MATRICES ET TABLEAUX SEMI-STANDARD

HENRI GAUDIER

Université de Valenciennes

On sait calculer une base des représentations irréductibles du groupe général linéaire avec le déterminant (ou bidéterminant) de tableaux semi-standard. On présente ici une variante de cette méthode dans laquelle les tableaux semi-standard sont remplacés par des matrices qui sont appelées semi-standard.

L'algèbre de Schur.

Dans tout ce qui suit k est un corps de caractéristique 0, on se donne un entier n, et on s'intéresse aux représententations polynômiales du groupe linéaire $GL_n(k)$. Une telle représentation est donc la donnée d'un k-espace vectoriel et d'un homomorphisme de groupe : $\rho : GL_n(k) \mapsto GL(V)$ polynômial, c'est à dire que si $x = (x_{i,j}) \in GL_n(k)$, la matrice de $\rho(x)$ a pour coefficients des polynômes en les $x_{i,j}$. Il est clair que ρ se prolonge en un homomorphisme de monoïde multiplicatif $M_n(k) \mapsto \mathrm{End}(V)$ noté également ρ.

Si l'on considère maintenant l'espace vectoriel produit $k^{M_n(\mathbb{N})}$ et l'application

$$\iota : M_n(k) \mapsto k^{M_n(\mathbb{N})}$$

définie par $\iota\big((x_{i,j})\big) = \Big(\prod_{i,j} x_{i,j}^{a_{i,j}}\Big)_{a\in M_n(\mathbb{N})}$, il est clair que toute application polynômiale ρ se factorise de façon unique en $\rho = \rho'\iota$, où ρ' est une application k-linéaire (un polynôme est une combinaison linéaire de monômes !), et on a de plus

Proposition. *Il existe sur $k^{M_n(\mathbb{N})}$ une unique multiplication k-linéaire telle que ι soit un homorphisme pour la multiplication, et si ρ est un homomorphisme pour la multiplication, alors ρ' est un homorphisme de k-algèbre.*

On notera kM_n l'algèbre ainsi obtenue, et $(e_a)_{a\in M_n(\mathbb{N})}$ sa base (topologique) canonique. On a donc $\iota((x_{i,j})) = \sum_{a\in M_n(\mathbb{N})} \prod_{i,j=1\ldots n} x_{i,j}^{a_{i,j}}$.

Selon les méthodes classiques de la théorie des groupes algébriques, la détermination de la multiplication peut se faire de la façon suivante : on considère l'algèbre $k[T_{i,j}]$ avec la comultiplication $\gamma(T_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} T_{i,k} \otimes T_{k,j}$. Si l'on désigne par $\varepsilon_c = \prod_{i,j=1\ldots n} T_{i,j}^{c_{i,j}}$ la base des monômes dans $k[T_{i,j}]$ soit $\lambda(a,b,c)$ les entiers tels que

$$\gamma(\varepsilon_c) = \sum_{a,b\in M_n(\mathbb{N})} \lambda(a,b,c)\, \varepsilon_a \otimes \varepsilon_b.$$

On a alors

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Proposition. *L'algèbre kM_n est l'algèbre duale de la cogèbre $k[T_{i,j}]$; sa multiplication est donc donnée par :*

$$e_a \,.\, e_b = \sum_{c \in M_n(\mathbb{N})} \lambda(a,b,c)\, e_c,$$

où les coefficients $\lambda(a,b,c)$ sont donnés par :

$$\lambda(a,b,c) = \sum_{\nu} \prod_{i,k} \binom{c_{i,k}}{\nu_{i,1,k}, \dots, \nu_{i,n,k}} \tag{1}$$

avec les $\nu = (\nu_{i,j,k}) \in \mathbb{N}^{n^3}$ assujettis aux conditions :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \nu_{i,j,k} &= c_{i,k} \\ \sum_{k=1}^{n} \nu_{i,j,k} &= a_{i,j} \\ \sum_{i=1}^{n} \nu_{i,j,k} &= b_{j,k} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

L'unité de kM_n est $\iota(I_n) = \sum_{d \text{ diagonale}} e_d$.

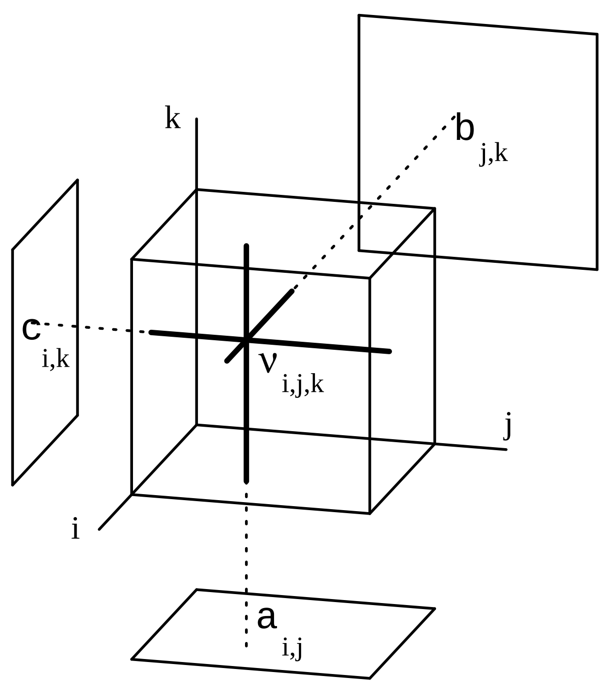

FIG. 1

On peut visualiser (Fig. 1) les relations (1) et (2) dans $\mathbb{R}^3$: les coefficients $\nu_{i,j,k}$ sont disposés dans un cube, et lorsque l'on somme ces coefficients suivant les directions des axes i, j, k on obtient respectivement les matrices $(a_{i,j})$, $(b_{j,k})$ et $(c_{i,k})$. Le produit $e_a \cdot e_b$ se calcule alors de la façon suivante : on cherche tous les ν

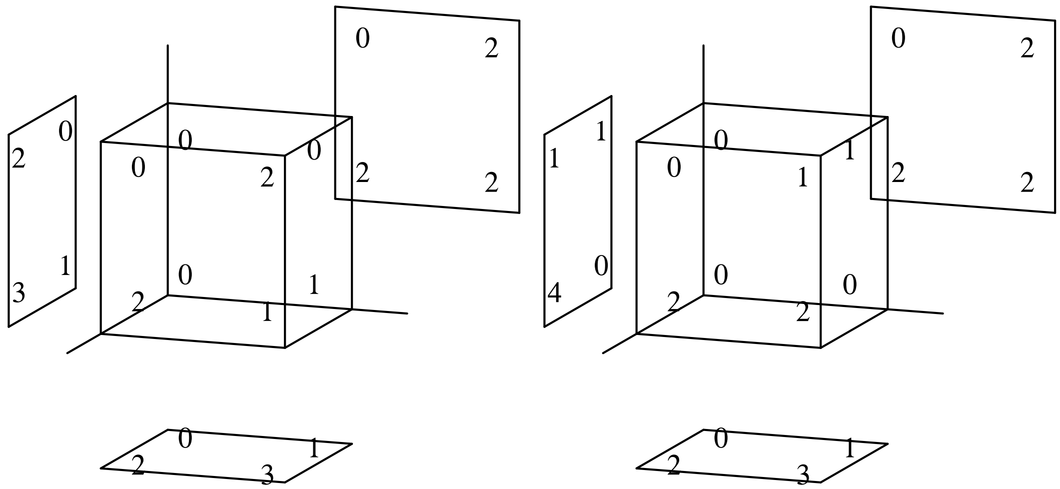

FIG. 2

qui admettent les matrices a et b comme sommes selon les directions k et i, et pour chaque ν ainsi obtenu, la somme suivant la direction j donne une matrice c avec le coefficient $\prod_{i,k} \binom{c_{i,k}}{\nu_{i,1,k},\ldots,\nu_{i,n,k}}$.

Calculons par exemple le produit $e_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)} e_{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)}$. Il n'y a que deux ν au dessus des matrices a et b données, ils sont représentés dans la figure 2.

Le coefficient de $e_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)}$ est alors le produit $\binom{1}{0}\binom{0}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{0} = 3$ et celui de $e_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ est $\binom{0}{0}\binom{1}{0}\binom{4}{2}\binom{1}{0} = 6$. Par conséquent :

$$e_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)} e_{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = 3e_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)} + 6e_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)}.$$

L'algèbre kM_n est également appelée algèbre de Schur [2], on trouvera dans [3] une autre façon de calculer le produit.

Représentations irréductibles de GL_n.

On a une action canonique de kM_n sur $k[T_{i,j}]$ définie par $e_b(\varepsilon_c) = \sum_a \lambda(a,b,c)\varepsilon_a$; on a ainsi une représentation polynômiale de GL_n.

Rappelons alors quelques résultats fondamentaux de la théorie des représentations du groupe linéaire (cf. [2]).

Théorème. *Soit k un corps de caractéristique 0,*

1— il existe une bijection entre l'ensemble des représentations polynômiales irréductibles de GL_n de degré r, et l'ensemble $P(r,n)$ des partitions de r en au plus n parts ;

2— L'espace S(n,r) des polynômes homogènes et de degré r en les n^2 variables $T_{i,j}$ muni de l'action naturelle de GL_n contient toutes les représentations irréductibles de GL_n de degré r.

3— la représentation irréductible D_λ associée à la partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ a pour dimension le nombre de tableaux semi-standard de forme λ.

On sait ([1] ou [2]) que l'on peut construire une base de D_λ en associant un polynôme à chaque tableau semi-standard de forme λ.

Si $\mathcal{T}$ est un tableau semi-standard de forme λ, $\mathcal{T} = (t_{i,j})$ avec $1 \le i \le n$, $j \le \lambda_i$, $t_{i,j} \in [1,n]$, $t_{i,j} \le t_{i,j+1}$ et $t_{i,j} < t_{i+1,j}$, on considère le bitableau $(\mathcal{T}^0|\mathcal{T})$, où $\mathcal{T}^0$ est le tableau de même forme que $\mathcal{T}$ et défini par $t_{i,j} = i$. Le polynôme associé au tableau $\mathcal{T}$ est alors le bidéterminant du bitableau $(\mathcal{T}^0|\mathcal{T})$.

L'objectif de ce qui suit est de remplacer ce calcul portant sur les tableaux semi-standard par un calcul dans lequel n'interviendront que des matrices de $M_n(\mathbb{N})$.

Matrices semi-standard.

Définition. *Une matrice $a = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{N})$ est dite semi-standard si elle vérifie les conditions suivantes :*
— a est triangulaire supérieure, i.e. $a_{i,j} = 0$ si $i > j$,
— pour $0 \le k \le n-2$, on a les inégalités :

$$\sum_{l=0}^{k} a_{1,1+l} \ge \sum_{l=0}^{k} a_{2,2+l} \ge \dots \ge \sum_{l=0}^{k} a_{n-k,n-k+l}.$$

En particulier on a, pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$a_{1,1} \ge a_{2,2} \ge \dots \ge a_{n,n},$$
$$a_{1,1} + a_{1,2} \ge a_{2,2} + a_{2,3} \ge \dots \ge a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n},$$

et on termine pour $k = n-2$ avec :

$$a_{1,1} + \dots + a_{1,n-1} \ge a_{2,2} + \dots + a_{2,n}.$$

Exemple. La matrice $a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semi-standard.

Considérons alors un tableau $\mathcal{T}$ ayant au plus n lignes, rempli par des entiers de $[1,n]$ et associons lui la matrice $a^{\mathcal{T}}$ telle que $a^{\mathcal{T}}_{i,j}$ soit le nombre d'occurrences de l'entier j dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathcal{T}$. On a alors de façon immédiate :

Lemme. *Le tableau $\mathcal{T}$ est semi-standard si et seulement si la matrice $a^{\mathcal{T}}$ est semi-standard, et on a ainsi une bijection entre les tableaux semistandard et les matrices semi-standard.*

Le tableau associé à la matrice semi-standard ci-dessus est $\begin{matrix} 4 \\ 3\,4 \\ 2\,3\,3\,4 \\ 1\,1\,2\,3 \end{matrix}$.

On voit facilement que si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la forme du tableau, alors $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$. On dira que la partition λ est le poids en ligne de la matrice $a_{i,j}$.

Définition. *On dit qu'une matrice semi-standard est élémentaire si son poids en ligne est $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.*

Proposition. *Toute matrice semi-standard est somme de matrice semi-standard élémentaires*

Soit a une matrice semi-standard, et soit Ra la matrice obtenue en diminuant de 1 le coefficient non nul situé le plus à gauche dans chacune des lignes de a. Il est facile de voir que Ra est aussi semi-standard, et $a - Ra$ est semi-standard élémentaire, et on conclut par une récurrence sur le poids total de la matrice.

Exemple. Décomposons la matrice $a = \begin{pmatrix} 2&1&1&0\\ 0&1&2&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ on obtient successivement :

$$\begin{pmatrix} 2&1&1&0\\ 0&1&2&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{pmatrix} 2&1&1&0\\ 0&1&2&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

que nous écrirons, puisque la matrice a représente le monôme ε_a :

$$\begin{pmatrix} 2&1&1&0\\ 0&1&2&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme de calcul du déterminant d'un bitableau peut alors se transcrire pas à pas pour les matrices semi-standard :

Algorithme. *Soit a une matrice semi-standard,*

1 — Décomposer a selon la méthode précédente en somme de matrices semi-standard élémentaires :

$$a \longmapsto \alpha_1 \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k,$$

2 — Remplacer chaque matrice semi-standard élémentaire par la somme formelle :

$$\alpha \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sign}(\sigma)\sigma(\alpha),$$

où r est le nombre de 1 dans la matrice α, et où $\mathfrak{S}_r$ agit sur α en permutant ses r premières lignes,

3 — Développer l'expression obtenue en utilisant la distributivité de $\otimes$ par rapport à la somme formelle,

4 —Remplacer ensuite chaque produit $\alpha'_1 \otimes \alpha'_2 \otimes \cdots \otimes \alpha'_h$ par la matrice somme (au sens usuel de la somme de matrices) $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_h$, on obtient alors une somme formelle de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

5 — Dans cette somme remplacer chaque matrice $m = (m_{i,j})$ par le monôme $\varepsilon_m = \prod_{i,j} T_{i,j}^{m_{i,j}}$. On a alors le polynôme cherché.

Exemple. Prenons $a = \begin{pmatrix} 2&1&1\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$.

L'étape 1 donne :

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

L'étape 2 donne :

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)\otimes$$
$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)\otimes\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

L'étape 3 donne d'abord :

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)\otimes$$
$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right),$$

puis

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+$$
$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\cdots+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

L'étape 4 donne alors :

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&3\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-$$
$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&3\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Et l'étape 5 donne le polynôme

$$P_a(T_{i,j}) = T_{1,1}^2T_{1,2}T_{1,3}T_{2,2}T_{2,3}T_{3,3} - T_{1,1}^2T_{1,2}T_{1,3}T_{2,3}^2T_{3,2} - T_{1,1}T_{1,2}^2T_{1,3}T_{2,1}T_{2,3}T_{3,3}$$
$$+T_{1,1}T_{1,2}^2T_{1,3}T_{2,3}^2T_{3,1} - T_{1,1}T_{1,2}T_{1,3}^2T_{2,1}T_{2,2}T_{3,3} + 2\,T_{1,1}T_{1,2}T_{1,3}^2T_{2,1}T_{2,3}T_{3,2}$$
$$-T_{1,1}T_{1,2}T_{1,3}^2T_{2,2}T_{2,3}T_{3,1} + T_{1,2}^2T_{1,3}^2T_{2,1}^2T_{3,3} - T_{1,2}^2T_{1,3}^2T_{2,1}T_{2,3}T_{3,1} - T_{1,2}T_{1,3}^3T_{2,1}^2T_{3,2}$$
$$+T_{1,2}T_{1,3}^3T_{2,1}T_{2,2}T_{3,1}.$$

References

1. J.DÉSARMÉNIEN, J.P.S.KUNG and G-C.ROTA, *Invariant theory, Young bitableaux and Combinatorics*, Adv. in Math. **27** (1978), 63-92.
2. J.A.GREEN, *Polynomial Representations of GL_n*, Lecture Notes in Math. 830, Springer Verlag, Berlin, 1980.
3. J.A.GREEN, *On certain subalgebras of the Schur algebra*, J. of Algebra **131** (1990), 265-280.

Université de Valenciennes,
Département de Mathématiques,
le Mont Houy, BP 311,
59304 VALENCIENNES, France.
E-mail address: gaudier@univ-valenciennes.fr