Christina Peham WS 2009/10 Katharina Haslinger
0555426 0606334

Spieltheorie

Einleitung:

Die Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Modellierung und Untersuchung von Gesellschaftsspielen, von im weitesten Sinn gesellschaftsspielähnlichen Interaktionssystemen sowie mit den in diesen eingesetzten Spielstrategien beschäftigt.

Die Spieltheorie ist eine Entscheidungstheorie, die Situationen untersucht, in denen das Ergebnis nicht von einem Entscheider allein bestimmt werden kann, sondern nur von mehreren Entscheidern gemeinsam.

Der Begriff Spieltheorie beruht darauf, dass am Anfang der mathematischen Spieltheorie den Gesellschaftsspielen wie Schach, Mühle, Dame etc. große Aufmerksamkeit gewidmet wurde. Weder ist der Gegenstand der Spieltheorie auf Spiele im gängigen Wortgebrauch beschränkt, noch kann man mit ihrer Hilfe alles, was als Spiel bezeichnet wird, analysieren.

Ein Spiel im Sinne der Spieltheorie ist eine Entscheidungssituation mit mehreren Beteiligten, die sich mit ihren Entscheidungen gegenseitig beeinflussen.

Die Spieltheorie wurde vom Mathematiker John von Neumann und dem Ökonomen Oskar Morgenstern 1943 mit ihrer Veröffentlichung „Theory of games and economic behaviour" begründet.

Anwendung findet diese Theorie in vielen verschiedenen Bereichen, von der theoretischen Ökonomie angefangen, über statistische Entscheidungstheorie, Marketing, Politik. Und Militärwissenschaft; Versicherungsmathematik, Soziologie bis zur Psychologie. (Im Folgenden werden Beispiele aus einigen dieser Gebiete behandelt werden.)
Inhalt dieser Theorie ist das Studium folgender Situation: zwei (oder mehrere) „Spieler" beteiligen sich an einem „Spiel", bei dem alle Spieler gleichzeitig eine aus einer (endlichen) Anzahl von Entscheidungen treffen. Für jede auftretende Kombination von Entscheidungen ist (vorher) festgelegt worden, wer wem wie viel zu „zahlen" hat. Dieses Spielchen kann mehrmals wiederholt werden. Die Spieltheorie gibt nun Methoden an, um günstige Spielstrategien zu entwickeln.

Wir beschränken uns im Folgenden auf Zwei-Personen-Spiele und Matrixspiele (mit nur endlich vielen Strategien), also auf in Matrixform darstellbare Spiele.

Das Gefangenendilemma und Nash-Gleichgewicht:

Das Gefangenendilemma beschäftigt sich mit folgender Situation:

Zwei Gefangene, eines Verbrechens beschuldigt, es existieren Indizien, aber Beweise fehlen. Nun werden die Gefangenen getrennt verhört. Es treten 3 verschiedene Möglichkeiten auf:

- 1. Möglichkeit: beide gestehen → 4 Jahre für jeden
- 2. Möglichkeit: einer gesteht → 0 Jahre für den der gesteht, 5 Jahren für den anderen
- 3. Möglichkeit: beide schweigen → 2 Jahre für beide

In der folgenden Bimatrix sind diese 3 Möglichkeiten dargestellt:

		Gefangener 2	
Gefangener 1		Gestehen	schweigen
	Gestehen	-4 -4	-5 0
	Schweigen	0 -5	-2 -2

Nun fragt sich, was die jeweils beste Lösung (Strategie) für den einzelnen Gefangenen ist.

Um das heraus zu finden, benötigen wir ein eigenes Verfahren, das Nash-Gleichgewicht, ein grundlegendes Lösungskonzept der Spieltheorie. Es wurde Anfang der 50er Jahre von John Nash konzipiert. (Das Nash-Gleichgewicht wurde Anfang der 50er Jahre von John Nash entwickelt, das ist die Person, die im Film A Beautiful Mind dargestellt wird. Das Nash-Gleichgewicht war ursprünglich ein rein mathematisches Konzept, das sich inzwischen aber zu einem zentralen Konzept in den Sozialwissenschaften entwickelt hat. John Nash hat mit John Harsanyi und Reinhard Selten 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten.)

Nash Gleichgewicht:

Das Nash Gleichgewicht beschreibt ein Aufeinandertreffen von besten Antworten. Eine besondere Eigenschaft ist die Strategiekombination, von der ausgehend kein Spieler eine Erhöhung seiner Auszahlung erreichen kann, wenn er einseitig davon abweicht.

Definitionen:

- Das **Nash-Gleichgewicht** beschreibt eine Situation, in der sich keiner der Spieler mehr aus seiner Froschperspektive heraus verbessern kann.

- Das **Nash-Gleichgewicht** ist eine Strategiekombination, in der keiner der Spieler einen Anreiz hat, als Einziger von der Gleichgewichtskombination abzuweichen. Das Nash-Gleichgewicht ist damit eine Strategiekombination, die sich nicht aus sich selbst heraus zerstört, sondern zu gewissem Grad stabil ist - daher der Name Gleichgewicht. Eine Strategiekombination heißt: Jeder Spieler wählt eine Strategie, die Kombination all dieser Strategien führt zu einem Spielausgang.

- **Im Nash-Gleichgewicht spielen alle Spieler eine beste Antwort auf das Verhalten der Gegenspieler.**

Das Nash-Gleichgewicht ist generell für eine beliebige Spielerzahl definiert. Wir betrachten aber wieder nur Zweipersonenspiele.

Im Allgemeinen sind Nash-Gleichgewichte nicht eindeutig bestimmt. Liegt ein Spiel in strategischer Form vor, existiert jedoch ein Algorithmus vor um dieses zu berechnen:

Ein einfacher Algorithmus zur Identifizierung von Nash-Gleichgewichten

1. Optimiere die Entscheidung von Spieler i=1,...,n bei (beliebig) fixierten Strategien aller anderen Spieler: Markiere die unter diesen Umständen erreichbaren höchsten Auszahlungen für Spieler i. Wiederhole dies für alle möglichen Strategiekombinationen der anderen Spieler.
2. Führe 1. für alle Spieler durch.

Dann sind genau die Strategienkombinationen Nash-Gleichgewichte, bei denen alle Auszahlungen markiert sind. Diese Vorgehensweise eignet sich nur für eine geringe Anzahl von Spielern und Strategien.

Beispiel :

Sei folgendes Spiel in Normalform gegeben:

		Spieler 2		
		Links	Mitte	Rechts
Spieler 1	Oben	4 , 2	1 , 1	2 , 0
	Mitte	2 , 3	1 , 1	1 , 4
	Unten	3 , 0	0 , 2	1 , 3

Dann funktioniert der Algorithmus wie folgt:

- i = 1:
  - gegeben Spieler 2 spielt Rechts: Für Spieler 1 ist *oben* optimal – markiere die 2 ("Oben ist beste Antwort auf Rechts")
  - gegeben Spieler 2 spielt Mitte: *oben* und *mitte* ist optimal – markiere die beiden 1en
  - gegeben Spieler 2 spielt Links: *oben* ist optimal – markiere die 4

- i = 2:
  - gegeben Spieler 1 spielt oben: Für Spieler 2 ist *Links* optimal – markiere die 2
  - gegeben Spieler 1 spielt mitte: *Rechts* ist optimal – markiere die 4
  - gegeben Spieler 1 spielt unten: *Rechts* ist optimal – markiere die 3

Das einzige Nash-Gleichgewicht ist also die Strategie, die zur Auszahlung 4, 2 führt: (oben,links).

Mit dieser Methode lassen sich übrigens auch strikt dominierte Strategien identifizieren: das sind genau die, bei denen keine Auszahlung markiert wurde.

Zwei Personen Nullsummen Spiele:

1. Beispiel: Zwei konkurrierende Firmen S_1 und S_2 bieten jeden Montag früh ein Sonderangebot für die kommende Woche an. Dabei hat S_1 die Möglichkeit, zwischen drei Produkten x_1, x_2, x_3 zu wählen, während S_2 jeweils eines von vie Produkten y_1, y_2, y_3, y_4 anbietet.

Für die insgesamt 3*4 = 12 Angebotskombinationen seien folgende Werte festgestellt:

S_1/S_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	3000	0	-4000	-3000
X_2	2000	3000	1000	2000
X_3	-4000	2000	-1000	3000

Die in der Tabelle stehenden Werte werden mit Hilfe von statistisch erhobenen Daten oder aus Erfahrungswerten eruiert.

Das ist so zu interpretieren: Wenn S_1 das Produkt x_1 und S_2 das Produkt y_1 anbieten, ist S_1 am Ende der Woche um 3000 € reicher und S_2 um 3000 € ärmer als am Montag. Dies kann als Auszahlung von 3000 € von S_2 an S_1 interpretiert werden. Bieten S_1 x_1 und S_2 y_2 an, so ändert sich nichts.
Wie sollen sich die Firmen verhalten, um das beste (= den größten Gewinn) daraus zu machen?

Definition: Ein **Zwei-Personen-Nullsummenspiel** ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n}_{m}$. Diese Matrix A heißt dann **Auszahlungsmatrix**.

Das interpretiert man so: Ein „Spieler S_1" verfüge über m Möglichkeiten, ein „Spieler S_2" habe n Möglichkeiten. Die Zahl a_{ij} in A gibt an, wie viel S_1 von S_2 erhält, wenn S_1 die Variante i und S_2 die Variante j wählen. Negative a_{ij} bedeuten natürlich, dass S_1 an S_2 den Betrag a_{ij} zu zahlen hat. Die Auszahlungsmatrix beim „Spiel" in unserem Beispiel war also die 3 x 4-Matrix:

$$A=\begin{pmatrix} 3000 & 0 & -4000 & -3000 \\ 2000 & 3000 & 1000 & 2000 \\ -4000 & 2000 & -1000 & 3000 \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck „Nullsummenspiel" kommt daher, dass sich die Summe der Einkommen beider Spieler nicht ändert. Das heißt der „Gewinn" G vom ersten Spieler entspricht dem „Gewinn" –G des anderen Spielers. (G – G = 0)
Erwirtschaften dagegen beide Firmen in der Summe etwa einen Gewinn, so liegt ein „Nicht-Nullsummenspiel" vor, dessen Behandlung deutlich komplizierter ist.

Das „Verhalten" beider Spieler kann etwa dadurch beschrieben werden, wie oft (mit welcher Wahrscheinlichkeit) jeder Spieler die einzelnen Varianten wählt. Falls der erste Spieler die Variante 1 mit der Wahrscheinlichkeit (oder relativer Häufigkeit) p_1, ….., die Variante m mit der Wahrscheinlichkeit p_m wählt, so kann man $(p_1,..., p_m)$ als seine „Strategie" ansehen. Dabei gilt natürlich $p_1+…..+p_m = 1$.
Das führt auf folgende abstrakte Begriffsbildung:

Definition: Die n x m- Matrix A sei ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel. Ein Vektor p = (p_1,..., p_m) mit $0 \le p_i \le 1$ und $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ heißt eine **Strategie für den ersten Spieler**. Analog heißt q = (q_1, …, q_n) mit $0 \le q_j \le 1$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ eine **Strategie für den zweiten Spieler**. Sind in einer Strategie eine Komponente =1 und alle (notwendigerweise) =0, so spricht man von einer **reinen Strategie**, andernfalls von einer **gemischten Strategie**. Für Strategien p,q der beiden Spieler heißt

$$E(p,q) = p \cdot A \cdot q^t$$

Der **Wert des Spieles** A bei Wahl von p und q.

E(p,q) kann man sich so veranschaulichen: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Wahl i von S_1 und der Wahl j von S_2 ist, da beide Wahlen als unabhängig anzunehmen sind, das Produkt $p_i p_j$. In diesem Fall wird a_{ij} ausbezahlt. $p \cdot A \cdot q^t = a_{11}p_1q_1 + \ldots + a_{mn}p_mq_n = w$ ist also gerade das „gewichtete Mittel“, also der „Erwartungswert“ der Auszahlungsbetrag; S_1 erhält also „im Mittel“ w Geldeinheiten von S2, falls beide die Strategien p bzw. q wählen.

Beispiel: Wir setzen unser voriges Beispiel fort. Falls S_1 die gemischte Strategie p =(1/2, 0, 1/2) wählt (das bedeutet S_1 wählt zur Hälfte Strategie x_1 und zur andern x_2) , S_2 dagegen die reine Strategie q = (1, 0, 0, 0) (setzt also nur auf die Strategie y_1), so hat das Spiel den Wert:

$$E(p,q) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3000 & 0 & -4000 & -3000 \\ 2000 & 3000 & 1000 & 2000 \\ -4000 & 2000 & -1000 & 3000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -500$$

S_1 verliert also an S_2 im Mittel 500 €.

Fundamentalsatz für Zwei-Personen-Nullsummenspiele:
Zu jedem Spiel A $\in K_m^n$ gibt es Strategien p_0, q_0, sodass für alle Strategien p, q gilt:

$$E(p_0, q) \ge E(p_0, q_0) \ge E(p, q_0)$$

Das bedeutet, dass p_0 die beste Strategie für S_1 ist, da $E(p_0, q)$ nie kleiner werden kann als $w = E(p_0, q_0)$. Andererseits wird w ja (durch q_0) erreicht, sodass w optimal ist. Gleichermaßen ist q_0 die beste Strategie für S_2.

Satz und Definition: Für jedes p_0, q_0 die die Bedingung im obigen Satz erfüllen, heißt p_0 eine **optimale Strategie für S_1** und q_0 eine **optimale Strategie für S_2**. $E(p_0, q_0) = E$ ist eindeutig bestimmt und heißt der **Wert des Spieles**. Ist E = 0, so heißt das Spiel A **fair**.

Um solche optimalen Strategien zu berechnen, verwendet man im einfachsten Fall einen Sattelpunkt.

Optimale Strategie mit Sattelpunkt:

Definition: In $A \in \mathbb{R}_m^n$ heißt (i, j) ein **Sattelpunkt**, falls a_{ij} das kleinste Element in seiner Zeile und das größte in seiner Spalte ist.

Der Name Sattelpunkt rührt daher, dass man sich die Matrix als orthographische Karte vorstellt (also „weder Minimum und Maximum", vgl. Funktionsdiskussionen).

Satz: Hat das Spiel A einen Sattelpunkt (i, j), so sind

$p_0 = (0,\dots,0,1,0,\dots..0)$ (1 an der i-ten Stelle)

$q_0 = (0,\dots 0,1,0,\dots..0)$ (1 an der j-ten Stelle)

optimale Strategien und es gilt:

$E = p_0 \cdot A \cdot q_0 = a_{ij}$.

Beweis: z.z. für alle p,q gilt: $E(p_0, q) \geq E(p_0, q_0) \geq E(p, q_0)$

$$\mathbf{E(p_0, q)} = (0,0,\dots,1,0,0,\dots,0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_{ij} q_k = a_{ij} \sum_{k=1}^{n} q_k = a_{ij} = E(p_0, q_0)$$, da $a_{ij} \leq a_{ik}$ für alle k ist

$$E(p, q_0) = (p_1, \dots, p_m) A \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = (p_1, \dots, p_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k a_{kj} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} p_k \right) a_{ij} = a_{ij} = E(p_0, q_0)$$, da $a_{ij} \geq a_{kj}$ für alle k ist □

Beispiel: Das Spiel

$$A = \begin{pmatrix} 3000 & 0 & -4000 & -3000 \\ 2000 & 3000 & 1000 & 2000 \\ -4000 & 2000 & -1000 & 3000 \end{pmatrix}$$

von vorhin hat (2,3) als Sattelpunkt; $a_{23} = 1000$ ist der Wert des Spiels und

$p_0 = (0,1,0)$

$q_0 = (0,0,1,0)$

sind optimal. S_1 gewinnt im Mittel 1000 €, das Spiel ist nicht fair.

Optimale Strategien ohne Sattelpunkt:

Haben beide Spieler nur 2Varianten, so lassen sich optimale Strategien auch dann angeben, wenn kein Sattelpunkt existiert.

Satz: Im Spiel $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (ohne Sattelpunkt) sind

$$p_0 = (a_{22} - a_{21}, a_{11} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$

und

$$q_0 = (a_{22} - a_{12}, a_{11} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$

optimale Strategien. Der Wert $E = E(p_0, q_0)$ des Spieles ist

$$E = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$

Beispiel (v .Neumann): Das Kopf-Wappen-Spiel wird betrachtet, bei dem die Übereinstimmung der „Köpfe“ den doppelten Gewinn einbringt. (also jeder der zwei Spieler hat eine Münze!):

1/2	Kopf	Wappen
Kopf	2	-1
Wappen	-1	1

Mit obigen Satz erhält man nach einsetzen für den Wert des Spieles E = 1/5.
Die optimale Strategie für den ersten Spieler $p_0 = (2/5, 3/5)$ bzw. für den zweiten Spieler $q_0 = (2/5, 3/5)$.

Spiele mit mehr als 2 Varianten pro Spieler lassen sich oft auf solche mit 2 Varianten reduzieren:

Satz: Die Suche nach optimalen Strategien für A kann reduziert werden auf die entsprechende Suche für A^*. Dabei entsteht A^* aus A, indem jede Zeile gestrichen wird, die komponentenweise kleiner oder gleich als die andere Zeile ist und indem alle Spalten gestrichen werden, die komponentenweise größer oder gleich einer anderen Spalte sind.

Beispiel: Zur Bekämpfung von 3 Pflanzenschädlingen y_1, y_2, y_3 stehen 4 Spritzmittelkomponenten x_1, x_2, x_3, x_4 zur Verfügung, x_i wirkt gegen y_j in a_{ij} % aller Fälle gemäß:

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	80%	40%	45%
X_2	30%	60%	70%
X_3	75%	30%	30%
X_4	30%	60%	50%

Die „Auszahlungsmatrix“

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 \\ 0.75 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Bestimmt ein Spiel Mensch (S_1) gegen Natur (S_2). Die 3. Zeile ist kleiner als die erste, die 4. Zeile kleiner als die zweite, sodass wir zunächst

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

erhalten. Nun ist die 3. Spalte größer als die zweite und kann damit gestrichne werden. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Aus dem Satz für Matrizen ohne Sattelpunkt ergibt sich als optimale Strategie für den Menschen

$$P_0 = 1/0.7\ (0.3,0.4) = (3/7,\ 4/7)$$

Sodass also im besten 3/7 ~ 43% des ersten Spritzmittels x_1, 4/7 ~ 57% des zweiten Spritzmittels x_2 (und nichts von x_3 und x_4) verwendet werden.

Was macht man aber, wenn auch A^* noch nicht vom Format 2 x 2 ist? Man kann zeigen, dass Folgendes hilft.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^n_m$ ein Spiel ohne Sattelpunkt. Dann erhält man optimale Strategien p_0, q_0 auf die Weise:

a) Man addiert ein passendes $k \in \mathbb{R}$ zu allen a_{ij}, damit alle $a_{ij} := a_{ij} + k > o$ sind.
b) Man löse die zueinander „dualen“ linearen Optimierungsprobleme

$$\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1 & a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1 \\
. & . \\
. & . \\
a_{1n}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1 & a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1 \\
\hline
\text{alle } x_i \geq 0 & \text{alle } y_j \geq 0 \\
\hline
x_1 + x_2 + \ldots + x_m \rightarrow \text{Min} & y_1 + y_2 + \ldots + y_n \rightarrow \text{Max}
\end{array}$$

Lösungen seinen $x_1^*, \ldots, x_m^*$ bzw. $y_1^*, \ldots, y_n^*$.
c) Für $x_1^* + \ldots + x_m^* = a$ gilt auch $y_1^* + \ldots + y_n^* = a$ und optimal sind:

$$p_0 := 1/a\ (x_1^*, \ldots, x_m^*),\quad q_0 := 1/a\ (y_1^*, \ldots, y_n^*)$$

Beispiel: In einer Tierherde gebe es treue (x_1) und untreue (x_2) Männchen; die Weibchen seinen entweder zu keiner Paarung bereit (y_1), spröde und nur durch langes Vorspiel zur Paarung zu bewegen (y_2) oder „bereitwillig“ (y_3). Wie die Verhaltensforschung bei Tieren nachweist, scheint die bestimmende Triebfeder in der Evolution die möglichst große Ausbreitung der eigenen Gene zu sein. Trifft nun ein Männchen des Typs x_i auf ein Weibchen des Typs y_j, so mögen sich unter Heranziehen von Gen-Ausbreitung, Zeitverlust durch lange Balzzeit und durch Brutaufzucht etc. etwa folgende genetischen „Gewinne“ für das Männchen (und „Verluste“ für das Weibchen) ergeben:

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	2	-2	-1
X_2	-3	0	-2

Auf welche Aufteilung in treue bzw. untreue Männchen sowie in unwillige, spröde und willige Weibchen wird sich die Herde einpendeln?

Lösung: Es ist $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Wir addieren überall k = 4 und lösen

$$\begin{array}{lcl} 6x_1 + x_2 \geq 1 & & \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 1 & & 6y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 1 & \text{und} & y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ \text{---------------} & & \text{------------------------} \\ x_1, x_2 \geq 0 & & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\ \text{--------------} & & \text{------------------------} \\ x_1 + x_2 \rightarrow \text{Min} & & y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \text{Max} \end{array}$$

Mit Mathematica (ConstrainedMin [x1 + x2, {6x1 + x2 ≥ 1, x1 + 4x2 ≥ 1, 3x1 + 2x2 ≥ 1}, {x1,x2}] mit Max und y analog; ohne Computerprogramm mit Hilfe der Einführung von Schlupfvariablen)
beispielsweise kann dieses Ungleichungssystem einfach gelöst werden und man erhält
($x_1^* = ¼$, $x_2^* = 1/8$, $y_1^* = 0$, $y_2^* = 1/8$, $y_3^* = 1/4$, somit a = 3/8)

$p_0 = 8/3\ (1/4, 1/8) = (2/3, 1/3)$
$q_0 = 8/3\ (0, 1/8, 1/4) = (0, 1/3, 2/3)$

als optimale Strategien. $E(p_0, q_0) = -1/3$ ist der Wert des „Spieles“. Die Herde wird sich also auf die Aufteilungen

66,7 % treue und 33,3 % untreue Männchen

sowie

0 % unwillige, 33,3 % spröde und 66,7 % willige Weibchen

einpendeln.

Alternativ kann man das Ungleichungssystem (mit 2 Variablen) auch graphisch lösen. (→ vgl. lineare Optimierung)

Symmetrische Spiele:

Zum Schluss wollen wir noch einen letzten speziellen Spieltyp beschreiben: Die symmetrischen Spiele:

Definition: Eine quadratische Matrix heißt **schiefsymmetrisch**, wenn $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle i, j. Ein Matrixspiel heißt **symmetrisch**, wenn die zugehörige Matrix schiefsymmetrisch ist.

Satz: Der Wert eines symmetrischen Spieles ist Null. Außerdem ist jede optimale Strategie x für den Spieler 1 auch optimal für den Spieler 2.

Beweis: Sei A ein Matrixspiel und x irgendeine Strategie. Offenbar ist $A = -A^t$, und daher folgt

$$xAx^t = -xA^tx^t = -(xAx^t)^t = = -xAx^t \quad \text{d.h. : } xAx^t = 0$$

Ist nun eine Strategie x optimal für Spieler 1, dann gilt:

$$xA \geq 0$$

Das bedeutet aber gerade

$$X(-A^t) \geq 0$$

Und damit

$$xA^t \leq 0$$

oder

$$Ax^t \leq 0$$

Also ist x optimal für Spieler 2! □

Beispiel (Verallgemeinerung von „Schere, Stein, Papier“):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Matrix A schiefsymmetrisch ist, muss der Wert des Spieles gleich Null sein.
Das Spiel besitzt keinen Sattelpunkt. Eine optimale Strategie für den Spieler 1 muss auch eine optimale für Spieler 2 sein. Um diese Bedingungen zu erfüllen, muss das folgende lineare Gleichungssystem erfüllt werden:

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Elementare Auflösung dieser Gleichungen liefert (1/2, 1/3, 1/6) als Lösung. Diese ist eindeutig bestimmt und für beide Spieler die optimale Strategie.
(praktisch bedeutet das, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 Schere gewinnen wird, etc.)

Oft stimmen diese Berechnungen mit den Beobachtungen überraschend genau überein und erklären Verhaltensphänomene, denen man bisher verständnislos gegenüberstand.

Literaturliste:

- Bühlmann, Loeffel, Nievergelt: Entscheindungs- und Spieltheorie,1975

- Owen, G.: Spieltheorie, 1971

- Neumann, J.v., Morgenstern, Oskar: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, 1961

- Pilz, Günther: Skriptum zu Linearer Algebra und analytischer Geometrie

- Ableitinger, Christoph: Mitschrift zu „Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht“