the journal called today officially KöMaL became scientists, the others “only” very good professionals or professors. The best Hungarian mathematicians of the 20th century came among the students solving the exercises, like those who developed mathematics in Cluj before the First World War to the state-of-the-art.

**Gyula Farkas** (1847–1930) studied at the university of Pest, where Ányos Jedlik had a great influence upon him. Among his youthful achievements in mathematics we mention here only his examinations referring to Farkas Bolyai’s trinomial equation, which had referred to the algorithm for the approximation of the roots briefly presented in the Tentamen. Thus the Bolyai algorithm became well known, and many Hungarian and foreign mathematicians have been interested in its generalization, applicability, and the related convergence issues, even in our days. Gyula Farkas was an associate professor until 1887 in Pest, when he was nominated extraordinary professor at the university of Cluj. In 1888 he became a full professor at the university, he held this position until 1915.

As a professor his interest focused mainly on problems related to theoretical physics, but he elaborated the background of the examined physical problems in such deepness that there are classical mathematical results as well among these elaborations. Dating from the nineties he was particularly preoccupied by the Fourier principle of mechanics. His studies specify the necessary condition of balance in case of conditions given by inequalities. For this he demonstrates his theorem on linear inequality, which is one of the most famous Hungarian mathematical achievements, known as the Farkas-lemma. On the basis of these works it is obvious today that Gyula Farkas was one of the modern creators of the optimization theory.

**Lajos Schlesinger** (1864–1933) was the best known professor abroad at the turn of the century. He studied in Heidelberg and Berlin. He was the disciple and the son-in-law of the famous professor from Berlin, Lazarus Fuchs, that is why people said about him that “the talent is inherited mainly by the son-in-law”.

In 1897, when he became a full professor at the university of Cluj, he already was a well known scientist. The Teubner Publishing House in Leipzig had published the first two volumes of his famous book (*Handbuch der Theorie der Linearen Differentialgleichungen*) that he had written as the associate professor of the Berlin university. He published the third volume in 1898 as a professor in Cluj. The society of mathematicians knew him by that time as one of the prominent authorities in the theory of differential equations built on the complex analysis. Many parts of this significant theory were enriched by Schlesinger.

After arriving to Cluj he got involved in education with a great enthusiasm besides the continuation of his research. Fifteen of his lecture notes still can be found in the mathematics library in Cluj.

These lectures are fascinating due to their clear, distinct style and the ac-



curate treatment of the referred latest results. There is no doubt that the above-mentioned lectures belong to the best results of mathematical education in Cluj.

The book entitled *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* and published in 1908 by the Teubner Publishing House can be considered an important result of Lajos Schlesinger's scientific activity carried out in Cluj. This is not the revision of the theory elaborated in the above-mentioned Handbuch, but a treatment of linear differential equation systems using totally new methods. This is the first monograph treating the linear differential equation systems with variable coefficient using the product integral as interpreted by the Italian mathematician, V. Volterra.

It can be considered a recognition of his authority that the Teubner Publishing House published in 1909 his book entitled *Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865*, edited by the German Mathematics Society. He wrote his famous book, *Automorphe Funktionen* (that still can be found in the mathematics library in Cluj) as a professor at the university of Giessen.

During his stay in Cluj Schlesinger contributed significantly to the advancement of the local mathematics. Together with Gyula Farkas and Gyula Vályi he had a basic role in the establishment of an excellent mathematics library within the university.

**Lipót Klug** (1854–1944) took a diploma in mathematics at Budapest. He was a professor in Pozsony (Bratislava), then in Pest. Between 1897–1917 he was a professor at the department of descriptive geometry at the university of Cluj.

## 4 The peak

Besides his up-to-day valid scientific activity, Gyula Farkas had a predominant role in the development of the Mathematical Institute in Cluj. Started out almost from nothing the institute became after a quarter of century one of the best scientific workshops of the Monarchy. Due to his commitment to sciences and outstanding virtues Farkas had a great authority among his colleagues and students, which he made use of in the university administration. He was dean for seven times and once even the rector of the university. His word was always decisive. He was exigent, he expected much from himself and others. He appreciated the human values, and helped a lot those deserving it. He made use of his influence to improve the material and personal conditions of the university activity. It was due exclusively to his intercession that such brilliant young mathematicians came to the university like Lipót Fejér (1905), Frigyes Riesz (1911) and Alfréd Haar (1912), who together with the elder professors raised the quality of the mathematics training to such a high level in the first decades of the 20th century, that this level, considering the international reputation of the professors, would be hard to surpass.

Who were the above-mentioned representatives of the new wave?

**Lipót Fejér** (1880–1959) studied at the Technical University of Budapest, but after a semester he moved to the so-called general section, as a student in mathematics and physics. There he attended mainly the lectures of Gyula König, József Kürschák and Gusztáv Rados, then he moved to the University of Budapest. During the academic year 1899–1900 he studied at the University of Berlin, where he attended the courses of L. Fuchs, G. Frobenius and H. A. Schwarz. Once returned home he spent the 1900–1901 academic year at the University of Budapest. He published in *Comptes rendus* his theorem on Fourier's series that made his name all at once worldwide known. He wrote his dissertation in mathematics on Fourier's series, in physics on the phenomena of diffraction. From September 1st, 1901 he was an associate professor at the University of Budapest, in spring 1902 he acquired the doctor's degree there. He spent the first semester of 1902–1903 in Göttingen, where he attended mainly the lectures of D. Hilbert and H. Minkowski. He spent the second half of the same year in Paris, attending the lectures of E. Picard and J. Hadamard. He had nine publications until 1905, three among these in the *Comptes rendus*, one in the *Mathematische Annalen*. After such preliminaries, as Gyula Farkas expressed it, no one would have liked to "loose him in favour of some foreign universities". The university of Cluj ensured him the possibility of advancement. He was employed as an associate professor at the Department of Mathematical Physics (its head being Gyula Farkas). Besides the proofs of his brilliant talent in mathematics a reason for this could have been that he had learnt physics earlier, and he was interested in theoretical mechanics. Following his habilitation on June 23rd, 1905 at the Faculty of Mathematics and Natural Sciences of the Franz-Josef University in Cluj with his thesis called *Stability and instability examinations in the mechanics of mass point system* his star was raising rapidly. In the first half of the 1905–1906 academic year he was the assistant lecturer of Lajos Schlesinger, in the second semester the associate professor of analysis and analytical mechanics, in September 1906 senior lecturer, and in 1911 extraordinary professor. He finished his activity at the university of Cluj in summer that year, as from September he became full professor at the University of Budapest. In 1908 has was elected a correspondent member of the Hungarian Academy of Sciences. During his stay in Cluj he published around 30 scientific treaties, mainly in famous journals of mathematics. His treaties relate to Fourier's series, theoretical mechanics and analytical functions.

**Frigyes Riesz** (1880–1956), who directed the Department of Higher Mathematics between 1912 and 1919 started his university studies at the Technical University of Zurich. However his vocation for science prevailed over the attraction to make a career as an engineer, thus he continued his studies from 1899 at the University of Budapest, and then spent a year in Göttingen. In Budapest the lectures of Gyula König and József Kürschák, in Göttingen the lectures of Hilbert and Minkowski had the greatest influence on him. In 1902 he was conferred a doctoral degree in Budapest. He published his first scientific discovery, the so-called Riesz-Fischer theorem when he was 27 years old. Later the identity of the two composition of the quantum mechanics, the wave mechanics of Schrödinger and the matrix mechanics of Heisenberg has been proved using this

theorem. It is also linked to Riesz the widely applied discovery of the space of the integrable function on the  $p$ th exponent, the representation of the linear functionals defined on the set of the continuous functions in the form of the Stieltjes integral, respectively the definition of the dual of the Hilbert spaces. In 1908 he defined in his presentation held at the international mathematics conference in Rome the term of the topological space. Due to all these youthful discoveries he became famous before coming to Cluj.

Frigyes Riesz is not only one of the excellent Hungarian mathematicians, but he is considered worldwide as one who had the greatest effect on the grounding and development of modern branches of mathematical analysis. The terms and methods he had introduced, the achievements related to him belong today to the classical material of the real function theory, the functional analysis and the general topology. These results were partly included in his famous book written jointly with Béla Szőkefalvy-Nagy entitled *Leçons d'analyse fonctionnelle*, which was translated into several languages, and is known worldwide.

The last young mathematician who came to Cluj from the present territory of Hungary was **Alfréd Haar** (1885–1933). He studied in Budapest and Göttingen. He attended the lectures and seminars of Beke, Eötvös, Frölich, Kürschák, Rados, Scholtz in Budapest, respectively of Carathéodory, Hilbert, Klein, Minkowski, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt and Zermelo in Göttingen. He took his doctor's degree under the guidance of Hilbert. After that he was an associate professor at the Technical University in Zurich. In 1912 he was nominated to one of the physics departments at the university of Cluj, first as extraordinary professor, then in 1917 as full professor. His work had an acknowledged effect on the modern development of mathematics. His talent was linked with the conscientiousness of the real scientist. His research covered a wide area. His results related to the systems of orthogonal functions, to the variation calculus, to the singular integrals, to the theory of sets, the function approximation, the linear equations and the topological groups are famous even today. The terms Haar's basis, the function systems having Haar features, but especially the term Haar's integral are definitely part of the every-day tools of mathematicians. The present effect of Haar's results are well proved by the lectures kept at the centenary scientific meeting in 1985, which are collected in the volume entitled Alfred Haar Memorial Conference.

## 5 Epilogue

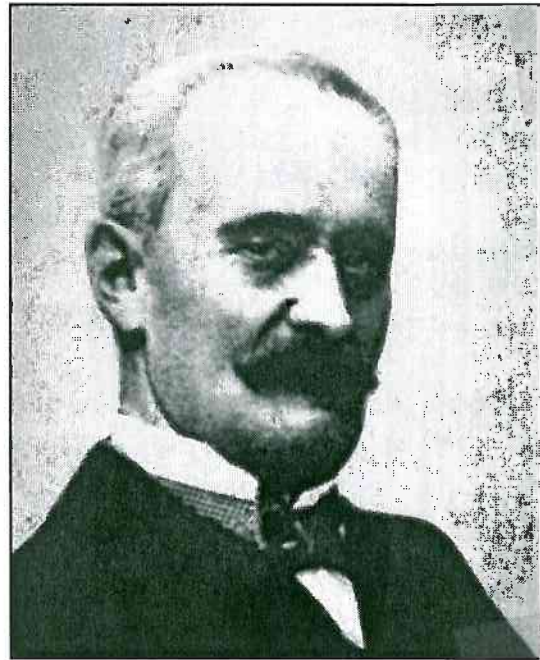
In 1919 the university of Cluj entered under Romanian authority, therefore most of the professors – like Alfréd Haar and Frigyes Riesz – moved to Szeged, where they laid the foundations of a new university. In the meantime the Hungarian “mathematicians producing machine” continued its operation. A short time after the war great scientists showed up, like Tódor Kármán, György Pólya, Gábor Szegő, John von Neumann and others. However they didn't start towards the eastern regions of the Carpathian Basin anymore, alike their colleagues a few years before, but towards... But this one is another story to tell.



**Gyula Vályi**



**Gyula Farkas**



**Ludwig Schlesinger**



**Lipót Fejér**

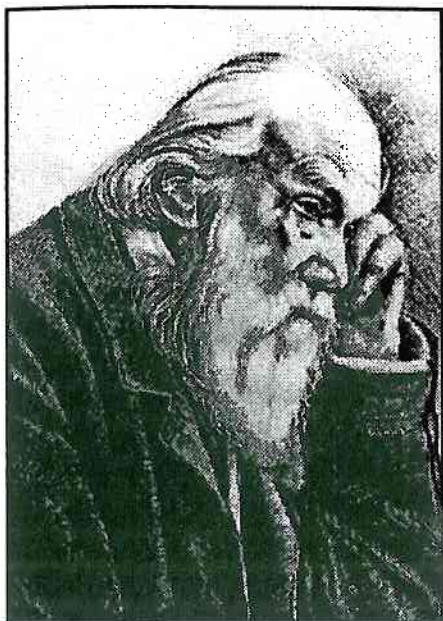




**Frigyes Riesz**



**Alfréd Haar**



**Brassai Sámuel**



**Martin Lajos (1827-1897)**

## Bemerkungen zu Fermats Geburtsdatum

Klaus Barner, Kassel

Das falsche Geburtsjahr (1606) Fermats in einem gerade erschienenen Werk ist der Anlaß, über meine neuesten Erkenntnisse hinsichtlich des Geburtsdatums des *conseiller au parlement de Toulouse* zu berichten.

Der Pierre Fermat, der nach dem Taufregister der Gemeinde Beaumont-de-Lomagne am 20. August 1601 getauft wurde, ist ein früh verstorbener Halbbruder des berühmten Mathematikers gleichen Namens aus der Ehe des Großhändlers Dominique Fermat mit Françoise Caze-neuve, die nach der Geburt (14. März 1603) ihrer (bald verstorbenen) Tochter Anthoinette starb, vermutlich am Wochenbettfieber. Der Sohn Pierre erhielt seinen Namen nach Landes-sitte nach dem Namen seines Taufpaten Pierre Fermat, des einzigen (Halb-)Bruders seines Vaters Dominique. ([Bar 2001])

Dominique Fermat, katholischen Glaubens, heiratete im Jahre 1604 in zweiter Ehe nach reformiertem Ritus die aus einer Hugenottenfamilie stammende Claire de Long, die zukünftige Mutter des Mathematikers. ([Gai 2001], p.54)

Ein ungefähres Geburtsdatum des Mathematikers läßt sich aus dem in seinem Todesjahr 1665 gefertigten Epitaph von der während der französischen Revolution zerstörten Familiengrabstätte in der Augustinerkirche zu Toulouse berechnen. Die letzte Zeile der Inschrift lautet:

OB. XII. IAN. M.DC.LXV. AET. AN. LVII.

(Obiit duodecimo Ianuarii mille sescenti sexaginta quinque aetate annorum quinquaginta septem) Er starb am 12. Januar 1665 im Alter von 57 Jahren. Danach ist er zwischen dem 13. Januar 1607 und dem 12. Januar 1608 geboren. ([Bar 2001], p.214)

Ab der zweiten Hälfte des Jahres 1607 bis zum Jahre 1611 einschließlich fehlen sämtliche Taufregister von Beaumont. Soweit die Register der ersten Hälfte des Jahres 1607 noch erhalten sind, findet sich keine Taufe eines Kindes des Dominique Fermat darunter. Dies spricht für die Geburt in der zweiten Jahreshälfte 1607. ([Gai 2001], p.5, und mündliche Mitteilung Gairins)

Am 30. Oktober 1606 wurde ein Sohn von Dominique Fermat und Claire de Long auf den Namen Samuel getauft. Taufpate ist der Bruder der Mutter, Samuel de Long. Das Kind scheint bald gestorben zu sein. Es ist daher äußerst unwahrscheinlich, daß Pierre Fermat vor dem 1. September 1607 geboren wurde. ([Gai 2001], p.55)

Am 14. Mai 1631 wurde Fermat als *conseiller et commissaire de la chambre des requêtes des parlement de Toulouse* vereidigt. Dies war die unterste Kammer des Parlaments. In ihr konnte man schon mit 20 Jahren Mitglied werden, durfte aber weder bei Entscheidungen mitstimmen noch als *rapporteur* (Berichterstatter) tätig werden. ([Dub 1885], tome1, p.296) Zur Zeit des Eintritts in diese Kammer war Fermat erst 23 Jahre alt. Er scheint daher in den Prozeßakten der Kammer zunächst nicht als *rapporteur* auf.

Am 30. Oktober 1632 wurde der Herzog Henri II de Montmorency wegen des *crimen laesae majestatis* vom gesamten Parlament, das heißt von allen Kammern inklusive der beiden Zivilkammern (*chambres des enquêtes*) und der *chambre des requêtes* zum Tode durch Enthaupten verurteilt. Dazu hatte Richelieu das Parlament unter Androhung von Waffengewalt gezwungen. Jeder einzelne *conseiller* mußte dem Urteil namentlich zustimmen. Ausgeschlossen waren nur die Kleriker (*conseillers clercs*), die nach dem kirchlichen Verständnis „kein Blut vergießen“ durften, und die noch nicht 25 Jahre alten Mitglieder der *chambre des requêtes*. Die sechs Mitglieder dieser Kammer, die gezwungen waren an der Verurteilung des Herzogs teilzunehmen sind: Dutillet, Lanson, le Maître, Mangot, Biel und Machault le jeune. Der Name Fermat ist nicht darunter. ([Dub 1885], tome 2, p.181) Wahrscheinlich war Fermat am 30. Oktober 1632 noch keine 25 Jahre alt.



Am 6. Dezember 1632 findet sich in den Protokollen der *chambre des requêtes* Fermats erster *rapport*. ([Bla 1957], p.31) Zu diesem Zeitpunkt war er sicher schon einige Tage 25 Jahre alt. Ich halte es daher für sehr wahrscheinlich, daß er im **November 1607 geboren** wurde.

### Literatur

- [Bar 2001] Barner, Klaus: How old did Fermat become? N.T.M. 9 (2001), 209-228
- [Bla 1957] Blaquiere, Henri & Maurice Caillet : Un Mathématicien de Génie : Pierre de Fermat 1601-1665. Lycée Pierre de Fermat, Toulouse, 1957
- [Dub 1885] Dubédat, Jean-Baptiste : Histoire du Parlement de Toulouse, tome 1 et tome 2. Arthur Rousseau, Paris, 1885
- [Gai 2001] Gairin, Pierre: Pierre Fermat et ses ascendants. Publié à compte d'auteur, Beaumont-de-Lomagne, 2001



# EINIGE ANMERKUNGEN ZUM EINFLUSS VON COMPUTERN AUF MATHEMATIK UND PHYSIK

Rita Meyer-Spache,

Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, EURATOM-Association,  
D-85748 Garching, Germany; meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

.. ....

GOOGLE-PRELUDIUM, 2006: Durch Googeln von *'Impact of computers on'* bekommt man die Nachricht, daß es ca  $10^8 = 100$  Millionen Einträge gibt. Bei *'Impact of computers on mathematics'* sind es noch etwa halb so viele; auf den ersten Seiten typisch *'... mathematics and computers in ... impact ...'*, *'social impact'*, *'... educational impact'* .... Bei Benutzung von GOOGLE SCHOLAR und *'Impact of computers on mathematics'* sind es immerhin noch 12 000 Einträge. Dort habe ich Artikel [8] gefunden.

RÜCKBLICK, ERWARTUNGEN, 1946: Im Jahre 1946 fand in Princeton zur 200-Jahr Feier eine mathematische Konferenz statt [1], auf der zwei namhafte Mathematiker Bemerkungen über möglichen Einfluss von Computern auf die Mathematik formuliert haben: 'Hermann Weyl expressed concern that the store of mathematical substance which formed the basis for current generalizations was in danger of becoming exhausted without outside help 'be it even by such devilish devices as high-speed computing machines'. John von Neumann remarked ... success of mathematics with the linear differential equations of electrodynamics and quantum mechanics ..., failure with the nonlinear differential equations of hydrodynamics, elasticity and general relativity ... expressed the hope that the computer-aided solution of a large store of problems in nonlinear continuum mechanics would indeed supply a basis for mathematical generalization.' (gekürzt zitiert nach J. Charney, MIT, [6, p.117]). Siehe auch [2].

ERSTE BILANZEN, 1968 - 1974: Nachdem sich die Benutzung von elektronischen Rechenmaschinen einige Jahre lang entwickelt hatte, scheint dann in den Jahren 1968 - 1974 international ein allgemeines Bedürfnis bestanden zu haben, Bilanz zu ziehen über die durch Computer bedingten Veränderungen, sowohl in der Mathematik [3, 5, 7] als auch in der Physik [4, 6]: es entstanden eine Reihe von Sammelbänden, in denen sich Vertreter verschiedenster Felder gegenseitig erzählten, wie Computer ihr Arbeitsgebiet verändert haben. 1974 war auch die Informatik bzw. Computer Science so weit entwickelt, daß Donald Knuth es unternommen hat, sie ge-



gen ihre Mutter Mathematik abzugrenzen [8]. Das schloss natürlich eine Diskussion des Verhältnisses Mathematik - Computer mit ein.

Im folgenden will ich einige der in der zitierten Literatur gefundenen Gedankengänge nachzeichnen, verquickt mit eigenen Erfahrungen. Da mein eigenes Berufsleben 1969 begonnen hat, habe ich einige der Veränderungen selber miterlebt. 1962 habe ich im Studienführer der U Hamburg gelesen: 'jeder Mathematikstudent sollte lernen, mit Computern zu arbeiten.' Etwa 1964 habe ich in Göttingen zum ersten Mal einen Computer gesehen: ein Holzregal, in dem Röhren installiert waren, programmierbar über einen Hollerithstreifen. 1969 habe ich dann gelernt, mit einem Computer zu arbeiten, einer IBM 360/91. Die gerade ausgemusterte Vorgängermaschine stand exklusiv den Blasenkommerleuten vom Nachbarinstitut zur Verfügung.

EINFLUSS VON COMPUTERN AUF DIE PHYSIK: Da die von John von Neumann 1946 genannten Differentialgleichungen aus der Physik und ihr verwandten Gebieten stammen, scheint es angemessen zu sein, zunächst den Einfluss von Computern auf die Physik zu betrachten.

Auf der ersten europäischen Konferenz über die junge Disziplin '*Computational Physics*' [6] haben sich Physiker aus den unterschiedlichsten Gebieten getroffen, von ihrer Forschung gesprochen, aber vor allem darüber, wie sich ihr Gebiet durch den Einfluss von Computern verändert hat und weiter verändern wird. Hier einige Stimmen:

'Computers have brought a new situation for astronomers, since formerly there was no way to experiment with stars and now you can make your own star and watch it changing with time. ... The real problem is to prove that these computer stars have anything to do with those stars we see in the sky.' [6, H.-C. Thomas, MPA, München, p. 151]. Auch dort, wo experimentiert werden kann, aber Experimente sehr zeitraubend und/oder sehr teuer sind, werden heute *zunächst* Computerexperimente durchgeführt, damit die später materiell durchgeführten Experimente besonders erfolgreich sind.

... impact of computers mostly for systems with two types of problems: '... complex physical systems (many particles, many degrees of freedom, many variables) and systems of a highly nonlinear character' [6, Van Hove, p. 164]. Also z.B. Kontinuumsmechanik, Strömungsmechanik, Plasmaphysik.

'The computer has transformed bubble chamber physics from a qualitative science to a really quantitative science.' [6, B. French, p.158]. Und nicht nur die Blasenkommerphysik, auch andere Zweige der Physik und andere Naturwissenschaften. Sobald eine Wissenschaft quantitative Ergebnisse produziert, also Größen kennt, die gemessen werden können, gibt es die Möglichkeit zu mathematischer Modellierung: es werden Gleichungen aufgestellt und die gemessenen Größen zusätzlich noch ausgerechnet. Gibt es Diskrepanzen, die nicht auf irgendwelchen anderen Fehlern beruhen, so muß das mathematische Modell verbessert werden.

'... the ready availability of powerful computers has had a profound influence on what is acceptable as a good theory.' [6, P.G. Burke, Queen's U, Belfast, p.1].

Auf dieser ersten europäischen Konferenz über Computational Physics war die Plasmaphysik überhaupt nicht vertreten, obwohl Computational Plasma Physics

damals schon eine wichtige Rolle spielte. Die zweite europäischen Konferenz über Computational Physics [9] fand dann im IPP in Garching statt, behandelte nur Probleme aus Plasmaphysik und Astrophysik und war eine ganz auf Fachprobleme konzentrierte (normale) Konferenz.

Eine Zeitlang war es üblich, zu sagen, daß es Experimentalphysik, theoretische Physik und Computational Physics gebe. Inzwischen werden Computer überall benutzt, insbesondere auch bei Entwurf und Durchführung von Experimenten. In den anderen Naturwissenschaften ist es ähnlich, doch spielt da die noch zu leistende Mathematisierung eine größere Rolle als in der Physik, die sich seit langem in engem Austausch mit der Mathematik entwickelt hat.

**EINFLUSS VON COMPUTERN AUF DIE MATHEMATIK:** Hier sollen nur einzelne Aspekte erläutert werden durch Beispiele dafür, wie Computer den Charakter der Angewandten Mathematik verändert und das Entstehen neuer Gebiete angeregt haben.

*Rechenkunst* (unter Ausnützung von Besonderheiten des zu lösenden Problems) wurde durch *Numerical Analysis* (eine allgemein anwendbare Theorie) ersetzt. Wir haben heute Methoden, um die Qualität numerischer Verfahren zu beurteilen und den Rechenaufwand zu messen (Fehleranalyse, Konvergenzordnung, Anzahl der benötigten Operationen, Komplexität von Algorithmen und von den zu lösenden Problemen), und können deshalb systematisch nach verbesserten Verfahren suchen und/oder die Umformulierung des zu lösenden Problems verlangen (gut/schlecht konditionierte Probleme). Ganz nebenbei ergeben sich dabei auch neue Fragestellungen in traditionellen mathematischen Gebieten wie z.B. der Funktionalanalysis.

*Wissenschaftliches Rechnen bzw. Scientific Computing* umfasst die folgenden Schritte: Formulierung eines mathematischen Modells (falls nicht schon vorhanden), mathematische Analyse dieses Modells, Formulierung eines für numerische Simulation geeigneten numerischen Modells, Implementierung auf einem geeigneten Computer (unter Umständen unter Ausnützung seiner Architektur), numerische Simulation, Auswertung der Ergebnisse im Lichte des Anwendungsgebietes (z.B. der Physik). Es handelt sich dabei also um ein interdisziplinäres Gebiet, in dem mathematische Analysis und numerische Analysis mit Natur- und Ingenieurwissenschaften und Informatik wechselwirken und das Teilaspekte hat, die durchaus den Namen *Experimentalmathematik* verdienen.

Durch die numerische Simulation von nichtlinearen (Systemen von) partiellen Differentialgleichungen (z.B. denen, die John von Neumann 1946 erwähnt hat), entstehen neue Einsichten und Hypothesen, und dies regt neue Theoriebildung an (z.B. Turbulenzforschung, Dynamische Systeme). Anders als in der Physik können die in der Experimentalmathematik durch numerische Experimente angeregten Theorien jedoch nicht nur durch Gegenbeispiele falsifiziert, sondern in manchen Fällen auch durch mathematische Beweise verifiziert werden.

Gleichzeitig mit der allgemeinen Computerisierung und bedingt durch sie findet eine weitere *Mathematisierung traditioneller Forschungsgebiete (Naturwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Humanwissenschaften)* statt. Dies wird im Vorwort der im Springer Verlag seit 1988 erscheinenden Reihe '*Texts in Applied Mathematics*'

so formuliert: 'Mathematics is playing an ever more important role in the physical and biological sciences ... newer techniques, such as numerical and symbolic computer systems, dynamical systems, and chaos, mix with and reinforce the traditional methods of applied mathematics.'

SCHLUSSBEMERKUNG: Es handelt sich hier nur um *einige Anmerkungen*. Es fehlt z.B. alles, was mit *Datenverarbeitung* (Sortieren, Suchen, statistisch Betrachten usw.) oder *Geometrie* zu tun hat, und auch der Einfluss von Computern auf die 'Reine Mathematik' blieb hier unberücksichtigt, soweit er nicht durch Wechselwirkungen von Angewandter und Reiner Mathematik bedingt ist. Eine vollständige Darstellung heute (2006) zu versuchen, wäre wohl auch vermessen. Zumal der durch die Verfügbarkeit von Computern eingeleitete Veränderungsprozess bei weitem noch nicht abgeschlossen ist und vieles überhaupt noch nicht vorhersehbar. Auch heute noch ist die schon vor mehr als 30 Jahren vom Mathematiker George E. Forsythe gemachte Bemerkung [8] aktuell: *'the question What can be automated? is one of the most inspiring philosophical and practical questions of contemporary civilization.'*

## Literatur

- [1] *Problems of Mathematics*, Series 2, Conference 2 of Princeton University Bicentennial Conferences (1947)
- [2] *Essays for COSRIMS*, MIT Press 1964
- [3] *Computers in Mathematical Research*, R.F.Churchhouse, J.-C.Herz, eds., North Holland, Amsterdam, 1968
- [4] *Computers and Their Role in the Physical Sciences*, S. Fernbach and A. Taub, eds., Gordon and Breach, N.Y. 1970
- [5] Peter D. Lax (1970): *The impact of computers on mathematics*, Chap. 10 in [4], 8 pages
- [6] *The Impact of Computers on Physics*, Proc. 1st European Conf. on Computational Physics, G.R. MacLeod, ed., CERN, 1972, ca 300 Participants
- [7] *The Influence of Computing on Mathematical Research and Education*, Amer. Math. Soc. and Math. Assoc. of America, co-sponsors of conference, August 1973
- [8] Donald Knuth (1974): *Computer Science and Its Relation to Mathematics*, Amer. Math. Monthly **81**, 323 - 343
- [9] *Computing in Plasma Physics and Astrophysics*, Proc. 2nd European Conf. on Computational Physics, D. Biskamp, ed., Garching 1976, ca 125 Participants.

## Graphische mathematische Methoden für das Lösen praktischer Probleme

### Iris Runge als Mittlerin in der angewandten Forschung und Industrie<sup>1</sup>

*Renate Tobies*

Am 18. Oktober 1937 schrieb Rudolf Sewig (1904-1972), damals Dozent an der TH Dresden, an Iris Runge (1888-1966), die er während seiner kurzen Tätigkeit in der Osram GmbH in Berlin, 1929 bis 1931, kennen und schätzen gelernt hatte (vgl. auch [Runge/Sewig 1930]):

„Liebes Fräulein Runge!

Ich komme mal wieder, Sie um Ihren bewährten mathematischen Rat zu fragen, nachdem ich in dem kleinen Göschen-Heftchen und in dem Werk Ihres Vaters über Praxis des Zahlenrechnens keinen gefunden habe. Es handelt sich um folgendes. [...]“

Obgleich Iris Runges Antwort auf diese Anfrage nicht bekannt ist<sup>2</sup>, drückt dieser Brief aus, dass sie als Expertin für das Lösen praktischer mathematischer Aufgaben galt. Bei dem von Sewig erwähnten Göschen-Bändchen handelte es sich um die von Iris Runge besorgte, 1931 erschienene zweite, verbesserte Auflage von *Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik* (Sammlung Göschen, Bd. 728). Mit dem „Werk des Vaters“ bezog sich Sewig auf einen ebenfalls in der Göschen-Sammlung erschienenen Band Carl Runges (1856-1927), *Praxis der Gleichungen* [Runge 1900, <sup>2</sup>1921].

Der Beitrag thematisiert, wie Iris Runge Expertin für das Anwenden graphischer Methoden wurde und welche Rolle graphische Methoden für das Lösen praktischer Probleme in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts spielten.

<sup>1</sup> Beitrag zum DFG-Projekt „Die Anfänge der Technomathematik in der elektrotechnischen Industrie: Das Exempel Iris Runge“. Die Autorin dankt der DFG für die Förderung des Projekts.

<sup>2</sup> Im Archiv der TU Braunschweig, wo Sewig ab 1948 eine apl. Professur für technische Physik inne hatte, existiert eine sehr fragmentarische Personalakte; ein Nachlass ist nicht bekannt; die Autorin dankt Herrn Andreas Lütjen, M.A., Archiv der TU Braunschweig, für die Unterstützung.



## Graphische Methoden im Kontext der angewandten Mathematik

Im Rahmen der „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik“, einem exklusiven Kreis von Industriellen und Wissenschaftlern, beschrieb der Motor von „angewandter Mathematik“ in Deutschland, der Mathematiker Felix Klein (1849-1925), wie mit Carl Runge graphische Methoden in den Vordergrund traten:

„Seit wir Kollegen Runge hier haben, verstehen wir unter angewandter Mathematik die Lehre von der mathematischen Exekutive, d.h. die numerischen und graphischen Methoden, wovon die darstellende Geometrie einen Seitenzweig bildet. Ueber graphische Methoden hat letzthin Kollege Runge Vorträge in den USA gehalten, die in diesen Tagen im Druck erscheinen werden.“ (Klein 1912, abgedruckt in Tobies 1989, S. 246])

Runge hatte – bevor er auf Betreiben Kleins 1904 als Ordinarius für angewandte Mathematik nach Göttingen kam (vgl. [Tobies 2004]) – gemeinsam mit Rudolf Mehmke (1857-1944) numerische und graphische Methoden in das Zentrum gerückt, als sie das Programm der *Zeitschrift für Mathematik und Physik* erläuterten:

„...weil die in diesen Zweigen geleisteten Verfahren erst in den Stand setzen, irgend welche Anwendungen der Mathematik bis zu Ende durchzuführen...“ [Mehmke/Runge 1901, S. 9]

Um die Methoden zu verbreiten, hatten sie sich auch an der *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* beteiligt. Wie Mehmke [1902, S. 1007] ausführte, wurden zum graphischen Rechnen im weiteren Sinne alle Verfahren gezählt, die zum Lösen analytischer Aufgaben durch Zeichnung dienten. Mehmke behandelte unter der Überschrift „Numerisches Rechnen“ auch graphisches Rechnen, Nomographie, Apparate und mechanische Rechenmaschinen sowie physikalische Methoden zur Auflösung von Gleichungen. Er beschränkte sich auf die gewöhnlichen Rechenarten und das Auflösen von Gleichungen, verwies auf historische Ansätze zur geometrischen Behandlung algebraischer Gleichungen in Antike und Orient, auf Arbeiten von Vieta (1593), Rechnungen geometrisch zu ermitteln, und betonte:

„Zwar ist das graphische Rechnen kein neues, etwa dem 19. Jahrhundert eigentümliches Lehrgebiet, aber nachdem es zeitweilig durch die rechnerischen Methoden zurückgedrängt worden war, ist es in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch systematischen Ausbau wie durch die Entwicklung neuer, allgemeiner Methoden bedeutend gefördert worden und es hat (besonders unter den zeichengewandten Ingenieuren) grosse Verbreitung gefunden.“ [Mehmke 1902, S. 1007f.]

Mehmke erläuterte die einzelnen Verfahren, sich auf vorliegende Literatur (Culmann, Cremona, u.a.) stützend und unterstrich:

„Im allgemeinen sind die zeichnerischen Verfahren anschaulicher, übersichtlicher, schneller ausführbar und mit geringerer Anstrengung des Geistes verbunden, als die rechnerischen; in manchen Fällen (wie bei der Auflösung beliebiger Gleichungen) gewähren sie bis jetzt allein die Möglichkeit eines direkten Vorgehens ...“ [Mehmke 1902, S. 1007].

Die von Mehmke ausgelassenen graphischen Verfahren höherer Rechenarten, bis hin zur Integration partieller Differentialgleichungen, behandelten Carl Runge und sein Schüler Friedrich-Adolf Willers (1883-1959) in der *Encyklopädie* [Runge/Willers 1915]. Runge hatte selbst neue graphische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen gefunden [Runge 1907], vier seiner Schüler in diese Richtung gelenkt (vgl. [Tobies 2004]), Praxisbeispiele zum Thema in der Industrie gesammelt [Runge 1949, S. 130f.] und seine Vorlesungen über *Graphical Methods* [Runge 1912] während seiner Gastprofessur 1909/10 in den USA auch für die Publikation vorbereitet, die schließlich drei, immer wieder verbesserte deutschsprachige Auflagen erlebte [Runge 1914, 1919, 1928].

Als Iris Runge sich zum SS 1907 als Hörerin an der Universität Göttingen einschrieb, hatte ihr Vater nicht nur gerade den Inhalt von „Thesen über angewandte Mathematik“ maßgeblich geprägt: „Das Wesen der angewandten Mathematik liegt in der Ausbildung von Methoden zur numerischen und graphischen Durchführung mathematischer Probleme.“ [JDMV, S. 518] Er gab vielmehr selbst ein Beispiel dafür, wie Probleme aus der Praxis in die Forschung einfließen konnten:

„Im August [1907] bin ich 9 Tage in der Brückenbauanstalt Gustavsburg bei Mainz gewesen, einer Filiale der Nürnberger Maschinenfabrik [...] und studierte die mathematischen Methoden, nach denen sie ihre Eisenkonstruktionen berechnen, zeichnerische und rechnerische. [...] Die mathematische Arbeit, die von den Ingenieuren geleistet ist, die wollte ich gerne in der Werkstatt selbst beobachten. Ich kam sehr befriedigt nach Hause zurück.“ [Hentschel/Tobies 2003, S. 167]

Allerdings gelangte er zur Ansicht, dass die Aufgabe der Entwicklung entsprechender Methoden nicht dem Astronomen, Physiker, Ingenieur überlassen bleiben dürfe,

„...weil diese Leute ihr Augenmerk nur auf die Ergebnisse richten, und daher geneigt sind, die Verallgemeinerungen der von ihnen etwa ersonnenen Methoden zu vernachlässigen, wogegen in der Hand des Mathematikers die Methoden von einem höheren Gesichtspunkte aus entwickelt werden und die Frage nach ihrer Anwendbarkeit auf andere Probleme, auch sol-

che anderer Gebiete wissenschaftlicher Forschung, gehörige Berücksichtigung findet.“ [Runge 1919, S. 2]

So baute er die Methoden in Forschung und Lehre systematisch aus, vermittelte sie auch an seine Kinder Iris und Wilhelm Runge (1895-1987). Iris Runge's Ausführungen in der Biographie über ihren Vater sind ein Zeichen dafür, dass sie die Methoden beherrschte und dass sie sich selbst und ihren Bruder mit dieser Arbeitsweise identifizierte:

„Runge [...] definierte die angewandte Mathematik als die Methodenlehre von jeglicher mathematischen Exekutive. Nach seiner Auffassung gehörten zur angewandten Mathematik neben den oben genannten Disziplinen<sup>3</sup> auch die praktischen numerischen Methoden der Auflösung gewöhnlicher linearer und nichtlinearer Gleichungen, und ebenso auch die Herstellung von Lösungen von gewöhnlichen und auch partiellen Differentialgleichungen, ferner die Berechnung von Reihen, die Durchführung von Interpolations- und Ausgleichsrechnungen, Fourieranalysen u.a.m.; ebenso gehören dazu die graphischen Methoden für die gleichen Aufgabenarten.“ [Runge 1949, S. 120]

### Ausbildung beim Vater

Während sich Wilhelm Runge die theoretischen Grundlagen erst nach dem Ersten Weltkrieg bei seinem Vater aneignen konnte (vgl. [Runge 1949, S. 171]), stieg Iris Runge bereits während ihres zweiten Studiensemester, WS 1907/08, in das Gebiet ein. Der Vater berichtete am 18. November 1907:

„Meine älteste Tochter Iris hört diesen Winter bei mir ‚Graphische Methoden‘ 4 Stunden Vortrag und 4 Stunden Uebungen.“ [Hentschel/Tobies 2003, S. 167]

Wie erfolgreich sich Iris Runge dem Gegenstand gewidmet hatte, deutet ihr Bericht über einen Fortbildungskurs in Göttingen an; sie schrieb nach New York an den Vater am 5. Oktober 1909:

„Putti<sup>4</sup> und ich müssen abwechselnd protokollieren, und wahrscheinlich auch bei den Demonstrationen mit herumführen. Es wurde sehr bedauert, dass Du nicht da bist, und Erich<sup>5</sup> auch nicht, und Deine graph.[ischen] Methoden auch nicht. Ich habe Pfeiffer<sup>6</sup> meine ach so mangelhafte Ausarbeitung der Graph.[ischen] Meth.[oden] leihen müssen und auch die wenigen halbwegs anständigen Zeichnungen, die ich damals bei Dir gemacht habe. Er

<sup>3</sup> Weiter oben waren genannt: darstellende Geometrie, graphische Statik und Vermessungswesen, d.h. Gebiete, die bereits 1898 in die preußische Prüfungsordnung für das höhere Lehramt für die neue Fakultas „angewandte Mathematik“ gelangt waren.

<sup>4</sup> Elisabeth Klein (1888-1968), jüngste Tochter Felix Kleins.

<sup>5</sup> Erich Trefftz (1888-1937), Neffe Carl Runge's, der als dessen Assistent 1909/10 mit in den USA weilte und den Runge als einen wesentlichen Fortführer seiner Methoden betrachtete; o. Prof. TH Dresden seit 1922.

<sup>6</sup> Friedrich Pfeiffer (1883-1961) hatte 1907 an der TH München promoviert, war wissenschaftlichen Assistent bei dem Felix-Klein-Schüler Walther Dyck (1856-1934) gewesen (1905-08) und hatte 1909/10 eine Assistentenstelle an der Universität Göttingen inne, o. Prof. in Heidelberg 1921, TH Stuttgart 1922.

soll ja über Anschauungsmässige Hilfsmittel im math.[ematischen] Unterricht sprechen“ [SPK, 546].

Iris Runge vertiefte die Ausbildung bei ihrem Vater weiter, belegte bei ihm im Sommersemester 1911 „Numerisches Rechnen mit Übungen“. [SPK, 747, Bl. 15] In einer Arbeit zum Staatsexamen für das Lehramt an höheren Schulen – das sie für die Fächer Mathematik, Physik, Geographie (12.7.1912) absolvierte und später noch um Chemie (28.1.20) ergänzte – erprobte sie das Anwenden eines Näherungsverfahrens; das Thema lautete: „Anwendung der W. Ritzschen<sup>7</sup> Integrationsmethode auf das Problem der Schwingungen einer parabolisch begrenzten Membran. Berechnung einiger Eigentöne bei speziellen Formen.“ [SPK, 747, Bl. 17] Im Rahmen ihres Promotionsverfahrens unter dem Physiko-Chemiker Gustav Tammann (1861-1938) wählte sie im Rigorosum (16.12.1921) „Angewandte Mathematik“ als ein Nebenfach. Der prüfende Vater bescheinigte ihr gute und sichere Kenntnisse über numerische und graphische Verfahren. [UAG] Offensichtlich war Iris Runge dem Ratschlag ihres Vaters gefolgt, den er in einem seiner Bücher auch schriftlich niedergelegt hatte:

„Dem Schüler seien praktische Übungen empfohlen. Nur die wiederholte Anwendung der Methode kann ihm zur Beherrschung des Gegenstandes verhelfen. Denn es genügt nicht, die zu Grunde liegenden Gedanken erfasst zu haben, es ist vielmehr notwendig, sich eine gewisse Leichtigkeit in der Anwendung anzueignen. Man könnte ebenso gut das Klavierspiel nur durch Konzertbesuch, wie die graphischen Methoden nur durch Hören von Vorlesungen zu erlernen hoffen.“ [Runge 1919, S. 3]

Die Art, wie Iris Runge das Forschen ihres Bruders Wilhelm beschrieb, war zugleich Ausdruck ihrer eigenen Arbeitsweise in der Glühlampen- und Röhrenforschung bei Osram und Telefunken:

„...nach den ersten Semestern in Göttingen hatte dieser [Wilhelm R.] sein technisches Studium in Darmstadt fortgesetzt und gleich nach dem Examen eine Stellung bei Telefunken in Berlin angetreten. Aus seinen Briefen erhielt [Carl] Runge allerhand interessante Einblicke in Probleme der modernen Hochfrequenztechnik und wurde auch mehrmals über mathematische Methoden zu ihrer Lösung herangezogen. Er hatte die Freude zu sehen, dass sein Sohn die von ihm selber ausgebildete Tradition, praktische Aufgaben systematisch mit den Mitteln der Mathematik anzupacken, mit Erfolg fortsetzte und dabei in seiner Laufbahn gut vorankam.“ [Runge 1949, S. 193f.]

<sup>7</sup> Walter Ritz (1878-1909); Ritz, Walter: *Gesammelte Werke – Oeuvres*, published by the Société Suisse de Physique. Gauthier-Villars: Paris 1911. Vgl. zur Methode von Rayleigh-Ritz [Runge/Willers 1915].



## Ausbau graphischer Methoden in der angewandten Forschung und Industrie

Als Marcello Pirani (1880-1968), Leiter des wissenschaftlich-technischen Dienstes der Osram GmbH, 1922 die erste Auflage von *Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik* vorlegte, entsprach dieses Göschen-Bändchen offensichtlich einem Bedürfnis des mit praktischen Problemen befassten Forschers und Ingenieurs. Diese graphischen Methoden wurden wegen ihrer Vorzüge jedoch nicht nur gern benutzt, sondern ihr Potential war zu diesem Zeitpunkt keineswegs ausgeschöpft. Als Pirani Iris Runge mit der Edition der zweiten Auflage betraute, hatte sie sich – seit 1923 in der Osram GmbH tätig – als Expertin für das Arbeiten im Grenzgebiet von Mathematik, Physik und Technik bereits ausgewiesen.

Das Ziel des Göschen-Bändchens, „eine Zusammenfassung der für die graphische Darstellung gültigen Regeln und Gesetze und eine Beschreibung der einfachsten Methoden zur Herleitung graphischer Rechentafeln an Hand von praktischen Beispielen [zu] geben“ [Pirani 1931, S. 6] änderte sich mit den nachfolgenden Auflagen nicht; der Wortlaut der Einleitung war auch in der dritten Auflage 1957 noch derselbe. Die Auflagen widerspiegeln aber die weiter entwickelten Methoden. Die von Iris Runge besorgte Auflage [Pirani 1931] basierte nicht nur auf den genannten Arbeiten von Mehmke, Carl Runge, dessen Schülern Willers und Horst von Sanden (1883-1965), sie enthielt auch neuere Resultate der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage (Ludwig Bieberbach, Franz Krauß, Paul Luckey, Hans Schwerdt), deren Ausarbeitung Richard von Mises (1883-1953) prognostiziert hatte, als er 1921 das Programm der *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* umriss.

„Weit umfassender und eines Ausbaues fähiger sind zweifellos die Methoden des graphischen Rechnens, die all dem gerecht werden, was die numerische Rechnung zu leisten imstande ist.“ [v. Mises 1921, S. 4]

„Der zweite Punkt, auf den wir die geometrische Betrachtungsweise ausgedehnt zu sehen wünschen, fällt in das Gebiet der Approximationsmathematik im Kleinschen<sup>8</sup> Sinne. Es handelt sich um eine geordnete Entwicklung der Grundsätze und der Hilfsmittel des graphischen Rechnens [...]. Bekanntlich hat d’Ocagne vor nicht langer Zeit durch Schaffung der Nomographie hier sehr wesentliche Fortschritte herbeigeführt<sup>9</sup>. Man ist jetzt in der Lage, funktio-

<sup>8</sup> Zum Begriffspaar Präzisions- und Approximationsmathematik nach Felix Klein auch hier [v. Mises 1921, S. 3].

<sup>9</sup> d’Ocagne, Maurice: *Traité de Nomographie*. Gauthier-Villars: Paris 1899; Schilling, Friedrich: *Ueber die Nomographie von d’Ocagne*. B. G. Teubner: Leipzig 1900.

nale Zusammenhänge zwischen mehr als zwei Veränderlichen durch ebene Figuren zu beherrschen. Allein fast alle prinzipiellen Fragen der Nomographie harren noch der Lösung, und man wird nicht fehlgehen, wenn man von deren Klärung auch eine Erweiterung der Anwendungsgebiete erwartet. In letzter Linie liegen hier „Abbildungs“-Probleme vor, die man ja einer genügend weit gefassten „darstellenden“ Geometrie zuordnen könnte; auch andere Aufgaben der zeichnerischen Rechenverfahren, z.B. die Konstruierbarkeit unter Zuhilfenahme einer festen Kurve (analog den Steinerschen<sup>10</sup> Konstruktionen mit festem Kreis), dann die schon berührten infinitesimal-geometrischen Fragen bei der Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, weisen mehr als nur äußerliche Berührungspunkte mit den Begriffsbildungen und Verfahren einer allgemeinen „Abbildungs“-Geometrie auf.“ [v. Mises 1921, S. 9]

Iris Runge berücksichtigte die neuen Ergebnisse in der 1931 vorgelegten zweiten Auflage von *Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik*; sie trug auch selbst dazu bei, Verfahren für spezielle praktische Probleme zu verfeinern. So dokumentiert die dritte, 1957 erschienene Auflage, nicht nur, dass international zahlreiche weitere Arbeiten zum Thema publiziert und die Anwendungsgebiete stark erweitert worden waren; das Literaturverzeichnis verweist auch auf Arbeiten Iris Runges, in denen sie graphische Methoden auf konkrete Probleme der Fabrikationskontrolle im Osram-Konzern anwandte. Insbesondere entwarf sie spezielle Nomogramme, Fluchtlinientafeln, basierend auf Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Runge 1936a, 1936b].

An den Hochschuleinrichtungen wurden Lehre und Forschung zu diesen Methoden weiter ausgebaut. Alwin Walther (1898-1967), von 1928 bis 1966 Professor an der TH Darmstadt, betonte 1936 – sich auf Carl Runge beziehend –, dass mathematische Laboratorien einzurichten seien, damit die Studierenden „Einrichtung und Gebrauch des Rechenschiebers, [...], von Rechenmaschinen, Planimetern, Spiegellinealen, Integraphen, harmonischen Analysatoren, von Rechenschablonen und anderen nützlichen Hilfsmitteln erlernen, Fingerspitzengefühl für ihre Benutzung und Genauigkeit erwerben“ sollten. [Walther 1936, S. 7]. Auch die Analyse der mathematischen Dissertationen dieser Zeit zeigt, dass weiterhin daran gearbeitet wurde, graphische Methoden und Instrumente zu vervollkommen [Wehage 1929; Emrich 1933], Fehlergrenzen dieser Methoden abzuschätzen [Frotscher 1932, Correll 1944]

<sup>10</sup> Jacob Steiner (1796-1863); Steiner, Jacob: *Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung*. 1833, hrsg. A. J. v. Oettingen, <sup>1</sup>1895, <sup>2</sup>1913.

und die Anwendungsgebiete zu erweitern [Starke 1931]; zum Einsatz in der Luftfahrtforschung vgl. [Stanke 1939] [Tobies 2005].

Mit der Entwicklung elektronischer Rechenautomaten wurden graphische Methoden als Rechenhilfsmittel außer Kraft gesetzt; bis zum vollen Einsatz des leistungsfähigen Computers waren jedoch entsprechende Methoden in vielen Gebieten auch nach 1945 noch länger im Gebrauch, wie z.B. [Pirani 1957] dokumentiert.

## Bibliographie

- [SPK] Staatsbibliothek, Preußischer Kulturbesitz, Berlin, Handschriftenabteilung, Nachlass Runge – DuBois-Reymond.
- [UAG] Universitätsarchiv, Georg-August-Universität Göttingen, Philosophische Fakultät, Prom.. Spec. R. Vol. IV, 1915-1922, Nr. 22, Promotionsakte Iris Runge.
- Correll, Walter: *Einfluss des Funktionsfehlers bei numerischer Integration von Differentialgleichungssystemen*. Dissertation TH Hannover 1944; 28 S. Schreibmaschine.
- Emrich, Hans: *Anwendung des Lillschen Verfahrens zur Veranschaulichung von Diskriminanten algebraischer Gleichungen*. Dissertation TH Darmstadt, Universitätsverlag Robert Noske: Borna-Leipzig 1933.
- Frotscher, Walter: *Fehleruntersuchungen zur numerischen Differentiation*. Dissertation Universität Jena 1932, 39 S.
- Hentschel, Klaus; Tobies, Renate: *Briefstagebuch zwischen Max Planck, Carl Runge, Bernhard Karsten und Adolf Leopold*. Eingeleitet, annotiert und mit den Promotions- und Habilitationsakten Max Plancks und Carl Runges im Anhang (Berliner Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, Bd. 24). ERS-Verlag: Berlin 1999, <sup>2</sup>2003.
- [JDMV] „Besprechung von Vertretern der angewandten Mathematik in Göttingen am 23. März 1907“. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16 (1907) S. 518-519.
- Mehmke, Rudolf: „Numerisches Rechnen“. *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. Bd. I, Teil II. B. G. Teubner: Leipzig, Berlin 1902, S. 941-1076.
- Mises, Richard, von: „Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik“. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1 (1921) H. 1, S. 3-15.
- Pirani, Marcello: *Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik* (Sammlung Göschen 728). Walter de Gruyter & Co.: Berlin, Leipzig 1922, 126 S., 58 Abb.
- Pirani, Marcello: *Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik*, Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. I. Runge (Sammlung Göschen 728). Walter de Gruyter & Co.: Berlin, Leipzig 1931, 149 S., 79 Abb.
- Pirani, Marcello: *Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik*, Dritte, verbesserte Auflage, bearbeitet von Ing. Johannes Fischer, wiss. Mitarbeiter der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin unter Benutzung der von Dr. Iris Runge besorgten 2. Auflage (Sammlung Göschen 728/728a). Walter de Gruyter & Co.: Berlin 1957, 213 S., 104 Abb.
- Runge, Carl: „Über graphische Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung“. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 16 (1907) 170-172.
- Runge, Carl: *Graphical methods, a course of lectures delivered in Columbia university, New York, October, 1909, to January 1910*. Columbia University Press: New York 1912, deutsche Übers. *Graphische Methoden*. (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, hrsg. v. E. Jahnke, Bd. 18). B. G. Teubner: Leipzig, Berlin 1914, <sup>2</sup>1919, <sup>3</sup>1928.

- Runge, Carl: *Praxis der Gleichungen* (Göschens Lehrbücherei, 1. Gr., Bd. 2). Walter de Gruyter & Co.: Berlin, Leipzig 1900, <sup>2</sup>1921.
- Runge, Carl; Willers, Friedrich-Adolf: „Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen“. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. Bd. II, Teil 3. B. G. Teubner: Leipzig, Berlin 1915, S. 50-176.
- Runge, Iris: „Die Beurteilung von Ausschußprozentsätzen nach Stichproben.“ *Zeitschrift für technische Physik*, 17 (1936) 134-138 und *Technisch-wissenschaftliche Abhandlungen aus dem Osram-Konzern*, Bd. 4. Springer: Berlin 1936a, S. 149-151.
- Runge, Iris: „Fluchtlinientafel zur Stückzahlermittlung auf Grund einer kleineren Vorprobe“. *Technisch-wissenschaftliche Abhandlungen aus dem Osram-Konzern*, Bd. 4. Springer: Berlin 1936b, S. 149-151.
- Runge, Iris: *Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk*. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1949.
- Runge, Iris; Sewig, Rudolf: „Über den inneren Photoeffekt in kristallinen Halbleitern“. *Zeitschrift für Physik*, 62 (1930) S. 726-729; erneut abgedruckt in: *Technisch-wissenschaftliche Abhandlungen aus dem Osram-Konzern*, Bd. 2. Springer: Berlin 1931, S. 336-338.
- Stanke, Paul: „Die Störung einer Flugbahn durch äußere Einflüsse“. *Wehrtechnische Monatshefte* (1939) S. 1-32; Dissertation TH Berlin.
- Starke, Dorothea: „Ein graphisches Verfahren zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems mit komplexen Koeffizienten“. *ZAMM* 11 (1931) 245-247.
- Tobies, Renate: „On the Contribution of Mathematical Societies to Promoting Applications of Mathematics in Germany“. *The History of Modern Mathematics. Vol II: Institutions and Applications*, edited by David E. Rowe and J. McCleary. Academic Press: Boston, San Diego, New York 1989, S. 223-248.
- Tobies, Renate: „100jähriges Jubiläum der Begründung der ersten ordentlichen Professur für angewandte Mathematik in Deutschland: Ein Blick auf Carl Runge“. *Jubiläen – Chance oder Plage?* Hrsg. v. Christa Binder. TU Wien 2004, S. 133-142.
- Tobies, Renate: „Berufsentscheidung Luftfahrtforschung am Beispiel von Marie-Luise Schluckebier und Arnold Fricke“. *Physica et historia. Festschrift für Andreas Kleinert zum 65. Geburtstag*, hrsg. v. Susan Splinter, Sybille Gerstengarbe, Horst Remane und Benno Parthier (Acta Historica Leopoldina, Nr. 45). Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina Halle, in Kommission bei Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH: Stuttgart 2005, S. 431-442.
- Walther, Alwin: „Zur Behandlung der Mathematik auf der Technischen Hochschule“. Sonderdruck aus *Technische Erziehung* 11 (1936) H. 2, S. 1-7.
- Wehage, Dora: „Verwendung des Planimeters zur Bestimmung mehrfacher Integrale und zur Integration partieller Differentialgleichungen“. Sonderdruck aus *Zeitschrift für Instrumentenkunde* (1929) S. 1-39; Dissertation TH Berlin.



# From Parlor Games to Computer Networks

MAGDALENA HYKŠOVÁ, PRAGUE

The paper picks up the threads of author's contribution [5] given in Miesenbach two years ago that discussed several milestones in the history of game theory, including the first known mixed strategy solution related to the card game *le Her*. The aim of this article is to outline the natural connection of the initial game theoretical ideas to the contemporary problems of computer and transportation networking. A typical example is represented by the Internet: here various subjects like network operators, service providers and users interact; moreover, the network itself was not designed by a single person or institution but emerged from the interaction of various entities. Different "players" compete with each other, bargain, build coalitions or learn optimal strategies throughout the time.

## 1 Non-Cooperative Games

### 1.1 Historical Overview: from Cournot to Nash

Recall that fundamental solution concept of non-cooperative games, Nash equilibrium (see [5], p. 49), has its roots already in the work [2] published by Antoine Augustin Cournot (1801–1877) in 1838. Besides other topics, Cournot investigates the demand function  $D = F(p)$  which he assumes to be downward-sloping and draws it in price-quantity space; this function summarizes the empirical relationship between the price  $p$  and the quantity  $D$  sold. The fifth chapter contains a detailed analysis of monopoly. Cournot introduces the concept of a cost function  $\phi(D)$  and gives a mathematical solution of the maximization of the profit  $pF(p) - \phi(D)$  considered as the function of the price  $p$ . The next chapter deals with the impact of various taxes and other fees on the income of producers and consumers. The seventh chapter contains today famous Cournot duopoly model: *Let us now imagine two proprietors and two springs of which the qualities are identical, and which, on account of their similar positions, supply the same market in competition.*<sup>1</sup> Cournot denotes by  $D_1$  ( $D_2$ ) the sales from the first (second) spring and considers the price  $p$  as the function of the total sales,  $p = f(D_1 + D_2)$ . First he neglects the cost of production and investigates the situation where the two proprietors – each of them independently – seek to maximize their profits expressed by  $D_1 f(D_1 + D_2)$  and  $D_2 f(D_1 + D_2)$ .

Today we would speak about a *game*: each proprietor controls only a part of the total production; the price he receives for his products to sell them all therefore depends not only on his own decision, but on the decision of the opponent, too, and we would use the best-reply analysis to find the equilibrium point. It is remarkable that Cournot did exactly the same, only without the word "game":

*Proprietor (1) can have no direct influence on the determination of  $D_2$ : all that he can do, when  $D_2$  has been determined by proprietor (2), is to choose for  $D_1$  the value which is best for him. ... Analytically this is equivalent to saying that  $D_1$  will be determined in terms of  $D_2$  by the condition*

$$\frac{d[D_1 f(D_1 + D_2)]}{dD_1} = 0,$$

<sup>1</sup> [2], English translation, p. 79.

and that  $D_2$  will be determined in terms of  $D_1$  by the analogous condition

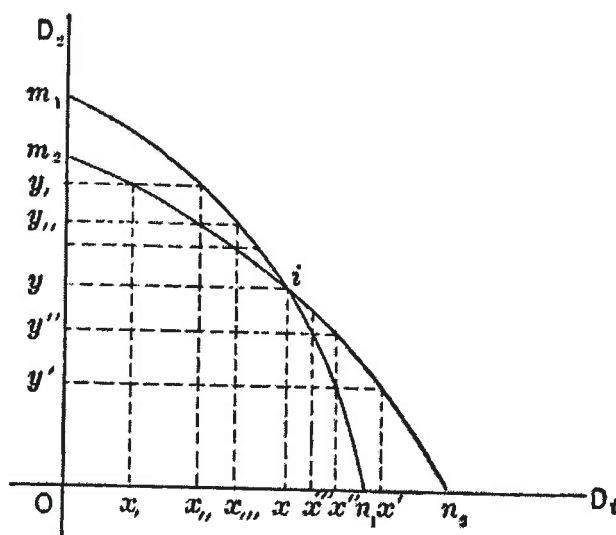
$$\frac{d[D_2 f(D_1 + D_2)]}{dD_2} = 0,^2$$

whence it follows that the final values of  $D_1$  and  $D_2$ , and consequently of  $D$  and of  $p$ , will be determined by the system of equations

$$(1) \quad f(D_1 + D_2) + D_1 f'(D_1 + D_2) = 0, \quad (2) \quad f(D_1 + D_2) + D_2 f'(D_1 + D_2) = 0.$$

Then Cournot constructs the curves that we today call “reaction curves”, investigates the dynamics of the duopoly “game” and comes to the equilibrium solution that also represents the globally stable steady state:

Let us suppose the curve  $m_1 n_1$  to be the plot of equation (1), and the curve  $m_2 n_2$  that of equation (2), the variables  $D_1$  and  $D_2$  being represented by rectangular coordinates. If proprietor (1) should adopt for  $D_1$  a value represented by  $ox_1$ , proprietor (2) would adopt for  $D_2$  the value  $oy_1$ , which, for the supposed value of  $D_1$ , would give him the greatest profit. But then, for the same reason, producer (1) ought to adopt for  $D_1$  the value  $ox_{11}$ ,



which gives the maximum profit when  $D_2$  has the value  $oy_1$ . This would bring producer (2) to the value  $oy_{11}$  for  $D_2$ , and so forth; from which it is evident that an equilibrium can only be established where the coordinates  $ox$  and  $oy$  of the point of intersection  $i$  represent the values of  $D_1$  and  $D_2$ . The same construction repeated on a point of the figure on the other side of the point  $i$  leads to symmetrical results.

The state of equilibrium corresponding to the system of values  $ox$  and  $oy$  is therefore stable; i.e. if either of the producers, misled as to his true interest, leaves it temporarily, he will be brought back to it by a series of reactions, constantly declining in amplitude, and of which the dotted lines of the figure give a representation by their arrangement in steps.<sup>3</sup>

In the same chapter Cournot also considers the case of  $n$  producers and takes into account also the costs  $\phi_i$  of production, which leads him to the system of equations:

$$f(D) + D_i f'(D) - \phi'_i(D_i) = 0, \quad \text{where } i = 1, 2, K, n, \quad D = D_1 + D_2 + L + D_n.$$

It is not possible to discuss here the whole development of duopoly and oligopoly models. Let us only mention the duopoly model that we will need later in this contribution, namely the model proposed by Heinrich von Stackelberg (1905–1946) in his book [16] published in 1934. Stackelberg considers the situation where the two duopolists act sequentially. One of them – usually called *leader* – moves first, choosing a quantity. The second one – *follower* – observes the leader’s choice and then picks a quantity that repre-

<sup>2</sup> Cournot uses the same notation for the derivative of a one variable function and for partial derivatives.

<sup>3</sup> [2], English translation, pp. 80–81, figure at the end of the book.

sents his best reply; in his decision, the leader takes into account this follower's reaction. It has become common to speak about a Stackelberg game in the case of any game where one player acts as a leader in the sense that he chooses his strategy first, while the other players act as the followers: they observe the strategy chosen by the leader and then choose their strategies to maximize their payoffs.

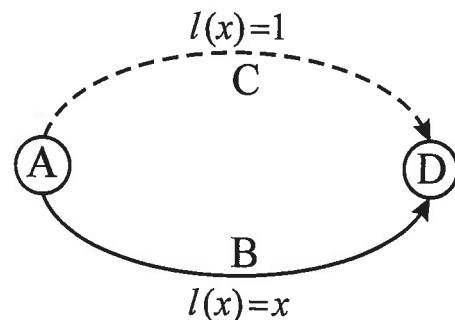
## 1.2 Applications: From Oligopoly to Network Optimization

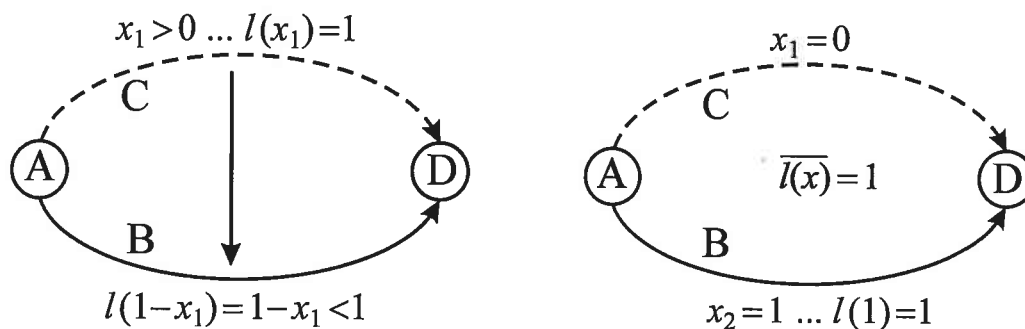
It is not necessary to recall that within the second half of the twentieth century game theory became an inseparable part of the disciplines that deal with the interactions of people or institutions lead by people (economy, political or military sciences). With the fast development of computer as well as transportation networks the game theoretical approach has gradually gained a prominent position also in this optimization domain. Whether we speak about data or cars, the fundamental problem is almost the same: we are given a network and a rate of traffic between the source and destination nodes, and seek an assignment of traffic to source-destination paths. Usually it is assumed that each network user controls a negligible fraction of the overall traffic and the time needed to run through a single link of the network is load-dependent, that is, the common latency suffered by all traffic on the link increases with the increase of the link congestion. When there is a central authority with the competence to control the traffic flow to achieve the best performance of the network, it can prescribe the *optimal assignment* as a feasible assignment minimizing the total latency. Nevertheless, the network users are often free to act according to their own selfish interests; in this case we can expect the network traffic to converge to the *Nash equilibrium*.

The first example of an equilibrium network flow emerged in the field of economics: it is contained in the first edition of the 1920 book [10] written by Arthur Cecil Pigou (1877–1959), the English economist known above all for his advocacy of so-called *Pigouvian taxes* – discouraging taxes on activities that cause negative externalities (pollution, traffic congestion). Although Pigou could not explicitly use the equilibrium concept introduced by John Nash almost 30 years later, he expressed the same:

*Suppose there are two roads ABD and ACD both leading from A to D. If left to itself, traffic would be so distributed that the trouble involved in driving a "representative" cart along each of the two roads would be equal [in other words, no driver can improve his travel time by changing the route]. But, in some circumstances, it would be possible, by shifting a few carts from route B to route C, greatly to lessen the trouble of driving those still left on B, while only slightly increasing the trouble of driving along C. In these circumstances a rightly chosen measure of differential taxation against road B would create an "artificial" situation superior to the "natural" one. But the measure of differentiation must be rightly chosen.*

Today we can imagine *ACD* as a road that is broad enough to accommodate all cars traveling from *A* to *D* without congestion, but with many traffic lights that prolong the travel time which is always equal to one hour. *ABD* can represent a highway that is fast but susceptible to congestion. Denote by  $x$  the fraction of the overall traffic from *A* to *D* using the particular road, and  $l(x)$  the travel time experienced by drivers on that road. If the fraction of drivers using the road *ACD* was positive, the travel time on the road *ABD* would be lower than one hour and it would be profitable to change the road from *ACD* to *ABD*. In equilibrium, all drivers therefore use the road *ABD* with the travel time equal to one hour.

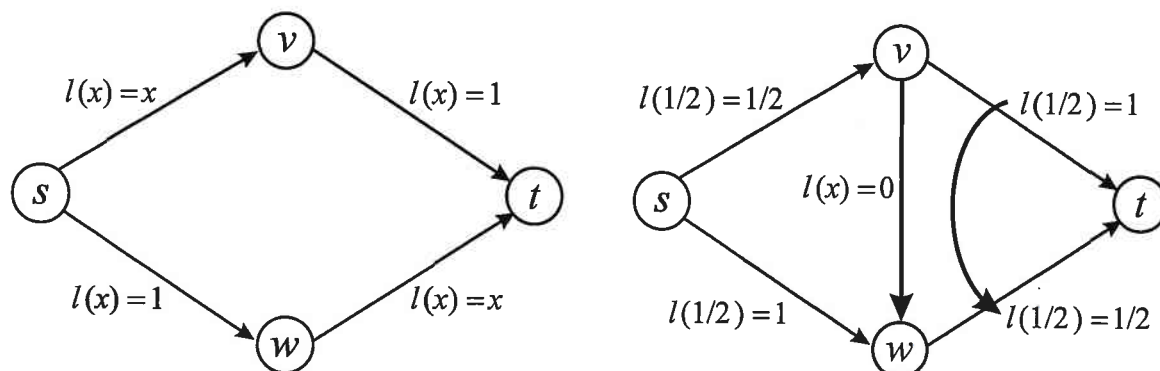




Nevertheless, from the point of view of the whole society whose aim is to minimize the overall travel time  $x_1 \cdot 1 + (1-x_1) \cdot (1-x_1) = x \cdot (x_1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ , it would be optimal if one half of all drivers use  $ACD$  and the other half  $ABD$ , which yields the mean travel time 45 minutes. This is much better than one hour in equilibrium; nevertheless, it does not seem to be fair for those driving on  $ACD$ .

Pigou introduced this example to illustrate the necessity of discouraging taxes for optimal performance of a network. After the critique by the influential American economist Frank Hyneman Knight (1885–1972) he omitted this example in other editions of the book. Nevertheless, today it is one of the most famous examples used for the illustration of the fact that the selfish behavior by independent, non-cooperative “agents” need not produce a socially desirable outcome.

Another today famous example was independently introduced by Dietrich Braess in his 1968 paper [1]. Using the same notation as above, we can describe it in the following way. Consider a network with two source-destination paths  $svt$ ,  $swt$  with travel times given by the left figure bellow. In equilibrium, the traffic splits evenly between the two paths and each driver travels one hour and a half.



Now imagine that an additional road from  $v$  to  $w$  is built of unlimited capacity and zero travel time (right figure). We can easily check that in equilibrium all drivers use the path  $svwt$  with the travel time equal to two hours. As expressed by Roughgarden: *Breass paradox thus shows that the intuitively helpful (or at least innocuous) action of adding a new zero-latency link may negatively impact all of the traffic.* ([11], p. 6)

The recent literature deals with several interesting questions that have their roots in the above examples:<sup>4</sup> How bad is selfish routing? It means, what is the worst-possible ratio between the total latency of a flow at Nash equilibrium and that of the best coordinated outcome minimizing the total latency? On the other hand, how unfair is the optimal assignment in the comparison with Nash equilibrium? When there is no chance of control, the performance of the system can be positively influenced by the appropriate architecture of the network.

<sup>4</sup> For more details and references see [11], [12].



Still, in many systems there is a mixture of “selfishly” and “centrally” controlled jobs; the congestion due to centrally controlled jobs influences the actions of selfish users. Similarly, there can be a central authority – for example the provider of the network – who can settle the prices for various paths before the selfish users start to act. These situations can be modeled via *Stackelberg games* where the leader is the central authority which searches the strategy that induces the selfish users (followers) to react in a way that minimizes the total latency in the system.

## 2 Bargaining

### 2.1 Historical Overview: from Edgeworth to Nash and Rubinstein

In the domain of non-cooperative games, the players cannot usually take full advantage of the situation. For example, in the case of Cournot or Stackelberg duopoly it would be better for both players to cooperate and act together as a monopolist. Thus we come to a *bargaining problem* that is usually referred to as a problem where two or more individuals have before them several possible contractual agreements. All have interests in reaching an agreement but their interests are not entirely identical. What will be the agreed contract, assuming that all parties behave rationally? This problem was already presented by Francis Ysidro Edgeworth (1845–1926) in his 1881 book [3]. Since then many attempts had been made to get a clear cut solution.

#### John Forbes Nash and the Axiomatic Approach

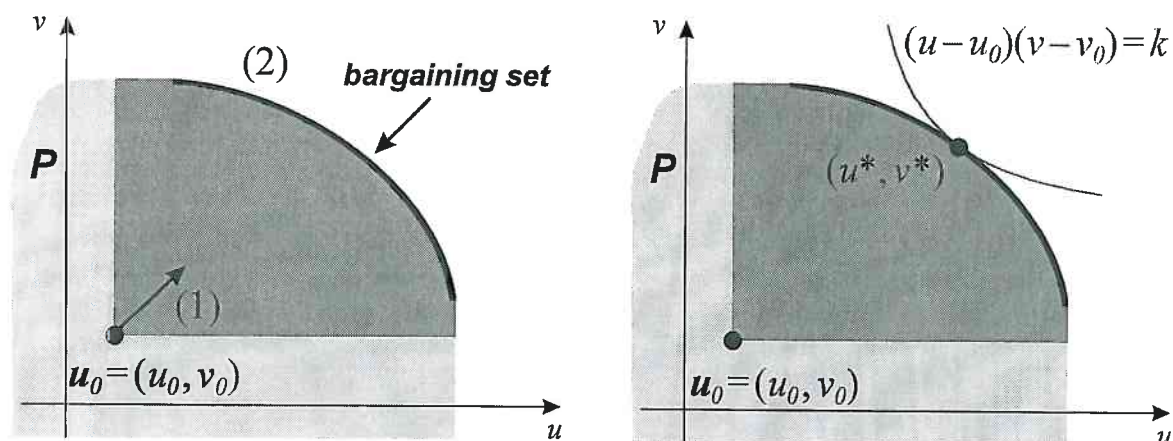
One approach to the bargaining problem solution that corresponds to the general inclination to axiomatic foundations of various parts of mathematics and other scientific disciplines was proposed by John Forbes Nash in his paper [9] published in 1953. Nash considered a *two-player bargaining problem* as an ordered pair  $(P, \mathbf{u}_0)$ , where  $P$  is a cooperative payoff region (the set of all possible payoff pairs),  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$ , where  $u_0, v_0$  are the payoffs in the case of a disagreement (“threats”). Let us denote the bargaining solution as  $\Psi(P, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*)$ . Nash called for the satisfaction of the following conditions that correspond to our intuition about a fair bargaining solution:

1. *Individual Rationality*:  $u^* \geq u_0, v^* \geq v_0$ .
2. *Pareto Optimality*: there does not exist any other payoff pair  $(u, v) \in P$  for which  $u \geq u^*$  and  $v \geq v^*$ , with at least one inequality is strict.
3. *Feasibility*:  $(u^*, v^*) \in P$ .
4. *Independence of Irrelevant Alternatives*: if  $P'$  is a payoff region contained in  $P$  and  $(u_0, v_0), (u^*, v^*) \in P'$ , then  $\Psi(P', (u_0, v_0)) = (u^*, v^*)$ .
5. *Independence Under Linear Transformations*: suppose that  $P'$  is obtained from  $P$  by the linear transformation  $u' = au + b, v' = cv + d$ , where  $a, c > 0$ ; then

$$\Psi(P', (au_0 + b, cv_0 + d)) = (au^* + b, cv^* + d).$$

6. *Symmetry*: If  $P$  is symmetric (i.e.  $(u, v) \in P \Leftrightarrow (v, u) \in P$ ) and  $u_0 = v_0$ , then  $u^* = v^*$ .

For a given bargaining problem, Nash constructs the solution which maximizes the product of the utility gains  $(u - u_0)(v - v_0)$  on the set of feasible and individually rational payoff pairs, and proves that it is the unique solution satisfying the conditions 1–6.



More generally, Nash bargaining solution for the case of  $n$  players and the threats  $(d_1, d_2, K, d_n)$  selects the utility vector that maximizes the product of the utility gains  $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2) \dots (u_n - d_n)$  of the players over the set of feasible agreements that are individually rational, i.e.  $u_1 \geq d_1, K, u_n \geq d_n$ .

Later other solutions were proposed that omitted some of the above conditions (mainly the condition 4) and replaced it by other ones.<sup>5</sup>

### Rubinstein's Model of Alternating Offers

In 1982 Ariel Rubinstein introduced his well-known strategic bargaining model of alternating offers of two players. Now it is common to consider  $n$  players who need to reach an agreement on a given issue. It is assumed that the players can take actions in the bargaining only at certain times in the set  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  that are determined in advance and are known to the players. In each period  $t \in T$ , if the bargaining has not terminated earlier, a player whose turn it is to make an offer at time  $t$  suggests a possible agreement, and each of the other players may either accept the offer, reject it, or opt out of the negotiation. If an offer is accepted by all the players, the bargaining ends and this offer is implemented. If at least one of the players opts out of the bargaining, it ends with a conflicting outcome. If no player has chosen to opt but at least one of them has rejected the offer, then the bargaining process continues to period  $t + 1$  when the next player makes a counteroffer, the others respond, and so on.

*Strategy of a player* now specifies what to do next, for each sequence of offers  $s_0, s_1, K, s_t$ . It means, in time periods when it is the player's turn to respond to an offer, the strategy specifies whether to accept it, reject it or opt out of the bargaining; when it is the player's turn to make an offer, the strategy specifies which offer to make. *Strategy profile* is a collection of strategies, one for each player.

*Nash equilibrium*, as it was introduced for one-stage games, denotes the strategy profile such that no player can profitably deviate, given the actions of the other players. Rubinstein highlighted the inadequacy of this concept for multistage bargaining. Following Selten's definition of the perfect equilibrium (see [14], [15]), he based the bargaining analysis on this stronger concept. In simple words, a strategy profile is a *subgame perfect equilibrium* of a model of alternating offers if the strategy profile induced in every subgame is a Nash equilibrium of that subgame.

<sup>5</sup> For the detailed survey and references see [17].

## 2.2 Applications: From Bargaining Politicians to Multi-Agent Systems

One of the greatest challenges for computer science is building computer systems that can work together. Among the examples of such intelligent systems we can find for instance automated agents that monitor electricity transformation networks, teams of robotic systems acting in hostile environments, computational agents that facilitate distributed design and engineering, distributed transportation and planning systems, intelligent agents that negotiate over meeting scheduling options on behalf of people for whom they work or Internet agents that collaborate to provide updated information to their users. In such environments, cooperation may improve the performance of the individual agents or the overall behavior of the system they form (see [6], pp. 79–85).

For example, Kraus [6] uses Rubinstein's model of alternating offers for data allocation problem where the players are servers of a given system and agreement is a distribution of datasets to information servers. Nash conditions or their modifications are usually used for characterization of optimal and fair solutions; one of the application possibilities is the Internet pricing as a game between an Internet service provider who chooses the price, and users who decide on their demand (see [18]).

## 3 Evolutionary Game Theory

### 3.1 Historical Overview: from Darwin to Maynard Smith

For a brief historical overview see author's contribution [5], pp. 53–56.

### 3.2 Applications: From Species Evolution to Internet

Non-cooperative and cooperative games discussed above are based on two essential assumptions: *unbounded rationality* and *global knowledge*. Both of these assumptions cannot be justified when considering large networks like Internet or the transportation system of a large city. The view that the players are not always rational, due to either limited computational capabilities, or limited knowledge of other players' nature is the point of departure for *evolutionary game theory*. As we could see in [5], the evolution process deals with a huge population of players that are "programmed" to adopt some strategies. As time proceeds, many small games are played and the strategies with high payoffs spread within the population. Evolutionary games in large populations thus create a dynamic process where the frequencies of the strategies played by population members change in time because of the learning or selection forces guiding the individuals' strategic choices.

In the field of biology where these ideas were originally formed, the players are the genes in which the instinctive behavior is coded. The development of Internet and other extended networks led to the transmission of the evolutionary theory from biology to the domain of *multi-agent systems*: for the reasons mentioned above, it is more realistic to consider agents as players with only partial information on the nature, possible strategies and payoffs of other players. Agents learn how to perform well in the game by experience; from time to time they revise their strategies on the basis of local observations, giving the strategy that has led to a higher payoff a higher probability of choosing in the next round.

A typical application is the *adaptive network routing* discussed for example by Fischer and Vöcking in their 2005 paper [4]. In the simplest case of the network with one starting point and one terminal point, the system can be described by the following differential equation:  $\dot{f}_P = \lambda \cdot f_P \cdot (\bar{l}_i - l_P)$ , where  $f_P$  denotes the flow on the path  $P$ ,  $l_P$  is

the latency of this path,  $\bar{l}_i$  is the average latency and  $\lambda \geq 0$  is a proportionality factor. Besides investigating stable solutions, evolutionary game theory enables us to study the *dynamics* of routing.

## References

- [1] Braess, D.: *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*. Unternehmensforschung **12**(1968), pp. 258–268.
- [2] Cournot, A. A.: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Hachette, Paris, 1838. English translation from 1897 by N. T. Bacon: *Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Macmillan, New York, 1927.
- [3] Edgeworth, F. Y.: *Mathematical Psychics: An Essay on the Applications of Mathematics to the Moral Sciences*. London, 1881.
- [4] Fischer, S.; Vöcking, B.: *On the Evolution of Selfish Routing*. In: Proc. 12<sup>th</sup> Annual European Symp. on Algorithms, Bergen, 2004, pp. 323–334.
- [5] Hykšová, M.: *Several Milestones in the History of Game Theory*. In: VII. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Wien, 2004, pp. 49–56.
- [6] Kraus, S.: *Negotiation and Cooperation in Multi-Agent Environments*. Artificial Intelligence **94**(1997), pp. 79–97.
- [7] Kraus, S.: *Strategic Negotiation in Multi-Agent Environments*, MIT, Cambridge, 2001.
- [8] Nash, J. F.: *Non-Cooperative Games*. Thesis, Princeton University, 1950, 27 pp.
- [9] Nash, J. F.: *Two-person Cooperative Games*. Econometrica **21**(1953), pp. 128–140.
- [10] Pigou, A. C.: *The Economics of Welfare*. McMillan, London, 1920.
- [11] Roughgarden, T.: *Selfish Routing*. Thesis, Cornell University, 2002.
- [12] Roughgarden, T.: *Selfish Routing and the Price of Anarchy*. MIT, Cambridge, 2005.
- [13] Rubinstein, A.: *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*. Econometrica **50**(1982), pp. 97–109.
- [14] Selten, R.: *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit*. Zeitschrift für die Gesamte Staatswiss. **12**(1965), pp. 301–324, 667–689.
- [15] Selten, R.: *Re-examination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games*. International Journal of Game Theory **4**(1975), pp. 25–55.
- [16] Stackelberg, H. von: *Marktform und Gleichgewicht*. Springer-Verlag, Wien, 1934.
- [17] Thomson, W.: *Cooperative Models of Bargaining*. In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 2. Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 1237–1284.
- [18] Xi-Ren Cao; Hong-Xia Shen; Milito, R.; Wirth, P.: *Internet Pricing with a Game Theoretical Approach: Concepts and Examples*. In: IEEE/ACM Transaction on Networking, vol. 10, No. 2, 2002, pp. 208–216.

## Address

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.  
 Faculty of Transportation Sciences  
 Czech Technical University in Prague  
 Na Florenci 25, 110 00 Prague 1  
 Czech Republic  
 e-mail: [hyksova@fd.cvut.cz](mailto:hyksova@fd.cvut.cz)



Waltraud Voss, TU Dresden

## Aus Gustav Zeuners „Geheimakten“: Briefe im Vorfeld von Berufungen

Wenn man den großen Bereich der Geschichte der Mathematik der Wissenschaft Mathematik zuschlägt und sich dem kleinen Teilbereich „Personalbewegung und Berufungsvorgänge“ zuwendet, wird man letztlich doch – und heute wie vor 50 Jahren - auf die alten Akten zurückgreifen müssen, oft auf solche, die in der Zeit ihres Entstehens „geheim“ waren. Dieser Vortrag lässt Sie einen Blick in die „Geheimakten“ von Gustav Zeuner (1828-1907) werfen, der von 1873 bis 1890 Direktor des Dresdner Polytechnikums war. Es geht um die Berufung Axel Harnacks 1877, Karl Rohns 1885 und Martin Krauses 1888.

### 1. Zur Berufung Axel Harnacks

Axel Harnack (1851-1888) wurde am Polytechnikum Dresden der Nachfolger von Leo Königsberger (1837-1921), der in den zwei Jahren seines Wirkens in Dresden viel auch für die Attraktivität des dortigen Lehramtsstudiums der Fächer Mathematik und Physik getan hat. Königsberger stand von 1875 bis 1877 der seit 1862 bestehenden „Lehrerabteilung“ vor, initiierte 1875 die Gründung des Dresdner Mathematischen Seminars und hatte wesentlichen Anteil an der Berufung des Physikordinarius der Universität Graz, August Toepler (1836-1912), an das Polytechnikum Dresden. Als Königsberger im Begriff war, von Dresden nach Wien zu wechseln, sah er sich selbst nach einem geeigneten Nachfolger um. Davon zeugt auch der folgende Brief.

14. Februar 1877: Adolph Mayer (1839-1908)–Leipzig an Leo Königsberger–Dresden:

*Verehrter Herr Geh.-Rath!*

*Meinem bestem Danke für Ihre Sendung brauche ich wohl kaum erst noch ausdrücklich hinzuzufügen, wie sehr es mich freuen würde, wenn Sie noch vor Wien einmal herüberkommen könnten. Leider bin ich augenblicklich noch durch die Ausarbeitung meiner Antrittsvorlesung (Princip der kleinsten Action) zu sehr beschäftigt, sonst würde ich mir das Vergnügen machen, Sie wenigstens auf ein paar Stunden in Dresden zu besuchen. Es liegt mir aber alles daran, diese bisher (d. h. seit nun schon 5 Jahren) immer aufgeschobene, lästige Stilübung noch in diesem Semester nicht nur fertig zu bringen, sondern auch vorzutragen, da dieselbe mich sonst doch noch einen Theil der Ferien von wirklicher Arbeit abhalten würde. Ihre Andeutung wegen Harnack fasse ich wohl richtig dahin auf, daß Sie, um den schweren Verlust, den das Polytechnikum durch Ihren Weggang erleidet, wenigstens einigermaßen zu mildern, gern noch vorher tüchtige Kräfte für Dresden gewinnen möchten. Denken Sie wirklich in diesem Sinne an Harnack, so wird mich das für ihn ebenso sehr freuen, als es mir andererseits Leid thut, daß wir dann die Hoffnung auf eine baldige*

*Zurückberufung Harnacks hierher wohl oder übel werden aufgeben müssen. In letzterer Hinsicht bedaure ich fast, daß ich ohne Verletzung der Aufrichtigkeit Ihnen nichts anderes sagen kann, als daß Harnack als Docent hier außerordentliche Erfolge gehabt hat u. seine Zuhörer für ihn schwärmten, wie ich denn überhaupt unter allen jüngeren Geometern Harnack entschieden für die bedeutendste Arbeits- und Lehrkraft halte, und überdies, abgesehen natürlich immer von Klein, keinen kenne, den ich auch als Menschen lieber zum Collegen haben würde. - Vielleicht ist es nicht überflüssig, noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Harnack heiratet gegen Ostern in Riga. Es wäre daher, falls man ihn anderswo zu haben wünscht, wohl rätlich, ihn seine Häuslichkeit in Darmstadt nicht erst zu fest und behaglich einrichten zu lassen.*

*Mit herzlichem Gruß u. in der Hoffnung auf baldiges Wiedersehen hier oder in Dresden*

*Ihr ganz ergebener Adolph Mayer.*

Axel Harnack stand dann letztlich auf der von der Berufungskommission erarbeiteten Kandidatenliste ganz oben. Er wurde für Dresden gewonnen. Als Inhaber des Ersten Mathematischen Lehrstuhls (von vieren) war er Direktor des Mathematischen Seminars und Leiter der „Lehrerabteilung“. Bereits 1879 wurde am Dresdner Polytechnikum eine eigene Prüfungskommission für Kandidaten des höheren Schulamts der mathematisch-naturwissenschaftlichen und der technischen Richtung installiert. In diesem Jahr wurde für den Zweiten Mathematischen Lehrstuhl Aurel Voss (1845-1931) gewonnen, der 1885 an die TH München ging.

## 2. Zur Berufung Karl Rohns

Der Berufungskommission für die „Nachfolge Voss“ gehörten die Mathematiker Louis Burmester (1840-1927), Arwed Fuhrmann (1840-1907), Aurel Voss, der Physiker August Toepler und der Professor des Bauingenieurwesens, Wilhelm Fränkel (1841-1895), an. Als Berufungskandidaten waren im Gespräch: Hermann Schubert (1848-1911), Otto Staude (1857-1928), Friedrich Schur (1856-1932), Hans von Mangoldt (1854-1925), Karl Rohn (1855-1920) und Ludwig Scheeffer (1859-1885). Im Januar 1885 gaben die Professoren Wilhelm Gottlieb Hankel (1814-1899) und Felix Klein (1849-1925) aus Leipzig und Gustav Bauer (1820-1906) aus München Auskünfte zu den Kandidaten. Nachfolger von Aurel Voss wurde Karl Rohn, der seit einiger Zeit am Polytechnikum bereits den erkrankten Axel Harnack vertrat.

2. Januar 1885: Wilhelm Gottlieb Hankel–Leipzig an Gustav Zeuner-Dresden:

*Hochzuverehrender Herr Geheimer Rath,*

*vor einigen Tagen hat sich Ihnen der Privatdozent Dr. O. Staude aus Breslau (Sohn des Medicinalraths Dr. Staude in Zwickau) vorgestellt, und ich benutze gern diese Veranlassung, Ihnen den jungen Mann auf das Angelegentlichste zu empfehlen. Dr. Staude ist mir gleich bei seinem Einschreiben in der Universität*

bekannt geworden, und ich habe seine ganze Bildungsweise verfolgen können. Mit einer vortrefflichen allgemeinen Bildung ausgerüstet, hat er seine Studienzeit auf unserer Universität benutzt, um sich eine genaue Kenntniß des gesamten Gebietes der Mathematik zu erwerben. Er hat es vermocht, sich eine klare Einsicht sowohl in das Gebiet der Analysis, (wie) auch in das der neueren Geometrie zu verschaffen; und daß er bis zum reifen Verständnisse durchgedrungen, zeigte gleich seine erste allerseits mit größter Anerkennung aufgenommene Publication der Construction eines Ellipsoids mittelst eines gespannten Fadens, ebenso wie auch seine späteren Abhandlungen. Auch hat ihn mein College Prof. Dr. Klein bei der Herausgabe der Werke des verstorbenen Professors Möbius zur Mitarbeiterschaft herangezogen. – Seine Vorlesungen an der Universität Breslau finden, wie die Zuhörerzahl beweist, allseitigen Beifall.

In größter Hochachtung verharrend

Euer Hochwohlgeboren ganz ergebenster Professor Dr. Hankel

15. Januar 1885: Felix Klein-Leipzig an Axel Harnack-Dresden:

Lieber Freund!

Unter den fünf Candidaten, welche Du nennst, steht Schubert, was Alter und Umfang der Leistung betrifft, billig obenan. Schubert ist, wissenschaftlich zu reden, ein genialer Kopf: er hat ganz besondere Gedanken von bleibendem Werthe in die algebraisch-geometrischen Disciplinen eingeführt. Andererseits ist er ein Mann von unzweifelhaft bedeutender pädagogischer Begabung. Trotzdem kann ich seine Berufung an eine Hochschule jetzt nicht mehr befürworten. Es ist ihm doch etwas, schwer Definierbares aber ganz bestimmt Verstandenes, entgangen, indem er während der 15 Jahre, die wir uns jetzt mit Vorlesungen der mannigfachsten Art abmühen, con amore seinen speciellen Neigungen nachgehen konnte. Ich möchte diesbezüglich auf den Streit zwischen Schubert und Halphen<sup>1</sup> über die Gültigkeit der Charakteristikentheorie verweisen, wo Sch. sich zweifellos eine Blöße gibt, so dass man sagen muß: das eigentlich Principielle, die Dimension der algebraischen Grundlage, ist nicht seine Sache. Ich spreche dies hier nur darum mit solcher Schärfe aus, um übertriebene Lobpreisungen, wie sie allemal bei Berufungsangelegenheiten von vielen Seiten zufließen, auf ihr richtiges Maass zurückzuführen. Du weißt, dass mir Schubert so wie die meisten der sonst Genannten persönlich sehr nahe steht, und ich bitte Dich also, von diesen und ähnlichen Aeusserungen nur einen ganz discreten Gebrauch zu machen. – Ueber Rohn, den Du an zweiter Stelle nennst, habe ich hier kaum Neues hinzuzufügen. Das Gutachten unserer Facultät ist beinahe vollständig durch jene Sätze, die ich Dir neulich schrieb, wiedergegeben ... Rohn steht den anderen vier Candidaten, was Selbständigkeit der wissenschaftlichen Persönlichkeit betrifft, meines Erachtens voran: ich könnte da höchstens Scheeffter ausnehmen, der ja einen vorzüglichen Eindruck

<sup>1</sup> Georges Henri Halphen (1844-1889)



*macht, aber doch wohl noch einige Zeit arbeiten muß, ehe man ihn ernstlich für eine größere Stelle in Betracht nimmt. – Was die Vorlesungen angeht, die Rohn hier gehalten, so bezogen sie sich in der Hauptsache auf geometrische Themata und zwar sowohl auf projective Geometrie als namentlich auch Flächenkrümmung. Daneben hat er Differential- und Integralrechnung, Functionentheorie etc. gelesen. – Du fragst auch speziell nach Modellen. Die sehr schönen Modelle II, III, IV der Kummerschen Fläche mit 8, 4, 2 Knoten ... rühren von Rohn her, ... - Also Staude hat mit seinem bescheidenen Auftreten und seiner monotonen Stimme zuvörderst bei den Collegen kein Glück gemacht. Ich von mir aus muß auf Grund genauer Kenntniß Staude sehr rühmen. Er trägt vorzüglich vor, was aus Breslau bestätigt werden wird. Er ist weniger productiv als eindringend, die richtige Gelehrtennatur. Seine Literaturkenntniß geht außerordentlich weit. Eben dies ist ein Hauptverdienst seiner Arbeiten über hyperelliptische Functionen, dass er alle die unvermittelt nebeneinander stehenden Publicationen Anderer unter höhere Gesichtspuncte zusammenfasst und gleichzeitig in ... Abhängigkeit von einander versetzt. Nun aber will ich last not least die außerordentliche Gewissenhaftigkeit von Staude nennen. Du weisst dass ich bei der Gesamtausgabe von Moebius<sup>2</sup>, welche die hiesige Gesellschaft der Wissenschaften in die Hand genommen hat, mitwirke. Ich habe mich für die Correctur etc. nach Hülfe umgesehen und mich dazu sofort an Staude gewandt, ... - Ueber Schur haben wir ja viel gesprochen. Nimm hinzu, dass Schur jetzt den gesammten geometrischen Unterricht an der hiesigen Universität, soweit niedere Semester in Betracht kommen ... in der Hand hat. Er liest 3 St. proj. Geometrie, 3 St. darstellende, 2 St. Fundamente der Geometrie, und er liest gut und klar und anregend. ... Seit 1880 ist Schur bei uns habilitiert. Wir haben ihn jetzt hinter Rohn als a.o. Professor vorgeschlagen und dürfte es unzweifelhaft sein, dass er um Ostern dazu ernannt wird. - Endlich v. Mangoldt! Ich kenne v. M. ja weniger, aber ich glaube doch nicht zu irren, wenn ich ihn folgendermaßen charakterisiere: sehr guter Lehrer für niedere Anforderungen, gewissenhaft und klar, aber ohne höhere Ideen, ohne Schwung. ... Ich habe v. M., als es sich um Hannover handelte, ... sehr empfehlen können. Nun aber möchte ich noch etwas abwarten, wie er sich weiter entwickelt. Mir ist nicht ganz klar, wie er sich der höheren Aufgabenstellung gegenüber verhalten würde, die durch Eure Lehrerabtheilung gesetzt ist. - Doch genug für dieses Mal, besonders da ich hier abrechnen und ins Colleg eilen muß. Hoffentlich kann Dir mein Brief etwas nützen. Wie ich urtheilen würde, ist kaum nöthig zu sagen ....*

*Mit herzlichen Grüßen Dein F. Klein*

17. Januar 1885: Gustav Bauer–München an Aurel Voss-Dresden:  
Hochgeehrter Herr Professor!

<sup>2</sup> August Ferdinand Moebius (1790-1868)



*Ich freue mich Ihnen, schon bevor Sie in unseren Kreis eingetreten sind, einen kleinen Dienst erweisen zu können und zwar um so mehr, da ich über die Persönlichkeiten, über welche Sie mich befragen, eigentlich nur Gutes zu sagen habe. Was Herrn Scheeffler betrifft, so ist derselbe am 1. Juni 1859 zu Königsberg geboren, evangelischer Religion; er absolvierte das Gymnasium zu Berlin 1875, studierte sodann auf den Universitäten zu Heidelberg, Leipzig und Berlin und wurde 1880 in Berlin zum Dr. phil. promoviert. Ein Jahr darauf, nach bestandenem Staatsexamen, trat er als Probecandidat in das unter Leitung des Prof. Schellbach stehende Pädagogische Seminar des Friedrich-Wilhelm-Gymnasiums zu Berlin ein; in dieser Stellung, in welcher er auch den Unterricht in Prima und Ober-Secunda zu leisten hatte, verblieb er vorschriftsmäßig ein Jahr. Im Sommer 1883 meldete er sich zur Habilitation an unserer Universität; da aber der Schluß des Semesters zu nahe war, verzögerte sich die Sache und die Habilitation fand im März 1884 statt. Herr Scheeffler ist also erst im 2. Semester bei uns in Aktivität; im vergangenen Semester las er über Variationsrechnung (9 Zuhörer), in diesem Semester Elemente der Differential- und Integralrechnung (Zahl der Zuhörer 16). Dies sind die äußeren Lebensumstände. Was nun seine Kenntnisse betrifft, so war ich allerdings noch nicht ganz befriedigt. Seine Doctor-Dissertation zwar ... scheint mir eine recht gute Arbeit, habe sie mit Vergnügen gelesen; weniger befriedigte jedoch seine Habilitationsschrift ..., die Arbeit zeigte, daß er sich mit Funktionentheorie beschäftigt hatte, aber die einschlägigen Arbeiten von Prym<sup>3</sup> waren ihm unbekannt geblieben ... In dem Colloquium, das ich mit ihm hatte, zeigten sich bedeutende Lücken in Bezug auf die verschiedenen geometrischen Theorien und was damit zusammenhängt. Ich hätte daher gewünscht, daß er vor seiner Habilitation seinen Studien eine breitere Basis gegeben hätte. Indessen hat sich mein Urtheil seitdem sehr zu seinen Gunsten umgewandelt. Schon seine Probevorlesung über Darstellung einer Funktion durch Fourier'sche Reihen befriedigte in hohem Maaße, sowohl in Bezug auf die Behandlung des Stoffs, als auch in Bezug auf den Vortrag selbst. Einem recht guten Vortrag im mathematischen Kränzchen über die 2. Variation haben Sie, glaube ich mich zu erinnern, selbst beigewohnt. Nach meinem Urtheil und auch nach dem meiner Collegen ist Herr Scheeffler ein klarer Kopf, hat einen sehr guten Vortrag .... Da er außerdem sehr fleißig ist und bestrebt, seine Kenntnisse zu erweitern (für das nächste Semester hat er „Vorlesungen über theoretische Geometrie“ angekündigt), so ist nicht zu bezweifeln, daß wenn ihm eine Lehraufgabe zufiele, er alles Ernstes bestrebt wäre und es ihm auch gelingen würde, derselben in kurzer Zeit gerecht zu werden. Was seinen Charakter betrifft, so empfiehlt er sich durch bescheidenes, von sittlichem Ernst zeugendem Wesen, so daß er sich bei uns allen ganz wohl gelitten gemacht hat, ich füge hinzu, daß er auch angenehme gesellschaftliche Formen besitzt. Er würde daher gewiß einen ganz guten Collegen abgeben. Wenn freilich Herr Scheeffler allenfalls zu concurrieren*

<sup>3</sup> Friedrich Prym (1841-1915)

*hätte mit Herrn Rohn, der gegenwärtig ohnehin an Ihrer Anstalt dociert, so würde er einen schweren Stand haben. Denn Rohn ist ebenfalls ein sehr talentierter Mann, aber c. 4 ½ Jahre älter und ebensoviel länger Docent, er hat ein umfassenderes Wissen und bedeutendere Arbeiten vorzuweisen. Rohn galt schon seit mehreren Jahren für einen der hervorragenden jüngeren Docenten und hätte wohl schon früher Stellung gefunden, wenn nicht ein etwas zu hohes Selbstgefühl ihm hinderlich gewesen wäre. Diesen Fehler soll er jedoch in der letzten Zeit, belehrt durch die harte Schule des Lebens, ganz abgelegt haben. Es würde mich daher sehr freuen, wenn er endlich nach langem Harren und schwerer Arbeit entschädigt würde.*

*In der Hoffnung in wenigen Monaten Sie hier als Collegen begrüßen zu können, grüße ich Sie mit ausgezeichnete Hochachtung.*

*Ihr ganz ergebenster Dr. Gustav Bauer*

### 3. Zur Berufung Martin Krauses

Am 3. April 1888 starb Axel Harnack; der damit frei gewordene Erste mathematische Lehrstuhl am Dresdner Polytechnikum musste schnell wieder besetzt werden. Der Berufungskommission gehörten die Mathematiker Karl Rohn (nun Darstellende Geometrie) und Arwed Fuhrmann (4. mathematischer Lehrstuhl: reine Mathematik, Vermessungswesen), dazu Baurat Wilhelm Fränkel von der Bauingenieurabteilung und Otto Mohr (1835-1918) von der Mechanischen Abteilung an. Zunächst wurde die Rückberufung von Aurel Voss angestrebt, die jedoch wegen Gehaltsvorstellungen, denen das Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts in Dresden nicht folgen wollte, nicht realisiert werden konnte. Noch bevor sich das Ministerium in Bezug auf Voss endgültig geäußert hatte und bevor die Berufungskommission die Liste „1. Kiepert-Hannover, 2. Krause-Rostock, 3. Staude-Dorpat“ unterbreitete, gab es einen regen Briefaustausch innerhalb der Gruppe Klein-Göttingen, Kiepert-Hannover und Rohn-Dresden, - doch auch das eigentlich Vertrauliche daraus kam letztlich auf den Schreibtisch von Gustav Zeuner. Zeuner selbst hatte Leo Königsberger zu Rate gezogen, der ihm Martin Krause, einen Schüler der ersten Heidelberger Zeit, empfahl.

11. April 1888: Ludwig Kiepert–Hannover an Felix Klein–Göttingen:

*Mein lieber Felix!*

*Dein freundliches Schreiben von heute habe ich soeben erhalten, und will es, Deinem Wunsche entsprechend, umgehend beantworten. Ich habe, wenn ich es Dir ganz offen sagen soll, nicht darauf gerechnet, daß ich für Dresden in Frage kommen könnte. Um so mehr bin ich erfreut, daß es doch der Fall ist. Meine Stellung hier in Hannover ist ja äußerst angenehm; trotzdem erscheint mir ein Wechsel, und zwar gerade mit Dresden – ceteris paribus – sehr erwünscht. Es sprechen dafür mehrere Gründe, von denen ich Dir wenigstens einige anführen möchte. In Hannover habe ich folgende Vorlesungen zu halten: 1.) Differential- und Integralrechnung I (5 Stunden wöchentlich durchs ganze Jahr), 2.)*

*Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, und zwar muß ich über diesen Gegenstand alljährlich zweimal dieselbe Vorlesung halten (3 St. im Winter und 6 St. im Sommer), 3) Geometrie der Lage (bisher 2 St. im Winter, von jetzt ab 4 St. im Sommer). Dazu treten noch wöchentlich 1 bis 2 Stunden für Repetitionen. Du siehst daraus, daß ich Jahr ein Jahr aus nur dieselben sehr elementaren Dinge vorzutragen habe. Während ich in Freiburg und auch in Darmstadt, wo auch ein mathematisches Seminar für zukünftige Lehrer bestand, Gelegenheit hatte, eine ganze Reihe höher liegender Gegenstände zu dociren und darin abzuwechseln, fürchte ich hier, in meiner eigenen Fortbildung zurückzubleiben, weil meine Vorlesungen, so lieb sie mir auch im Übrigen sind, so oft sich wiederholen und so niedrige Anforderungen an mein Wissen stellen. Ein neuer Wirkungskreis würde mir daher an und für sich schon eine fruchtbringende Anregung gewähren, besonders aber in Dresden, wo noch die Lehrer-Abtheilung besteht. Daß diese Abtheilung zur Zeit schwach besucht ist, fällt dabei nicht so sehr in's Gewicht. Mehr als in Hannover bietet die technische Hochschule in Dresden für mathematische Bestrebungen jedenfalls. Auf meine Veranlassung richteten zwar die Abteilungen 4 und 5 vor mehreren Jahren an den Herrn Minister die Bitte, auch in Hannover eine Lehrer-Abtheilung einzurichten; wir haben aber auf unsere Eingabe gar keine Antwort erhalten. Später theilte mir der Herr Referent (Wehrenpfennig) mündlich mit, daß schon auf den Universitäten viel zu viele Mathematiker ausgebildet würden, deshalb dächten sie gar nicht daran, auch noch an den technischen Hochschulen Lehrer für Mathematik auszubilden. Ein zweiter Umstand, der mich von Hannover fortreiben könnte, ist das häufige Auftreten sehr scharfer und rauer Ostwinde. Ich habe zwar in den 17 Jahren meiner akademischen Lehrthätigkeit noch keine einzige Vorlesungsstunde wegen Krankheit oder Unwohlsein ausgesetzt; wenn man aber das hiesige Klima nicht gewohnt ist, so neigt man doch leicht zu Erkältungen. Ich hoffe, daß mir Dresden in dieser Beziehung mehr zusagen wird. Auch die Stadt Dresden selbst mit ihrer reizenden Umgebung hat für mich viel Verlockendes. Du weißt, wie sehr ich die Natur liebe, und wie groß noch immer von Freiburg her meine Sehnsucht nach den Bergen ist. Ebenso ist Elb-Florenz in Bezug auf Kunstgenüsse der guten Stadt Hannover bei weitem überlegen. Schließlich möchte ich noch darauf verweisen, daß ich aus Schlesien gebürtig bin und mich freuen würde, meiner Heimath mit all' meinen alten Freunden und Verwandten wieder näher zu rücken.*

*Was nun mein Gehalt anbetrifft, so wurde ich vor 8 ½ Jahren hierher mit 5500 Mark berufen. Seitdem hat man mich zweimal ohne besonderen Anlaß um je 500 Mark aufge bessert, so daß ich jetzt 6500 Mark habe. Dazu treten noch 660 Mark Wohnungsgeldzuschuß und etwa 60 Mark Prüfungsgebühren. Andere Nebeneinnahmen haben wir hier aber nicht, namentlich fließen die Collegiengelder in ihrem vollen Betrage der Staatskasse zu. Auch das Amt des Abtheilungsvorstehers (Dekanat) und die Senatorenwürde bringen zwar viele Geschäfte aber keine Einnahmen mit sich. Nur der Rektor erhält jährlich 1500*



*Mark, dafür soll er aber auch repräsentieren. Ich würde daher, wenn ich einen Ruf nach Dresden erhalten sollte, die etwaigen Nebeneinnahmen an Collegiengeldern u.s.w. bei der Normirung des Gehaltes in Rechnung ziehen. Andererseits möchte ich noch hinzufügen, daß ich meine letzte Gehaltsaufbesserung erst vor einem halben Jahre bekommen habe, und es deshalb wohl kaum erwarten darf, daß man mir im Falle eines Rufes hier schon wieder eine Zulage geben würde.*

*Mit den herzlichsten Grüßen von Haus zu Haus bleibe ich  
Dein treuer Freund L. Kiepert.*

6. Mai 1888: Ludwig Kiepert–Hannover an Karl Rohn–Dresden:

*Lieber Freund und College!*

*Professor Klein theilte mir gestern mit, Sie hätten an ihn geschrieben und die Sorge ausgesprochen, daß man mich in Dresden bei der Berufung möglicherweise übergehen werde, weil man glaubt, ich werde für den zur Verfügung stehenden Gehalt von 7000 Mark den Ruf doch nicht annehmen. Sie hätten daher Klein gebeten, er möchte mir noch einmal etwas zureden.*

*Daraufhin hat mir Klein gerathen, ein Schreiben mit der bindenden Erklärung an Sie zu richten, daß ich, wenn man mich ruft, bereit bin, mit einem Gehalte von 7000 Mark nach Dresden überzusiedeln. Was nun die Gehaltsfrage anbetrifft, so trage ich kein Bedenken, diese Erklärung, wenn es nötig sein sollte, schon jetzt abzugeben. Ich habe zwar in Hannover bereits ein pensionsberechtigtes Einkommen von 7160 Mark (nämlich 6500 Mark Gehalt und 660 Mark Wohnungsgeldzuschuß); da aber in Dresden noch 400 bis 500 Mark Collegiengelder hinzutreten, so würde ich mich immerhin um etwa 300 Mark verbessern. Wenn auch diese Zulage nicht so groß ist, wie sie bei Berufungen im Allgemeinen gewährt wird, so will ich bei meiner Entscheidung doch die übrigen Vorzüge von Dresden in Rechnung ziehen. Neben der Gehaltsfrage kommen aber noch mehrere andere Punkte bei der Berufung in Betracht, die ich schon neulich andeutete, und über die ich erst an Ort und Stelle nach eingetretener Verhandlung Klarheit gewinnen kann. Die wesentlichsten unter diesen Punkten sind die folgenden:*

- 1.) Wie lautet mein Lehrauftrag?*
- 2.) Werde ich auch zum Mitgliede der Prüfungs-Commission ernannt?*
- 3.) Wie sind die Pensionsverhältnisse in Sachsen? und werden mir meine bisherigen Dienstjahre angerechnet?*
- 4.) Wie ist die Wittwenkasse eingerichtet? ...*
- 5.) Welche Nebeneinnahmen, z. B. an Prüfungsgebühren, treten noch zu dem Gehalte hinzu?*
- 6.) Werden Umzugskosten gewährt?*
- 7.) Wieviel zahlt man in Dresden für eine anständige Professoren-Wohnung Mieth?*
- 8.) Wie hoch sind in Dresden Schulgeld und Steuern?*



*Ich würde den Verhandlungen in einer für mich bedenklichen Weise vorgreifen, wollte ich mir nicht zur Erwägung dieser Fragen noch freie Hand lassen. Ich darf aber wohl annehmen, daß sie keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr verursachen werden. Sollte auch wirklich der eine oder der andere Punkt gegen die Annahme des Rufes sprechen, so wird dieser Schade vermuthlich durch die übrigen Punkte wieder ausgeglichen. Jedenfalls kann nach Abwägung aller einzelnen Fragen eine Differenz, welche sich zu Ungunsten von Dresden herausstellen sollte, nur unbedeutend sein. Dann wäre es aber leicht möglich, mich für diesen kleinen Ausfall in irgend einer Weise zu entschädigen, wenn ich nicht freiwillig auf eine solche Entschädigung verzichten will.*

*Es ist wohl selbstverständlich, daß ich es nicht unternommen hätte, die vorstehende Erklärung abzugeben, ehe man mich gerufen hat, wenn mich nicht Klein, der über den Stand der Dinge ja wohl genau orientiert ist, dazu aufgefordert hätte. Er versichert mir, dass meiner Berufung nur der Zweifel im Wege stünde, ob ich für ein Gehalt von 7000 Mark zu haben sei. Es werde daher für alle Theile nützlich sein, in dieser Beziehung Klarheit zu schaffen.*

*Mit den herzlichsten Grüßen bleibe ich  
Ihr freundschaftlich ergebener L. Kiepert.*

10. April 1888 Leo Königsberger-Heidelberg an Gustav Zeuner-Dresden:

*Mein lieber hochverehrter Freund!*

*Ich sage Ihnen zunächst meinen herzlichsten Dank für Ihre lieben Zeilen, die mich durch die Mittheilung von Ihrem und der Ihrigen Wohlergehen innig erfreuten. Leider brachten dieselben mir aber auch eine solche Fülle des Traurigen, daß ich ganz niedergedrückt Ihren Brief zu beantworten mich beeile. Das Leiden Harnacks war freilich schon seit längerer Zeit derart, daß man einer Katastrophe entgegensehen mußte – aber wahrhaft erschüttert hat mich Ihre trübe Anschauung von dem Zustande meines guten, lieben Toepler<sup>4</sup>! Wie sollte man da nicht über etwaige Gereiztheiten und Empfindlichkeiten mit Milde und Nachsicht hinwegsehen, wenn man sich der überaus großen Verdienste erinnert, die Toepler sich durch seine glänzende Docententhätigkeit und die Berühmtheit seines wissenschaftlichen Namens um das Dresdner Polytechnikum erworben! Werden Sie nur nicht müde, lieber Freund, die großen Interessen Ihrer Anstalt mit der gewohnten Objectivität und Liebe weiter zu wahren! Wenn ich Ihren ausführlichen Brief heute so flüchtig beantworte, so bitte ich es damit zu entschuldigen, dass ich Ihrem Wunsche gemäß Ihnen meine Ansicht über die Persönlichkeiten zu unterbreiten wage, welche meiner Meinung nach bei der Besetzung der für das Polytechnikum hochwichtigen Professur der Mathematik in Frage kommen dürften. Wenn irgend möglich, muß ein Mathematiker gesucht werden, der als Gelehrter einen geachteten Namen besitzt und sich als tüchtiger Docent schon längere Zeit hindurch bewährt hat, bei dem aber auch mit einiger Bestimmtheit angenommen werden darf, dass derselbe bei den in Frage*

<sup>4</sup> August Toepler war erkrankt und musste mehrere Semester vertreten werden.

*kommenden Anerbietungen den Ruf anzunehmen geneigt sein wird. Nach reiflicher Überlegung mache ich Ihnen die folgenden Vorschläge:*

*Primo loco:*

*Dr. Martin Krause, früher außerordentlicher Professor in Breslau, seit 7-8 Jahren ordentlicher Professor an der Universität in Rostock; derselbe hat eine große Reihe recht guter Arbeiten in den verschiedensten Journalen veröffentlicht, außerdem vor einem Jahre ein größeres Werk über die Transformation der hyperelliptischen Functionen, ist in Rostock als vortrefflicher Docent bekannt sowie dies auch früher in Breslau gewesen, und hat sich als bewährter Leiter des dortigen mathematischen Seminars einen Namen gemacht. Ich habe Grund zu der Annahme, dass derselbe gern einem Rufe nach Dresden folgen würde, und bin überzeugt, dass das Polytechnikum in ihm einen ausgezeichneten und liebenswürdigen Collegen gewinnen würde.*

*Secundo loco:*

*Dr. Alfred Pringsheim<sup>5</sup>, außerordentlicher Professor an der Universität in München und*

*Dr. Hurwitz, außerordentlicher Professor an der Universität in Königsberg.*

*Beide sind durch recht gute wissenschaftliche Arbeiten den Mathematikern bekannt; ich würde Herrn Hurwitz größere wissenschaftliche Bedeutung zusprechen, während ich wiederum für Herrn Pringsheim, den ich persönlich kenne, eine ganz ungewöhnliche Lehrbefähigung, Klarheit und Eleganz des Vortrags geltend machen muß.*

*Tertio loco:*

*Dr. Staude, außerordentlicher Professor in Dorpat, und*

*Dr. Rausenberger, Gymnasiallehrer in Frankfurt a.M..*

*Die Arbeiten des Dr. Staude sind, wenn auch nicht zahlreich, doch originell und von wissenschaftlicher Bedeutung, über seine Docentenfähigkeit ist mir nichts bekannt. Herr Dr. Rausenberger hat eine Reihe schöner Arbeiten in den verschiedensten mathematischen Journalen veröffentlicht, außerdem ein größeres Werk über periodische Functionen, vor kurzem ein interessantes Werkchen über die Elemente der Geometrie, und ein umfangreiches Lehrbuch über Mechanik von ihm ist im Druck. Ich würde auf eine ausführlichere Besprechung der Arbeiten der einzelnen Vorgeschlagenen eingehen, wenn ich nicht wünschte, dass Sie meine Ansicht über die betreffenden Candidaten so schnell als möglich kennen lernten – ich glaube, Ihre Commission würde am zweckmäßigsten zunächst Prof. Krause unico loco vorschlagen – wenn ich nicht irre, haben Sie, verehrter Freund, Krause zur Zeit des Jubilaeums in meinem Hause gesehen, er hat viele Beziehungen zu Hermite. Dies in einiger Eile – entschuldigen Sie die Flüchtigkeit des Schreibens und nehmen Sie noch die herzlichsten Grüße*

*von Ihrem treu ergebenen*

*Leo Koenigsberger*

<sup>5</sup> Alfred Pringsheim (1850-1941), Adolf Hurwitz (1859-1919), Otto Rausenberger (1852-)

Gustav Zeuner, dem Direktor des Dresdner Polytechnikums gingen die Vorabreden um Ludwig Kiepert (1846-1936) zu weit; zudem wird Zeuner aus Kieperfs vertraulichen Äußerungen (an Klein) entnommen haben, dass dieser für die mathematische Forschung doch eigentlich verloren sei. Zeuner favorisierte, gestützt auf die Einschätzung Leo Königsbergers und anderer ihm Vertrauter, Martin Krause (1851-1920) und konnte sich beim Ministerium mit seinem „Direktionsvorschlag“ gegen den Kommissionsvorschlag durchsetzen.

Quellen:

Sächsisches Hauptstaatsarchiv: Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts Nr. 15547: Teile 6, 2, 3 (Hieraus stammen alle angeführten Briefe.)  
Voss, Waltraud: „... eine Hochschule (auch) für Mathematiker ...“. Dresdner Mathematiker und die höhere Lehrerbildung: 1825-1945. – Augsburg 2005 (Algorismus Heft 51); speziell S. 107-111, S. 117-121, S. 137/138, S. 152-156

Verfasserin:

Dr. rer. nat. et phil. habil. Waltraud Voss  
TU Dresden – Universitätsarchiv  
01062 Dresden  
Email: [Waltraud.Voss@tu-dresden.de](mailto:Waltraud.Voss@tu-dresden.de)



Leipzig 15/1 85.

Herrn Prof. Harnack

Lieber Freund!

Unter den fünf Candidaten, welche Sie nennt,  
steht Schubert, was Alter und Umpfung der Leistung  
betrifft, billig oben. Schubert ist, um zu  
schaffen zu reden, ein genialer Kopf: er hat ganz  
besondere Gedanken von bleibendem Werthe in  
die algebraisch-geometrischen Disciplinen einge-  
führt. Andererseits ist er ein Mann von ungenü-  
glicher bedeutender pädagogischer Begabung.  
Trotzdem kann ich seine Berufung an eine Hoch-  
schule jetzt nicht mehr befürworten. Es ist  
ihm doch etwas, welches Defizitbares aber ganz  
bestimmt Vorhandenes, entgegen, indem er

Doch genug für dieses Mal, besonders da ich  
hier abzureisen nach iris's College eilen muß.  
Klaffend ist Ihnen die mein Brief etwas anzugehen.  
Wie ich urtheilen würde, ist Ihnen nichtig zu sagen,  
und ich darf mich durch die Verhältnisse gehen.

Mit herzlichen Grüßen  
Ihrer J. Klein

Anfang und Schluß des langen briefes von Klein an Harnack vom 15. Januar 1885.



Beilage 2

Hannover, d. 11. April 1888.<sup>10</sup>

Herrn Prof. Kiepert in Hannover  
an Herrn Prof. Klein in Göttingen

Mein lieber Felix!

Dein freundliches Schreiben von seit habe  
ich haben empfangen, und will es, wie immer  
Kleinste und prägnant, ungelesen la und  
antworten.

Ich habe, wenn ich es dir ganz offen sagen  
soll, nicht darauf geachtet, daß ich für  
Dresden in Dinge kommen könnte. Aber  
so mußte dir ich erklärt, daß es doch der  
Fall ist. Meine Stellung hier in Han-  
nover ist ja äußerst ungenügend, trotz-  
dem erfordert mir ein Wechsel, und  
gerade gerade mit Dresden - ceteris  
paribus - sehr erwünscht. Ich spreche  
dafür mehrere Gründe, von denen ich  
dir wenigstens einige aufzählen möchte.

Mit dem herzlichsten Grüssen von  
Gut zu Gut bleibe ich

dein

dein Freund  
L. Kiepert.

Anfang und Schluß des Briefes von Kiepert an Klein vom 11. April 1888.

## PC, T<sub>E</sub>X, WWW, arXiv, Google ...

*Ein informeller, fragmentarischer und subjektiver Rückblick auf das letzte Dritteljahrhundert.*

Peter Schmitt

Während der letzten drei bis vier Jahrzehnte hat die technische Entwicklung (Computer, Internet) die mathematische Arbeitsweise und die Form der Publikation mathematischer Arbeiten in einer Weise verändert, die durchaus mit der Erfindung des Buchdrucks durch Gutenberg verglichen werden kann.

Ein Blick zurück wirft viele Fragen auf – mehr als beantwortet werden können.

Eine wesentliche Rolle spielte (und spielt) dabei – zumindest im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich – das von Donald E. Knuth entwickelte Satzprogramm T<sub>E</sub>X, auf dessen Entstehung, Entwicklung und Wirkung ich etwas näher eingehen möchte.

Auf den folgenden drei Seiten finden sich Muster aus mathematischen Publikationen des 20. Jahrhunderts, die zeigen, daß technischer Fortschritt nicht immer mit einer (qualitativen) Verbesserung einhergeht. (Die Unterschiede im Druckbild sollten trotz der qualitativ schlechten verkleinerten Wiedergabe erkennbar sein.)

Sie stammen aus:

den *Transactions of the AMS* (nach Knuth),  
dem *Zentralblatt für Mathematik*

und der traditionsreichsten Springer-Reihe, den *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*.

<p><math>\lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2}S} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(aa'd')(aa'd'}</math></p> <p>there correspond two quadric forms each contain rameters. So much HILBERT states. In order t as known systems it will be convenient to use : mental cubic, due to HESSE.<sup>2</sup></p> <p>Referred to an inflexional triangle, the equati</p> <p>(3) <math>a_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6mx_1x_2</math></p> <p>All conic polars accordingly have the form :</p> <p>(4) <math>a_p a_1^2 = (y_1 x_1^2 + y_2 x_2^2 + y_3 x_3^2) + 2m(y_1 x_1 x_2</math></p>	<p>(5) <math>\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots,</math></p> <p>in which the <math>\varphi_n</math> are polynomials in <math>y_1, y_2, \dots, t</math> has been considered recently by W. D. MA usual algebraic elimination theory to the p <math>\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; y_n)</math> would be found fo <math>\Phi(0, 0, \dots, 0; y_n)</math> would be, say, of degree <math>\rho</math>. theorem to <math>\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; y_n)</math>, therefore, degree <math>\rho</math> would appear. This is not in general t is sought in this paper, as may readily be sho The polynomials <math>\varphi_n</math> may have roots for which</p>	<p>I call this ineffective part of <math>x_n</math> "innocuous" validate the fundamental proposition</p> <p><math>f(x_n') \neq f(x_n'') = (x_n' \neq</math></p> <p>which was proved above (P. 4) for effective val ineffective part of <math>x_n</math> is innocuous is clear: it, as that the variation of <math>x_n</math> does not take place in it D. 3. But this consideration leads to the <i>defini</i> of <math>x_n</math>. By this I mean the collection of values wi l. e.,</p>
<p>six planes <math>y_i + y_k = 0</math>, each counted three tum type <math>y_i y_k - y_k y_i = 0</math>, each counted twice.</p> <p>We have seen that any point on the line <math>y_1 +</math> image in <math>(X)</math> the whole line <math>X_1 + X_2 = 0</math>, <math>X_3</math> in <math>(y)</math> meets the line in one point, its image <math>s_3^0</math> co the system <math>s_3^0</math> has also the three lines of this ty:</p> <p>12. Algebraic procedure. The plane coi and the vertex <math>(1, 0, 0, 0)</math> has the equation</p> <p><math>p_{24} x_2 + p_{43} x_3 + p_{32} x_4</math></p> <p>Since <math>(y)</math> and <math>(y')</math> both satisfy this equation we</p>	<p>of systems of division algebras. The next syst of order <math>p^2 q^2</math> over <math>F</math> with the basal units <math>i^{j+k}</math> ( with an irreducible equation of degree <math>pq</math>, three rational functions <math>\theta(i)</math> and <math>\psi(i)</math> with coeffic iterative <math>\theta^q(i)</math> of <math>\theta(i)</math> is <math>i</math>, and likewise <math>\psi^q(i) = i</math> by</p> <p><math>\theta^q[\psi^q(i)] = \psi^q[\theta^q(i)] \quad (k=0,1, \dots, q-1</math></p> <p>The complete multiplication table of the un associative law from</p> <p><math>i^a = g, \quad k^b = \gamma, \quad kj = \alpha jk, \quad ji =</math></p>	<p><math>x = e^{i\theta} x^0 = (e^{i\theta} x_1^0, \dots, e^{i\theta} x_n^0), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,</math></p> <p><math>C^*</math> is called a Reinhardt circular set if along w <math>\in E</math> also the set</p> <p><math>\{z \mid  z_k  =  z_k^0 , \quad k=1,2, \dots, n\}</math></p> <p>bounded closed subset of <math>C^n</math>, unisolvent with respect The function <math>b(z)</math> being defined and lower semic</p> <p><math>h^{(v)} = \{h_1^{(v)}, \dots, h_n^{(v)}\}, \quad v_0 = C_{v_1, \dots, v_{n-1}}</math></p>

FIGURE 1. A sequence of typographical styles in the AMS Transactions:

- (a) vol I (1900), p. 2; (b) vol 13 (1912), p. 135; (c) vol 23 (1922), p. 216;  
 (d) vol 25 (1923), p. 10; (e) vol 28 (1926), p. 207; (f) vol 105 (1962), p. 340;

<p><math>0 = r_k (\sum_{i=1}^{k-1} r_i a_i) - (\sum_{i=1}^{k-1} r_i a_i) x_k = \sum_{i=1}^{k-1} r_i (a_i x_k - x_k a_i)</math></p> <p>This element is of lower length. It follows there <math>i = 1, \dots, k</math>. Hence, (a) yields that <math>r_i = \lambda_i r_k</math>. Now <math>r_k \neq 0</math>, by the minimality of <math>k</math>, and <math>\sum \lambda_i x_i</math> which we deduce that <math>\sum \lambda_i a_i = 0</math>. But the <math>a_i</math> which is impossible since in particular <math>\lambda_k = 1</math>.</p> <p><b>THEOREM 7.</b> Let <math>R</math> be a dense ring of linear <math>t</math>. <math>F</math> be a maximal commutative subfield <math>D</math>. If <math>R</math> tion of finite rank over <math>F</math>, then <math>R</math> contains als</p>	<p>The set <math>N_1</math> is nowhere dense in <math>Z_1</math> and thus <math>N = \emptyset</math>. For each <math>\zeta \in Y - N</math> we must prove that <math>f_\zeta</math> satisfi be the unique projection in <math>(P_\zeta \mid d \in D)</math> such that the algebra <math>(E \mathcal{A} E) \cdot P_\zeta</math> is finite and homogeneou onal abelian projections <math>E_1, E_2, \dots, E_n</math> such that <math>(1 \leq j, k \leq n)</math> be partial isometric operators in <math>(E \mathcal{A} E)</math>.</p> <p>(1) <math>U_{ik} U_{im} = \delta_{ij} U_{km}</math>, where <math>\delta</math> is the Kronecker dt          (2) <math>U_{ji}^* = U_{ij}</math>; and          (3) <math>U_{ii} = E_i</math>.</p> <p>for all <math>1 \leq j, k, l, m \leq n</math>. For each <math>A</math> in <math>(E \mathcal{A} E) \cdot P_\zeta</math>, <math>t</math> in <math>\mathcal{X}_1 P_\zeta</math> such that</p>	<p>The algebra <math>P</math> is nearly simple if and only if the</p> <p>(a) <math>N</math> is spanned by <math>a, \dots, a^{n-k-1}, b_1, \dots, b_{k-1}, \dots, b_k</math></p> <p>(b) Either <math>n - k = \text{char } F</math> with <math>k</math> even or <math>n</math></p> <p><b>Proof.</b> By Theorem 5.3, there are elements <math>a, \dots, a^{n-k-1}, b_1, \dots, b_k</math>. Furthermore, <math>ab_i =</math> for all <math>i, j</math> where each <math>\alpha_i, \lambda_{ij}</math> is in <math>F</math>. From t space of the space spanned by <math>a^{n-k-1}, b_1, \dots</math>.</p> <p>Assume <math>P</math> is nearly simple. Then there is show that each <math>b_i</math> is in <math>M</math>. To do this, it is nec</p>
<p>itions in <math>GL(W)</math> and <math>h_{\alpha, \beta} \in I</math> as coordinate ined by the respective bases chosen above. If <math>\alpha</math>, nction of <math>\wedge^p</math> is the minor of <math> g_{ij} </math> determined by columns <math>\beta(1), \dots, \beta(p)</math>. The coordinate ring of <math>h_{\alpha, \beta}</math> together with <math>1/\det h_{\alpha, \beta} </math>, while that of <math>GL(W)</math> together with <math>1/\det g_{ij} </math>. The coordinate functions , so to show <math>\wedge^p</math> is a morphism it suffices to show nial in <math>g_{ij}</math> and <math>1/\det g_{ij} </math>. For this, the following</p> <p>haracter of <math>GL(W)</math> is an integral power of the</p>	<p>if <math>Q</math>, I.e.</p> <p><math>t_i = 0</math> for every <math>x \in A</math> for which <math>x(Q) = 0</math>.</p> <p>or <math>M_A</math> is equivalent to the one induced by the</p> <p><math>\{x(z) \mid x \in A,  x  &lt; 1 \text{ and } x(w) = 0\}</math>.</p> <p>present the open unit disk in the complex plane, <math>C</math>, t polydisk in <math>n</math>-dimensional complex space <math>C^n</math>. <math>T^n</math> boundary of <math>D^n</math>, I.e.</p>	<p>onverges pathwise to <math>X^\lambda</math>, and uniformly for <math>t \in</math> for which <math>X_i</math> is the (last) minimum of <math>Y^\lambda</math>, let <math>Y_i^\lambda</math>, lues of <math>Y^\lambda</math>, and <math>T_i^\lambda</math> the interjump times for <math>Y^\lambda</math> st an <math>i</math> such that <math>Y_i^\lambda = T_i^\lambda = \infty</math>. Notice that <math>Y_Q^\lambda</math> is id that as <math>\varepsilon \rightarrow 0</math>, <math>Y_Q^\lambda</math> converges to <math>I^\lambda = \inf_i X_i^\lambda</math>. Le is of <math>(-\infty, \infty)</math>. Then, for example, if <math>I &gt; 1</math></p> <p><math>-i \in B, Y_{Q+k}^\lambda - Y_Q^\lambda \in C, T_{Q+k}^\lambda \in D, N &gt; Q &gt; I</math></p> <p><math>\in A, T_{i-1}^\lambda \in B, Y_{i+k}^\lambda - Y_i^\lambda \in C, T_{i+k}^\lambda \in D, N &gt; Q</math></p>

- (g) vol 114 (1965), p. 216; (h) vol 125 (1966), p. 38; (i) vol 109 (1972), p. 232;  
 (j) vol 179 (1973), p. 314; (k) vol 199 (1974), p. 370; (l) vol 225 (1977), p. 372.

$\det(D_n(\cdot))$ . Then  $d_n$  satisfies the following 2-step recursive formula:

(2.7)  $d_0 = q_0, \quad d_1 = q_0 q_1 - |r_0|^2, \quad d_{n+2} = q_{n+2} d_{n+1} - |r_{n+1}|^2 d_n.$

If we let  $t := |s|^2$ , we observe that  $d_n$  is a polynomial in  $t$  of degree  $n + 1$ , and if we write  $d_n \equiv \sum_{i=0}^{n+1} c(n, i) t^i$ , then the coefficients  $c(n, i)$  satisfy a double-indexed recursive formula, namely

(2.8)  $c(n+2, i) = u_{n+2} c(n+1, i) + v_{n+2} c(n+1, i-1) - w_{n+1} c(n, i-1),$   
 $c(n, 0) = u_0 \cdots u_n, \quad c(n, n+1) = v_0 \cdots v_n, \quad c(1, 1) = u_1 v_0 + v_1 u_0 - w_0$

( $n \geq 0, i \geq 1$ ). We say that  $W_\alpha$  is *positively quadratically hyponormal* if  $c(n, i) \geq 0$  for every  $n \geq 0, 0 \leq i \leq n + 1$  (cf. [9]). Evidently, positively quadratically hyponormal  $\implies$  quadratically hyponormal. The converse, however, is not true in general (cf. [3]).

The following theorem establishes a useful relation between 2-hyponormality and positive quadratic hyponormality.

**Theorem 2.2.** Let  $\alpha \equiv \{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  be a weight sequence and assume that  $W_\alpha$  is 2-hyponormal. Then  $W_\alpha$  is positively quadratically hyponormal. More precisely, if  $W_\alpha$  is 2-hyponormal, then

(2.9)  $c(n, i) > v_n \cdots v_{i-1} u_i \cdots u_n \quad (n > 0, 0 < i < n + 1).$

(2005)

folgt unmittelbar: Jede solche auf der Kugel gelegene Menge hat auch das Maß (Das Poissonse Integral mit dem Randwerten 1 auf der Menge, 0 außerhalb verschwinden.) Durch eine Inversion folgt dasselbe für ebene und daraus auch kugelmäßige Mengen. Eine solche Menge kann kein Raumstück zerlegen. *Feller*. *Koehler, F.*: Die Entwicklung des Raumpotentials nach Kugelfunktionen. *Gerlands Geophys.* 29, 22-28 (1931).  
 Fortsetzung der Arbeiten desselben Verfassers [*Gerlands Beitr. Geophys.* 25, 336 (1930); 27, 36 (1930)]. Untersuchungen über den Konvergenzbereich der Reihe für das Potential einer einfach zusammenhängenden Masse:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p+1} \cdot Y_n$$

die Entfernung des Aufpunktes vom Schwerpunkt der Masse,  $Y_n$  die allgemeine Funktion  $n$ -ter Ordnung.) Untersuchung der 1. und 2. Ableitung von  $V$ . Verändertes Verhalten des Außen- und des Innenraumes. *O. Holtzema* (Groningen).  
*Schwarz, E.*: Ein allgemeines Integrationsverfahren für quasiharmonische Schwingungsvorgänge. *Z. techn. Phys.* 12, 104-111 (1931).  
 Quasiharmonische Schwingungsvorgänge sind durch eine Differentialgleichung von Form

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta^2 = \eta^2 P^*(\tau)$$

anzuzeichnen. Die Funktion  $\tau(t)$  ist ein Vielfaches der Elastizität, die Funktion

Verf. beweist die Formel von Li Jen-Shu, veröffentlicht 1867:

$$f_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}$$

auf elementarem Wege.

L. Holzer.

Mann, Henry B., and John E. Olson: Sums of sets in the elementary Abelian group of type  $(p, p)$ . *J. combinat. Theory* 2, 275-284 (1967).

Let  $S = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2p-1})$  be a sequence of  $2p-1$  elements of an Abelian group  $G$  of type  $(p, p)$ . The following theorems are proved: (1) If  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p-1}$  are distinct and not zero, then every element of  $G$  is a sum over a subsequence of  $S$  and if  $p > 2$  then 0 is the sum of a subsequence of  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p-2}$ . (2) Let  $K$  be a proper subgroup of  $G$ . If  $0 \neq \alpha_i \in K$  for  $1 \leq i \leq p-1$ ,  $\alpha_i \in K$  for  $p \leq i \leq 2p-2$  then every element of  $G$  occurs as a sum over some subsequence of  $S$ .

Zusammenfassung der Autoren.

natürlichen Zahlen ist. Bei Erfüllung einiger Voraussetzungen über die Fourieraffizienten von  $f$  beweist der Verf. die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=1}^p f(c n_{\mu}) \right)^2 dx \right)^{1/2} = \sigma_f$$

die Gleichung

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\alpha \in (0, 1); \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=1}^p f(c n_{\mu}) < \lambda| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda \sqrt{\alpha}} e^{-t^2/2} dt,$$

A) bezeichnet das Maß von A). Dieses Ergebnis stellt eine gewisse Verallgemeinerung einiger früherer Ergebnisse von R. Portet und M. Kac dar.

T. Šalát.

ank, Evelyn:

Continued fraction expansions for imaginary quadratic surds. *Math. Ann.* 181, 74-80 (1969).

1. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 162, 348.

Capri, Oswaldo N.; Gutiérrez, Cristian E. Weighted inequalities for a vector-valued strong maximal function. *Rocky Mt. J. Math.* 18, No. 3, 565-570 (1988).

Let  $M_p f(x) = \sup_{|R|} \frac{1}{|R|} \int |f(y)| dy$  be the strong maximal function, the supremum being taken over all rectangles  $R$  in  $\mathbb{R}^n$  with edges parallel to coordinate axes. For any  $q \in (1, \infty)$  let  $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$  be  $\mathcal{L}^q$ -valued vector-functions with  $\|f(x)\|_q = \|(f_1(x), \dots, f_k(x))\|_q$  and let  $M_p f = (M_p f_1, \dots, M_p f_k)$ . The authors show that  $\int_{|x| \leq r} w(x) dx \leq c \int_{|x| \leq r} \left( 1 + \log \frac{|f(x)|_q}{\lambda} \right)^{p-1} w(x) dx$  if  $w(x) \in A_1(\mathcal{L})$  and

$$(*) \int_{|x| \leq r} |(M_p f)(x)|^q w(x) dx \leq c \int_{|x| \leq r} |f(x)|^q w(x) dx$$

if and only if  $w(x) \in A_{p,1}(\mathcal{L})$ ,  $1 < p < \infty$ .  
 Reviewer's remark: The strong type estimate (\*) for vector-valued functions with the characterization of the weight function  $w(x)$  was earlier obtained by V. M. Kokilashvili [Dokl. Akad. Nauk SSSR 239, 42-45 (1978); Zbl. 396.46034]; Maximal functions and singular integrals in weighted functional spaces, Tr. Tbilis. Mat. Instituta im. A. M. Razmadze, Tom. 80 (1985; Zbl. 609.42015)] in the much more general setting including fractional maximal functions, anisotropic case and more general behaviour of  $f(x)$  than  $\mathcal{L}^q$  behaviour. S. G. Samko.

Xie, Linsun; Xie, Tingfan pointwise inverse theorem for combinations of Bernstein polynomials. (Chinese). *Ann. Math.*, Ser. A 20, No. 4, 467-478 (1989).

Let  $f \in C[0, 1]$ ,  $B_n(f, x)$  be the Bernstein polynomials, the modulus of smoothness  $\omega_n^{2r}(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\Delta_{h_n}^{2r}(x)f(x)|$ ,

$$\Delta_r^2 f(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \binom{2r}{k} f(x + (r-k)t), & rt \leq x \leq 1 - rt, \\ \text{otherwise } x. \end{cases}$$

linear combinations of the Bernstein operators  $B_{n,r}(f, x) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) B_{n_i}(f, x)$  have higher order of convergence than  $B_n(f, x)$ , here  $n_i$  and  $c_i(n)$  satisfy  $n = n_0 < \dots < n_{r-1} \leq K$ ,  $n$  ( $K_1$  is depending on  $n$ ),  $\sum_{i=0}^{r-1} |c_i(n)| \leq K_2$  ( $K_2$  is depending on  $n$ ),  $\sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) = 1$ .

Two results. Main result is Theorem 1.1: For  $0 \leq \alpha \leq \beta$ ,  $0 < \beta < 2r$ ,  $\varphi(x) = (x(1-x))^{1/2}$   $f \in C[0, 1]$ , following conditions are equivalent:  $\sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) |B_{n_i,r}(f, x) - f(x)| = O(n^{-\beta/2})$ ,  $\omega_n^{2r}(x) |\Delta_r^2 f(x)| = O\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $\omega_n^{2r-\alpha/\beta}(f, t) = O(t^\beta)$ .

Theorem 1.1 is the result of Ditzian, if  $\alpha = 0$  Theorem 1.1 is another result of Ditzian. Cao Jia-Ding (Shanghai).

ZENTRALBLATT

1931 (Band 1)

1969 (Band 68)

1869 (Bd. 163)



The proof-theoretic properties of  $\wedge$ ,  $\vee$  and  $\exists$  are given by the following theorem.

Theorem 4.8. The following inferences are permissible:

- (1)  $\mathcal{P}[A], \mathcal{P}[B] \vdash \mathcal{P}[A \wedge B]$
- (2)  $\mathcal{N}[A_i] \vdash \mathcal{N}[(A_1 \wedge A_2)] \quad (i=1, 2)$
- (3)  $\mathcal{P}[A_i] \vdash \mathcal{P}[(A_1 \vee A_2)] \quad (i=1, 2)$
- (4)  $\mathcal{N}[A], \mathcal{N}[B] \vdash \mathcal{N}[(A \vee B)]$
- (5)  $\mathcal{P}[\mathcal{F}[a]] \vdash \mathcal{P}[\exists x \mathcal{F}[x]]$
- (6)  $\mathcal{N}[\mathcal{F}[a]] \vdash \mathcal{N}[\exists x \mathcal{F}[x]]$

if  $a$  does not occur in the conclusion (condition on variables).

Proof. (1) For every formula  $C$  we have  $\mathcal{P}[C] \stackrel{12}{=} \mathcal{P}[\{(C \rightarrow \perp) \rightarrow \perp\}]$ . Therefore by Theorem 4.4 from  $\vdash \mathcal{P}[A]$  and  $\vdash \mathcal{P}[B]$  we have  $\vdash \mathcal{P}[\{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp\}]$  and  $\vdash \mathcal{P}[\{(B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp\}]$ . Since  $\mathcal{P}[\{(*_1 \rightarrow \perp) \rightarrow \perp\}]$  is an N-form, we obtain by an (S1)-inference  $\vdash \mathcal{P}[\{(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp\}]$ , that is  $\vdash \mathcal{P}[(A \wedge B)]$ .

(2) Follows from Theorem 4.4 since  $\mathcal{N}[A_i] \stackrel{12}{=} \mathcal{N}[(A_1 \wedge A_2)] \quad (i=1, 2)$  by the definition of  $\wedge$ .

(3) Follows from Theorem 4.4 since  $\mathcal{P}[A_i] \stackrel{12}{=} \mathcal{P}[(A_1 \vee A_2)] \quad (i=1, 2)$  by the definition of  $\vee$ .

(4) We have  $\mathcal{N}[A] \stackrel{12}{=} \mathcal{N}[(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp]$ . By Theorem 4.4 from  $\vdash \mathcal{N}[A]$  we therefore have  $\vdash \mathcal{N}[\{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp\}]$ . Using  $\vdash \mathcal{N}[B]$  by an (S1)-inference we have  $\vdash \mathcal{N}[\{(A \rightarrow \perp) \rightarrow B\}]$ , that is  $\mathcal{N}[(A \vee B)]$ .

(5) By Theorem 4.4 from  $\vdash \mathcal{P}[\mathcal{F}[a]]$  we have  $\vdash \mathcal{P}[\{( \mathcal{F}[a] \rightarrow \perp ) \rightarrow \perp \}]$ . Since  $\mathcal{P}[\{(*_1 \rightarrow \perp) \rightarrow \perp\}]$  is an N-form Theorem 4.5 yields  $\vdash \mathcal{P}[(\forall x(\mathcal{F}[x] \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)]$ , that is  $\mathcal{P}[\exists x \mathcal{F}[x]]$ .

(6) From  $\vdash \mathcal{N}[\mathcal{F}[a]]$  by Theorem 4.4 we have  $\vdash \mathcal{N}[\{( \mathcal{F}[a] \rightarrow \perp ) \rightarrow \perp \}]$ .  $\mathcal{N}[\{(*_1 \rightarrow \perp) \rightarrow \perp\}]$  is a P-form. If  $a$  does not occur in  $\mathcal{N}[\mathcal{F}]$ , then by an (S2)-inference we have  $\vdash \mathcal{N}[(\forall x(\mathcal{F}[x] \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)]$ , that is  $\mathcal{N}[\exists x \mathcal{F}[x]]$ .

Remark. All the proofs we have given in this section which show that certain inferences are permissible are constructive. That is to say: In each case, if deductions of the formulas  $A_1, \dots, A_n$  are given, then one can obtain a deduction of the formula  $B$  from the proof of the permissibility of the inference

$$A_1, \dots, A_n \vdash B.$$

### §5. Semantics of Classical Predicate Calculus

Although all the notions we have used so far and all the proofs we have given were strictly constructive (*initialist* in the sense of D. Hilbert), when it comes to classical predicate calculus we have to deal with non-constructive notions.

Schütte, Proof Theory (1977)

bzw.  $F[A_-]$  ein Formelschema mit einem bestimmten Dual-Positivteil bzw. Dual-Negativteil  $A$ , und  $F[A^+, B^+]$ ,  $F[A^-, B^-]$ ,  $F[A^-, B^-]$  bezeichnen Formelschemata mit getrennten Dual-Positivteilen bzw. Dual-Negativteilen  $A$  und  $B$ .

#### 2. Fundamentale Schlusschemata

Bei unseren beweistheoretischen Untersuchungen werden einige Schlusschemata eine fundamentale Rolle spielen.

Diese fundamentalen Schlusschemata sind:

1. Die Verknüpfungs-Schlusschemata

$$S1a. F[A_+, F[B_+]] \rightarrow F[(A \wedge B)_+]$$

$$S1b. F[A_-], F[B_-] \rightarrow F[(A \vee B)_-]$$

2. Die Inversionen zu den Verknüpfungs-Schlusschemata

$$JS1a. F[(A \wedge B)_+] \rightarrow F[A_+] \text{ und } F[(A \wedge B)_+] \rightarrow F[B_+]$$

$$JS1b. F[(A \vee B)_-] \rightarrow F[A_-] \text{ und } F[(A \vee B)_-] \rightarrow F[B_-]$$

3. Die Abschwächungs-Schlusschemata

$$ASA. F[A_+] \rightarrow F[(A \vee B)_+] \text{ und } F[B_+] \rightarrow F[(A \vee B)_+]$$

$$ASB. F[A_-] \rightarrow F[(A \wedge B)_-] \text{ und } F[B_-] \rightarrow F[(A \wedge B)_-]$$

4. Die Kürzungs-Schlusschemata

$$KSA. F[A_+, A_+] \rightarrow F[A_+]$$

$$KSB. F[A_-, A_-] \rightarrow F[A_-]$$

(Hierbei entsteht die Konklusion aus der Prämisse, indem der eine Positiv- bzw. Negativteil  $A$  gemäß St. 1-3 gestrichen wird.)

Satz 3.1. Die fundamentalen Schlusschemata S1, JS1, AS und KS sind semantische Schlusschemata der Aussagenlogik.

Beweis für die Verknüpfungsschemata S1: Bei jeder Belegung hat die Formel  $A \wedge B$  bzw.  $A \vee B$  denselben Wahrheitswert wie eine der Formeln  $A$  oder  $B$ . Daher erhält die Konklusion eines Schlusses S1a bzw. S1b in jedem Fall denselben Wahrheitswert wie eine seiner Prämissen. Die Konklusion erhält also mindestens dann den Wert  $w$ , wenn beide Prämissen den Wert  $w$  annehmen.

Beweis für die Schlusschemata JS1, AS und KS: Man beachte, daß eine Formel  $A \wedge B$  (bzw.  $A \vee B$ ) höchstens dann einen anderen Wahrheitswert als  $A$  oder als  $B$  erhält, wenn  $A \wedge B$  den Wert  $f$  (bzw.  $A \vee B$  den Wert  $w$ ) hat. Für die Kürzungsschemata muß man berücksichtigen, daß die Konklusion von KSA (bzw. KSB) nach Satz 2.9 mit

$$F[A_+, f_+] \text{ (bzw. } F[A_-, w_-])$$

Springer  
Grundlehr en

Schütte, Beweistheorie (1960)

Wenn man versucht, die Bedeutung der „Medien“ für die Mathematik zu klären, so ist man zunächst einmal geneigt, ihnen keine spezielle Rolle zuzuerkennen – jedenfalls keine andere als für andere Wissenschaften auch. Schließlich braucht der Mathematiker im Prinzip nur ein Medium, auf dem er seine Gedanken festhalten und mit dem er sie anderen mitteilen kann. War dies zunächst noch Sand, Ton, Stein oder Pergament (in Einzelanfertigung), so kam durch den Buchdruck ein Qualitätssprung zustande, nämlich die vereinfachte Verbreitung (durch die Auflage identischer Exemplare).

Ungeachtet großer technischer Fortschritte fand der nächste Qualitätssprung erst in den Achtzigerjahren (des 20. Jahrhunderts) statt und wurde durch die Entwicklung des PCs und des Internets ermöglicht. Er besteht darin, daß Schriften nun auch ohne Hilfe anderer (Drucker und Verlage) erstellt und – gegebenenfalls sogar nur „virtuell“ – ohne zeitliche Verzögerung verteilt werden können.

Es ist nicht überraschend, daß Naturwissenschaftler – allen voran theoretische Physiker und Mathematiker – diese neuen Möglichkeiten als erste intensiv und innovativ zu nutzen begannen, waren sie doch schon vorher mit der Entwicklung des Computers (in Form von Rechenzentren) verbunden und versuchten die sich rasch entwickelnden Möglichkeiten zu nutzen und auszureizen (numerische Berechnungen, Experimente). Der erste spektakuläre Erfolg – der (zunächst noch nicht ganz einwandfreie) Beweis des Vier-Farben-Satzes – leitete eine Entwicklung ein, die sich erst mit den (raschen, leicht zu bedienenden und individuellen) Tischcomputern wirklich durchsetzen konnte: Spezielle Software (Macsyma, Maple, Mathematica, etc.), die beim Entdecken (und Beweisen) mathematischer Sätze hilft. Dabei dient der Computer aber als Werkzeug, nicht als Medium.

Die neuen Möglichkeiten, die sich (mit gewisser Verzögerung) auf alle Lebensbereiche ausgebreitet haben, haben das Umfeld der wissenschaftlichen (mathematischen) Arbeit stark beeinflußt: e-Mail beschleunigt den Austausch von Ideen und erlaubt daher intensivere Kooperation auch auf (räumliche) Distanz, elektronische Datenbanken erleichtern die Literatursuche (Zentralblatt, Reviews) und vermeidet das (zeit-aufwendige) Durchforsten schwerer und staubiger Bände, elektronischer Zugriff auf Zeitschriften ersetzt oft den Gang zur Bibliothek und „erspart“ so manche Ablenkung durch Zufallsfunde (und soziale Kontakte). Aber auch „normale“ Suchmaschinen (Google, etc.) können bei der Recherche helfen (und liefern dabei manchmal auch Zufallsfunde). Preprint-Archive (arXiv), (nichtkommerzielle) elektronische Zeitschriften und natürlich auch persönliche Homepages bieten den Zugriff auf wissenschaftliche Quellen unter Umgehung des (immer kostspieliger werdenden) Verlagswesens. Gleichzeitig bietet das Internet eine Gelegenheit, allen Interessenten die Wissenschaft und ihre Resultate zu präsentieren, und damit Öffentlichkeitsarbeit in einem vorher nicht

möglichen Ausmaß zu machen. (Während die Probleme der dauerhaften Datensicherung durch die großen Archive sicherlich lösbar sein werden, besteht die – vor allem für Historiker nicht unwesentliche – Gefahr, daß vieles, was früher in Manuskripten und Briefen bewahrt wurde, heute gar nicht gespeichert wird oder nur auf Datenträgern, die nach einer vergleichsweise kurzen Periode nicht mehr lesbar sein werden.)

Der Buchdruck und die Erfindung der beweglichen Lettern durch Gutenberg brachten zwar einen großen Fortschritt, mathematische Texte blieben aber – wegen der oft komplizierten (zweidimensionalen) Struktur mathematischer Formeln und der häufigen Verwendung von Diagrammen – ein mühsamer Sonderfall. Trotzdem erreichte die typographische Gestaltung mathematischer Publikationen bei renommierten Verlagen ein hohes Niveau (und verlagstypisches Layout). Der dafür notwendige Aufwand bewirkte und rechtfertigte hohe Preise für gut gestaltete mathematische Publikationen. Bei der Erstellung der Manuskripte war die Schreibmaschine (selbst die elektrische Schreibmaschine mit mehreren Kugelköpfen oder Typenrädern) nur beschränkt (und mühsam) verwendbar.

Neue Druckmethoden führten in den Sechzigerjahren zu dem paradoxen (wenn auch nicht unbedingt seltenen) Resultat, daß der technische Fortschritt nicht automatisch auch eine verbesserte (oder zumindest gleichbleibende) Qualität garantiert. Neue Druckverfahren ermöglichten es, die Kosten für teure Fachkräfte zu sparen, indem man man dazu überging, manche Manuskripte – anstatt sie setzen zu lassen – photographisch zu reproduzieren: Maschinenschrift, oft sogar mit per Hand eingesetzten mathematischen Zeichen (Zentralblatt, *manuscripta mathematica*, *Lecture notes*, etc.) gaben Büchern und Zeitschriften das Aussehen von Skripten. Als Anfang der Siebzigerjahre der Computersatz begann, den Bleisatz zu verdrängen, ging auch bei gesetzten Werken die typographische Qualität deutlich zurück (Fonts, Kerning, Randausgleich, etc.).

In dieser Situation geschah etwas Bemerkenswertes: Donald E. Knuth, ein junger Computerwissenschaftler, der an einem umfassenden mehrbändigen Werk zur theoretischen Informatik arbeitete, war nicht nur an der Verbreitung seiner Ideen interessiert, sondern auch an der äußeren Form, in der diese publiziert wurden! Als der Verlag sich (wegen des Wechsels zum Computersatz) außerstande erklärte, die Neuauflage eines Bandes mit demselben Erscheinungsbild (in der traditionellen Typographie) herzustellen, faßte er den Entschluß, für diesen Zweck selbst eine geeignete Software – unter Berücksichtigung des traditionellen Wissens – zu entwickeln. Sein (selbstbewußtes) Ziel: die Produktion von „beautiful books“. Er ging dieses Projekt mit der ihm eigenen Konsequenz und Liebe zum Detail an, sodaß es kein Wunder war, daß die Arbeit an dem Programm (die auch von der American Mathematical Society unterstützt

wurde), mehrere Jahre in Anspruch nahm.

So entstand  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , das heute im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich (aber nicht nur dort) zum „Standard“, zum führenden Computersatz-Programm, geworden ist, mit dem man – entsprechende Sorgfalt vorausgesetzt – traditionelle typographische Qualität erzielen (oder sogar überbieten) kann.  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  kam genau im richtigen Moment. Für die Verwendung in Rechenzentren (mittels Textterminals) konzipiert, konnte es dank seiner effizienten Programmierung schon früh auch für PCs (AT mit 640kb RAM) verfügbar gemacht werden. Dieser Umstand war sicherlich mitentscheidend für die rasche und weite Verbreitung von  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  an mathematischen Instituten. Für den andauernden Erfolg (welche Software überdauert praktisch unverändert 20 Jahre?) waren aber die klugen Design-Entscheidungen bei der Konzeption maßgeblich: Plattformunabhängigkeit (IBM, Unix, PC, Apple, etc.) und Geräteunabhängigkeit (Nadel-, Tinten-, Laserdrucker), Stabilität, eine Markup-Sprache mit flexiblen Makro-Fähigkeiten. Auch die – in der Entstehungszeit selbstverständliche – Eingabe über die Tastatur ohne WYSIWYG kann als Vorteil betrachtet werden.

Zweifellos hat  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  die Arbeitswelt des Mathematikers und das Erscheinungsbild der Fachliteratur entscheidend verändert. Manuskripte werden fast ausschließlich in  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  – genauer: meist in  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , dem verbreitetsten Makropaket – geschrieben und gedruckt. Das hat positive, aber auch negative Auswirkungen: Einerseits macht es  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  leicht, ohne Fachkenntnisse ein ansprechendes Aussehen zu erzielen. Das hat aber dazu geführt, daß die Verlage oft das fertige Manuskript des Autors übernehmen, ohne den Text und das Layout zu lektorieren. Über Verlagsgrenzen hinaus gleich aussehende Bücher, oft mit simplen typographischen Unzulänglichkeiten, sind die Folge, da nur wenige Autoren sich auch mit solchen „Details“ beschäftigen wollen. Obwohl also Verlage kaum mehr Arbeit (und Geld) in den mathematischen Satz investieren, sind die fertigen Bücher erstaunlicherweise (oder vielleicht auch nicht erstaunlicherweise) nicht billiger, sondern vielmehr (noch) teurer geworden. (Zahlreiche Beispiele beweisen jedoch, daß mit  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  tatsächlich „beautiful books“ individuell gestaltet werden können.)

Natürlich ist es nicht so, daß es heute ohne  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  keine Möglichkeit gäbe, Formeln am Computer zu setzen. Man kann jedoch mit gutem Grund daran zweifeln, daß ohne Knuth eine andere Software derselben Qualität mit denselben Vorzügen entstanden wäre. Vermutlich würden mehrere teure (kommerzielle), miteinander nicht kompatible und sich oft (inkompatibel) ändernde Programme (mit geringeren Qualitätsansprüchen) das Leben schwer machen, wie es Word (mit Formeleditor) vorführt.



**Prince Albertus Dalmatskii and the first Russian manuscript  
of XVIIIth century on theoretical geometry**

**S.S. Demidov, R.A. Simonov**

*1. Geometrical manuscripts in Russia in XVII century*

During seventeenth century in Russia the level of mathematical culture comparing with the west European one was not sufficient high. Russia waked up from the status of medieval reticence and begun to pay attention to the west European scientific acquaintance. For medieval Russia the traditional mathematical knowledge was restrict to the elementary topics. From this period we have manuscripts concerning practical arithmetic and geometry. The level of the arithmetical manuscripts comparing with these of the west Europe was practically the same, but the level of the geometrical manuscripts was clearly lower. In this geometrical manuscripts there are serious errors and the geometrical figures are not always of good quality. The cause of this difference is explained by the famous historian of mathematics A. P. Yushkevich by the following words [1, p. 46]: “First of all arithmetic was useful for the enterprising merchants who evaluated very high the exactness concerning commercial exchanges. Land-measuring geometry was the object of the Russian administration which utilized ancestor`s methods and did not interesting about its rigor. Of course this situation of non-exactness arranged them fully. The abundance of territory does not stimulate also the exactness of the measuring”.

An exceptional position occupies the manuscript known in modern bibliography as “Sinodal’naya № 42”. It is the *unique known Russian manuscript of XVII-th century concerning theoretical geometry*. It is conserved in the Collection of State Historical Museum in Moscow (The department of the manuscripts. State Historical

Museum. Collection of Synod № 597 (№ 42)). This manuscript provoked the interest of many scholars, in particular: A. I. Sobolevskii A. I. [2], T. I. Rainov [3], Yu. A. Belyi i K. I. Shvetsov [4], D. Tshižewskii [5], M. Woltner [6], A. P. Yushkevich [1].

## 2. «Sinodal'naya № 42»

The author of this manuscript presented himself in the introduction (in this manuscript there are two introductions): humble Iohannis (Иванка), prince Elizarov son Albertus from Dalmatie. He informs us that his work is a translation from the English land-measuring printed books and he notes two dates: 1616 and 1625. These two dates are probably related to these books or to his translation itself.

The principal part of the first introduction constitutes a replica to the fragment of the book known in XVI - XVII centuries, the book of Peter Ramus or Pierre la Ramé, “27 books in Geometry”, published in 1569. This fragment presents the definition of the object of geometry, the explication of the term itself of geometry according to other authors and so on.

The first book has two parts and contains 27 definition (named by the author “свершения”) and 74 planimetical theorems (named “вѣденія”). It is obvious that this Russian term originated from the Greek word θεώρημα in the meaning of the word “what can I see”.

This book contains also the definitions of: a straight line, a surface, a solid, a perpendicular, different kinds of angles, triangles, quadrangles, circle, tangent, parallel lines, congruent figures etc.

Furthermore it contains the definition of the area of a square and the explication of the measurement of angles in degrees. Sometimes there are informations about the

properties of geometrical figures. For example after the definition of the equilateral triangle the author says that each angle is  $1/6$  of the circumference (“венец”). The majority of these theorems which are presented in this manuscript originated from the first six books of Euclid’s *Elements*. Among these theorems we find the following inequality

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

the approximation of the value of  $\pi$  equal to  $\frac{22}{7}$ , the formula of the area of a circle through his radius and the length of the circumference, also the approximative value of the area of a square constructing on the diameter of the circle through  $14/11$  of the circle’s area (these last theorems with references to Archimedes) and also the theorem about the relation of the areas of the circles from the 12<sup>th</sup> book of Euclid’s *Elements*. All this theorems are accompanied with explications but sometimes the author gives an incomplete demonstration.

The second book with two parts contains also 132 geometrical constructions (the term for construction is “провидение”). Except of ordinary constructions here we found for example the division of the circumference in 10 equal parts, the transformation of an arbitrary pentagon in equal quadrangle, how to trace a tangent from a given point to a circle, the construction of a triangle according some conditions, for example, to construct a triangle congruent to another given triangle and equal to a given square, the division of a triangle in a given number of the equal parts by the straight lines who begin in one given point of one side of the triangle.

The language of the translation is very ponderous and difficult to understand it. Probably all these difficulties can be explained by the fact that the Russian was not

the mother-language of the author. His strange name - Albertus von Dalmatie (Альбертус Далмацкий) - indicated his foreign roots.

His task was complicated also by the necessity to invent geometrical terminology. Sometimes he used Russian words («видения»), sometimes copied in Latin or in English terms (for example “дегрис” from the English word degrees, “скара” from the English word “square” and so on).

### 3. *Who and to whom ?*

A question arises: to whom this manuscript was addressed ? The author himself in one of his introduction stresses its educational character. More T. I. Rainov [3] proposed the hypothesis that this manuscript was addressed to the crown-prince Aleksei Mikhailovich, who was born in 1629. Indirectly this hypothesis is confirmed by the fact that the author in his introduction named himself humble Ioannis (Ивашка).

In his introduction the author expressed his wish to the tzar Mikhail Fiodorovich concerning the publication of this manuscript. But unfortunately his wish never was realized.

From this fluent exposition we can see the richness of the content of this manuscript. A question again arises: who is the author, who named himself by a such complicate name ? The answer of this question is not simple.

According to A. I. Sobolevskii [2] the author was the prince Dmitri Albertus, who participated in 1644 in religious debate in Moscow. Although it is very strange why prince Dimitrii named himself humble Ioannis (Ивашко) ? Yu. I. Belyi and K. I. Shvetsov [4] proposed the hypothesis that the author was a noble from Zvenigorod



Ivan Obraslanov Elizarov. In this case prince Albert from Dalmatie according to Belyi and Shvetsov was the man to whom this book was dedicated. But it is strange that the declination of the name (Альбертус Далмацкий) was not correct ( it must be written - Альбертусу Далмацкому).

The first step for the right solution was made by the German scholar M. Woltner [6] and the final step was made by the Russian scholars O. E. Kosheleva and R. A. Simonov [7]. Both of them studied documents of XVIIIth century conserving in the National State Archive of the Ancient Documents in Moscow, in particular the Greek documents among the papers of Foreign department (Посольский приказ) about the foreigners who came in Russia during 1628 – 1629.

As it was made clear the author is Greek John, Elizar's son, his family name was Albertus and he was the prince of Dalmatie. He came from England in 1628 desiring to enter in tsar's service and he was well received.

His ancestors were princes of Dalmatie. One of his ancestors, Albert was the gospodar of Dalmatie about 100 years ago. After the conquest of Dalmatie and its division in several parts by Turkey, Pope and Venice, the ancestors of Ioannis Albertus emigrated to Patras in Peloponese where converted to the Orthodoxy. Albertus considered himself as a Greek, although he preserved the title of prince of Dalmatie.

When he was very young he left his home at Patras and tried to find a post in Constantinople (during this period Constantinople was under Sultan's Achmet reign). The situation was not very stable and Albertus went to the West. Firstly in France when he lived four or five years and then arrived in England. It is not known what was his occupation there. In England he married an anglican woman but he preserved his faith in orthodoxy. In Moscow there are some documents concerning the

personality and the activities of prince Ioannis. In particular his name was involved in a process where he was one among the witness. He was married (it is necessary to think that his first wife till this time was dead) with the widow of a noble man from Ryazan. He died in Moscow in 22 September of 1641.

These data about his life permitted us to give more convinced propositions about the sources which Ioannis Albertus utilized for his manuscript. As Yu. A. Belyi and K. I. Shvetsov pointed out [4] the principal source of it was probably the book of "Spherical Triangle" by John Speidel, edited in 1627 before the departure of Ioannis Albertus from England. The introduction of this book is marked by 1625 and the part which was translated by prince Ioannis was edited in 1616 under the title "Extraction from Geometry". That explains the two dates in the introduction of the manuscript "Sinodalnaya № 42".

#### *4. Prince Albertus Dalmatskii and Russian renaissance in XVIIIth century*

We must say that one of the reasons that the manuscript of Ioannis Albertus was neglected is a following: it was early for such kind of research in Russia. The first printed book about practical geometry appeared only in the beginning of the XVIIIth century (1708; the translation of J. Bruce of the book von Purkenstein [1]).

Concerning theoretical geometry such a book was appeared later, namely only in 1739 - it was a rewriting of Tacquet's book of 1640.

From a local point of view the author of the manuscript "Sinodalnaya № 42" was unique in his task to introduce theoretical geometrical knowledge in Russia, but from a global point of view this author as many other intellectuals worked to prepare the cultural renaissance in Russia and the educational reforms of Peter the Great. From political and economical point of view it was necessary for the country to have good

diplomats, well educated functionaries, specialists in military art, in navigation, in engineering and so on. For church also it was necessary to have educated clergy with knowledge in Greek, in Latin, in theology too. For all these reasons it was necessary the existence of high educated persons and well organized system of high education. It is why the government benefited the arrival of such specialists well educated and faithful to the orthodoxy. One of such person was the prince Ioannis Albertus - trained in the Orthodox tradition, European educated, this Greek became one of the outstanding representatives of the Russian renaissance of the XVIIth century. Together with such remarkable figures as the boyard Fiodor Rtishchev, the known clergyman Simeon Polotskii, organized in 1681 in Moscow the known school a monk Timofei, the Greek monks brothers Likhudas, who founded in Moscow in 1685 the first in Russia Supreme school - Slavic-Greek-Latin Academy, Albertus Dalmatskii worked for the preparation the ground, on which during the XVIIIth century by a wonderful way was acclimatized the shoot of the new European science.

#### Bibliography

1. Yushkevich A. P. Istoriya matematiki v Rossii do 1917 goda. Moskva. 1968.  
(In Russian)
2. Sobolevskii A.I. Perevodnaya literatura Moskovskoi Rusi XIV – XVII vv.  
Bibliograficheskie materialy. St.-Petersburg. 1903.
3. Rainov T. I. Nauka v Rossii XI – XVII vekov. Moskva-Leningrad. 1940.
4. Belyi Yu. A., Shvetsov K. I. Ob odnoi russkoi geometricheskoi rukopisi  
pervoi chetverti XVII veka // Istoriko-matematicheskie Issledovaniya. Bd. XII.  
1959. P. 186 – 188. (In Russian)
5. Tshižewskii D. Neue Leserfruechte. IV. // Zeitschrift fuer slavische Philologie.

Heidelberg. 1962. Bd. 30. № 2. S. 270 – 271.

6. Woltner M. Wer ist der Uebersetzer der ersten theoretischen Geometrie in Russland // Orbis Scriptus. Muenchen. 1966. S. 947 – 951.
7. Kosheleva O. E., Simonov R. A. Novoe o pervoi russkoi knige po teoreticheskoi geometrii XVII veka i eio avtore // Kniga. Issledovaniya i materially. Moskva. Vol. 42. 1981. S. 63 – 73. (In Russian)



Am Abend, von links nach rechts: Friedrich Katscher, Detlef Gronau, Marlene Breidert, Phil Davis, Enid Grattan-Guinness, Ivor Grattan-Guinness, Wolfgang Breidert, Gisela von Renteln, Christa Binder. (Foto: Peter Schmitt)



## FOUR PROBLEMS FROM BAMBOO STRIPS

- A PRELIMINARY STUDY -

MA Li

**ABSTRACT.** A collection of mathematical texts written on bamboo strips have recently been unearthed in central China. Four of the problems are solved by the method of excess and deficit, which is essentially equivalent to that of double false position. A comparison is made with Chapter seven of the *Nine Chapters on Mathematics*, where the method has been known to be first presented in Chinese works. The new evidence shows that the method had already been used to solve a variety of problems by the first half of the second century BC. Moreover, much material contained in the *Nine Chapters* must have been compiled even earlier.

*Key words and phrases:* excess and deficit, double false position, Suan Shu Shu, history of Chinese mathematics.

*Mathematics Subject Classification (2000):* 01A25

### 1 Introduction

The *Nine Chapters on Mathematics* (*JZSS: Jiu Zhang Suan Shu*) has long been regarded as the earliest specialized mathematical writing from China.<sup>1</sup> The situation changed when a collection of mathematical texts on bamboo strips was excavated from the end of 1983 to the beginning of 1984. The excavation took place at Zhangjiashan near Jiangling in Hubei province and three tombs (catalogued as M247, M249, M258) were unearthed.

More than a thousand bamboo strips were found from M247, almost two hundred of them are relevant to mathematics. On the back of one of these strips there are three characters indicating the title of this collection: *Suan Shu Shu* (*A book on numbers and computations*, to be abbreviated as *SSS* below). This title does not seem to have been mentioned or cited anywhere in historical records. Another document from the same tomb was a calendar which ended in the second year of Empress Lü's reign in the Western Han period, viz. 186 BC. If the occupant of the tomb died that year the texts must have been written before 186 BC.

The *SSS* covers a variety of topics. On some strips the text begins with a heading of one to four characters. There are a total of 67 headings according to [5]. Mathematical problems are presented in question and answer form, as in *JZSS*. In this paper we discuss the four problems solved by the method of excess and deficit.

<sup>1</sup>Neither the date nor the authorship of *JZSS* is known. In Ma [3] pp.9-10 I argued that the book was probably completed during the reign of Xuan emperor of the Western (or Former) Han period, viz. the first half of the first century BC.

## 2 The method of excess and deficit

Prior to the findings of the *SSS* the method of excess and deficit has been known to be first presented in the *JZSS*. In Chapter seven 20 problems are solved by the method. The first eight might be called “model examples” and can be outlined as: let a group of people make a purchase. If each person pays  $p'$ , there is an excess of  $e'$ ; if each person pays  $p''$ , there is a deficit of  $e''$ . Question: What are the number  $n$  of people taking part in the purchase and the price of the merchandise  $m$ , respectively?

The application of the method can be illustrated by laying counting rods on a counting board according to some standard scheme:

$$\begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{cc} p'' & p' \\ e'' & e' \end{array} \right] & \rightarrow & \left[ \begin{array}{cc} p''e' & p'e'' \\ e'' & e' \end{array} \right] & \rightarrow & \left[ \begin{array}{c} p'e'' + p'e' \\ e' + e'' \end{array} \right] \\ (a) & & (b) & & (c) \end{array}$$

First form the arrangement (a), from which by cross-multiplication follows (b). Then by addition (c) is obtained. Finally a division yields the result

$$\frac{p'e'' + p'e'}{e' + e''} = \frac{m}{n}.$$

Thus

$$m = \frac{p'e'' + p'e'}{p' - p''}, \quad n = \frac{e' + e''}{p' - p''}$$

In the first four problems one excess and one deficit are given. In problem §1  $p' - p'' = 1$ . In §2  $p' - p'' > 1$ , hence the numerator and the denominator must be divided by  $p' - p''$ . In §3 special fractions are introduced for  $e'$  and  $e''$ . In §4 simple divisions are required to get  $e'$  and  $e''$ . In §5  $e''$  as well as  $e'$  are excesses. In §6  $e'$  as well as  $e''$  are deficits. In §7  $e'$  is an excess while  $e'' = 0$  called “just enough”. In §8  $e''$  is a deficit while  $e' = 0$  “just enough”.

In the remaining 12 problems no excess or deficit is given explicitly. Readers are expected to solve these problems by first making two assumptions  $p'$  and  $p''$  in order to get  $e'$  and  $e''$ , and then apply the method. A detailed analysis can be found in Ma [2].

## 3 The four problems from *SSS*

The four problems solved by the method of excess and deficit are under three headings.

### 3.1 Fen Qian: sharing out money

This problem is interesting because the excess and deficit are given explicitly, yet the theme is different from that in problems §§7.1–7.8 of *JZSS*.

To share out money, if each person gets 2 there is a surplus of 3, if each person gets 3 there is a shortage of 2. Question: how many persons are sharing out how much money? Result:<sup>2</sup> 5 persons, money 13 (units or coins). [Apply the method of] gain<sup>3</sup> & deficit: mutually multiply the denominators (and add the products) as dividend, numerators follow each other (i.e. added) as divisor.<sup>4</sup>

Here

$$\begin{bmatrix} p'' & p' \\ e'' & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Therefore

$$\frac{p'e'' + p''e'}{e' + e''} = \frac{2 \times 2 + 3 \times 3}{3 + 2} = \frac{13}{5}.$$

The text then continues by explaining how the case of two excesses is similar to that of two deficits.

[In the case of] both gains just like [the case of] both deficits, mutually multiply numerator with denominator and set them separately, remove (i.e. subtract) the numerator which is less from the numerator which is more, let the remainder (i.e. the difference) be divisor, use the deficit as the dividend.

### 3.2 Mi Chu Qian: trading rice

Under this heading there are two problems.

#### 3.2.1 Selling rice

Fine rice<sup>5</sup> 2 dou [for] 3 qian,<sup>6</sup> coarse rice 3 dou [for] 2 qian. Now let there be 10 dou of fine rice and coarse rice, sold for 13 qian. Question: how much fine rice was there and how much coarse rice? [Result]: fine rice 7 dou and 3/5; coarse 2 dou and 2/5. Method: let all be fine rice<sup>7</sup> then a gain of 2 qian; let all be coarse rice then a deficit of 6 and a minor half (i.e. 1/3). Put together the gain and deficit as divisor, use gain to multiply 10 dou for coarse rice, use deficit to multiply 10 dou for fine rice, all divided by divisor, 1 dou.

<sup>2</sup>Here *de yue* (meaning literally "result says") is used rather than *da yue* (meaning literally "answer says") as in *JZSS*.

<sup>3</sup>The character *ying* used here means gain, profit, etc. It is pronounced the same as that used in *JZSS* for excess. My guess is that when *SSS* was written, the characters used for excess and deficit were not yet standardized. After all, the meanings of the two characters are related.

<sup>4</sup>I am wondering whether the *zi* for numerator and *mu* for denominator are interchanged by mistake, though it makes no difference numerically in this case.

<sup>5</sup>In the text *li* for coarse rice is used though it should obviously be *bai* for fine rice, as corrected in [5].

<sup>6</sup>Dou is a unit of volume. Qian means money, it might well be translated or understood as 3 units of money or cash or simply 3 coins.

<sup>7</sup>According to the text in [5] it is coarse rice here while in the second assumption only fine rice. A check of the computation shows the opposite.

Assume first all is fine rice then 10 dou costs  $\frac{3}{2} \times 10 = 15$  giving  $15 - 13 = 2$  as excess; assume then all is coarse rice then 10 dou costs  $\frac{2}{3} \times 10 = 6\frac{2}{3}$  giving  $6\frac{2}{3} - 13 = -6\frac{21}{3}$  as deficit. Therefore

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 6\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \times 2 & 10 \times 6\frac{1}{3} \\ 6\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{fine rice } \frac{10 \times 6\frac{1}{3}}{6\frac{1}{3} + 2} = 7\frac{3}{5}, \\ \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 6\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 10 \times 2 & 0 \times 6\frac{1}{3} \\ 6\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{coarse rice } \frac{10 \times 2}{6\frac{1}{3} + 2} = 2\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

The total amount of rice is  $7\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5} = 10$  dou.

### 3.2.2 Buying rice and millet

omitted due to lack of space.

### 3.3 Fang Tian: square field

Despite the title<sup>8</sup> this problem is not about finding an area but the inverse: to find the side given the area of a square. This type of problems in *JZSS* belongs to Chapter four and are solved by root extraction. In *SSS*, however, it is solved by the method of excess and deficit:

[In] a field of 1 *mu* in square how many *bu* is a side? [The answer] says: side  $15\frac{15}{31}$  *bu*. The rule says: let the side be 15 *bu*, deficit 15 *bu*; let the side be 16, a surplus of 16 *bu*. It says: combine (i.e. add) the gain and the deficit as the divisor, multiply the deficit numerator with the gain denominator, multiply the gain numerator with the deficit denominator, add [the products] as the dividend.

The very first problem in *JZSS* reads “now let there be a [rectangular] field of width 15 and length 16. Question: what is the area of the field? Answer: 1 *mu*”.<sup>9</sup> If the author of the *SSS* is familiar with this problem, it is natural to choose the two assumptions as above, knowing that the length of the side must be between 15 and 16.<sup>10</sup> Interestingly, the deficit corresponding to 15 is 15 while the excess to 16 is 16:

$$\begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 16 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{16 \times 15 + 15 \times 16}{16 + 15} = 15\frac{15}{31}.$$

The answer to this non-linear problem is approximate—indeed a fairly good approximation.

<sup>8</sup>The first chapter in *JZSS* is entitled “Fang Tian”, which has been translated as rectangular field. Since that chapter deals with finding areas of various geometric figures in terms of fields, I thought “squaring fields” would be an ideal translation (see Ma [3]), using “square” as a verb. Here in *SSS* it seems more suitable to translate the name as “square field” where square is used as an adjective.

<sup>9</sup>It is worth noting that 1 *mu* = 240 (square) *bu* was introduced by Shang Yang in his 383 BC reform. Before that 1 *mu* = 100 (square) *bu*. It seems therefore reasonable to believe that both this problem in *JZSS* and the one in *SSS* are constructed after 383 BC.

<sup>10</sup>Knowing that  $240 = 15 \times 16$  one can also divide the area by the arithmetic mean of 15 and 16:  $240 / \frac{15+16}{2}$  to get the same result.



## 4 Concluding remarks

The recently excavated collection of mathematical texts *SSS* was probably written between 383 BC and 186 BC, a couple of centuries earlier than the compilation of *JZSS*. There are striking resemblances between the two texts. Yet it seems unlikely that one is a copy of the other. It is possible that the authors of both collections had access to other earlier texts in common. While *JZSS* was gradually systemized and improved through generations, *SSS* is an original document written on bamboo strips. The significance of *SSS* can therefore be compared to that of ancient Egyptian papyrus or Babylonian mathematical texts on clay tablets, as pointed out by Du in [1].

Four problems in *SSS* were solved by the method of excess and deficit. In the *fen qian* problem where both excess and deficit are explicitly given, the theme is not joint-purchase like in *JZSS*. The *fang tian* problem, which would be solved in *JZSS* by square root extraction, is ingeniously solved by the method of excess and deficit and the choices of the two assumptions leading to the excess/deficit are remarkable. Nevertheless, the exposition of the method in *SSS* is not as clear and complete as in *JZSS*.

\*

### ACKNOWLEDGEMENTS

This study is mainly based on [4] and [5] which have been kindly supplied to me by Prof. Nathan Sivin, whom I also thank for reading [2] with great care and for writing a detailed review.

\* \*

ABOUT THE AUTHOR: Dr. Ma Li is senior lecturer (associate professor) in mathematics at Linköping University, Sweden. Her e-mail address is mali@itn.liu.se

## References

- [1] Du, S. Jiangling Zhangjiashan zhujian Suan Shu Shu chutan (A brief introduction to Suan Shu Shu written on bamboo strips from Zhangjiashan). *Ziran Kexueshi Yanjiu (Studies in the History of Natural Sciences)*, 7(3):201–204, 1988.
- [2] Ma, L. *The Rule of False: Early Applications and Conjectured Transmissions*. Mathematics Blue Series 15. CTH & GU, Gothenburg, 1993.
- [3] Ma, L. *Studies of the Rectangular Array Algorithm in Nine Chapters*. CTH & GU, Gothenburg, 1994.
- [4] Peng, H. Zhongguo zuizao de shuxue zhuzuo Suan Shu Shu (China's earliest mathematical work Suan Shu Shu). *Wenwu (Cultural relics)*, pages 85–90, 2000.
- [5] Study group of the Jiangling Documents. Jiangling Zhangjiashan hanjian Suan Shu Shu shiwen (Transcription of Suan Shu Shu on bamboo strips from Jiangling). *Wenwu (Cultural relics)*, pages 78–84, 2000.

## Sur la méthode du «polygône de Newton»

S.S. Petrova (Moscou)

Depuis la naissance de l'analyse mathématique les séries de fonctions sont utilisées par Newton comme un puissant moyen d'effectuer des quadratures. La méthode, qui porte maintenant son nom – la méthode du polygône de Newton a le but de développer les fonctions implicites en séries suivant des puissances de variable indépendante. Elle consiste en suivant : Soit

$$P(x, y) = 0, \quad (1)$$

où

$$P(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j,$$

l'équation d'une courbe algébrique. Il faut représenter toutes les solutions  $y(x)$  de cette équation au voisinage d'un point  $x_0$  par les séries suivant des puissances de  $(x - x_0)$ . Supposons pour simplifier  $x_0 = 0$  ;  $y(x_0) = 0$ .

Alors  $y(x)$  peut s'exprimer en fonction de  $x$  par une série de la forme

$$y(x) = a x^\alpha + b x^\beta + c x^\gamma + \dots \quad (2)$$

où les exposants  $\alpha < \beta < \gamma < \dots$  sont des nombres rationnels croissants, mais non nécessairement entiers.

Pour déterminer le plus petit exposant  $\alpha$  dans les développements en séries (2) des diverses « branches » de la courbe (1) Newton a inventé un moyen géométrique. C'est ce moyen qu'on nomme le plus souvent – méthode du polygône de Newton [1].

On marque dans le plan l'ensemble de points  $G \{(i,j) : a_{ij} \neq 0\}$

puis on considère la ligne brisée convexe  $L$  dont chaque côté contient au moins deux de ces points, les autres étant tous du même côté de la droite portant ce côté. Newton lui-même marque d'étoiles les carrés correspondants aux monômes

$$a_{ij} x^i y^j \quad (a_{ij} \neq 0)$$

qui figurent dans (1) et construit la ligne brisée  $L$  à l'aide d'une table et d'une règle (instrument).

Les nombres cherchés ( $-\alpha$ ) sont des coefficients angulaires de côtés de la ligne  $L$ . En considérant un de ces côtés, on prends la somme de tous les monômes

$$a_{ij} x^i y^j$$

correspondants aux points de côté choisi

$$\sum_k a_{i_k j_k} x^{i_k} y^{j_k} = 0 \quad (3).$$

La substitution  $y = a x^\alpha$  dans l'équation (3) nous donne toutes les valeurs de coefficients de « a ». Le changement de variable  $y = a x^\alpha + p$  permet de ramener la détermination du terme suivant de la série (2) à la détermination par la même méthode du terme initiale dans la solution de l'équation  $P_1(x, p) = 0$ . Ce problème est plus facile parce que  $\alpha < \beta$ .

En continuant ce procédé pour les autres cotés de L on peut obtenir tous les « n » solutions de l'équation donnée (1) sous la forme (2).

La convergence de séries (2) n'a pas été démontrée avant Puiseux (1850).

La méthode du polygone de Newton a trouvé des applications importantes dans les différentes branches des mathématiques, par exemple dans la géométrie algébrique, dans la théorie des équations différentielles, dans celle de fonctions analytiques.

Il existe de nombreuses recherches sur l'histoire de cette méthode. Le plus complètement les recherches liées à la méthode du polygone de Newton sont reflétées chez N. Tchébotarev [2].

Dans les années 70-s du XX-ème siècle ont été publiés les manuscrits de Newton [3] qui sont servis du fondement pour la revision de point de vue sur la méthode du polygone de Newton (voir par exemple [4]). Tout de même dans la littérature moderne à ce sujet on poursuit de donner l'histoire sans prendre en considération les manuscrits de Newton. On affirme par exemple que Newton n'a pas envisagé la question sur le nombre des solutions de l'équation (1), que Newton ne construisait aucun polygone, que l'exposé analytique de la méthode appartient à Lagrange.

Dans les manuscrits de Newton il y a un ouvrage inachevé "Sur le calcul des séries" (1684). Il contient l'exposé la plus complète de cette méthode. En utilisant un nombre réduit d'exemples (ce sont les mêmes exemples que ceux cités dans des mémoires publiés) Newton a démontré toutes les particularités de la méthode, la pratique des résolutions des équations du type (1) et les avantages de l'application de son procédé géométrique.

Dans ce mémoire Newton a montré que le nombre des solutions  $y(x)$  de l'équation  $P(x, y) = 0$  aux voisinage du point  $x=0$ , compte tenu de leur multiplicité, est égale exactement au degré de l'équation relativement à  $y$ .

Pour trouver le premier terme de développement (2) Newton mettait une règle sur le diagramme d'en bas ou d'en haut dans toutes les positions possibles ce qui signifie l'apparition d'une ligne brisée ou du polygone.

Premièrement Newton a inventé la méthode du polygone afin de résoudre des équations algébriques. Plus tard, il a appliqué méthode de polygone, mais dans sa forme analytique et non pas géométrique, pour résoudre des équations différentielles non linéaires du type :

$$\sum_{(k, \mu, \alpha, \beta, \gamma)} a_k z^\mu y^\alpha \cdot y^\beta \cdot y^\gamma = 0$$

dont des équations algébriques ne sont qu'un cas particulier. Newton cherchait des solutions de ces équations par les séries de la forme (2). Une définition analytique de l'exposant du premier terme de série (2) aboutit à un grand nombre

d'égalités et d'inégalités. Pour les systématiser en cas des équations de premier ordre Newton formule une certaine règle. Tout de même Newton ne trouve pas qu'une seule des valeurs possibles de l'exposant pour le premier terme de la série. Il a exposé cette méthode en 1692 dans sa lettre à J. Wallis qui l'a publié en 1693 dans une édition latine de son "Algèbre".

Le fait que Newton disposait de l'exposé analytique de la méthode du polygone, a été marqué par D. Sintsov qui écrivait [5] encore en 1898 que "les remarques constituant l'essentiel de la méthode de Lagrange [6] ont encore été formulées par Newton. Elles touchent le premier côté du polygone de Newton et évidemment sont applicables aux autres côtés ce qui permettra d'obtenir d'autres solutions de Lagrange".

Les recherches sur la généralisation de la méthode du polygone en cas des équations avec trois ou plus de variables ne sont apparues que dans les années 70-s du XX-ème siècle [7]. Les recherches de V.I. Arnold sur une classification des singularités des variétés différentielles ont servi du point de départ pour ses travaux et des travaux de ses élèves liés à la méthode du polyèdre de Newton.

### Bibliographie

1. Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: Гостехиздат. 1937.
2. Чеботарёв Н.Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики. В кн.: Исаак Ньютон. 1643 – 1727. Сб. статей к 300-летию со дня рождения. М.: Изд-во АН СССР. 1943.
3. The Mathematical Papers of Isaac Newton. Ed. By D.T. Whiteside. Cambridge. 1971. Vol.4.
4. Петрова С.С., Булычева М.Г. Из истории метода многоугольника Ньютона. В: Историко-математические исследования. 1989. Вып. 31. С. 38 – 51.
5. Синцов Д.М. Об «аналитическом параллелограмме» Лагранжа-Ньютона. В: Известия Казанского физико-математического общества (2). 1902. Т.2. С. 44 – 46.
6. Lagrange J.-L. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul integral. In : Lagrange J.-L. Oeuvres. Paris. 1869. Vol.4. Paris. P. 301 – 332.
7. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. Москва: Наука. 1982.



**The arithmetization of P. Zervos' book "Infinitesimal Calculus"  
at the twenties' in Greece.**

Christine Phili

Dedicated to the memory  
of Panayiotis Zervos.

**I. The international context**

Towards the end of the 19<sup>th</sup> century, the time had come for setting in book form a major achievement of this century, a rigorous construction of Analysis, the so called "Arithmetization of Analysis"<sup>1</sup>. Such a synthesis could not avoid the use of "general" sets of numbers and points, hence of some of the basic concepts and language of Cantor's<sup>2</sup> Theory of Sets – a true revolution of the same century.

The second edition of Jordan Cours d' Analyse<sup>3</sup> "appeals to a new class of readers. It is intended for those that are familiar with the ordinary processes of the differential calculus, but unfamiliar with modern researches on the underlying ground-principles. Felix Klein stresses the importance of this book: "The second edition of the Cours d' Analyse of Camille Jordan may be regarded as an example of extreme refinement in laying the foundations of the infinitesimal calculus. To place a work of this character in the hands of a beginner must necessarily have the effect that at the beginning a large part of the subject will remain unintelligible, and that, at a later stage, the student will not have gained the power of making use of the principles in the simple case occurring in the applied sciences, on the other hand it is a matter of course that for more advanced students, especially for professional mathematicians, the study of works like Jordan's is indispensable"<sup>4</sup>.

At the turn of the 19<sup>th</sup> century many distinguished books were published on modern Analysis. Let us mention: R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Erste Auflage 1888, ch. de la Vallée Poussin, Cours d' Analyse Infinitesimale Vol. I 1909, Coursat cours d' Analyse Paris ..., E. W. Hobson Theory of Functions of a real variable and the theory of Fourier series. 1907. G. W. Hardy, A course of Pure Mathematics 1908. O. Stolz, Grundzüge der Differential und Integral Rechnung 1899. C. Caratheodory, Funktionenlehre 1918.

This was, roughly, the international stage when appeared in Greece, a book, which was to have serious positive consequences for the progress of mathematics in this country (and, indirectly, not only in this). The "indirectly", naturally, refers to young Greeks who, from this book, became *mathematicians* in the same sense that, as

<sup>1</sup> For more details see U. Bottazini, The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. New York. Springer 1986; I. Grattan – Guinness, ed. From the Calculus to set Theory London: Duckworth 1980.

<sup>2</sup> J. Dauben, Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite Princeton: Princeton University Press 1979.

<sup>3</sup> J. Harkness, Jordan Cours d' Analyse. Bull. A.M.S. Vol. III 1894 p. 135.

<sup>4</sup> The Evanston Colloquium: Lectures on the mathematics delivered at Northwestern University by Felix Klein and reported by A. Ziwet. New York. Macmillan 1894 p. 49.

we saw above, talented young men of the previous generation (and not only this, e.g. the great André Weil) became *mathematicians* from Jordan's book. The most renowned of these young men has been the geometric – topologist C.D.

Papakyriakopoulos (Athens, 1913 – Princeton, 1976), for whom Dieudonné in his book *Le Choix des Mathématiques Bourbachiennes* Paris 1977 notes: “Topologie algébrique et différentielle. Les initiateurs. Topologie en dimension  $\leq 3$ : R. Bing, E. Moise, C. Papakyriakopoulos”<sup>5</sup>. Some years later, one has to add: W. Thurston.

The book in question is the *Infinitesimal Calculus* (lithograph, 1926; in print, 1929 Athens) by Panayiotis Zervos (Cephalonia, 1878 – Athens 1952), professor in the University of Athens from 1918 to 1949. He was unanimously elected in 1917, for the Chair of Differential and Integral Calculus, vacant after the retirement of Ioannis Hadjidakis (1844-1921)<sup>6</sup>, a most respected and beloved Master in the University of Athens (internationally known from the “Hadjidakis transformations” in differential geometry<sup>7</sup>).

The following paragraphe is devoted to the description of the content, spirit and style of this book, in comparison also with international books; the above mentioned and others.

## II. The book *Infinitesimal Calculus* by P. Zervos.

Abridged notation: ICZ

ICZ is, in all senses, an “one's man book”. Its foundation – Dedekind's theory of irrationals - and its blood- Cantorian set theory – had been introduced in Greece by his<sup>8</sup> author, in his first course in the chair of Differential and Integral Calculus (1918-19), at the University of Athens. One of the auditors of this course, then the student of Physics Evangelos Stamatis (later a wellknown authority on ancient Greek mathematics) remembered that P. Zervos had, sometimes, with him Jordan's book.

There is one distinctive feature between most of the above mentioned books and ICZ; although strictly mathematical, ICZ is, clearly, the work of thinker with a philosophical turn of mind; and this is true. P. Zervos was “by birth” a thinker equally in love with Mathematics and with the Philosophy of Sciences; a strong enough in both. More on the author and on this last assertion we shall present in Part III. Now, we consider, in detail the content of the book. Its chapter I has the title: *Irrational Numbers*. It exposes, as we already said, Dedekind's theory of cuts. This is a classical theory. However, we have here, the presentation of it; more “streamlined” than that in Goursat. Equally streamlined than that of de la Vallée Poussin, but in a more

<sup>5</sup> Op. cit. p. 17.

<sup>6</sup> For more details see my paper, Some aspects of Scientific Society in Athens at the end of the XIX<sup>th</sup> century: Mathematics and Mathematicians. Archives Internationales d' Histoire des Sciences. No 145 Vol 50/2000 p. 302-320.

<sup>7</sup> W. Blaschke and H. Reichardt in their book *Einführung in die Differentialgeometrie* (Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer Verlag 1960 referred to Hadjidakis work (see p.57). Also M. Spivak in his book, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, referred to Hadjidakis' transformation (Boston 1975), Vol, 5. p. 379.

<sup>8</sup> The teaching of Analysis constitutes an important factor for him see his paper: Sur l' enseignement du calcul différentiel et intégral en Grèce *L' Enseignement Mathématique* Vol. 21 p. 278-281.

explanatory way. The emphasis is on three matters: The definition itself of the irrational number as a symbol for

the cut in question, the theorem that the so extended number system is order complete and the extension of the four operations to it. The proof of the above – mentioned theorem is presented so naturally that one has no temptation to see this completion as arbitrary. Now, we mention some of the books which appeared later and which also base Analysis on Dedekind's cuts: 1) *Précis d'Analyse Mathématique*, Vol I, par E. Lainé (Paris, Vuibert, 1946)<sup>9</sup>.

2) The avant-guard book *The Theory of Functions of Real Variables*, by Lawrence M. Graves (Mc Graw – Hill 1946 Second edition 1956).

3) *Principles of Mathematical Analysis*, by Walter Rudin (Mc Craw – Hill, 1953. Second edition:1964 a famous book).

4) *A First Course in Mathematical Analysis*, by J. C. Burkill, Cambridge University Press 1962) this is a good book. So, P. Zervos' choice for the beginning of his book was also a posteriori been justified.

Its chapter II has the title: Sets<sup>10</sup> it can be divided into parts a), b), c), d), e), f).

a) has the title: *Definitions on sets*. It begins so: "Numbers constitute a set if they have a common property by which we can distinguish them. The general concept of a set is one for which we cannot have a perfect definition. Follow examples of sets of numbers, including that of algebraic numbers, and of points sets. The remaining part of a) concerns *set inclusion*.

In b), the concepts of upper and lower bounds, of least upper and greatest lower, bounds, are introduced and studied, with final result the statement and proof of Bolzano's theorem. Of course, the content of b) is standard for all the good books of "Arithmetized Analysis" (and, especially, the above – mentioned ones). As far as the emphasis on Bolzano's theorem is concerned, let us permit to reproduce the following passage from the above – mentioned Burkill's book: "The next theorem is one of the foundation – stones of analysis and in any orderly development of the subject, it must be found near the beginning. The reader should master its meaning and should test its truth by constructing for himself examples (such as those at the end of this section). If he finds the proof, based on Dedekind's axiom, natural and comprehensible, so much the better. If he finds it more difficult to follow than the arguments that he had so far encountered in mathematics, he need not be disheartened, but should read the succeeding chapters and return later to a study of the foundations.

**Theorem 1.8** *If  $S$  is a (not – empty) set of numbers which is bounded above, then of all the upper bounds there is a least one*<sup>11</sup>.

<sup>9</sup> This volume and volume II (this, with the collaboration of a Master, George Bouligand) succeed in saying a true wealth of important things in a dense but very readable way; a miracle of clear, clean and efficient organization of the matters.

<sup>10</sup> As far we know, G. Remoundos in his inaugural speech in 1905 as Dozent in the University of Athens, he gave the first definitions in set theory (as denombrable set, limit point, perfect set, the concept of power) G. Remoundos, *On the progress of Mathematical Analysis during the last century and the last years*. Athens 1906 p. 8.

<sup>11</sup> op. cit. Bolzano's theorem p. 15.

P. Zervos adds no such written comments to his uninterrupted beautiful exposition; but, orally, gave often, the following advice to his students: “when you read a mathematical book never stop at p. 30 before you have already arrived at p. 100”<sup>12</sup>.

c) has the title: *Countable and uncountable sets*. The concept of a bijection (called “a perfect correspondence”) is introduced, as well as the definition of the above concepts. Then, follow the classical cantor proofs of the countability of various important infinite sets. Finally the fact that the set of all real numbers is uncountable is stated and the term “power of the continuum” is introduced.

Here, as everywhere in this book, the exercises from a substantial extension of the results proved in its the theoretical development.

d) has the title: *Geometric expressions on sets*.

e) Entitled *Limit – points* culminates in the proof of the Bolzano-Weierstrass theorem (called Weierstrass – Bolzano” in this book). Meanwhile the concept of a *derivate* set of a set is introduced. It is important that the above fundamental theorem is not proved by bisection, as usual, but by considerations of order. So one can extend this proof to one for the case of a general order – complete ordered set (i.e. one with no gaps). e) has the title *Derivate sets* and it is mentioned that the definitions given are due to Cantor. Follow the topological definitions of G. Cantor for the real line.

f) has the title: *Ordered Sets* (linearly ordered). Here, in particular, are introduced the well-ordered sets. All the above matters are contained in 32 pages. With illuminating examples, the whole text is readable.

In p.30, he introduces the concept of a point of accumulation, in the case of a set of points on the real line. At the end of points is of the utmost interest and importance in the higher branches of analysis; but it is for the most part too difficult to be included in a book such as this. There is however one fundamental theorem which is easily deduced from Dedekind’s theorem and which we shall require later.

*Theorem.* If a set  $S$  contains infinitely many point and is entirely situated in an interval  $(\alpha, \beta)$ , then at least one point of the interval is an accumulation point”<sup>13</sup>.

The proof is by bisections and another proof is given in pp. 138-139. The concepts of upper and lower bounds (of a set on the real line) and of least upper bound and greatest lower bound and Bolzano’s theorem will be found in pp. 155-156.

The Chapter III of ICZ has the title: *Theory of limits*. After a) the standard definition of the limit of a sequence of real numbers (said, as everything, in ICZ, in a most explanatory and clear way), P. Zervos b) introduces the concept of the limit of a variable taking the values of a linearly ordered, possibly uncountable, set of real values. After it comes one of the most important development in this book, this c) on upper and lower limits of infinite sequences of real numbers. Even now, one cannot

<sup>12</sup> From here we wish to express our warmest thanks to Professor S. P. Zervos, P. Zervos’ son, for his precious help during the preparation of this paper.

<sup>13</sup> Hardy op. cit. p. 31-32.



find a book on Real Variables with a clearer and most detailed treatment of this topic. In particular, there is a detailed proof of the equivalence of two possible definitions of each one of these two concepts and, of course, their relation with the eventually existence, limit-points of the set of the terms of a sequence is mentioned. In all subjects, ICZ is a book with eloquent examples. Usually, they precede theorems. Then, P. Zervos examines the possibility of extending the above concepts to more general situations with variables describing linearly ordered sets c) closes with a most detailed list of applications of the above concepts. With this, classical results as that  $\lim(x+y) = \lim x + \lim y$  will appear as special cases in relation  $\leq$ . In d), we have a detailed exposition of facts concerning the Cauchy's theorem on the necessary and sufficient condition for a sequence to converge. The whole, on the same high level of the above mentioned matters. Even now, it is very rare to find a book treating these matters in a way that is at the same time, "departure from the earth" and soon, but in a natural way, "arrived at heaven". e) contains the application, that we already announced, of the end of c) to obtain classical equalities as

$\lim(x+y) = \lim x + \lim y$ . In f) the above are applied in classical proof that  $(1 + \frac{1}{\mu})^\mu$

has a (finite) limit when  $\mu \rightarrow \infty$ . g) is a short mention of the classical concept-fact of the limit of a rational expression.

Chapter IV has the title "Functions a) General definition of a function (of one variable)" Let  $\Sigma_1$  be a set; suppose that by a certain law to every number X of  $\Sigma_1$  corresponds a number y; the set of all these numbers y is a function defined on the set  $\Sigma_1$ ; we express this also in the following way: the variable y is a function of the variable x defined on the set  $\Sigma_1$ .

The law of the correspondence may be characterized by a finite number of words, be given completely; but it is also possible to only know that there is some law of correspondence between the two variables x and y".

Then, follow all sorts of examples of functions. Remarks for the symbols that define functions". All sorts of explanation. Especially, for *implicit functions*, defined by equations of the form  $F(x, y) = 0$ . "Algebraic functions". An example of the corresponding content: "Suppose that the relation that associates x and y is given by the equation:

$$axy^5 + \beta x^2 y^3 + \gamma x^5 y^2 + \delta y + \lambda = 0$$

For any value of x different from zero, in order to find the corresponding value of y I have to solve an equation of the fifth degree with respect to y; hence, I cannot, in general, write  $y = \sigma(x)$ , where in  $\sigma(x)$  will be noted the algebraic operations that I have to do for finding the value of y that corresponds to this value of x.

"I can, of course, write always, symbolically:  $y = \sigma(x)$ ". *Transcendental functions*. Inverse functions". b) "Functions of a real variable". Here, the author restricts the domain of definition to an interval or half-line or the real line itself. "Definitions". Bounds, greater, lower bounds and least upper bounds, neighborhoods of points etc.

We must stress that the spirit of this book is, always, to give varied examples in order to solve a priori, any possible corresponding problem of understanding of the reader. c) "Limit of a function". Suppose that a variable x takes successively the values of an infinite sequence.

$$(\Sigma_1) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu, \dots$$

and that another variable  $y$ , which is function of  $x$ , takes correspondingly the values

$$(\Sigma_2) \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_\nu, \dots$$

Suppose now that  $x$  has a certain number  $a$  as limit; if then it happens, that  $y$ , i.e. the sequence  $(\Sigma_2)$  has a limit, number  $b$ , we shall say that  $b$  is the limit of  $y$  for  $x=a$  and devote this so:  $\lim_{x=a} y = b$ ".

Then, follow extensions and refinements. In particular: "Sufficient and necessary condition in order that  $y$  has a finite limite when  $x$  tends to  $a$ , is the following: To every positive number  $n$  corrersponds some positive number  $\varepsilon$ , such that to two values  $x', x''$  of  $x$ , for which  $|x' - x''| < \varepsilon$ , correspond two values  $y', y''$  of  $y$  for which  $|y' - y''| < n$ ".

Before, the author has considered explicitly and uncountable ordered sets. Here is the place to make the following remark: In all its first Part (i.e. from Irrational numbers to integration), ICZ is written in a more set-theoretical spirit than even books written now and which can contain, in a separate Chapter, more set theory than ICZ c) finishes with a detailed list on the use of the symbols  $-\infty, -\infty, \infty$ , in order that the reader avoids any misunderstanding. d) "Continuous function". After Jordan, this is, of course a "standard" part in the textbooks on (arithmetized) Analysis. Concerning the definitions, an "internal" variation exists in Baire, who, from the very beginning of the chapter, defines continuity (and also uniform continuity) for the case of many (a finite number) variables. Concerning the proofs (strict, naturally) of the basic theorems, one can choose among a few patterns. The distinctive feature of ICZ is that, although completely strict and without repetitions, it is written in a somewhat Socratic spirit. Although everything is said, the reader has the feeling that he is thinking and dialoging with the writer, an "automatically" respected wise and deeply thinking friend. (This is one of thoughtful students for this book). In more detail: The author defines continuity in all possible strict ways (always in the set theoretic context). "Points of discontinuity". After the definition of the two kinds of such points, the author gives examples and studies them, in detail; e.g. the example where a function has in any interval, an infinity of points of continuity but it is continuous in no interval.

"Properties of continuous functions". So are called the basic theorems (which, in the Bourbaki language reflect the compactness, the connectedness and the uniform structure of a closed interval). A distinctive feature of ICZ, in accordance with the whole spirit of this book, is that one proceeds "from the proof to the theorem". Of course, the aim is somewhat said from the beginning of the proof, but the spirit is always that of making and exposing all the thoughts that, finally, lead us to the crystallized result. The necessity of the hypothesis (bounded, closed) is clearly shown in examples. In his oral lessons at the University of Athens, P. Zervos used to say that more important than a proof is the way in which we proceed to it<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> According to E. Stamatis.

*Function of a rational variable.* Here, the theorem of the extension of a uniformly continuous function on the rationals of a closed interval to the whole interval, is proved in detail. This is, for the thoughts required, the climax of the consideration, in ICZ, for continuous functions. *Monotonic functions* (strictly monotonic). Same theoretical spirit. The following simple proposition is the theoretical basis for the exact definition of inverse functions. A function  $f$ , strictly monotonic on the closed interval  $(a, b)$ , which takes just once each value between  $f(a)$  and  $f(b)$  is continuous. *Inverse functions.* Same set theoretic spirit. Application. Definition of the functions  $\sqrt[n]{x}, a^x, \log x$  in the case where  $x$  takes also irrational values. The general definition of  $a^x$  is naturally, achieved through the above-mentioned theorem of the extension of a function defined on the rationals and uniformly continuous there.

*Cyclic or trigonometric functions and their inverses.* Naturally, emphasis on the multivaluedness of these last. The exercises of Chapter IV constitute, as always in this book, complements to the theory; e.g. the two classical ones; 1)  $a^x (a > 0)$  is the only *continuous* function  $f$  with the property, for all real  $x$  and  $y$ :  $f(x)f(y) = f(x+y)$ . 2) An example of a function  $f$ , discontinuous at 0 and which has the property that, for any  $\varepsilon > 0$ , it takes, in the interval  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  all values between  $-1$  and  $1$ , and even an infinity of times, with no jump in this interval.

Chapter V entitled Derivatives and Differentials, has the same spirit; e.g. it is proved, in detail, that if  $f$  is defined in  $[a, b]$  and has there a finite derivative  $f'$  with  $f'(x) \geq 0$ , for all  $x \in [a, b]$ , without having always  $f'(x) = 0$ , then  $f(a) < f(b)$ . (Proof by double application of the mean value theorem). However, we are, here in the classical core of the Differential Calculus and any serious author has the duty to teach, with care, clarity and examples the right use of derivatives and differentials; concepts and means with which in particular was associated all the published in French, research of P. Zervos in the period 1905-1940. The corresponding emphasis is clear in this chapter and in the following ones; without, however forgetting the above mentioned, set theoretic spirit of ICZ; eg. After detailed definitions on derivatives the usual simple propositions with proofs and all sort of illuminating examples, we find one of the extremely few, results mentioned without proof in ICZ: "there exist many continuous functions which have no derivative at any point; there exist even general formulas for such functions".

Then, comes the subtitle: *Symbolisms useful for derivations.* Here is introduced and studied the concept of differential. Emphasis on the fact that the formula  $d\sigma(x) = \sigma'(x)dx$  is valid also when  $x$  itself is a function.  $f(t) \neq t$ , in which case  $d\sigma(x) = \sigma'(x)\Delta x$  no more holds. Then, comes the subtitle: *Successive derivatives and successive differentials.* Then *Rules useful for the derivation and the differentiation.* Some emphasis on the logarithmic derivative. Emphasis on the derivatives of inverse functions and on the derivative of a function of a function. Following subtle Applications and finding of derivatives. In the case of  $x^v$ , with  $v$  irrational, the one of the two proofs in ICZ is of set theoretic spirit. Then Derivatives of trigonometric functions. Afterwards Derivatives of the inverses of trigonometric functions. After numerous interesting examples and exercises comes: General properties of the derivatives. Rolle's theorem, Formule des accroissemets finis (for two functions, Cauchy), its special case for one function (Mean value theorem,

Lagrange). *Taylor's formula, Taylor's series* classical topics, but presented here with all the care and love of somebody the first papers of whom were on algebraic equations, Rolle's theorems, power series. *Infinitesimals*. Same spirit. The end: "One sees in the same way that the limes of the ratio of two infinitesimals does not change, if we replace each one of them by an equivalent infinitesimal, i.e. by one the ratio of which to the corresponding infinitesimal has the limit one". Proof. Then: "This theorem is fundamental for the Differential Calculus. *Remarks*. The finding of the principal values of infinitesimals as well as the development of an infinitesimal in a series of the powers of the principal infinitesimal constitute a substantial problem. Much use of them also in the applications of mathematics". Many classical exercises.

Chapter VI entitled Analytic applications of Taylor's formula. First subtitle Indeterminate forms; their true values". Here is a completely classical part of calculus; written, as everything in ICZ, with care and details. Second subtitle: Maxima and minima of a function of one variable. Same spirit.

For anybody who would ask, why so much extension, in a book like ICZ, for infinitesimals? The answer is in the above-mentioned Hadamard's<sup>15</sup> book. This begins so: "*Notions préliminaires*. Les notions fondamentales du calcul infinitesimal sont celles d' *infinitement petit* et d' *infinitement grand*. Une quantité infinitement petite est une quantité variable que tend vers zéro", notion which firstly appears in Cauchy<sup>16</sup>.

Chapter VII has the title *Geometric expressions and applications*. First subtitle *Geometric representation of a function*. Classical matter; but beginning as follows: "If I agree to call every real number a *point a* I can in the previous chapter replace the phrase for the value  $a$  of  $x$ , as well as the phrase for  $x=a$  with the phrase *at the point a*.

Obviously I set this term on the basis of the correspondence that I accept that exists between a real number and a point of the  $x$ - axis. I accept, therefore, that I can have the following correspondence ..." Footnote: "We do not mention, here what axioms are sufficient for the existence of this correspondence".

Chapter VIII *Functions of two real variables*. Here, ICZ recovers all his set-theoretic spirit. The topological definitions of G. Cantor, already mentioned and used in the case of the real line are given, now, in the case of the Euclidean plane. Note only that "connected region" means *arcwise connected region*. These, under the subtle *Definitions*. Exercice: "A set of points, each one of which has at least the one coordinate rational is not closed". Next subtitle: Properties of the continuous functions. It is the extension to two variables of what has been proved, above, for one variable. The proofs (mainly, by nested rectangles), well known but not trivial. The remaining part of this chapter is, naturally, classical matter. Successive subtitle: *Derivatives, Differentials*. In particular Definitions of *partial derivatives* and *partial differentials*. Then: Formula "des accroissements finis". The derivative of a composite function. Definitions of the differentiability and of the total differential. *Derivative of an implicit function*. The author informs the reader that the content of this chapter can be extended to three variables and he applies this in the case of the total differential.

---

<sup>15</sup>

<sup>16</sup> Oeuvres (2), III, 19; IV, 16.



Now we arrive at Chapter IX *Simple Integrals*. First subtitle: *Definite integrals*. The author begins so: "Let  $y = \sigma(x)$  be a continuous function in an interval  $(a,b)$ . Let us see if there is a function  $\varphi(x)$  with the property: Its derivative  $\varphi'(x)$  coincides in  $(a,b)$  with  $\sigma(x)$ ". It is proved that there exists such a function. The proof that was considered as sufficient by mathematicians of older times and which cannot satisfy us to day, but which leads us to the purely analytic proof is the following...

...With respect to the above proof I notice that I speak for an area with have defined what an area is; such a definition is given after the purely analytic direct definition of the definite integral; I notice also that I considered a graphic description (he writes: construction) without taking account of the fact that this description presupposes that some conditions are satisfied, one of which is the monotonicity in an interval; but there exist continuous functions cannot be represented graphically".

"Subtitle: *Analytic definition of the definite integral*. Let  $\sigma(x)$  be a function bounded, continuous or discontinuous, in  $(a,b)$ , where  $a < b$ ". Then, follows the formation of the upper and lower Darboux sums and the statement and proof of the corresponding theorem of Darboux. The whole presentation, where everything is said and explained, is beautiful. Of course, it is a subject where the two fundamental "post - Cauchy" and "pro-Lebesgue" original contributions where these of Riemann and Darboux, as it is justly said in the fine presentation of it in Goursat's volume I. Some of the presentations in contemporary books, too concise and condensed, cannot have on the reader the same positive effect that, have presentations as those in Goursat's and in P. Zervos' books. With respect to ICZ, the same holds for the whole transition from the definite to the indefinite integral. Successive subtitles: *Integrable function*. *Riemann's definition*. Footnote: "There exists a more general definition given by Lebesgue". *Properties of the definite integrals*. *Mean-value theorem*. The definite integral as function of its upper limit. The cleanness of the notion left to the reader by ICZ is well indicated by the following simple but useful *Remark* in it (pp. 256-257): "From the definition of the definite integral one immediately sees that

$$\int_a^b \sigma(x)dx = \int_a^b \sigma(t)dt = \int_a^b \sigma(y)dy = \dots$$
, i.e. that the definite integral is function of the limits  $a,b$  and of the parameters that may exist in  $\sigma(x)$ , but not of the letter  $x$  that appears under the symbol of the integration" (In ICZ, a proof follows). "Evaluation of the definite integral". As everywhere in ICZ, there is a special care for avoiding possible misunderstandings. So, in the example,

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctg b - \arctg a$$
, it is remarked that when one takes one of the infinitely many values that  $\arctg b$ , of all the infinitely many possible values that  $\arctg b$  can take, that to which continuously "goes"  $\arctg x$  when  $x$  "goes" continuously from  $a$  to  $b$ . *Methods of integration*. Analogous with the above remarks in the topic: *Integration by substitution* in order that the reader avoids errors coming from the non-fulfilment of some hypothesis, as the bijective correspondence. *Finding some primitive functions*. Examples, worked in depth and chosen exercises (as everywhere in ICZ). With this closes the first part of ICZ. (p.1-279).

The second part of ICZ (p.1-110) concerns classical matter and so its presentation is, by necessity, in the classical style for it; with, of course, always the same meticulous care in proofs etc.

Chapter I intitled: *Indefinite integrals of rational functions*. Successive subtitles: *Integration of a rational integral functions*. Reduction of non integral rational functions. Putting a rational fraction into simple ones. Here one sees clearly

the algebraic mind of the author who had begun his research by papers on algebraic equations. The richness and care in the presentation shows unmistakably the author's love for this topic. "Integration of a rational fraction". General methods of reduction. Same remark.

Chapter II has the title: Integration of functions irrational with respect to the variable. Successive subtitles Application of methods of substitution. Reduction formulas. Same remarks.

Now we come to the last part of Chapter II, which although classical, is not found in all (even very good) books and which, here, is developed with all the great importance it has (theoretical, practical and of course, which with its tremendous consequences changed all mathematics). *Elliptic and hyperelliptic functions*. The presentation is, in all senses, the best possible.

Chapter III has the title: Differential Equations Elementary methods of integration. Successive sub-titles. Definitions Transformations of the equation  $\sigma(x, y, y') = 0$ . Reduction of an integration to quadratures. Differential equations of the second order. Special cases of differential equations of order  $v$ .

In Chapter II, one clearly sees that the author is a mathematician having spent much a considerable part of his life in this matter.

The book closes with the following remark: "The above theories that concern linear differential equations of the second order with constant coefficients as well as the method of variations of the arbitrary constants etc can be extended to the linear equations of the  $n$ -th order. The way of this extension will be examined in detail in the second volume of this work".

Unfortunately, this second volume has never been published, although its content was taught, for many years, by P. Zervos at the Athens University.

2) More than twenty years after P. Zervos' death, in Steven A. Gaal's book *Linear Analysis and Representation theory*<sup>17</sup> we can quote: "As far as Section 5 is concerned first we mention that a generation ago Lie groups were called *continuous groups*. The main items of the classical literature on this subject are the books of Lie (1,2) and Elie Cartan (2), a volume of G. Kowaleskii (1) and a book by P. Zervos (1) on the problem of Monge. The various volumes. The various volumes and editions of a book by Chevalley (1,2,3) are more recent"<sup>18</sup>.

Nevertheless Zervos remains for all his life attached to their subject. So in the Proceedings of the International Congress of Mathematicians in Bologna (1928) as well as in Interbalcanic Mathematical Congress in Athens<sup>19</sup> (1934) and this in Bucharest<sup>20,21</sup> (1937) P. Zervos presented his communications on this same subject. Large generality of the new results and in parallel, simple but eloquent examples are a characteristic of them.

<sup>17</sup> Springer 1973. 688 pages.

<sup>18</sup> Op. cit. p. 660.

<sup>19</sup> Sur quelques équations différentielles indéterminées Congrès Interbalcanique des. Math. Athènes 1934 p. 55-58.

<sup>20</sup> Sur quelques conditions d'intégration de certains systèmes d'équations différentielles indéterminées Bull. mat. Soc. roum. des Sciences t. 40.

<sup>21</sup> Under Zervos' influence a young mathematician, who later became professor of Astronomy, presented his works during this period see D. Kotsakis, Untersuchungen über eine Klasse der Monge'schen Gleichungen Bull. math. Soc. Roumaine Sci. t. 40, 1938 p. 167-170; Ueber die Integration eines Systems von Mongeschen Differentialgleichungen Bull. Soc. Math. Crèce 1938 t. 18 p. 9-23 (in Greek).

P. Zervos had also introduced a new concept, that of *a system of Monge in involution* (in analogy to the classical concept of a system of partial differential equations in involution).

In the two Interbalcanic Congresses P. Zervos gave an hour lectures. To see the large spectrum and the depth of them, we state the beginning of the first "Sur quelques équations différentielles indéterminées": "What have been the paths that they have followed until now in the problem of the general integration of indeterminate systems? Or, rather, in what way have they set the problem of the integration of such systems: What special cases have been studied? What sort of solutions have been found and by what methods? It is in this lecture that P. Zervos introduced the concept of *symbolic integration*. His motivation arises, as he says, from the important successes of the *symbolic* differentiation of Elie Cartan. In his last published paper, in the Proceeding of the Academy of Athens (1939), P. Zervos continues the consideration of symbolic integration<sup>22</sup>.

In the second Interbalcanic Mathematical Congress in Bucharest, in his lecture, P. Zervos will make a comparison between Indeterminate Analysis and its synonym (but so different) in Number Theory. He pointed the analogy, wherever it exists. This P. Zervos act was not accidental. For all his live he was attracted by Number theory, especially the elementary one.

Nevertheless we must stress that during his career as professor at Athens University (1918-1920 and 1923-1949), P. Zervos will treat, either in Seminar or in the last years courses on: Monge's Problem, Pfaff's Problem and continuous groups.

#### **IV. Some of ICZ's contribution to the advance of Mathematics abroad.**

C. D. Papakyriakopoulos, a student of Civil Engineering Department in the Polytechnic School of Athens, loved Mathematics from the time he was a schoolboy. In the Polytechnic School he met Prof. Nicolaos Kriticos, a mathematician, a teacher and a man of highest quality. They became lifelong friends, with respect on the side of the younger and esteem of the older. Just before his graduation, Papakyriakopoulos left the Polytechnic School and became a student of Mathematics in the University of Athens. There, as all the students, he became an admirer of P. Zervos. As soon as one saw P. Zervos formed the opinion that he was first of all a man of genius. His book played on Papakyriakopoulos<sup>23</sup> the role that one guess from the following. Back from Princeton for the summer of 1949, he sees some Greek students of Mathematics studying a renowned foreign Analysis. He says then to them: "Why are you studying such a book? There are only three books on analysis, Jordan's, Knopp's (Theory of Functions) and P. Zervos' ICZ". When in 1965, S. P. Zervos<sup>24</sup> reprints ICZ which was out of sale from many years, Papakyriakopoulos congratulate him for it. He adds, it is one of the books to who I owe my culture.

The above mentioned S. P. Zervos' thesis became a standard reference for the *Abstract Geometry of the Zeros of Polynomials of one variable*. But could ever have

<sup>22</sup> Sur l' intégration symbolique Proc. of the Ac. of Athens Vol. 14. 1939 p. 448.

<sup>23</sup> Christos Papakyriakopoulos (Veblen prize) in 1964 is the most famous Greek mathematician of his generation. His mathematical activity was related to the topology of 3-manifolds; his name is connected with his big three achievements "the loop theorem", "Dehn's lemma" and "the sphere theorem". For more details see V. Poenaru, the three big theorems of Papakyriakopoulos. Bull. of the Greek Math. Soc. Vol. 18 1977 p. 1-7.

<sup>24</sup> Professor of Mathematics at the University of Athens from 1961.

been made without the impulse given by ICZ? Obviously not. The next two books of a general character which first played a major role in this preparation were the classics *A survey of Modern Algebra* by G. Birkhoff and S. Maclane and *Topologie Générale* Ch. I et II 2<sup>nd</sup> éd. by Bourbaki (of course, this thesis could not have been made without the first edition of M. Marden's book).

Directly from the chapters of ICZ on limsup and liminf and on the Darboux theorem in integration was born the idea of an *abstract concept of dimension*<sup>25</sup> having as special cases e.g. linear dimension, Lebesgue's topological dimension, the Riemann – Darboux definite integral.

From Carandinos' brochure on differential calculus<sup>26, 27</sup>, where appeared for the first time in Greek Lagrange's conception on the foundation of analysis, to P. Zervos' book on Infinitesimal Calculus with the introduction of Dedekind's cuts and set-theory an important interval was passed. In both of them mathematical analysis was reflected on the way as it was conceived during 19<sup>th</sup> and 20<sup>th</sup> centuries. The mathematical reorganization in Greece<sup>28</sup> starting with Carandinos, continued with I. Hadjidakis' series of books (for the three levels of education) and obtained one of its highest points with ICZ.

According to Lejeune – Dirichlet's aphorism, analysis' tendency is to substitute the ideas to the calculus,<sup>29</sup> paraphrasing it we can say that ICZ substitutes the modern ideas to the calculus.

<sup>25</sup> See S. P. Zervos, Une notion abstraite de dimension. C.R.Ac.Sc. Paris t. 261 1965 p. 859-862; Une définition générale de la dimension. Séminaire Delange – Pisot – Poitou, 1965-66, no 9 (31 Janvier 1966).

<sup>26</sup> Recherches sur la nature du calcul différentiel par M. le Dr J. Carandino, de Céphalonie, éphore de l' Université Ionienne, doyen de la faculté de Philosophie et professeur de mathématiques. Traduction du grec moderne par A. K. Corcyre de l' imprimerie du Government MDCCCXXVII.

<sup>27</sup> For more details see my papers: La reconstruction des Mathématiques en Grèce: l' apport de Ioannis Carandinos (1784-1834), *L' Europe Mathématique* Paris 1996 p. 305-319; Ioannis Carandinos (1784-1834). L' initiateur des mathématiques françaises en Grèce (to appear in *Historia Scientiarum*).

<sup>28</sup> For more details see my paper: Mathematics and Mathematical Education in the University of Athens from its foundation to the beginning of the XXth century *Archives Intern. d' Histoire des Sciences* Vol. 51 2001 p. 78-95.

<sup>29</sup> Apud Jacobi *Gesammelte Werke* t. I. Berlin 1881 p. 21, cited by Fouët, *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques* 2e éd. t. II 1904 p. 228. no 1.



Miesenbach, 21.-27. Mai 2006

Von der Tontafel zum Internet - Der Einfluß des Mediums auf die Entwicklung der Mathematik

Annette Vogt (Berlin)

### **Vorlesungs-Mitschriften als Quelle?**

Ausgangspunkt des Beitrages ist die Frage, für wen und wofür überlieferte Vorlesungs-Mitschriften (von Mathematik-Vorlesungen) als Quelle dienen können bzw. gedient haben. Die im Vortrag angeführten Beispiele stammen aus der Mathematikgeschichte in Deutschland bzw. Europa des 19. Jahrhunderts.

In einem ersten Teil werden die verschiedenen Formen der Vorlesungs-Mitschriften behandelt.

Zunächst handelt es sich um Mitschriften im eigentlichen Sinne, d.h. ein Student (Studentinnen werden an deutschen Universitäten erst ab 1900 gesetzlich zugelassen, von den Ausnahmen, die es zuvor gab, sind Mitschriften nicht bekannt), also ein Student schrieb die Mathematik-Vorlesungen eines bestimmten Privatdozenten bzw. Professors während des ganzen Seminars mit. Hierzu gibt es eine Reihe von bekannten Beispielen (mehrere Studenten bei Carl Gustav Jacob Jacobi in Königsberg, Ernst Abbe bei Bernhard Riemann in Göttingen, mehrere Studenten bei Karl Weierstraß in Berlin).

Von diesen Mitschriften wurden - handschriftliche - Abschriften bzw. Kopien angefertigt, die dem jeweiligen Privatdozenten bzw. Professor am Ende des Seminars oder dazwischen übergeben wurden.

Aber es wurden Abschriften offenbar auch an die Bibliotheken der jeweiligen Mathematischen Seminare (in Berlin, Göttingen u.a.) gegeben, denn zuweilen befinden sich dort noch heute Sammlungen solcher Mitschriften (z. B. auch in der Bibliothek des Prager Mathematischen Seminars).

Die Abschriften der Mitschriften wurden getauscht, ja sogar verkauft. Der Tausch der Mitschriften (d.h. der Abschriften der Mitschriften) fand unter befreundeten Kommilitonen statt (z. B. zwischen Ernst Abbe und seinem Freund). Der Verkauf der Abschriften von Mitschriften hingegen diente zum einen dem Broterwerb des betreffenden Studenten, der die Kopie anfertigte und zum zweiten der Verbreitung dieser Vorlesungs-Mitschriften über große Entfernungen, bis in die USA und nach Rußland.

Ernst Abbe z. B. tauschte die Mitschriften mit seinem Freund und verkaufte Abschriften seiner Mitschriften an (mindestens einen) Studenten aus Rußland.

Bezüglich der Zirkulation der Abschriften fallen dem (osteuropäischen) Leser des 20. Jahrhunderts durchaus die Praktiken der samizdat-Literatur ein, das Kopieren und Verfielfältigen mit technisch einfachsten Mitteln, das Verbreiten und das Lesen eines einzigen Exemplars durch viele Leser nacheinander, die Probleme der Qualität solcher Kopien. Während es bei der samizdat-Literatur um die Qualität bzw. Lesbarkeit der x-ten Schreibmaschinen-Kopie ging, war es bei den Mitschriften und ihren Abschriften ein Problem der Lesbarkeit der jeweiligen Handschrift.

Im zweiten Teil wird untersucht, zu welchen Zwecken die Vorlesungs-Mitschriften benutzt wurden.

Im trivialen Fall handelte es sich um die Nutzung durch den Studenten, der mitschrieb, und es diente seinem Lernen und Studieren.

Sie konnten dem betreffenden jeweiligen Professor für die Vorbereitung weiterer Vorlesungen dienen.

Wir wissen von Mathematikern, das einige unter ihnen die Mitschriften, d.h. die Abschriften der Mitschriften, für die Verbreitung der Erkenntnisse aus ihren Vorlesungen ganz bewußt und absichtsvoll nutzten. Am bekanntesten bezüglich dieser Praxis war vermutlich Karl Weierstraß.

Diese gezielte Weitergabe diente sowohl als Information für Kollegen, war dann ein "Artikel-Publikations-Ersatz", als auch zum besseren Austausch mit Kollegen, in diesem Fall mit freundlichen Kollegen, mit denen man dieselben oder ähnliche Probleme behandelte, aber mit denen man sich nicht in Konkurrenz befand.

Und last but not least - solche Mitschriften wurden zur Vorbereitung von Werkausgaben bzw. Gesammelten Werken herangezogen, sowohl zu Lebzeiten des Betreffenden als auch für Werkausgaben, die postum erschienen.

Dies führt uns zum dritten Aspekt des Beitrages, der Frage nach der Tradierung von Vorlesungs-Mitschriften.

Wir können Vorlesungs-Mitschriften suchen und entdecken - in Bibliotheken mathematischer Institute (z. B. in Prag, Berlin, Göttingen) und in Archiven bzw. Bibliotheken, die Nachlässe von Mathematikern aufbewahren. Bekannt geworden sind vor allem jene Fälle, in denen auf Grund der auf- oder wiedergefundenen Mitschriften neue Publikationen entstanden (von Bernhard Riemann über Karl Weierstraß bis jüngst Issai Schur und seine Züricher Vorlesung).

Damit kommen wir zur Ausgangsfrage zurück: für wen und wofür gab es bzw. existieren Vorlesungs-Mitschriften als Quelle? Und unsere Antwort könnte heißen: für uns - die Mathematikhistoriker -, aber zuvor zuerst für die Studenten, sodann für den jeweiligen Professor und seine Kollegen und - von einigen der damaligen Mathematiker durchaus so gesehen - für die Nachwelt, der die Mathematikhistoriker/Innen durch die Publikation solcher Mitschriften einen Einblick in die Gedankenwelt des betreffenden Mathematikers und gewissermaßen in die Werkstatt seines Denkens ermöglichen.

Dr. Annette Vogt  
MPI für Wissenschaftsgeschichte  
Boltzmannstr. 22  
14195 Berlin

vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

Fernab, wo einst die Schweden rangen,  
wir recht gelehrte Reden schwangen.

Zuweilen gab's latente Stärken,  
doch soll man sich Talente merken.

Es zeigte sich am Repertoire,  
dass mancher nicht ganz deppert war.

Wenn Eignes fremd sich wiederfindet,  
zu Recht sich das Gefieder windet.

Manch einer zeigt sich wutentbrannt,  
wenn man ihm seine Brut entwand.

Man ist mit Sicherheit bestrebt,  
dass man danach den Streit behebt,

Da hinten, wo sich Tücher bauschen,  
da konnte man auch Bücher tauschen.

Auch wenn die Rübe leise weicht,  
falln uns noch die Beweise leicht.

Wer noch den alten Plato kannte,  
der wusste nicht, was Cato plante.

Was soll ich nur von Scheubel denken?  
Sein Werk würd' ich dem Deubel  
schenken.

Niels Henrik, lang nach Babels Ende,  
erschiene Deine, Abels, Bände.

Wer Abels Bruder Kain verklärt,  
beurteilt auch Herrn Klein verkehrt.

Es schlug schon auf die Leberwerte,  
was jemand über Weber lehrte.  
Man wollte erst den Ball feilhalten,  
dann ließ man doch das Fallbeil walten.

So manchem hat der Drill gestunken,  
in Wiener Neustadt still getrunken.

Ich würde eher Schaben grüßen  
als einmal aus dem Graben schießen.

Sprecht lieber auf den Wanderfahrten  
z. B. über van der Waerden.

Fragt man uns, was die Tagung soll:  
Wir finden die Entsagung toll.

Wir können nur noch danke schlucken,  
respektvoll sich auch Schlanke ducken.

Zum Dank soll man an Kinderbetten  
die gute Christa Binder ketten.

Ach, liebe Christa, halt es aus.  
Wir fahrn jetzt heim, Du altes Haus.





Fernab, wo einst die Schweden rangen,  
wir recht gelehrte Reden schwangen.

Zuweilen gab's latente Stärken,  
doch soll man sich Talente merken.

Es zeigte sich am Repertoire,  
dass mancher nicht ganz deppert war.

Wenn Eignes fremd sich wiederfindet,  
zu Recht sich das Gefieder windet.

Manch einer zeigt sich wutentbrannt,  
wenn man ihm seine Brut entwand.

Man ist mit Sicherheit bestrebt,  
dass man danach den Streit behebt,

Da hinten, wo sich Tücher bauschen,  
da konnte man auch Bücher tauschen.

Auch wenn die Rübe leise weicht,  
fälln uns noch die Beweise leicht.

Wer noch den alten Plato kannte,  
der wusste nicht, was Cato plante.

Was soll ich nur von Scheubel denken?  
Sein Werk würd' ich dem Deubel  
schenken.

Niels Henrik, lang nach Babels Ende,  
erschiene Deine, Abels, Bände.

Wer Abels Bruder Kain verklärt,  
beurteilt auch Herrn Klein verkehrt.

Es schlug schon auf die Leberwerte,  
was jemand über Weber lehrte.  
Man wollte erst den Ball feilhalten,  
dann ließ man doch das Fallbeil walten.

So manchem hat der Drill gestunken,  
in Wiener Neustadt still getrunken.

Ich würde eher Schaben grüßen  
als einmal aus dem Graben schießen.

Sprecht lieber auf den Wanderfahrten  
z. B. über van der Waerden.

Fragt man uns, was die Tagung soll:  
Wir finden die Entsagung toll.

Wir können nur noch danke schlucken,  
respektvoll sich auch Schlanke dücken.

Zum Dank soll man an Kinderbetten  
die gute Christa Bänder ketten.

Ach, liebe Christa, halt es aus.  
Wir fahrn jetzt heim, Du alles Haus.





## Teilnehmer

- \* KLAUS BARNER  
FB Mathematik-Informatik, Univ. Kassel, D 34109 Kassel  
(Christian-Beyer-Str.10, D 34128 Kassel), Deutschland  
Klaus.Barner@uni-kassel.de  
169
- \* MARTINA BEČVÁŘOVÁ  
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, CVUT v Praze,  
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien  
nemcova@fd.cvut.cz  
150
- CHRISTA BINDER  
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien,  
Wiedner Hauptstr. 8-10/101, A 1040 Wien, Österreich  
christa.binder@tuwien.ac.at
- WOLFGANG BREIDERT  
Baumgartenstr. 9, D 76316 Malsch, Deutschland  
Wolfgang.Breidert@philosophie.uni-karlsruhe.de  
94,113
- \* MILOŠ ČANAK  
Brzakova 4, YU 11000 Belgrad, Serbien  
123
- \* PHIL J. DAVIS  
Division of Applied Mathematics, Brown University,  
Providence, R.I., 02912 USA  
Phillip\_Davis@brown.edu  
212
- \* (SERGIJ DEMIDOV)  
Institute for the History of Science and Technology,  
Sakhi per 1/5, RU 103012 Moscow, Russia  
ssd@sd.pvt.msu.su  
56
- \* STEFAN DESCHAUER  
Fachrichtung Mathematik, Professur für Didaktik der Mathematik,  
TU Dresden, D 01062, Deutschland  
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de
- GERLINDE FAUSTMANN  
Kaisersteing. 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich  
gerlinda.faustmann@aon.at  
74
- \* JASNA FEMPL-MADJAREVIĆ  
5th Belgrade Gymnasium, KMM Arhimedes and Math. Institute,  
Vidikovacki venac 27 11000 Belgrad, Serbien  
jasnar@eunet.yu
- MENSO FOLKERTS  
Geschichte der Naturwissenschaften, Universität München,  
Museumsinsel 1, D 80538 München, Deutschland  
M.Folkerts@lrz.uni-muenchen.de



## Teilnehmer

- \* KLAUS BARNER 169  
FB Mathematik-Informatik, Univ. Kassel, D 34109 Kassel  
(Christian-Beyer-Str.10, D 34128 Kassel), Deutschland  
Klaus.Barner@uni-kassel.de
- \* MARTINA BEČVÁŘOVÁ 150  
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, CVUT v Praze,  
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien  
nemcova@fd.cvut.cz
- CHRISTA BINDER  
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien,  
Wiedner Hauptstr. 8-10/101, A 1040 Wien, Österreich  
christa.binder@tuwien.ac.at
- WOLFGANG BREIDERT  
Baumgartenstr. 9, D 76316 Malsch, Deutschland  
Wolfgang.Breidert@philosophie.uni-karlsruhe.de
- \* MILOŠ ČANAK 94,113  
Brzakova 4, YU 11000 Belgrad, Serbien
- \* PHIL J. DAVIS 123  
Division of Applied Mathematics, Brown University,  
Providence, R.I., 02912 USA  
Philip\_Davis@brown.edu
- \* (SERGUI DEMIDOV) 212  
Institute for the History of Science and Technology,  
Sskii per 1/5, RU 103012 Moscow, Russia  
ssd@ssd.pvt.msu.su
- \* STEFAN DESCHAUER 56  
Fachrichtung Mathematik, Professur für Didaktik der Mathematik,  
TU Dresden, D 01062, Deutschland  
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de
- GERLINDE FAUSTMANN  
Kaisersteing. 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich  
gerlinde.faustmann@aon.at
- \* JASNA FEMPL-MADJAREVIĆ 74  
5th Belgrade Gymnasium, KMM Arhimedes and Math. Institute,  
Vidikovacki venac 27 11000 Belgrad, Serbien  
jasnaf@eunet.yu
- MENSO FOLKERTS  
Geschichte der Naturwissenschaften, Universität München,  
Museumsinsel 1, D 80538 München, Deutschland  
M.Folkerts@lrz.uni-muenchen.de

- \* IVOR GRATTAN-GUINNESS 129  
 Mathematics, Middlesex University,  
 Queensway, Enfield, London EN3 4SF, GB  
 eggigg@ghcom.net
- DETLEF GRONAU  
 Institut für Mathematik, Universität Graz,  
 Heinrichstr. 36, A 8010 Graz, Österreich  
 gronau@uni-graz.at
- \* HARALD GROPP 10  
 Mühlringstr. 19, D 69121 Heidelberg, Deutschland  
 d12@ix.urz.uni-heidelberg.de
- MARIA GRUBER-HAUNLIEB  
 Löbersdorferstr.7, A 3382 Loosdorf, Österreich  
 maria.gruber-haunlieb@schule.at
- \* MAGDALENA HYKŠOVÁ 184  
 Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical Univ. in Prague,  
 Na Florenci 25, CZ 11000 Prag 1, Tschechien  
 hyksova@fd.cvut.cz
- \* FRIEDRICH KATSCHER 42  
 Mariahilferstr. 133, A 1150 Wien, Österreich  
 dr.katscher.vienna@chello.at
- \* JÓZSEF KOLUMBÁN 160  
 Babes-Bolyai University, Str. Kogalniceanu 1  
 RO 400085 Cluj, Rumänien  
 kolumban@math.ubbcluj.ru
- \* GERHARD LINDBICHLER 48  
 Senfg. 1/7/3, A 1100 Wien, Österreich  
 gerhard.lindbichler@chello.at
- \* (MA LI) 220  
 Mathematical Department, Linköping University,  
 S 58183 Linköping, Schweden  
 mali@itn.liu.se
- \* RITA MEYER-SPASCHE 171  
 Max-Planck-Institut für Plasmaphysik,  
 D 85748 Garching, Deutschland  
 meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de
- \* SERGIO NOBRE 18  
 Dep. Matematica, IGCE, c.p. 178,  
 Rio Claro s.P, Brasilien  
 sernobre@rc.unesp.br
- \* (SVETLANA PETROVA) 225  
 Moskau  
 gsmirn@mech.math.msu.ru

- \* (CHRISTINE PHILI) 228  
 Fac. of Applied Math. and Physics, Dep. of Mathematics,  
 National Technical University, Zografou Campus,  
 GR 15780 Athen, Griechenland  
 xfili@math.ntua.gr
- \* FRANZ PICHLER 102  
 Schallenbergweg 7, A 4048 Puchenau, Österreich  
 franz.pichler@jku.at
- \* MARKO RAZPET 25  
 Pedagoška Fakulteta,  
 Kardeljeva Ploščad 46, SI 1000 Ljubljana, Slowenien  
 marko.razpet@fmf.uni-lj.si
- \* NADA RAZPET 79  
 Faculty of Education Koper, Faculty of Education Ljubljana,  
 SI 1000 Ljubljana, Slowenien  
 nada.Razpet@guest.arnes.si
- \* ULRICH REICH 1  
 Kurpfalzstr. 14, D 75015 Bretten;  
 Hochschule Karlsruhe, Technik und Wirtschaft, Fak. Wirtschaftsinfor-  
 matik,  
 Moltkestr. 30, D 76133 Karlsruhe, Deutschland  
 ulrich.reich@hs-karlsruhe.de
- MICHAEL VON RENTELN  
 Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe,  
 Englerstr. 2, D 76131 Karlsruhe, Deutschland  
 Michael.vonrenteln@math.uni-karlsruhe.de
- HERWIG SÄCKL  
 Traberweg 1, D 93049 Regensburg, Deutschland  
 herwsaeckl@aol.com
- LIGIA ARANTES SAD  
 Universidade Federal do Espirito Santo, Centro de Educacao - PPGE,  
 Av. Fernando Ferrari S/N, Goiabeiras, 29060-900 Vitoria, ES, Brasil  
 sadli@terra.com.br
- \* KARL-HEINZ SCHLOTE 107  
 Elie-Wiesel-Str. 55, D 04600 Altenburg, Deutschland  
 schlote@saw-leipzig.de
- \* PETER SCHMITT 205  
 Fakultät für Mathematik, Universität Wien,  
 Nordbergstr. 15, A 1090 Wien, Österreich  
 Peter.Schmitt@univie.ac.at
- \* GERT SCHUBRING 86  
 Institut für Geschichte der Mathematik, Universität Bielefeld,  
 Postfach 100131, D 33501 Bielefeld, Deutschland  
 gert.schubring@uni-bielefeld.de



* RENATE TOBIES	175
Historisches Seminar, TU Braunschweig, Schleinitzstr. 13, D 38023 Braunschweig, Deutschland renatetobies@web.de	
* PETER ULLRICH	140
Mathematisches Institut, Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz, Universitätsstr.1, D 56070 Koblenz, Deutschland ullrich@uni-koblenz.de	
* (ANNETTE VOGT)	240
MPI für Wissenschaftsgeschichte, Boltzmannstr. 22, D 14195 Berlin, Deutschland vogt@mpiwg-berlin.mpg.de	
* WALTRAUD VOSS	192
TU Dresden, Universitätsarchiv, D-01062 Dresden, Deutschland Waltraud.Voss@tu-dresden.de	

Bilder:

Gruppenbild vor Börsenhof (Peter Schmitt)

Gruppenbild vor Militärakademie, Wiener Neustadt (Peter Schmitt)

S. 24: Sergio Nobre (Peter Schmitt)

S. 47: Friedrich Katscher (Marko Razpet)

S. 93: Gert Schubring (Marko Razpet)

S. 122: Phil Davis (Marko Razpet)

S. 170: Rita Meyer-Spache (Peter Schmitt)

S. 202: Waltraud Voss (Peter Schmitt)

S. 219: Am Abend (Peter Schmitt)

S. 242: Stefan Deschauer (Peter Schmitt)

Fresko im Stift Neukloster in Wiener Neustadt (Marko Razpet)

Landschaft mit Baum, Miesenbach (Marko Razpet)