Was machte Nicolo Tartaglia in der Nacht zum Aschermittwoch des Jahres 1523 in Verona?

Antwort auf diese Frage gibt hier an Hand des Zeugnisses von Tartaglia

Heinz Lüneburg

Mathematik natürlich und zwar schöne Mathematik, die es wert ist, nicht vergessen zu werden. Da sein Buch *General trattato di numeri et misure* heute nur noch schwer zugänglich ist, sei es erlaubt daß ich hier berichte, welche Antwort Tartaglia im zweiten Teil des *General trattato* auf Blatt 17^{recto} auf obige Frage gibt. Er schildert dort, er sei 1523 in Verona gewesen. In dieser Stadt hätten am Fastnachtsdienstag ein Schwarm Jugendlicher sowie Leute reiferen Alters mit drei Würfeln das sogenannte Glücksbuch Lorenzo spirto befragt, um herauszufinden, was ein solches Buch ihnen in solchen Dingen vorherbestimme, über die ein solches Buch vorgebe, Auskunft zu erteilen. Tartaglia bemerkte, daß sich auf jedem Blatt des Buches alle 56 Wurfvariationen der drei Würfel befanden, die der Autor des Buches durch Erfahrung herausgefunden hätte. Dies regte Tartaglia an, zu versuchen herauszufinden, wieviele Würfe man nicht nur mit drei, sondern mit jeder anderen Zahl von Würfel machen kann. Darüber dachte er rasend (*freneticando*), wie er schreibt, die ganze Nacht nach. Am nächsten Tag, dem ersten der Fastenzeit, am Aschermittwoch also, hatte er dann seine Lösung.

Wie seine gleich wiederzugebende Tabelle zeigt, verfeinert er die Fragestellung, ohne sie nach meinem Dafürhalten befriedigend zu erläutern. Er fragt nämlich, so interpretiere ich die Tabelle, wieviele Würfe man mit k Würfeln machen könne, so daß die höchste Augenzahl eines Würfels gleich i ist mit $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Natürlich soviel, wie man mit $k - 1$ Würfel werfen kann, so daß die höchste Augenzahl eines Würfels höchstens gleich i ist. Mit einem Würfel kann man aber genau einen Wurf mit der Augenzahl i machen. Somit ergibt sich rekursiv folgende Tabelle, wobei der Leser beachte, daß Tartaglia den Würfel *dato* nennt. Im heutigen Italienisch wird der Würfel mit *dado* bezeichnet.

per 1 *dato*	1	1	1	1	1	1
per 2 *dati*	1	2	3	4	5	6
per 3 *dati*	1	3	6	10	15	21
per 4 *dati*	1	4	10	20	35	56
per 5 *dati*	1	5	15	35	70	126
per 6 *dati*	1	6	21	56	126	252
per 7 *dati*	1	7	28	84	210	462
per 8 *dati*	1	8	36	120	330	792

Bei acht Würfel gibt es also

$$1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 = 1287$$

Würfe. So fortfahrend, könne man herausfinden, wieviele Wurfmöglichkeiten man bei 10000 Würfeln habe.

Bemerkungen. — 1. Wir erkennen natürlich sofort, daß hier ein Streifen des Pascalschen Dreiecks entsteht, welches man mit Pascal besser arithmetisches Dreieck nennen sollte.

2. Tartaglia gibt es keine weiteren Erläuterungen, auch nicht hundert Seiten später, wo das arithmetische Dreieck im Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz auftaucht.

3. Warum Würfel? Warum nicht Dodekaeder oder Ikosaeder? Oder abstrakt: Man zähle all k-Tupel $a_1, \ldots, a_k$ mit $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ und $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Die Rekursion bleibt die gleiche und man erhält das gesamte arithmetische Dreieck.

4. Ein anderes Verfahren, dessen Autor ich nicht kenne, die Anzahl dieser k-Tupel zu zählen, ist, daß man die Abbildung ρ, die durch

$$\rho(a) := \{a_i + i - 1 \mid i := 1, \ldots, k\}$$

definiert ist, betrachtet und feststellt, daß sie eine Bijektion der Menge der fraglichen k-Tupel auf die Menge der k-Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n + k - 1\}$ ist. Dies zeigt, daß ihre Anzahl gleich $\binom{n+k-1}{k}$ ist. Riordan (1964, S. 7) meint, daß dieses Argument auf Euler zurückgehen könnte. Vielleicht weiß einer der Leser Näheres.

5. Tartaglias Argument hat einen kleinen Vorteil gegenüber dem gerade erwähnten, da es gleichzeitig eine Möglichkeit bietet, alle Würfe, die man mit k Würfeln machen kann, rekursiv zu erzeugen.

Tartaglia erwähnt an dieser Stelle *il libro (detto) della ventura di Lorenzo spirto.* Es reizte mich ungemein, mehr über dieses Buch herauszufinden. Ich las in Tartaglias Buch im Mathematischen Institut in Florenz. Das dort aufbewahrte Exemplar gehört zu der Sammlung Toja, einer bedeutenden Sammlung mathematischer Werke, die eben dieser Toja zusammengebracht und schließlich der Universität Florenz vermacht hat. Als Sammler muß man natürlich über seltene Bücher und ihre bei Verkäufen erzielten Preise Bescheid wissen. So ist es nicht verwunderlich, daß sich in dieser Sammlung auch ein Handbuch für Antiquare und Liebhaber alter Bücher findet (Brunet 1966). Nachsehen unter Lorenzo brachte nichts. Der Beiname spirto führte zu Spirito, wo ich fündig wurde. Neben weiteren bibliographischen Angaben fand ich auch den richtigen Teil des Buches, nämlich "Delle sorti", sowie den Hinweis, daß die Stadtbibliothek von Ulm am 28. 9. 1842, vor rund hundertundfünfzig Jahren also, ein Zweitexemplar dieses Buches verkauft habe. Meine bange Frage — Bibliotheken sind zwar konservativ, doch Ulm hat im zweiten Weltkrieg schrecklich gelitten — an die Ulmer Stadtbibliothek, ob das Erstexemplar noch in ihrem Besitz sei, wurde von Herrn Dr. Bernd Breitenbruch bejahend beantwortet. Wie ich durch ihn weiter erfuhr, gibt es seit 1980 einen Nachdruck dieses Buches, so daß es kein Problem mehr war, über die Fernleihe an alle gewünschte Information zu gelangen. Ich möchte Herrn Breitenbruch auch an dieser Stelle für seine Hilfe danken.

Hier nun eine kurze Beschreibung des Buches, das Tartaglia veranlaßte, ein Problem der Kombinatorik zu formulieren und sogleich auch zu beantworten. Das Buch beginnt, von der Titelei abgesehen, mit einer Darstellung des Glücksrades. Dieses ist umgeben mit zwanzig Fragen, die im menschlichen Leben eine wichtige Rolle spielen: Wird das Leben glücklich oder unglücklich sein? Wird die Frau einen Knaben oder ein Mädchen gebären? Wird man von einer Krankheit genesen? Soll man einer Blutrache nachgehen? Wird man das bei einem Diebstahl Verlorene wiederfinden? Dies sind fünf von jenen Fragen. Für jede der Fragen ist einer von zwanzig Königen zuständig, die zu je vieren auf den nächsten fünf Seiten des Buches abgebildet sind. Dabei werden die zwanzig Könige durch fünf Holzschnitte repräsentiert. Es ist aber nicht so, daß je vier Könige durch ein und denselben Holzschnitt dargestellt werden, vielmehr wird König David durch einen Holzschnitt dargestellt, der für keinen weiteren König mehr verwendet wird. Drei weitere Holzschnitte werden als Konterfei für je fünf Könige verwendet, während der letzte Holzschnitt als Abbild für vier Könige herhalten muß.

Man ist mit seiner Frage also an einen König verwiesen worden. Sollte man sich an König David wenden, so verweist dieser den Fragesteller an das Zeichen des Mondes, König Priamos verweist ihn an das Zeichen des Greifs und so jeder der Könige an ein anderes Zeichen. Es gibt also zwanzig Zeichen, Tierkreiszeichen und andere.

Für die Zeichen sind die nächsten zwanzig Seiten reserviert. Jede dieser Seiten ist in $10 \cdot 6 = 60$ Quadrate eingeteilt, wobei die vier mittleren Quadrate zu einem größeren zusammengefaßt sind. In diesem findet sich das Zeichen abgebildet. Der Name des Zeichens steht zugleich am Kopf des Blattes. In den verbleibenden 56 Quadraten sind die 56 Würfe, die man mit drei Würfeln machen kann, abgebildet. Die Anordnung ist bei allen Zeichen die folgende:

111	116	336	553	651	541
222	221	441	554	652	542
333	223	442	556	653	543
444	224	443	661	654	531
555	225			641	532
666	226			642	521
112	331	445	662	643	431
113	332	446	663	631	432
114	334	351	664	632	421
115	335	552	665	621	321

Wie man sieht, ist die vollständige Auflistung nicht ungeschickt vorgenommen.

Hat man nun xyz gewürfelt, so suche man das xyz-Feld des Zeichens auf, an das man verwiesen wurde. Dort wird man dann angewiesen, einen von 56 Flüssen in der Sphäre eines der schon erwähnten zwanzig Zeichen zu suchen. Diese zwanzig Sphären finden sich auf den nächsten zwanzig Seiten. Die sechsundfünfzig Flüsse sind auf der jeweiligen Sphäre in zwei Kreisen angeordnet. Hat man den Fluß gefunden, so wird man schließlich an einen von zwanzig Propheten verwiesen, wobei gleichzeitig noch eine Zahl zwischen 1 und 56 genannt ist. Für jeden der Propheten sind zwei Seiten reserviert, wobei stets mit einer linken Seite begonnen wird, so daß beide Seiten gleichzeitig sichtbar sind. Auf diesen beiden Seiten finden sich auf vier Kolumnen verteilt $3 \cdot 56$ jene, die zu je dreien von 1 bis 56 numeriert sind. Die drei Verse, die durch die Zahl angesprochen werden, beinhalten schließlich die Weissagung. Diese, in jugendlichem Italienisch verfaßt, sind für mich meist dunkel. Tartaglias Mathematik liest sich sehr viel einfacher.

Wie ich diese Würfelgeschichte bei Tartaglia gefunden habe, möchten Sie, lieber Leser, wissen? Das begann vor mehr als zwanzig Jahren. — Doch das ist eine lange, das ist eine andere Geschichte, von der ich etwas in meinem nächsten Buch erzählen werde, das, wie ich hoffe, 1992 erscheinen wird.

Zum Schluß möchte ich mich bei meinen florentiner Freunden recht herzlich bedanken, daß sie mir den Zugang zu der Sammlung Toja gewährten, wo ich insbesondere auch im Hinblick auf meine Untersuchungen zu Fibonaccis *liber abbaci* Kenntnisse unschätzbaren Wertes gewann.

Literatur

Jacques-Charles Brunet

— Manuel du libraire et de l'amateur de livres. Bd. 5 Nachdruck der 5. Auflage. Mayenne 1966

Lorenzo Spirito Gualtieri

— Il libro delle sorti. Facsimilenachdruck der Ausgabe Perugia 1482. Perugia 1980

Heinz Lüneburg

— Leonardi pisani *liber abbaci* oder Lesevergnügen eines Mathematikers. Second edition. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1993.

John Riordan

— An Introduction to Combinatorial Analysis. 2^{nd} printing. New York and London 1964

Nicolo Tartaglia

— General trattato di numeri et misure. Teile 1 und 2 Venedig 1556, Teile 3, 4, 5 und 6 Venedig 1560

Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern, Pfaffenbergstrasse 95, D-6750 Kaiserslautern