Nouvelles formules de récurrence pour les fonctions

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

Christian Radoux, Université de l'Etat à Mons (Belgique).

L'auteur a démontré en 1975 [1] que, si l'on pose

$$\sigma_k(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\geqslant 1}} d^k \quad , \quad \sigma_k(0) = \frac{1}{2}\ \zeta(-k)$$

$$\text{et} \qquad \Sigma_{r,s}(n) = \sum_{k=o}^{n} \sigma_r(k)\ \sigma_s(n-k) \ , \quad \text{alors}$$

$$\forall m \geqslant 3, \forall n \geqslant 0,\ \sigma_{2m+1}(n) = \frac{12}{(m-2)(2m+3)} \sum_{k=2}^{m-1} k(2k-1)\binom{2m}{2k} \Sigma_{2k-1,2m-2k+1}(n)$$

La démonstration utilise certaines propriétés des fonctions elliptiques, des séries d'Eisenstein correspondantes, ainsi que la formule sommatoire de Lipschitz.
Carl C. Grosjean a fortement généralisé [2] cette relation.
En utilisant l'une de ses formules, ainsi qu'une identité de Van der Pol, nous avons démontré que la fonction τ de Ramanujan peut se calculer très facilement par de multiples formules dont la plus simple est :

$$\tau(n) = n^4\sigma_1(n) - 24 \sum_{k=1}^{n-1} (35k^4 - 52k^3n + 18k^2n^2)\sigma_1(k)\sigma_1(n-k)$$

[1] C. Radoux, Une nouvelle formule de récurrence pour les sommes σ_k de Ramanujan, Bull. Soc. Math. de Belgique, t. XXVII, fasc. 1, 59-65, 1975.

[2] Carl. C. Grosjean, An infinite set of recurrence formulae for the divisor sums, Bull. Soc. Math. de Belgique, t. XXIX, fasc. 1, 3-49 et fasc. 2, 95-138, 1977.