LES q-ANALOGUES DES POLYNOMES D'HERMITE

Jacques Désarménien

0. Introduction.

L'un des problèmes auxquels on se heurte lorsqu'on s'intéresse aux q-analogues est qu'en général il n'existe pas un, mais plusieurs q-analogues possibles d'un objet donné. Les propriétés de ce dernier se généralisent tantôt à l'un, tantôt à un autre de ses q-analogues. Il n'existe donc pas de q-analogue "naturel".

Une illustration de ce principe est fournie par les polynômes d'Hermite. Ceux-ci ont essentiellement deux classes de q-analogues. La première, dérivée des polynômes de Rogers-Szegö, apparut chez Rogers [10] dans sa démonstration des célèbres identités de Rogers-Ramanujan (cf. [4, 5]). La seconde a été étudiée plus particulièrement par Al-Salam et Carlitz [1], Askey [3], et, d'un point de vue différent, par Cigler[8].

L'article qui suit donne un certain nombre de formules concernant ces divers polynômes, avec parfois une démonstration succinte. On donne une interprétation combinatoire pour chacune de ces deux classes de polynômes. Enfin, conformément au principe de Riordan, des tables des premières valeurs des polynômes concernés se trouvent à la fin de l'article.

Les notations utilisées sont les suivantes ; on pose :
$(a;q)_0=1$ et $(a;q)_n=(1-a)(1-aq)\ \dots\ (1-aq^{n-1})$ si $n\geqslant 1$.

On appelle polynôme gaussien ou q-binomial le polynôme suivant :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} .$$

La q-exponentielle de base q est définie par

$$e(t,q) = \prod_{k\geqslant 0} (1-tq^k)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{(q;q)_n} .$$

Enfin, lorsque seule la base q est utilisée, on omet de l'écrire dans les arguments : on note alors $e(t)$ pour $e(t,q)$, ou encore $H_n(x)$ pour $H_n(x,q)$ lorsqu'il sera question de q-analogues des polynômes d'Hermite.

1. Polynômes d'Hermite.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés des polynômes d'Hermite ordinaires. Elles figurent dans tous les ouvrages consacrés aux polynômes orthogonaux.

Notons $h_n(x)$ le n-ième polynôme d'Hermite. Il est de degré n et ses coefficients sont entiers.

Fonction génératrice

$$(1.1) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{h_n(x)\, t^n}{n!} = \exp(tx-t^2/2) .$$

Relation de récurrence linéaire

$$(1.2) \qquad h_0(x)=1 \ , \ h_1(x)=x \ , \ h_{n+1}(x)=xh_n(x)-nh_{n-1}(x), \ n\geqslant 1.$$

Formules explicites

$$(1.3) \qquad h_n(x) = e^{-D^2/2}.\ x^n \ , \text{ où } D \text{ est l'opérateur } \frac{d}{dx} ,$$

$$h_n(x) = \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant n} (-1)^j \binom{n}{2j} (2j-1)!!\ x^{n-2j} ,$$

où $(2j-1)!!=1.3.5. \ldots .(2j-1)$.

Formule multiplicative

$$h_m(x)h_n(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{k} k!\ h_{m+n-2k}(x) . \tag{1.4}$$

Récurrence quadratique

$$h_{m+n}(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m,n} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{n}{k} k!\ h_{m-k}(x)h_{n-k}(x) . \tag{1.5}$$

Formule de Mehler

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{h_n(x)h_n(y)\ t^n}{n!} = (1-t^2)^{-1/2}\exp\left(\frac{xyt-t^2(x^2+y^2)}{1-t^2} \right) . \tag{1.6}$$

Terminons ces rappels par l'interprétation combinatoire classique des polynômes d'Hermite :

soit $a_{n,k}$ le nombre de permutations involutives sur n éléments qui laissent k points fixes ; on remarque que k et n ont même parité ; alors

$$h_n(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{(n-k)/2} a_{n,k}\ x^k .$$

2. Les polynômes de Rogers-Szegö.

La formule de multiplication des exponentielles, qui n'est pas vraie pour les q-exponentielles, est curieusement à la base des définitions des q-polynômes d'Hermite. Les polynômes de Rogers-Szegö, étudiés par Rogers [10] puis par Szegö [14] jouent un rôle essentiel dans la théorie des q-analogues.

Ils sont définis par la fonction génératrice

$$(2.1)\qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{r_n(a,b)\ t^n}{(q;q)_n} = e(at)\ e(bt)\ .$$

Par q-dérivation, on obtient immédiatement la récurrence linéaire

$$(2.2)\qquad r_0(a,b)=1\ ,\ r_1(a,b)=a+b,$$

$$r_{n+1}(a,b) = (a+b)r_n(a,b) - (1-q^n)abr_{n-1}(a,b),\ n\geqslant 1.$$

Du développement de la fonction génératrice 2.1 résulte la formule explicite

$$(2.3)\qquad r_n(a,b) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k b^{n-k}.$$

On vérifie également la formule multiplicative

$$(2.4)\qquad r_m(a,b)r_n(a,b) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,n} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q;q)_k \times a^k b^k\ r_{m+n-2k}(a,b)\ ,$$

d'où se déduit

$$(2.5)\qquad \sum_{m,n\geqslant 0} \frac{r_{m+n}(a,b)\ t^m u^n}{(q;q)_m (q;q)_n} = \frac{e(at)\ e(au)\ e(bt)\ e(bu)}{e(abtu)}\ ,$$

et finalement une formule de type Mehler :

$$(2.6)\qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{r_n(a,b)r_n(c,d)\ t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(act)\ e(adt)\ e(bct)\ e(bdt)}{e(abcdt^2)}\ .$$

3. Les q-polynômes d'Hermite de 1ère espèce.

La similitude entre ces formules et les formules analogues pour les polynômes d'Hermite ont parfois conduit à qualifier les polynômes de Rogers-Szegö de q-polynômes d'Hermite. En fait, une légère modification des arguments permet d'obtenir un q-analogue bien plus satisfaisant. De plus, cette modification apparaît dans l'article original de Rogers. Posons donc

$$A_n(\cos\theta) = r_n(e^{i\theta},e^{-i\theta}) .$$

La définition de la q-exponentielle et la fonction génératrice 2.1 fournissent presque immédiatement

$$(3.1) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{A_n(x)\ t^n}{(q;q)_n} = \prod_{k\geqslant 0} (1-2xtq^k+t^2q^{2k})^{-1} .$$

La relation de récurrence 2.2 devient

$$(3.2) \qquad A_0(x)=1 \ , \ A_1(x)=2x \ ,$$

$$A_{n+1}(x)=2xA_n(x)-(1-q^n)A_{n-1}(x) \ , \ n\geqslant 1 .$$

La formule explicite 2.3 donne le développement de Fourier

$$(3.3) \qquad A_n(\cos\theta) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} e^{i(n-2k)\theta}.$$

Les formules 2.4, 2.5 et 2.6 ont comme conséquences les trois formules suivantes :

$$(3.4) \qquad A_m(x)A_n(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,n} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q;q)_k\ A_{m+n-2k}(x) ,$$

$$(3.5) \qquad A_{m+n}(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,n} (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q;q)_k\ q^{k(k-1)/2} \times A_{m-k}(x)A_{n-k}(x) .$$

$$(3.6)\qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{A_n(x)A_n(y)\ t^n}{(q;q)_n}$$

$$= \prod_{k\geqslant 0} \frac{1-t^2q^k}{(1-4tq^kxy+2t^2q^{2k}(2x^2+2y^2-1)-4t^3q^{3k}xy+t^4q^{4k})} \ .$$

Il n'est pas possible de faire q=1 dans les formules précédentes. Il faut pour cela une normalisation différente ; on peut en profiter pour faire disparaître le coefficient 2 dans la récurrence 3.2, en posant

$$H_n(x) = (1-q)^{-n/2}\ A_n\left(\frac{\sqrt{1-q}}{2}\ x\right) .$$

Les polynômes ainsi obtenus sont de "vrais" q-analogues des polynômes d'Hermite, donnés par la récurrence linéaire

$$(3.7)\qquad H_0(x)=1\ ,\ H_1(x)=x\ ,\ H_{n+1}(x)=xH_n(x)-\frac{1-q^n}{1-q}\ H_{n-1}(x),\ n\geqslant 1.$$

Ces polynômes figurent dans Cigler [8].

Leur fonction génératrice et leur formule de Mehler ne semblent pas présenter d'intérêt particulier. On ne retrouve pas les formules correspondantes pour les polynômes d'Hermite lorsque q=1. Il en est de même pour la formule explicite 3.3. En revanche, les formules 3.4 et 3.5 apparaissent, après changement d'argument, comme des q-analogues des formules 1.4 et 1.5. Ce sont respectivement

$$(3.8)\qquad H_m(x)H_n(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,n} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}\ H_{m+n-2k}(x)\ ,$$

$$(3.9)\qquad H_{m+n}(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,n} (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}\ q^{k(k-1)/2}$$

$$\times\ H_{m-k}(x)H_{n-k}(x)\ .$$

Ces q-analogues, enfin, possèdent une interprétation en termes d'inversions. Soit $w=w_1w_2\dots w_n$ l'image d'une involution de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ ayant k points fixes et $(n-k)/2$ transpositions. Soit $a_{n,k,j}$ le nombre de celles de ces involutions présentant j inversions (au sens usuel, sur le mot w). Appelons

$$I_n(x,q) = \sum_{k,j} a_{n,k,j}\, q^j x^k$$

le polynôme générateur du couple inversions-points fixes sur les involutions des n premiers entiers. On vérifie aisément que ces polynômes satisfont la récurrence

$$(3.10) \qquad I_0(x,q)=1\ ,\ I_1(x,q)=x\ ,$$
$$I_{n+1}(x,q)=xI_n(x,q)+\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\, qI_{n-1}(x,q)\ ,\ n\geqslant 1.$$

Pour rappeler la base q, notons $H_n(x,q)$ le q-polynôme d'Hermite précédemment défini. Le polynôme I_n est alors donné par

$$(3.11) \qquad I_n(x,q) = i^n q^{n/2} H_n(-i\frac{x}{\sqrt{q}}, q^2).$$

Les coefficients des deux polynômes sont identiques, au signe et à un changement d'indice près.

4. Les polynômes d'Al-Salam-Carlitz.

Al-Salam et Carlitz [1] étudient diverses généralisations des polynômes de Rogers-Szegö, parmi lesquelles la famille suivante de polynômes en deux indéterminées a et x, en plus de la base q :

$$(4.1) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{U_n^{(a)}(x)\, t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(xt)}{e(t)\, e(at)}\ .$$

La q-dérivation fournit la récurrence linéaire

$$(4.2)\qquad U_0^{(a)}(x)=1\ ,\ U_1^{(a)}(x)=x-(1+a)\ ,$$

$$U_{n+1}^{(a)}(x)=(x-(1+a)q^n)U_n^{(a)}(x)+a(1-q^n)q^{n-1}U_{n-1}^{(a)}(x),\ n\geqslant 1.$$

L'identité qui suit est une conséquence du théorème q-binomial :

$$\frac{e(xt)}{e(t)}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(x-1)(x-q)(x-q^2)\ \ldots\ (x-q^{n-1})\ t^n}{(q;q)_n}\ ;$$

en faisant x=0 et en remplaçant t par at, on en déduit

$$\frac{1}{e(at)}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\ q^{n(n-1)/2}\ \frac{a^nt^n}{(q;q)_n}\ ;$$

de ces deux identités résulte la formule explicite

$$(4.3)\qquad U_n^{(a)}(x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{k(k-1)/2}(-a)^k$$

$$\times(x-1)(x-q)(x-q^2)\ \ldots\ (x-q^{n-k-1})\ .$$

Il ne semble pas que des formules aussi simples que 2.4 ou 2.5 soient connues pour ces polynômes. En revanche, Al-Salam et Carlitz établissent une formule de type Mehler :

$$(4.4)\qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{U_n^{(a)}(x)U_n^{(b)}(y)\ t^n}{q^{n(n-1)/2}(q;q)_n}=\frac{e(-xt)\ e(-yt)}{e(-t)\ e(-at)\ e(-bt)}$$

$$\times\sum_{r\geqslant 0}\frac{(a/x;q)_r(b/y;q)_r(-q/t;q)_r}{(q;q)_r(-q/xt;q)_r(-q/yt;q)_r}\,q^r$$

$$=\frac{e(-xt)\ e(-yt)}{e(-t)\ e(-at)\ e(-bt)}\ {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix}a/x,b/y,-q/t\\-q/xt,-q/yt\end{matrix};q;q\right],$$

en utilisant le formalisme des fonctions hypergéométriques basiques.

5. Les q-polynômes d'Hermite de 2ème espèce.

De la même manière qu'avec les polynômes de Rogers-Szegö, une particularisation des arguments va conduire à de nouveaux q-analogues des polynômes d'Hermite. Posons

$$F_n(x) = U_n^{(-1)}(x).$$

Ces polynômes vérifient les identités suivantes :

$$(5.1) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n(x)\ t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(xt)}{e(t)\ e(-t)} ,$$

$$(5.2) \qquad F_0(x)=1 \ , \ F_1(x)=x \ ,$$

$$F_{n+1}(x)=xF_n(x)-(1-q^n)\ q^{n-1}F_{n-1}(x) \ , \ n\geqslant 1 \ .$$

Al-Salam et Carlitz donnent pour ces polynômes des formules explicites voisines de 1.3. Soit δ l'opérateur q-différentiel

$$\delta f(x) = \frac{1}{x}\,(f(x)-f(qx)) \ .$$

On a alors, en rappelant que $e(t,q^2)$ désigne la q-exponentielle de base q^2,

$$(5.3) \qquad F_n(x) = \frac{1}{e(\delta^2,q^2)} \cdot x^n ,$$

$$= \sum_{0\leqslant 2j\leqslant n} (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ 2j \end{bmatrix} \frac{(q;q)_{2j}}{(q^2;q^2)_j}\ q^{j(j-1)}\ x^{n-2j} \ .$$

L'identité 4.4 ne se simplifie pas notablement. Elle donne la formule de type Mehler suivante :

$$(5.4)\qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n(x)F_n(y)\quad t^n}{q^{n(n-1)/2}(q;q)_n}$$

$$= \frac{e(-xt)\ e(-yt)}{e(-t)\ e(t)^2}\ {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix}-1/x,-1/y,-q/t\\ -q/xt,-q/yt\end{matrix};q;q\right].$$

Askey [3] et Cigler [8] ont étudié des polynômes liés aux polynômes F_n. Les polynômes que définit Askey sont donnés par

$$(5.5)\qquad H_n'(x) = q^n\ F_n(\tfrac{x}{q})\ .$$

Ces polynômes vérifient la récurrence linéaire

$$(5.6)\qquad H_0'(x)=1\ ,\ H_1'(x)=x\ ,$$

$$H_{n+1}'(x)=xH_n'(x)-(1-q^n)\ q^{n+1}H_{n-1}'(x)\ ,\ n\geqslant 1.$$

Askey démontre, pour ces polynômes, la formule multiplicative

$$(5.7)\qquad H_m'(x)H_n'(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m,n} \begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(q;q)_k\ q^{(m+n)k-3k(k-1)/2}$$

$$\times\ {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix}q^{-k},q^{-m+k},q^{-n+k}\\ -q,0\end{matrix};q;q\right] H_{m+n-2k}'(x)\ .$$

6. Les q-polynômes d'Hermite de 2ème espèce, d'après Cigler.

Par des manipulations d'opérateurs, Cigler [8] est amené à étudier des polynômes $K_n(x)$ (notés $H_n(x)$ par Cigler). Ces polynômes, comme nous le verrons plus loin, sont reliés aux F_n. Nous nous proposons d'utiliser ce lien pour retrouver une partie des résultats de Cigler.

Nous allons tout de suite donner les notations qu'utilise Cigler.

Il note

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q} , [n]_2 = \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} \quad \text{et } [n]! = [1][2] \ldots [n].$$

Avec ces notations, la q-exponentielle qui apparaît naturellement est la suivante (notée $e(t)$ et $e_2(t)$ selon qu'elle est de base q ou q^2 dans l'article de Cigler) :

$$E(t,q) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{[n]!} = e(t(1-q),q) .$$

L'un des avantages de cette notation est qu'il est possible de prendre directement q=1.

Avec ces notations, les polynômes $K_n(x)$ sont définis par la fonction génératrice

$$(6.1) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{K_n(x)\ t^n}{[n]!} = \frac{E(xt,q)}{E(qt^2/[2],q^2)} ,$$

d'où l'on tire la récurrence linéaire

$$(6.2) \qquad K_0(x)=1 , K_1(x)=x , K_{n+1}(x)=xK_n(x)-[n]\ q^nK_{n-1}(x), \ n\geqslant 1.$$

A partir de la relation précédente, on obtient la valeur de K_n en fonction de F_n :

$$K_n(x) = \left(\frac{q}{1-q} \right)^{n/2} F_n\left(x \sqrt{\frac{1-q}{q}}\right) .$$

Le passage de la fonction génératrice 5.1 à la fonction 6.1 est alors le suivant : on vérifie d'abord l'identité

$$e(t,q)\ e(-t,q) = e(t^2,q^2) ,$$

par exemple en calculant $r_n(1,-1)$ avec la récurrence 2.2 .

Ecrivons maintenant la fonction génératrice 5.1 pour les polynômes K_n :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{K_n(x)\ t^n}{(q;q)_n} = \frac{e(xt,q)}{e(\frac{qt^2}{1-q}\ ,\ q^2\ )} \ .$$

En remplaçant t par t(1-q), on obtient le premier membre de 6.1 ; le second membre devient alors

$$\frac{e(xt(1-q),q)}{e(qt^2(1-q),q^2)} = \frac{e(xt(1-q),q)}{e(\ qt^2\ \frac{1-q^2}{1+q}\ ,q^2\ )} = \frac{E(xt,q)}{E(qt^2/[2],q^2)} \ ,$$

ce qui donne 6.1 .

De même, la formule explicite 5.3 permet d'obtenir une formule explicite que donne Cigler. Posons

$$X = x\sqrt{\frac{1-q}{q}} \ ;$$

soient δ et D les opérateurs q-différentiels définis par

$$\delta .\ X^n = (1-q^n)\ X^{n-1} \quad \text{et} \quad D\ .\ x^n = [n]\ x^{n-1} \ .$$

On a alors

$$\delta^k .\ X^n = (1-q^n)(1-q^{n-1})\ \ldots\ (1-q^{n-k+1})\ X^{n-k+1} \ ,$$

$$= (\ \frac{1-q}{q}\ )^{n/2}\ \sqrt{q(1-q)}^k\ D^k .\ x^n \ .$$

La formule 5.3 donne

$$K_n(x) = (\ \frac{q}{1-q}\ )^{n/2}\ \frac{1}{e(\delta^2,q^2)}\ .\ X^n \ ,$$

$$= \frac{1}{e(q(1-q)D^2,q^2)}\ .\ x^n \ ,$$

qui peut être transformée en la première partie de la formule suivante ; la seconde partie de celle-ci est la simple réécriture de la seconde partie de 5.3, avec quelques simplifications.

$$(6.3) \qquad K_n(x) = \frac{1}{E(qD^2/[2],q^2)} \cdot x^n ,$$

$$= \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant n} (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ 2j \end{bmatrix} [2j-1]!! \; q^{j^2} x^{n-2j} ,$$

où l'on posé

$$[2j-1]!! = \frac{(1-q)(1-q^3) \ldots (1-q^{2j-1})}{(1-q)^j} .$$

Cette formule explicite se trouve aussi dans Cigler, ainsi qu'une formule de Mehler :

$$(6.4) \qquad \sum_{n \geqslant 0} \frac{K_n(x)K_n(y)\; t^n}{q^{n(n+1)/2}[n]!} = \sum_{m \geqslant 0} \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!} \left(\frac{t^2}{q} \right)^m$$

$$\times E(xy\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}},q)E(\frac{x^2}{2}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1},q^2)E(\frac{y^2}{2}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1},q^2) \cdot 1 ,$$

où η est l'opérateur $\eta f(t) = f(qt)$.

Au changements de variables près, le premier membre de 5.4 et celui de 6.4 sont identiques. Néammoins, le second membre de 6.4 ne semble pas se déduire immédiatement de 5.4 .

Nous allons terminer par une interprétation combinatoire des polynômes K_n, liée aux involutions des n premiers entiers.

Si w est une telle involution, elle peut être codée par une permutation w' de l'ensemble $\{1,2, \ldots ,n\}$ de la façon suivante :

$$w' = w'_1 w'_2 \ldots w'_{n-k-1} w'_{n-k} w'_{n-k+1} \ldots w'_n ,$$

où les k points fixes de w sont $w'_{n-k+1}, \ldots, w'_n$ arrangés par ordre croissant :

$$w'_{n-k+1} < \ldots < w'_n ,$$

et où les $(n-k)/2$ cycles de w sont $(w'_1 w'_2), \ldots, (w'_{n-k-1} w'_{n-k})$ arrangés par ordre décroissant dans chaque cycle, puis par ordre décroissant de leur premier élément :

$$\begin{array}{cccccc} w'_1 & > & w'_3 & > \ldots > & w'_{n-k-1} \\ \vee & & \vee & & \vee \\ w'_2 & & w'_4 & \ldots & w'_{n-k} \end{array} .$$

Si, par exemple,

$$w = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 9 & 8 & 7 \end{array} ,$$

son codage w' est

$$w' = 9\ 7\ 5\ 1\ 4\ 3\ 2\ 6\ 8 .$$

L'algorithme de décodage est clair : les points fixes de w se trouvent en plus longue dernière séquence croissante de même parité que n dans w' ; on en déduit les cycles.
On remarque que n est toujours le dernier ou le premier élément de w'. Soit

$$K'_n(x) = \sum_w q^{\mathrm{INV}(w')} x^k$$

le polynôme générateur des inversions de w' et des points fixes de w. La remarque précédente fournit immédiatement pour K'_n une récurrence linéaire ; on constate qu'elle est identique à 6.2 et, par conséquent

$$K'_n(x) = K_n(x) .$$

7. Remarques.

Dans ce qui précède, il n'a pas été question d'orthogonalité. Tous les polynômes cités sont orthogonaux. Cependant, seuls les polynômes d'Hermite de 2ème espèce semblent conduire à des résultats intéressants. Ils ont été étudiés sous cet angle par Al-Salam et Carlitz [1], Askey [2] et Cigler [8].

Il serait intéressant d'obtenir les formules mentionnées pour les q-polynômes d'Hermite à partir de leur interprétation combinatoire. Celles qui sont données ne sont d'ailleurs peut-être pas les plus appropriées pour de telles démonstrations combinatoires.

8. Tables.

Polynômes de Rogers-Szegö $r_n(1,x)$; $r_n(a,b) = a^n\, r_n(1,\frac{b}{a})$.

$r_0(1,x) = 1 \quad r_1(1,x) = 1+x \quad r_2(1,x) = 1+(1+q)x+x^2$

$r_3(1,x) = 1+(1+q+q^2)x+(1+q+q^2)x^2+x^3$

$r_4(1,x) = 1+(1+q+q^2+q^3)x+(1+q+2q^2+q^3+q^4)x^2+(1+q+q^2+q^3)x^3+x^4$

$$\begin{aligned}r_5(1,x) = {} & 1+(1+q+q^2+q^3+q^4)x+(1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6)x^2 \\ & +(1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6)x^3+(1+q+q^2+q^3+q^4)x^4+x^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_6(1,x) = {} & 1+(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)x+(1+q+2q^2+2q^3+3q^4+2q^5+2q^6+q^7+q^8)x^2 \\ & +(1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+3q^6+2q^7+q^8+q^9)x^3 \\ & +(1+q+2q^2+2q^3+3q^4+2q^5+2q^6+q^7+q^8)x^4+(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)x^5+x^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_7(1,x) = {} & 1+(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6)x \\ & +(1+q+2q^2+2q^3+3q^4+3q^5+3q^6+2q^7+2q^8+q^9+q^{10})x^2 \\ & +(1+q+2q^2+3q^3+4q^4+4q^5+5q^6+4q^7+4q^8+3q^9+2q^{10}+q^{11}+q^{12})x^3 \\ & +(1+q+2q^2+3q^3+4q^4+4q^5+5q^6+4q^7+4q^8+3q^9+2q^{10}+q^{11}+q^{12})x^4 \\ & +(1+q+2q^2+2q^3+3q^4+3q^5+3q^6+2q^7+2q^8+q^9+q^{10})x^5 \\ & +(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6)x^6+x^7\end{aligned}$$

Polynômes de Rogers $A_n(x)$

$A_0(x) = 1 \quad A_1(x) = 2x \quad A_2(x) = 4x^2-(1-q)$

$A_3(x) = 8x^3-2(2-q-q^2)x \quad A_4(x) = 16x^4-4(3-q-q^2-q^3)x^2+(1-q-q^3+q^4)$

$A_5(x) = 32x^5-8(4-q-q^2-q^3-q^4)x^3+2(3-2q-q^2-q^3-q^4+q^5+q^6)x$

$$A_6(x) = 64x^6-16(5-q-q^2-q^3-q^4-q^5)x^4 +4(6-3q-2q^2-2q^3-q^4-2q^5+2q^6+q^7+q^8)x^2-(1-q-q^3+q^4-q^5+q^6+q^8-q^9)$$

$$A_7(x) = 128x^7-32(6-q-q^2-q^3-q^4-q^5-q^6)x^5 +8(10-4q-3q^2-3q^3-2q^4-2q^5-2q^6+2q^7+2q^8+q^9+q^{10})x^3 -2(4-3q-q^2-2q^3-q^6+2q^7+2q^8+q^{10}-q^{11}-q^{12})x$$

q-Polynômes d'Hermite de 1ère espèce $H_n(x)$

$H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = x \quad H_2(x) = x^2-1 \quad H_3(x) = x^3-(2+q)x$

$H_4(x) = x^4-(3+2q+q^2)x^2+(1+q+q^2)$

$H_5(x) = x^5-(4+3q+2q^2+q^3)x^3+(3+4q+4q^2+3q^3+q^4)x$

$$H_6(x) = x^6-(5+4q+3q^2+2q^3+q^4)x^4+(6+9q+10q^2+9q^3+7q^4+3q^5+q^6)x^2 -(1+2q+3q^2+3q^3+3q^4+2q^5+q^6)$$

$$H_7(x) = x^7-(6+5q+4q^2+3q^3+2q^4+q^5)x^5 +(10+16q+19q^2+19q^3+17q^4+13q^5+7q^6+3q^7+q^8)x^3 -(4+9q+14q^2+17q^3+18q^4+17q^5+13q^6+8q^7+4q^8+q^9)x$$

Polynômes d'Al-Salam-Carlitz $F_n(x)$

$F_0(x) =1 \quad F_1(x) = x \quad F_2(x) = x^2-(1-q) \quad F_3(x) = x^3-(1-q^3)x$

$F_4(x) = x^4-(1+q^2-q^3-q^5)x^2+(q^2-q^3-q^5+q^6)$

$F_5(x) = x^5-(1+q^2-q^5-q^7)x^3+(q^2-q^5-q^7+q^{10})x$

$$F_6(x) = x^6-(1+q^2+q^4-q^5-q^7-q^9)x^4$$
$$+(q^2+q^4-q^5+q^6-2q^7-2q^9+q^{10}-q^{11}+q^{12}+q^{14})x^2$$
$$-(q^6-q^7-q^9+q^{10}-q^{11}+q^{12}+q^{14}-q^{15})$$

$$F_7(x) = x^7-(1+q^2+q^4-q^7-q^9-q^{11})x^5$$
$$+(q^2+q^4+q^6-q^7-2q^9-2q^{11}-q^{13}+q^{14}+q^{16}+q^{18})x^3$$
$$-(q^6-q^9-q^{11}-q^{13}+q^{14}+q^{16}+q^{18}-q^{21})x$$

q-Polynômes d'Hermite de 2ème espèce $K_n(x)$

$K_0(x) = 1 \quad K_1(x) = x \quad K_2(x) = x^2-q \quad K_3(x) = x^3-(q+q^2+q^3)x$

$$K_4(x) = x^4-(q+q^2+2q^3+q^4+q^5)x^2+(q^4+q^5+q^6)$$

$$K_5(x) = x^5-(q+q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7)x^3+(q^4+2q^5+3q^6+3q^7+3q^8+2q^9+q^{10})x$$

$$K_6(x) = x^6-(q+q^2+2q^3+2q^4+3q^5+2q^6+2q^7+q^8+q^9)x^4$$
$$+(q^4+2q^5+4q^6+5q^7+7q^8+7q^9+7q^{10}+5q^{11}+4q^{12}+2q^{13}+q^{14})x^2$$
$$-(q^9+2q^{10}+3q^{11}+3q^{12}+3q^{13}+2q^{14}+q^{15})$$

$$K_7(x) = x^7-(q+q^2+2q^3+2q^4+3q^5+3q^6+3q^7+2q^8+2q^9+q^{10}+q^{11})x^5$$
$$+(q^4+2q^5+4q^6+6q^7+9q^8+11q^9+13q^{10}+13q^{11}+13q^{12}+11q^{13}+9q^{14}$$
$$+6q^{15}+4q^{16}+2q^{17}+q^{18})x^3$$
$$-(q^9+3q^{10}+6q^{11}+9q^{12}+12q^{13}+14q^{14}+15q^{15}+14q^{16}+12q^{17}$$
$$+9q^{18}+6q^{19}+3q^{20}+q^{21})x$$

Références.

[1] W.A. Al-Salam et L. Carlitz, Some orthogonal q-polynomials, Math. Nachr. 30(1965), 47-61.

[2] R. Askey et M. Ismail, A generalization of ultraspherical polynomials, MRC Technical Summary Report #1851, Math. Research Center, Madison, Wisconsin, 1978.

[3] R. Askey, manuscrit.

[4] D. Bressoud, A simple proof of Mehler's formula for q-Hermite polynomials, Indiana Univ. Math. J. 29(1980), 577-580.

[5] D. Bressoud, On partitions, orthogonal polynomials and the expansion of certain infinite products, Proc. London Math. Soc. 42(1981), 478-500.

[6] L. Carlitz, Some polynomials related to theta functions, Ann. Math. Pura Appl., ser.4, 41(1956), 359-373.

[7] L. Carlitz, Some polynomials related to theta functions, Duke Math. J. 24(1957), 521-527.

[8] J. Cigler, Elementare q-Identitäten (actes de la 5ème session du Séminaire Lotharingien de Combinatoire), publication de l'I.R.M.A. n°182/S-04, Strasbourg, 1982.

[9] W. Hahn, Über Orthogonal-polynome, die q-Differenzengleichungen genügen, Math. Nachr. 2(1949), 4-34.

[10] L.J. Rogers, On a three-fold symmetry in the elements of Heine's series, Proc. London Math. Soc. 24(1893), 171-179.

[11] L.J. Rogers, On the expansion of some infinite products, Proc. London Math. Soc. 24(1893), 337-352.

[12] L.J. Rogers, Second memoir on the expansion of certain infinite products, Proc. London Math. Soc. 25(1894), 318-343.

[13] L.J. Rogers, Third memoir on the expansion of certain infinite products, Proc. London Math. Soc. 26(1895), 15-32.

[14] G. Szegö, Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. K. XIX(1926), 242-252.

Département de Mathématique
Université Louis-Pasteur
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg cedex
France