Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 4

zu §8. Eindeutigkeit von Maßen

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sei $\mathcal{B}^n$ die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\mathcal{A} := \{B \times \mathbb{R} \mid B \in \mathcal{B}^1\}$ eine σ-Algebra ist mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^2$. Zeige, dass das Lebesgue-Maß $\lambda_{|\mathcal{A}}$ nicht σ-endlich ist, obwohl λ auf $\mathcal{B}^2$ σ-endlich ist.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sei $\mathcal{R}$ der von den halboffenen Intervallen der Form $]a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ erzeugte Ring (vgl. VO 3.3(3) und Anfang von §5). Weiters sei ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ definiert durch $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(I) = \infty$ für $I \in \mathcal{R}$ und $I \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra. Zeige, dass es überabzählbar viele Maße $\nu : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\nu_{|\mathcal{R}} = \mu$ gibt.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sei X ein metrischer Raum, $\mathcal{B}(X)$ die von offenen Teilmengen von X erzeugte Borel σ-Algebra, und $\mu, \nu : \mathcal{B}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ seien zwei Maße. Zeige: Stimmen μ und ν auf allen offenen Teilmengen von X überein und gibt es eine Folge $(A_n)_n$ offener Teilmengen von X mit $\mu(A_n) = \nu(A_n) < \infty$ für alle n und $\bigcup_n A_n = X$, dann ist $\mu = \nu$.