Kurzzusammenfassung über den Vortrag
MARKOW’SCHE – KETTEN

1.) Definition:

Stochastische Prozesse beschreiben die zeitliche Entwicklung von zufallsabhängigen Systemen. Eine **Markow – Kette** ist ein Spezialfall eines solchen stochastischen Prozesses. Die Besonderheit einer Markow - Kette liegt darin, dass die Wahrscheinlichkeit des Übergangs zum **folgenden** Zustand *nur* vom **vorherigen** Zustand (also von Start und Ziel) abhängt und nicht von den früheren Zuständen. Sie wird definiert durch *Zustandsraum*, *Anfangsverteilung* und *Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Mathemat. Definition:

Eine **Folge X_n** mit n = 0, 1, …, N (diskrete Zufallsvariablen) mit dem **Zustandsraum M** = $\{e_0, e_1, \ldots, e_N\}$ (enthält abzählbar viele Zustände) wird ***Markow-Kette*** genannt, wenn gilt:

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_0 = e_0, X_1 = e_1, \ldots, X_n = e_n) = P(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_n = e_n)$$

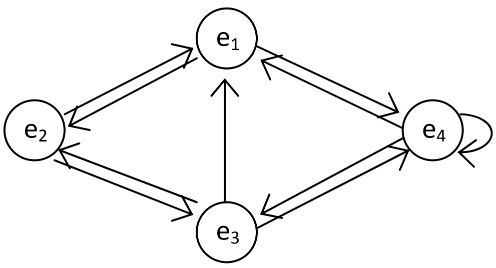
2.) Wer war Andrej Andrejewitsch Markow:

Andrei Andrejewitsch Markow *(Андрей Андреевич Марков)* war ein **russischer Mathematiker**, der wesentliche Beiträge zur *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Analysis* beisteuerte.

* 14.Juni **1856** in Rjasan
† 20.Juli **1922** in Petrograd

3.) Beispiele

3.1. Wegenetz



Zustandsraum M = $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Anfangsverteilung [**Anfangsvektor** $\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{0})$]:

- wenn unbekannt: $\vec{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
- wenn Anfangszustand e_1: $\vec{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$

Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Die Einträge der Matrix entsprechen den einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten:
z.B. $p_{11} = 0$ (Übergang von e_1 zu e_1), $p_{12} = \frac{1}{2}$ (Übergang von e_1 zu e_2) usw.
Mit der Übergangsmatrix und der Anfangsverteilung können die Wahrscheinlichkeiten für einen beliebigen Zustand des Systems berechnet werden (auch mehrstufige Übergänge möglich, dazu einfach Übergangsmatrix entsprechend potenzieren). Dabei wird die jeweilige Anfangsverteilung mit der Übergangsmatrix multipliziert.

3.2. Tennis

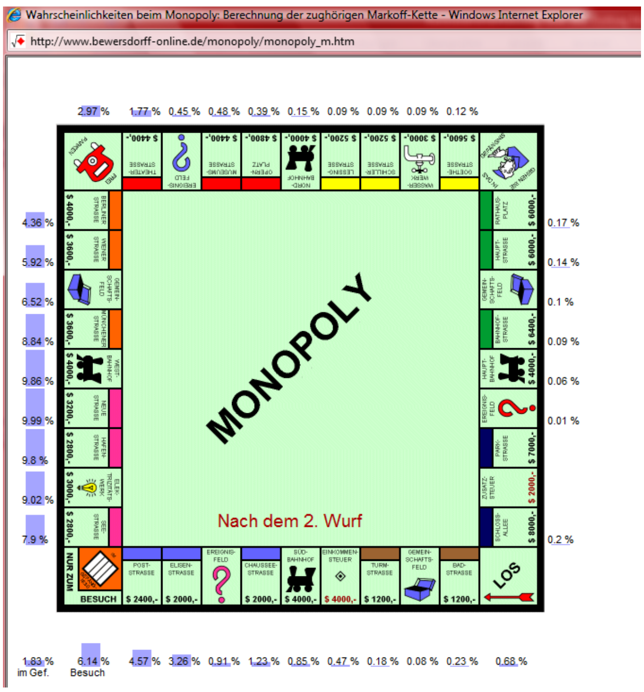
Dieses Zustand –Übergang – Modell kann nun auch z.B. bei Tennis angewendet werden. Das Spielverhalten wird über die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen abgebildet.
Die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Zuständen

- hängt nur vom vorausgehenden Zustand ab
- ist unabhängig von der Position in der Ereignisfolge

Daher kann die Übergangsfunktion als Markow – Kette dargestellt werden. Dabei sind die Übergangswahrscheinlichkeiten Ausdruck des taktischen Verhaltens der beiden Spielparteien. Basierend auf die erhaltene empirische (durch Erfahrungswissen zusammengestellt) Übergangsmatrix, können mit Hilfe der mathematischen Eigenschaften der Markow – Kette die Übergangswahrscheinlichkeiten in die verschiedenen Zustände berechnet werden. Diese Wahrscheinlichkeiten werden als Erfolgswahrscheinlichkeiten bezeichnet und können für beide Spielerparteien ermittelt werden.

3.3. Monopoly

Auch bezüglich der „Besuchswahrscheinlichkeiten" der einzelnen Felder im Spiel Monopoly ist der Einsatz von Markow – Ketten möglich. Diesbezüglich fand ich eine sehr interessante Darstellung im Internet. Dort sind die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Spielfelder nach jedem Würfel-Wurf dargestellt werden.



http://www.bewersdorff-online.de/monopoly/monopoly_m.htm

4.) Einige spezielle Formen von Markow – Ketten

- **Irreduzible Markow – Kette:**
  Von jeder Position des Zustandsraumes ist es möglich zu einer anderen Position zu gelangen (in einer endlichen Anzahl von Schritten).

- **Homogene Markow – Kette:**
  Übergangswahrscheinlichkeiten sind zeitunabhängig, also unabhängig von der Nummer des Versuchs.

- **Absorbierende Markow – Kette:**
  Eine Markow – Kette ist absorbierend, wenn sie einen absorbierenden Zustand enthält. Ein ***absorbierender Zustand*** ist folgendermaßen definiert: $p_{jj} = 1$, d.h. von diesem Zustand aus ist es nicht mehr möglich andere Zustände zu erreichen. (Hingegen meint man mit einem ***transienten Zustand***, dass zwar der Übergang von i nach j möglich ist, der Übergang von j nach i jedoch NICHT.)

5.) Quellen

Schäl, Manfred (1990): **Markoffsche Entscheidungsprozesse**. Teubner (Stuttgart).

Waldmann, K.H.; Stocker, U.M.(2004): **Stochastische Modelle**. Springer – Verlag; Berlin, Heidelberg.

http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~agbock/TEACHING/2003ss/BIO2/PROJEKTE/Markow-Ketten.pdf

http://www.sport.uni-bayreuth.de/spo_wiss_I/de/download/sportspielforschung/handball.pdf

http://www.siegel-christian.de/seiten/facharbeit/markow.html

http://de.wikipedia.org/wiki/Markow-Kette

http://learnserver.csd.univie.ac.at/statistics/Module/Markovketten/Terminologie_Methodik_MK.htm