Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 6

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Für alle $f \in \mathcal{M}^+$ gilt

$$\int f d\mu = \sup \Big\{ \sum_{k=1}^{n} (\{\inf f(x) : x \in A_k\} \, (\mu(A_K) \; : \; n \in \mathbb{N}$$
$$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \,\text{disjunkt}\; X = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Big\}.$$

Bleibt diese Aussage richtig, wenn man anstelle endliche Zerlegungen von X abzählbare zerlegungen zugrundelegt?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sei $(r_n)_{n \geq 1}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ und $A_n :=]r_n, r_n + n^{-3}[$. Sei λ Lebsgue maß auf $\mathbb{R}$ und $f := \sum_n n \cdot 1_{A_n}$.

(a) Zeige, dass $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$ und $\lambda\{f = \infty\} = 0$ ist.

(b) Die Abzähung läßt sich so wählen, dass für jeders Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(I) > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} 1_I \cdot f^2 d\lambda = \infty.$$

(c)Es gibt eine σ-endlich maß $\nu : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}$, so das $\nu(I) = \infty$ für jedes interval $I \subset \mathbb{R}$ von positiv Länge, während $\nu(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sind $a > 1$ und $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar, so ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a^n \mu(\{a^n < |f| \leq a^{n+1}\}) < \infty.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Beweise oder widerlege folgende Aussagen bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$:

(a) Für $a < b$ ist $1_{[a,b] \cup \mathbb{Q}} = 1_{]a,b[}$ fast überall.

(b) Jede monotone Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist fast überall stetig.

(c) Die Dirichletfunktion $1_{\mathbb{Q}}$ ist fast überall stetig.

(d) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ teilerfremd}, \\ 0 & x = 0 \text{ oder } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist fast überall stetig.