

Gleichungssysteme und Determinanten(10*) (*Gaußelimination*)

Wende den Algorithmus mechanisch auf das folgende Gleichungssystem an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(11*) (*Methodenvergleich*)Berechne die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

(a) durch Entwickeln nach einer Zeile,

(b) durch Zeilen- und Spaltenumformungen (*bis die Zahl der Nullen maximal ist*).(12*) (*Determinanten*)

$$\text{Es sei } A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 1 \\ i & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1-2i \end{pmatrix}$$

(a) Berechne $\det A$.(b) Löse $Ax = 0$.(13*) (*Cramersche Regel*)

Löse das Gleichungssystem

$$x + y + z = 2, \quad 2x - y - z = 1, \quad x + y + 2z = 5$$

(a) mit der Cramerschen Regel und

(b) durch Elimination.

Eigenwerte**Aufgaben aus dem Buch: 21.5–1-5**(14*) (*Eigenwerte und Eigenvektoren*)

Bestimme für folgende Matrizen die Eigenwerte und die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (f) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Die Eigenwerte sind bei (f) ganzzahlig!)(15*) (*Projektionsoperator*)Im \mathbb{R}^3 (Raum mit kartesischen Koordinaten x, y, z) stellt die Projektion P parallel zur Richtung $(1, 1, 1)$ auf die Ebene $x + y = 0$ einen linearen Operator dar.(a) Können die Eigenwerte und Eigenvektoren von P ohne Rechnung ermittelt werden?(b) Ermittle die Matrixdarstellung ($P(v) = Av$) von P .(c) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A .

(d) Wähle ein Achsenkreuz aus Eigenvektoren und ermittle die Formeln zur Umrechnung zwischen den beiden Systemen.

(e) Wie sieht die Matrixdarstellung des Projektionsoperators bezüglich des neuen Systems aus?

(f) Ist P diagonalisierbar?