Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 10

zu §18. Signierte Maße und Hahn-Zerlegung

1 Zeige: Jedes signierte Maß ist beschränkt und nimmt ein Maximum und ein Minimum an. (Hinweis: Beweis von Kor.18.6 der VO und Hahn-Zerlegung.)

2 Seien $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ sowie $\Omega = \tilde{\Omega}^+ \cup \tilde{\Omega}^-$ zwei Hahn-Zerlegungen für das signierte Maß ρ auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$. (Soll heißen: beide Zerlegungen erfüllen (a) und (b) aus 18.5 der VO.) Zeige, dass $\Omega^+ \setminus \tilde{\Omega}^+$ und $\Omega^- \setminus \tilde{\Omega}^-$ jeweils ρ-Nullmengen sind.

zu §19. Maße mit Dichten

3 Zeige, dass das Dirac-Maß δ_0 auf $\mathbb{R}$ keine Dichte bezüglich des (Borel-)Lebesgue-Maßes λ besitzen kann, d.h. es gibt keine Borel-messbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ mit der Eigenschaft

$$\delta_0(A) = \int f \mathbb{1}_A \, d\lambda \qquad (A \in \mathcal{B}).$$

4 Sei F eine stetig differenzierbare Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ und μ das zugehörige Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Zeige, dass μ die Dichte F' bezüglich λ (Lebesgue-Maß) besitzt.