A. Kerber: Charaktere endlicher Gruppen und Teilbarkeitsfragen

(Zusammenfassung)

G := endliche Gruppe mit $\mathbb{C}$-Darstellung D vom Charakter χ^D, mit irreduzibler $\mathbb{C}$-Darstellung D_i vom Charakter ζ^i und Dimension f^i, D_1 := Einsdarstellung.

S_n := symmetrische Gruppe auf $\{1,\ldots,n\}$, $\pi \in S_n$, $a_k(\pi)$:= Anzahl der k-Zyklen von π.

Dann gilt (vgl. Proc. Strasbourg 1976):

$$\chi^{D \blacktriangle_n D_i}(\pi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta^i(g^{-1}) \prod_{k=1}^{n} \chi^D(g^k)^{a_k(\pi)}$$

ist ein Charakter von S_n. Wir setzen

$$c_{i,n} := \chi^{D_i \blacktriangle_n D_1}((1 \ldots n)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g} \zeta^i(g^n).$$

(so daß z.B. $c_{i,1} = \delta_{i1}$, $c_{i,2} \in \{\pm 1, 0\}$ je nach Art von D_i).

Diese Zahlen tauchen häufig auf bei Teilbarkeitsuntersuchungen, so gilt z.B.

Satz: Sind $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $C \subseteq G$ eine Konjugiertenklasse von G, so ist die Anzahl der Lösungen $(g_1,\ldots,g_k) \in G^k$ von

$$g_1^{n_1} \ldots g_k^{n_k} \in C$$

gleich

$$|G| \sum_i \left(\frac{|G|}{f^i}\right)^{k-2} \left(\prod_j c_{i,n_j}\right) \frac{|C|}{f^i} \zeta^i(g^{-1}),$$

$g \in C$, also insbesondere teilbar durch $|G|\,\mathrm{ggT}\{(\frac{G}{f^i})^{k-2}\}$.

Für weitere Resultate dieser Art vgl. § 5.3 im Buch von James/Kerber (in Druck) sowie

A. Kerber/B. Wagner: Gleichungen in endlichen Gruppen
Archiv der Math. 35 (1980), 252 - 263