Vektorraum V über K $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Abbildung φ in zwei Variablen $\varphi : V \times V \to K$

heißt **inneres Produkt** (auf V) wenn

(a) $\varphi(v + v', w) = \varphi(v, w) + \varphi(v', w)$

(b) $\varphi(\lambda v, w) = \lambda \varphi(v, w)$ $\lambda \in K$

(c) $\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)}$ hermitisch

(d) $v \neq \mathrm{o} \;\Rightarrow\; \varphi(v, v) > 0$ positiv definit

(c) $\Rightarrow$ $\varphi(v, v) \in \mathbb{R}$

über $\mathbb{R}$: symmetrische Bilinearform

(c) $\Leftrightarrow$ $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$ symmetrisch

(b) und (c) $\Rightarrow$ ($\mathrm{b}_{\mathbb{R}}$) $\varphi(v, \lambda w) = \lambda \varphi(v, w)$

über $\mathbb{C}$: hermitische Sesquilinearform

(b) und (c) $\Rightarrow$ ($\mathrm{b}_{\mathbb{C}}$) $\varphi(v, \lambda w) = \overline{\lambda} \varphi(v, w)$

V heißt **Vektorraum mit innerem Produkt** (Prähilbertraum)

(inner product space)

über $\mathbb{R}$: euklidischer (Vektor-)Raum

über $\mathbb{C}$: unitärer (Vektor-)Raum

Schreibweise: *oft* $\langle v, w \rangle \coloneqq \varphi(v, w)$ *auch:* $\langle v \mid w \rangle$

häufig (Physik) auch umgekehrt: $\langle v, w \rangle \coloneqq \varphi(w, v)$ (über $\mathbb{C}$)

(Bemerkung) verwandte Begriffe sind

$(\forall v \in V)$ $v \neq \mathrm{o} \;\Rightarrow\; \varphi(v, v) < 0$ negativ definit

$(\forall v \in V)$ $\varphi(v, v) \geq 0$ positiv semidefinit

$(\forall v \in V)$ $\varphi(v, v) \leq 0$ negativ semidefinit

Vektorraum V mit innerem Produkt *induziert*

Norm $\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2}$

normierter Vektor $:\Leftrightarrow\ \|v\| = 1$

es gilt: $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

es gilt: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ (Parallelogrammregel)

Metrik $d(v, w) := \|w - v\|$

sowie Winkel $\cos\angle(v, w) := \dfrac{v}{\|v\|}\dfrac{w}{\|w\|}$

speziell $v \perp w\ :\Leftrightarrow\ \langle v, w\rangle = 0$ orthogonal, senkrecht

es gilt: $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v+w\|^2\ \Leftrightarrow\ v \perp w$ (Satz des Pythagoras)

$b_1, \ldots b_n$ **orthonormale Basis** *d.h.* normiert, paarweise orthogonal

$:\Leftrightarrow\ \langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$

Gram-Schmidtsche **Orthogonalisierung**

rekursive Konstruktion einer orthonormalen Basis

Ausgangspunkt: $v_1, \ldots, v_n$ Basis (*oder nur* linear unabhängig)

$(k = 1)$ $b_1 := \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$

$(k - 1 \to k)$ $b_1, \ldots, b_{k-1}$ sind orthonormal

setze $$v_k' = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k', b_i\rangle\, b_i$$

$\Rightarrow\ \langle v_k', b_i\rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$

also $b_k := \dfrac{v_k'}{\|v_k'\|}$

---

normierter (Vektor-)Raum V Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

mit $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0\ \Leftrightarrow\ v = \mathrm{o}$

$\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$

$\|v + w\| \leq |v| + |w|$ Dreiecksungleichung

---

metrischer Raum S Metrik $d : S \times S \to \mathbb{R}$

(Distanz-, Abstandsfunktion)

mit $d(v, w) \geq 0$ und $d(v, w) = 0\ \Leftrightarrow\ v = w$

$d(v, w) = d(w, v)$ Symmetrie

$d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ Dreiecksungleichung

es gilt $d(v, w)$