Andreas W.M. Dress (Bielefeld)

Über einige Definitionen und Sätze, die als Grundlage beim Aufbau einer arithmetischen Theorie von Matroiden gebraucht werden können.

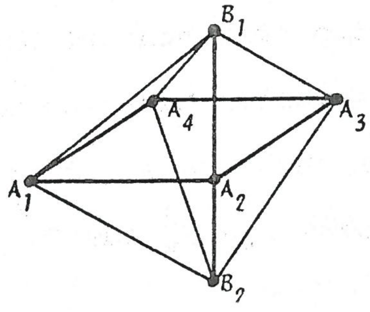
Ein kurzer Ergebnisbericht

Sei M ein auf der Menge $E = E_M$ definiertes Matroid vom Range n . Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_M \subseteq \mathcal{P}_n(E)$ die Menge der Basen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_M$ die Menge der Hyperebenen und $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$ die Menge der Kreisläufe (circuits) von M .

Sei $\Gamma = \Gamma_M$ der auf der Menge $\mathcal{B}$ als Eckmenge definierte gerichtete Graph, dessen Kanten von der Menge $\mathcal{B}^{(2)}$ der Paare $(A,B) \in \mathcal{B}^2$ mit $|A \cap B| = n-1$ gebildet werden.

Drei Basen $A,B,C \in \mathcal{B}$ bilden offenbar dann und nur dann die Ecken eines Dreiecks in Γ , wenn entweder $A \cap B \cap C$ mit $A \cap B$, $B \cap C$ und $C \cap A$ übereinstimmt und die Mächtigkeit n-1 besitzt oder $A \cup B \cup C$ mit $A \cup B$, $B \cup C$ und $C \cup A$ übereinstimmt und die Mächtigkeit n+1 besitzt.

Vier Basen A_1,A_2,A_3,A_4 bilden dann und nur dann die Ecken eines Vierecks in Γ , wenn $D = A_1 \cap A_3$ mit $A_2 \cap A_4$ übereinstimmt und die Mächtigkeit n-2 besitzt und es wohlbestimmte Elemente $a_1,a_2,a_3,a_4 \in E$ gibt mit $A_i = D \cup \{a_i,a_{i+1}\}$ (i=1,...,4 mod 4). Ein solches Viereck heiße entartet, wenn zumindest eine der beiden Mengen $B_1 = D \cup \{a_1,a_3\}$ oder $B_2 = D \cup \{a_2,a_4\}$ keine Basis ist (N.B.: M ist genau dann binär, wenn jedes Viereck entartet ist). Andernfalls bilden die sechs Basen $A_1,\dots,A_4$, B_1,B_2 die Ecken eines Oktaeders in Γ , und jedes in Γ auftretende Oktaeder wird auf diese Weise erfaßt:



Wir definieren die Tutte-Gruppe $\Gamma = \Gamma_M$ von M als die Faktorgruppe der von den Symbolen ε und $X_{A,B}((A,B) \in \mathcal{B}^{(2)})$ erzeugten (multiplikativ geschriebenen) freien abelschen Gruppe nach der Untergruppe, die von ε^2 und sämtlichen Elementen der Form

$$X_{A,B} \cdot X_{B,A} \quad ((A,B) \in \mathcal{B}^{(2)}) \quad ,$$

$$\varepsilon^{n-|A \cap B \cap C|-1} \cdot X_{A,B} \cdot X_{B,C} \cdot X_{C,A} ((A,B),(B,C),(C,A) \in \mathcal{B}^{(2)})$$

und

$$X_{A,B} \cdot X_{C,D} (A,B,C,D \text{ bilden ein entartetes Viereck in } \Gamma) \text{ erzeugt}$$

wird.

Sei ε_M bzw. $x_{A,B}$ das Bild von ε bzw. $X_{A,B}$ in Γ.

Die wesentlichen Ergebnisse von Tuttes Theorie regulärer Matroide können unter Verwendung der Tutte-Gruppe wie folgt formuliert werden:

<u>Satz 1</u>: Ist M binär, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) M ist regulär

(ii) $\varepsilon_M \neq 1$

(iii) $\varepsilon_M \notin \Gamma_M^2 = \{x^2 \mid x \in \Gamma_M\}$

(iv) M besitzt keinen Minor, der zum Fano-Matroid oder dessen Dual äquivalent ist.

Gelten die Eigenschaften (i) - (iv), so entsprechen die Homomorphismen $\varphi : \varepsilon_M \to \{\pm 1\}$ mit $\varphi(\varepsilon_M) = -1$ umkehrbar eindeutig den auf M definierbaren regulären Strukturen, ihre Anzahl ist also gleich $\frac{1}{2}(\Gamma_M : \Gamma_M^2)$ und damit eine Potenz von 2 .

<u>Problem</u>: Gilt die Äquivalenz der Aussagen (ii), (iii) und (iv) eventuell auch für nicht binäre Matroide (mir scheint das wahrscheinlich), oder wie sonst läßt sich die Klasse aller Matroide mit $\varepsilon_M \neq 1$ bzw. mit $\varepsilon_M \notin \Gamma_M^2$ kennzeichnen, wie sieht insbesondere andernfalls die Klasse der minimalen Matroide mit $\varepsilon_M = 1$ bzw. $\varepsilon_M \in \Gamma_M^2$ aus ?

Satz 2: Sei $\Gamma_M^{\mathcal{B}}$ die Faktorgruppe der von den Symbolen ε und $X_{(a_1,\ldots,a_n)}$ $(\{a_1,\ldots,a_n\}\in\mathcal{B})$ erzeugten freien abelschen Gruppe nach der Untergruppe, die von ε^2 und den Elementen der Form

$$\varepsilon\cdot X_{(a_1,\ldots,a_n)}\cdot X^{-1}_{(a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(n)})}\quad(\{a_1,\ldots,a_n\}\in\mathcal{B},\pi:\{1,\ldots,n\}\to$$

$\{1,\ldots,n\}$ eine ungerade Permutation), sowie den Elementen der Form

$$X_{(a_1,\ldots,a_{n-2},b_1,c_1)}X_{(a_1,\ldots,a_{n-2},b_2,c_2)}X^{-1}_{(a_1,\ldots,a_{n-2},b_1,c_2)}X^{-1}_{(a_1,\ldots,a_{n-2},b_2,c_1)}$$

$(a_1,\ldots,a_{n-2},b_1,b_2,c_1,c_2\in E;\ \{a_1,\ldots,a_{n-2},b_i,c_j\}\in\mathcal{B}$ für $i,j=1,2$; $\{a_1,\ldots,a_{n-2},b_1,b_2\}\notin\mathcal{B})$ erzeugt wird. Sei $\Gamma_M^{\mathcal{H}}$ die Faktorengruppe der von den Symbolen ε und $X_{H,a}$ $(H\in\mathcal{H},\ a\in E\setminus H)$ erzeugten freien abelschen Gruppe nach der Untergruppe, die von ε^2 und den Elementen der Form

$$\varepsilon\cdot X_{H_1,a_2}\cdot X^{-1}_{H_1,a_3}\cdot X_{H_2,a_3}\cdot X^{-1}_{H_2,a_1}\cdot X_{H_3,a_1}\cdot X^{-1}_{H_3,a_2}$$

$$(H_1,H_2,H_3\in\quad,\ L=H_1\cap H_2\cap H_3=H_1\cap H_2=H_2\cap H_3=H_3\cap H_1$$

vom Range $n-2$; $a_i\in H_i\setminus L$ für $i=1,2,3)$ erzeugt wird. Sei schließlich $\Gamma_M^{\mathcal{C}}$ die Faktorgruppe der von den Symbolen ε und $X_{C,a}$ $(a\in C\in\mathcal{C})$ erzeugten freien abelschen Gruppe nach der Untergruppe, die von ε^2 und den Elementen der Form

$$\varepsilon\cdot X_{C_1,a_2}\cdot X^{-1}_{C_1,a_3}\cdot X_{C_2,a_3}\cdot X^{-1}_{C_2,a_1}\cdot X_{C_3,a_1}\cdot X^{-1}_{C_3,a_2}$$

$$(C_1,C_2,C_3\in\mathcal{C}\ ;\ D=C_1\cup C_2\cup C_3=C_1\cup C_2=C_2\cup C_3=C_3\cup C_1\ ;$$

$2+\mathrm{rk}\,D=|D|$; $a_i\in D\setminus C_i$ für $i=1,2,3)$ erzeugt wird. Dann definieren die Zuordnung

$$\varepsilon\mapsto\varepsilon,\ X_{A,B}\to X_{(a_1,\ldots,a_{n-1},a)}\cdot X^{-1}_{(a_1,\ldots,a_{n-1},b)}$$

$$(A=\{a_1,\ldots,a_{n-1},a\}\ ,\ B=\{a_1,\ldots,a_{n-1},b\}\in\mathcal{B})$$

$$\varepsilon\mapsto\varepsilon,\ X_{A,B}\to X_{\langle A\cap B\rangle,a}\cdot X^{-1}_{\langle A\cap B\rangle,b}$$

$$((A,B)\in\mathcal{B}^{(2)}\ ;\ \langle A\cap B\rangle=\{c\in E\mid (A\cap B)\cup\{c\}\notin\mathcal{B}\}\ ;$$

$$A=(A\cap B)\cup\{a\}\ ,\ B=(A\cap B)\cup\{b\})$$

und

$$\varepsilon \mapsto \varepsilon,\ X_{A,B} \mapsto X_{C(A \cup B),a} \cdot X^{-1}_{C(A \cup B),b}$$

$$((A,B) \in \mathcal{B}^{(2)}\ ,\ C(A \cup B) = \{c \in A \cup B \mid (A \cup B) \setminus \{c\} \in \mathcal{B}\},$$
$$A = (A \cup B) \setminus \{a\}\ ,\ B = (A \cup B) \setminus \{b\})$$

wohldefinierte Homomorphismen

$$\Gamma_M \to \Gamma_M^{\mathcal{B}}\ ,\ \Gamma_M \to \Gamma_M^{\mathcal{H}}\ ,\ \Gamma_M \to \Gamma_M^{\mathcal{C}}$$

die Γ_M jeweils isomorph auf den Kern der durch die Zuordnungen

$\varepsilon \mapsto 0, X_{(a_1,\ldots,a_n)} \mapsto 1$ bzw. $\varepsilon \mapsto 0, X_{H,a} \mapsto \bigoplus_{H' \in \mathcal{H}} \delta^H_{H'}$ bzw.

$\varepsilon \mapsto 0, X_{C,a} \mapsto \bigoplus_{C' \in \mathcal{C}} \delta^C_{C'}$ definierten Homomorphismen

$$\Gamma_M^{\mathcal{B}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\ ,\ \Gamma_M^{\mathcal{H}} \twoheadrightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{Z}\ ,\ \Gamma_M^{\mathcal{C}} \twoheadrightarrow \bigoplus_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

abbildet (hierbei bezeichnet $\bigoplus_{H' \in \mathcal{H}} \delta^H_{H'}$, bzw. $\bigoplus_{C' \in \mathcal{C}} \delta^C_{C'}$, wie üblich dasjenige Element in $\bigoplus_{H' \in \mathcal{H}}$ bzw. in $\bigoplus_{C' \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}$, dessen H- bzw. C-Komponente gleich 1 ist, während alle übrigen Komponenten verschwinden).

Bemerkungen: (1) Wir identifizieren demgemäß Γ mit seinen Bildern in $\Gamma^{\mathcal{B}}$ bzw. $\Gamma^{\mathcal{H}}$ bzw. $\Gamma^{\mathcal{C}}$.

(2) Für die Bilder von $X_{(a_1,\ldots,a_n)}$ bzw. $X_{(H,a)}$ bzw. $X_{(C,a)}$ in $\Gamma^{\mathcal{B}}$ bzw. $\Gamma^{\mathcal{H}}$ bzw. $\Gamma^{\mathcal{C}}$ schreiben wir $x_{(a_1,\ldots,a_n)}$ bzw. $x_{(H,a)}$ bzw. $x_{(C,a)}$.

(3) Ist $T \subseteq E$ eine Teilmenge und bezeichnet M/T bzw. $M \setminus T$ wie üblich das aus E durch Kontraktion bzgl. T bzw. Herausnahme von T gebildete Matroid, ist also, falls $\{a_1,\ldots,a_k\}$ eine maximale unabhängige Teilmenge von T und $\{b_1,\ldots,b_h\}$ eine minimale Teilmenge von T mit $rk(E \setminus T) \cup \{b_1,\ldots,b_h\}) = n$ ist,

$$\mathcal{B}_{M/T} = \{\{c_{k+1},\ldots,c_n \subseteq E \mid \{a_1,\ldots,a_k,c_{k+1},\ldots,c_n\} \in \mathcal{B}\}$$

und

$$\mathcal{B}_{M \setminus T} = \{\{c_{h+1},\ldots,c_n\} \subseteq E \setminus T \mid \{b_1,\ldots,b_h,c_{h+1},\ldots,c_n\} \in \mathcal{B}\}\ ,$$

so definiert

$$\Gamma^{\mathcal{B}}_{M/T} \longmapsto \Gamma^{\mathcal{B}}_{M} : \varepsilon_{M/T} \longmapsto \varepsilon_M , \; x_{(c_{k+1},\dots,c_n)} \longmapsto x_{(a_1,\dots,a_k,c_{k+1},\dots,c_n)}$$

bzw.

$$\Gamma^{\mathcal{B}}_{M\setminus T} \longmapsto \Gamma^{\mathcal{B}}_{M} : \varepsilon_{M\setminus T} \longmapsto \varepsilon_M , \; x_{(c_{h+1},\dots,c_n)} \longmapsto x_{(b_1,\dots,b_h,c_{h+1},\dots,c_n)}$$

kanonische, von der Auswahl von $\{a_1,\dots,a_k\}$ bzw. $\{b_1,\dots,b_h\}$ unabhängige Homomorphismen, die $\Gamma_{M/T}$ bzw. $\Gamma_{M\setminus T}$ in Γ_M abbilden, und in analoger, natürlicher Weise auch zu Abbildungen

$$\Gamma^{\mathcal{H}}_{M/T} \to \Gamma^{\mathcal{H}}_{M} , \; \Gamma^{\mathcal{H}}_{M\setminus T} \to \Gamma^{\mathcal{H}}_{M}$$

bzw.

$$\Gamma^{\mathcal{C}}_{M/T} \to \Gamma^{\mathcal{C}}_{M} , \; \Gamma^{\mathcal{C}}_{M\setminus T} \to \Gamma^{\mathcal{C}}_{M}$$

erweitert werden können.

Insbesondere kann die Homotopie-Theorie von Tutte als Studium des Kernes von $\Gamma_{M\,\{a\}} \to \Gamma_M$ bzw. von $\Gamma_{M/\{a\}} \to \Gamma_M$ interpretiert werden.

(2) Ist E endlich und bezeichnet M^* das zu M duale, auf E definierte Matroid, so definiert $\varepsilon_M \mapsto \varepsilon_{M^*}$, $x_{A,B} \mapsto \varepsilon_{M^*} \cdot x_{\bar{A},\bar{B}}$ $((A,B) \in \mathcal{B}^{(2)}$;

$\bar{A} = E\setminus A$, $\bar{B} = E\setminus B)$ einen natürlichen Isomorphismus von Γ_M auf Γ_{M^*} , der sich in ebenfalls natürlicher Weise zu Isomorphismen

$$\Gamma^{\mathcal{B}}_{M} \xrightarrow{\sim} \Gamma^{\mathcal{B}}_{M^*} , \; \Gamma^{\mathcal{H}}_{M} \xrightarrow{\sim} \Gamma^{\mathcal{C}}_{M^*} , \; \Gamma^{\mathcal{C}}_{M} \xrightarrow{\sim} \Gamma^{\mathcal{H}}_{M^*}$$

fortsetzten läßt.

Das nächste Resultat bezieht sich auf gewisse, in dem von Γ_M (bzw. $\Gamma^{\mathcal{B}}_M$ bzw. $\Gamma^{\mathcal{H}}_M$ bzw. $\Gamma^{\mathcal{C}}_M$) frei erzeugten abelschen Monoid $\mathbb{N}[\Gamma_M]$ (bzw. $\mathbb{N}[\Gamma^{\mathcal{B}}_M]$ bzw. $\mathbb{N}[\Gamma^{\mathcal{H}}_M]$ bzw. $\mathbb{N}[\Gamma^{\mathcal{C}}_M]$) gebildete formale Summen, wie z.B. die der Grassmann-Identität nachgebildeten Ausdrücke der Form

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i_M \, x_{(a_0,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_n)} \cdot x_{(a_i,b_2,\dots,b_n)} \in \mathbb{N}[\Gamma^{\mathcal{B}}_M] .$$

Um dieses Resultat möglichst bequem formulieren zu können, nennen wir eine Teilmenge I des von einer (multiplikativ geschriebenen) abelschen Gruppe U frei erzeugten abelschen Monoids $\mathbb{N}[U]$ ein Ideal, wenn I den Bedingungen $0 \in I$, $I + I \subseteq I$ und $U \cdot I \subseteq I$ (also auch $\mathbb{N}[U] \cdot I \subseteq I$) genügt. Ist $\varepsilon \in U$ ein Element mit $\varepsilon^2 = 1$, so nennen wir ein Ideal $I \subseteq \mathbb{N}[U]$ ein ε-Ideal, wenn zusätzlich $x + \varepsilon x \in I$ für alle $x \in U$ (und damit auch für alle $x \in \mathbb{N}[U]$) gilt. $I_U^\varepsilon = \{x + \varepsilon x \mid x \in \mathbb{N}[U]\}$ ist also das eindeutig bestimmte kleinste ε-Ideal in $\mathbb{N}[U]$. Ein ε-Ideal I heiße eigentlich, wenn es in dem ε-Ideal $I_\varepsilon^U = I_U^\varepsilon \cup \{\sum_{i=1}^{k} u_i \mid k \geq 3 , u_i \in U\}$ enthalten ist.

Schließlich heiße ein Ideal $I \subseteq \mathbb{N}[U]$ gesättigt, wenn für alle $k \geq 2$, alle $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}[U]$ und alle $u_{ij} \in \bar{U} = U \cup \{0\} \subseteq \mathbb{N}[U]$ $(i,j = 1,\ldots,k)$ mit $u_{ii} = 0$, $u_{ij} + u_{jh} + h_{hi} \in I$ und $u_{ij} \cdot u_{he} + u_{hj} \cdot u_{ie} + u_{hi} \cdot u_{je} \in I$ $(i,j,h,e = 1,\ldots,k)$ aus $\sum_{i=1}^{k} r_i u_{ij} \in I$ für alle $j = 1,\ldots,k$ stets $\sum_{i=1}^{k} r_i \in I$ oder $u_{ij} = 0$ für alle $i,j = 1,\ldots,k$ folgt. Da der Durchschnitt gesättig er ε-Ideale offenbar wieder ein gesättigtes ε-Ideal ist, können wir für jede Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}[U]$ den Durchschnitt $J_\varepsilon = \cap I$ über alle J umfassenden gesättigten ε-Ideale $I \subseteq \mathbb{N}[U]$ als das von J erzeugte gesättigte ε-Ideal definieren. Man sieht leicht, daß I_U^ε und I_ε^U gesättigt sind. Insbesondere gilt also $J_\varepsilon = I_U^\varepsilon$, falls $J \subseteq I_U^\varepsilon$, insbesonder für $J = \emptyset$, und $J_\varepsilon \subseteq I_\varepsilon^U$, falls $J \subseteq I_\varepsilon^U$.

<u>Satz 3</u>: Sei M ein Matroid und sei J^M $\mathbb{N}[\Gamma]$ die Menge aller Ausdrücke der Form $x_{A_1,B_1} \cdot x_{A_3,B_2} + x_{A_2,B_1} \cdot x_{A_4,B_2} + \varepsilon$, wobei $A_1,A_2,A_3,A_4,B_1,B_2 \in \mathcal{B}$ alle Oktaeder in Γ_M wie oben erläutert (vgl. Abb. 1) durchläuft; sei $I_M = J^M_{\varepsilon_M}$ das von J^M erzeugte gesättigte ε_M-Ideal in $\mathbb{N}[\Gamma]$, sei $I_M^{\mathcal{B}} = \Gamma^{\mathcal{B}} \cdot I_M = \{\sum_{i=1}^{k} u_i r_i \mid k \geq 0 , u_i \in \Gamma^{\mathcal{B}}, r_i \in I_M\} \subseteq \mathbb{N}[\Gamma^{\mathcal{B}}]$ und sei entsprechend $I_M^{\mathcal{H}} = \Gamma^{\mathcal{H}} \cdot I_M$, $I_M^{\mathcal{C}} = \Gamma^{\mathcal{C}} \cdot I_M$. Setzen wir nun noch $x_{(a_1,\ldots,a_n)} = x_{H,a} = x_{C,a} = 0$ falls $\{a_1,\ldots,a_n\} \in \mathcal{B}$, bzw. $a \in H$, bzw. $a \in C$, so gilt

$\sum_{i=o}^{n} \varepsilon_M^i \, x_{(a_o,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n)} \cdot x_{(a_i,b_2,\ldots,b_n)} \in I_M^{\mathcal{B}}$ für alle

$a_o,\ldots,a_n,b_2,\ldots,b_n \in E$

$\det(x_{H_i,a_j})_{i,j=1,\ldots,k} \in I_M^{\mathcal{H}}$ für alle $k \geq 1$, $H_1,\ldots,H_k \in \mathcal{H}$ und $a_1,\ldots,a_k \in E$ mit $rg(\{a_1,\ldots,a_k\} \cup \bigcap_{i=1}^{k} H_i) < k + rg(\bigcap_{i=1}^{k} H_i)$, falls die Determinante gemäß der Leibnitzformel

$$\det(r_{ij})_{i,j=1,\ldots,k} = \sum_{\pi} sgn\,\pi \cdot r_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot r_{k\pi(k)}$$

gebildet und $sgn\,\pi = \begin{cases} 1 & \text{für } \pi \text{ gerade} \\ \varepsilon_M & \text{für } \pi \text{ ungerade} \end{cases}$ gesetzt wird, und ebenso

$$\det(x_{C_i,a_j})_{i,j=1,\ldots,k} \in I_M^{\mathcal{C}}$$

für alle $k \geq 1$, $C_1,\ldots,C_k \in \mathcal{C}$ und $a_1,\ldots,a_k \in E$ mit

$$rg(\bigcup_{i=1}^{i} C_i \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}) + |\{a_1,\ldots,a_k\} \cap \bigcup_{i=1}^{k} C_i| < rg(\bigcup_{i=1}^{k} C_i) + k.$$

Ferner gilt für jede unabhängige Teilmenge $\{b_{k+1},\ldots,b_n\}$ und jede Abbildung

$h : E \longrightarrow \mathbb{N}[\Gamma^{\mathcal{B}}]$ mit $\sum_{i=o}^{k} \varepsilon_M^i \, x_{(a_o,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_k,b_{k+1},\ldots,b_n)} \cdot h(a_i) \in I_M^{\mathcal{B}}$

für alle $a_o,\ldots,a_k \in E$ stets auch

$$\sum_{i=o}^{n} \varepsilon_M^i \cdot x_{(a_o,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n)} \cdot h(a_i) \in I_M^{\mathcal{B}}$$

während - dual - für jede Teilmenge $T \subset E$ vom Range k mit $rg(T \cup \{b_{k+1},\ldots,b_n\}) = n$ und jede Abbildung $c : T \longrightarrow \mathbb{N}[\Gamma^{\mathcal{B}}]$ mit $|\{a \in T \mid c(a) \neq 0\}| < \infty$ und

$\sum_{a \in T} c(a) \cdot x_{(a,a_2,\ldots,a_k,b_{k+1},\ldots,b_n)} \in I_M^{\mathcal{B}}$ für alle $a_2,\ldots,a_k \in T$ auch

$\sum_{a \in T} c(a) \cdot x_{(a,a_2,\ldots,a_n)} \in I_M^{\mathcal{B}}$ für alle $a_2,\ldots,a_n \in E$ gilt.

<u>Bemerkung</u>: Es gilt offenbar stets $I_M \subseteq I_{\varepsilon_M}^{\Gamma}$ und es gilt $I_M = I_{\Gamma}^{\varepsilon_M}$ genau dann, wenn M binär ist.

Die Sätze 2 und 3 haben neben dem bereits genannten Satz 1 vielerlei weitere Anwendungen. So lassen sich z.b. die bekannten (und einige neue) Theoreme über die Darstellbarkeit von Matroiden über kommutativen Ringen oder Körpern aus diesen Sätzen mittels der Theorie der Grassmann-Identitäten leicht herleiten. Es zeigt sich, daß M genau dann über einen kommutativen Ring R mit $1 \in R$ darstellbar ist, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \Gamma \twoheadrightarrow R^x$ in die multiplikative Gruppe R^x der Einheiten von R mit $\varphi(\varepsilon_M) = -1_R$ gibt derart, daß die induzierte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N}[\Gamma] \twoheadrightarrow R : \sum_{i=1}^{k} x_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i) \, (k \geq 0 \, , \, x_i \in \Gamma)$$ die Teilmenge J^M und damit auch I_M auf 0 abbildet.

Ebenso ergeben sich aus diesen Sätzen leicht die verschiedenen äquivalenten Charakterisierungen orientierter Matroide (und der Beweis von deren Äquivalenz), indem man diese Sätze auf Homomorphismen $\varphi : \Gamma \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ mit $\varphi(\varepsilon_M) = -1$ anwendet und bemerkt, daß ein solcher Homomorphismus genau dann eine orientierte Struktur auf M definiert, wenn die induzierte Abbildung $\mathbb{N}[\Gamma] \twoheadrightarrow \mathbb{N}[\{\pm 1\}]$ das ε-Ideal I_M in das (gesättigte!) (-1)-Ideal $I_{or} = \{n \cdot 1 + m(-1) \mid n = m = o \text{ oder } n \cdot m \neq 0\}$ abbildet.

Man kann diese Sätze aber auch benutzen, um "Bewertungen" von Matroiden zu studieren, d.h. Abbildungen $v : \mathcal{B} \twoheadrightarrow \Gamma$ von $\mathcal{B}$ in eine linear geordnete kommutative Gruppe Γ mit der Eigenschaft "aus $\{a_1,\ldots,a_n\}$, $\{b_1,\ldots,b_n\} \in \mathcal{B}$ folgt die Existenz eines $i \in \{1,\ldots,n\}$ mit $\{a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n,b_1\}$, $\{a_i,b_2,\ldots,b_n\} \in \mathcal{B}$ und $v(\{a_1,\ldots,a_n\}) \cdot v(\{b_1,\ldots,b_n\}) \leq v(a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots$ $\ldots,a_n,b_1\}) \cdot v(\{a_i,b_2,\ldots,b_n\})$" , indem man bemerkt, daß solche Bewertungen gerade denjenigen Homomorphismen $\varphi : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma$ mit $\varphi(\varepsilon_M) = 1$ entsprechen, für die die induzierte Abbildung $\varphi : \mathbb{N}[\Gamma] \twoheadrightarrow \mathbb{N}[\Gamma]$ das ε-Ideal I in das (gesättigte!) 1-Ideal

$$I_\Gamma =: \{ \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \mid k = 0 \text{ oder } k \geq 2 \text{ und } \gamma_1 = \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \ldots \geq \gamma_k\}$$ abbildet.

Schließlich kann man mittels dieser Begriffe und Sätze auch affine Strukturen auf M und "Dilworth-truncations" studieren und dabei interessante Zusammenhänge aufdecken.