Heute versteht man unter einer Geometrie ein (formales) System von „Dingen und Relationen“, das für die Beschreibung des (physikalischen) Raumes geeignet ist oder doch als Verallgemeinerung eines solchen Systems verstanden werden kann.
Herbert Meschkowski, Mathematisches Begriffswörterbuch. 1965.

---

drei Punkte mindestens *(in allgemeiner Lage)* *vier Punkte*

$$P, Q,\ P \neq Q \ \rightarrow\ g \text{ (eindeutig) mit } P \in g, Q \in g$$

$$g,\ P \notin g \ \rightarrow\ h \text{ (eindeutig) mit } h \parallel g$$

$$g, h,\ g \neq h \ \rightarrow\ P \text{ (eindeutig) mit } P \in g, P \in h$$

---

4 Punkte:	kleinste Ebene	*7 Punkte:*
P, Q, R, S		P, Q, R, S, X, Y, Z
6 Gerade mit je 2 Punkten:		*7 Gerade mit je 3 Punkten:*
PQ, RS		PQX, RSX
PR, QS		PRY, QSY
PS, QR		PSZ, QRZ
	(Ferngerade)	XYZ

3 Gerade durch jeden Punkt

$PQ = RS,\ PR = QS,\ PS = QR$ *(3 Richtungen)* $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ *(3 Fernpunkte)* X, Y, Z

= affine Ebene *über* $\mathbb{Z}_2$ = projektive Ebene

---

affin	endliche (Inzidenz-)Ebene *(Ordnung k)*	*projektiv*
k	*Punkte je Gerade*	$k+1$
$k+1$	*Gerade durch jeden Punkt*	$k+1$
k^2	*Punkte*	k^2+k+1
$k(k+1)$	*Gerade*	k^2+k+1

Frage: Welche Ordnung ist möglich?

---

affiner Raum K^d	über Körper K	projektiver Raum $\mathcal{P}^d(K)$
Ordnung p	*z.B.* $K = \mathbb{Z}_p$ (p prim)	*(Charakteristik p)*
Ordnung p^s	*allgemeiner:* K endlicher Körper	$\lvert K\rvert = p^s$

Anwendung: Codierungstheorie

$\mathbb{A}^2(K) = K^2$ affine Ebene über Grundkörper K

(allgemeine) affine *(Inzidenz-)*Ebene A_2

Basispunkte der Standard-Koordinaten:

$o = (0,0),\ e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$ *Koordinatenachsen* k_1, k_2

Basispunkte eines *(allgemeinen)* Koordinatensystems:

O, E_1, E_2 *3 Punkte in allgemeiner Lage* O, E_1, E_2

Achsen $k_1 = OE_1$ *und* $k_2 = OE_2$

Hilbertsche Streckenrechnung

gegeben: X, Y *auf* k $(k := k_1)$

$a : A \in a \parallel k\ (a \neq k)$ *Hilfslinie parallel* k *oBdA.* $A = E_2$

$b : Y \in b \parallel OA \to B := b \cap a$ *Parallelogramm* $OYBA$

$c : B \in c \parallel XA \to C := c \cap k$ *Parallelogramm* $XCBA$

C : Summe *von* X *und* Y

$X = (0,x), Y = (0,y) \to C = (0, x+y)$

(Längen:) $XC = AB = OY \to OC = OX + XC = OX + OY$

$a : O \in a\ (a \neq k)$ *Hilfslinie durch* O *oBdA.* $a = k_2$

$A : A \in a\ (A \neq O)$ *Hilfspunkt auf* a *oBdA.* $A = E_2$

$b : Y \in b \parallel E_1A \to B := b \cap a$ *Dreieck* OE_1A *ähnlich* OYB

$c : B \in c \parallel XA \to C := c \cap k$ *Dreieck* OXA *ähnlich* OCB

C : Produkt *von* X *und* Y

$X = (0,x), Y = (0,y) \to C = (0, xy)$

(Längen:) $OE_1 : OY = OA : OB = OX : OC$

---

gegeben: P

$a : P \in a \parallel k_2 \to A := a \cap k_1$ *Projektion parallel* k_2

$b : P \in b \parallel k_1 \to B := b \cap k_2$ *Projektion parallel* k_1

$c : B \in c \parallel E_1E_2 \to C := c \cap k_1$ *Dreieck* OCB *ähnlich* OE_1E_2

$P = (A, C)$ Koordinaten *von* P

$P = (x,y) \to A = (0,x),\ C = (0,y)$ *(bezüglich* O, E_1, E_2 *)*

Konstruktionen unabhängig von der Wahl der Hilfspunkte und -linien

affine Abbildungen $O, E_1, E_2 \to O', E_1', E_2'$ sind Isomorphismen

Kollineation

$P \in g \;\rightarrow\; P \in g$ *Automorphismengruppe* $\mathcal{A}$

Spezialfall:

$g \parallel g$ *(Fernpunkte sind Fixpunkte)*

es gilt: $g \ni P, P \;\rightarrow\; g = g$ *(Fixgerade)*

daher: $P = P,\; g \ni P \;\rightarrow\; g = g$ *(Fixgerade)*

(1. Fall: kein Fixpunkt)

Translation τ

$(\forall P)\ \tau P \neq P$ *kein (eigentlicher) Fixpunkt*

es gilt: $(\exists h)\ g = \tau g \;\leftrightarrow\; g \parallel h$ *Schar von parallelen Fixgeraden*

(2. Fall: genau ein Fixpunkt)

Streckung *(Dilatation)* δ

$(\exists S)\ \delta S = S$ Zentrum von δ *ein (einziger) Fixpunkt*

es gilt: $g = \delta g \;\leftrightarrow\; g \ni S$ *Büschel von Fixgeraden*

(3. Fall: mindestens zwei Fixpunkte)

Identität ι

(gilt als) Translation und Streckung

$P \neq Q,\; \iota P = P,\; \iota Q = Q$ *(mehr als)* zwei *(eigentliche)* Fixpunkte

$\rightarrow\; (\forall R)\iota R = R$ $\rightarrow$ jeder Punkt ist Fixpunkt

denn: $R \notin PQ \;\rightarrow\; \iota(PR) = PR,\; \iota(QR) = QR$

$\rightarrow\; \iota R = \iota(PR \cap QR) = PR \cap QR = R$

und $S \in PQ \;\rightarrow\; \iota(SR) = SR$

$\rightarrow\; \iota S = \iota(PQ \cap SR) = PQ \cap SR = S$

Translationsgruppe $\mathcal{T}$ *alle* Translationen

(Untergruppe) $\mathcal{T}_g$ Translationen mit $\tau g = g$

Streckungsgruppe $\mathcal{D}_S$ *(mit Zentrum S)* Streckungen mit $\delta S = S$

$S \in g$ $\mathcal{T}_g \leftrightarrow$ additive algebraische Struktur

$(S \neq E \in g)$ $\mathcal{D}_S \leftrightarrow$ multiplikative algebraische Struktur

$\tau_A \in \mathcal{T}_g$ *mit* $\tau S = A$ $\leftrightarrow$ $\tau_A X = X + A$

$\delta_B \in \mathcal{D}_S$ *mit* $\delta E = B$ $\leftrightarrow$ $\delta_B X = B \cdot X$

	Hilfsmittel:	
geometrisch	*algebraisch-geometrisch*	*algebraisch*
	Automorphismen(gruppen)	
Schließungssätze		Koordinaten(struktur)
	allgemeine affine Ebene	Ternärkörper
Basis O, E_1, E_2	ternäre Operation	$T(X, Y, Z)$
(Streckenrechnung)		$= X \cdot Y + Z$
$T(X, Y, Z) := (X \cdot Y) + Z$		*mit* $X \cdot Y := T(X, Y, O)$
		und $X + Y := T(X, E_1, Y)$
viele Zwischenschritte:		Loop, Doppelloop,
		kartesische Gruppe, etc.
(p) kleiner Pappus		*Streckenaddition + kommutativ*
(d) kleiner Desargues		*(Veblen-Wedderburn-System)*
	Translationsebene:	
	$\mathcal{T}$ transitiv: *zu* P *und* Q *gibt es* $\tau P = Q$	
(D) Desargues	Streckungen linear transitiv	Schiefkörper
	zu P *und* Q *und* $S \in PQ$ *gibt es* $\delta P = Q$	$(\delta \in \mathcal{D}_S)$
	Achsenaffinitäten linear transitiv	
	Affinitäten transitiv auf Dreiecken	
(P) Pappus-Pascal		Körper
		Streckenmultiplikation $\cdot$ *kommutativ*
(Satz)	$\Leftarrow$	*(Satz von Wedderburn)*
Jede endliche desarguessche Ebene		Jeder endliche Schiefkörper
ist pappussch.		ist kommutativ, *d.h.* Körper

Achsenaffinität: *Gerade von Fixpunkten* (Achse)

Affinität: Produkt von Achsenaffinitäten

(für Koordinatenschiefkörper:)

Affinitäten: $X = lX + P$ *mit* l linear

Kollineationen: $X = lX + P$ *mit* l semilinear

$\phi : V \to V'$ semilinear $\quad :\leftrightarrow \quad \phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$

(wobei ρ Isomorphismus des Grundkörpers) $\quad \phi(lv) = \rho(l)\phi(v)$