

Andreas Golembiowski (Bayreuth)

Zur Darstellungstheorie der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe

Es sei im folgenden F stets ein Körper der Charakteristik 0 .

Die Gruppe

$$S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

hat außer Eins- und alternierender Darstellung nur unendlichdimensionale (treue) irreduzible F -Darstellungen. Will man diese in Form der zugehörigen irreduziblen FS -Moduln (Linksmoduln) untersuchen, wobei

$$FS = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} FS_n,$$

so bietet sich die Betrachtung von

$$\{ {}^F S / L \mid L \triangleleft F \}$$

an ($L \triangleleft \dots$ heißt: L ist ein maximales Linksideal von \dots); in dieser Menge läßt sich bis auf Isomorphie jeder Irreduzible FS -Modul finden. Dagegen besitzt FS kein minimales Linksideal. d.h.

$$\text{Soc } FS = (0)$$

(siehe Müller).

Ist $L \triangleleft FS$, so ist

$$P_L := \text{ann}_{FS} [{}^F S / L]$$

das größte in L enthaltene zweiseitige Ideal von FS , und ${}^F S / L$ ist ein - im ringtheoretischen Sinne - treuer ${}^F S / P_L$ -Modul, d.h.

$$\text{ann}_{{}^F S / P_L} [{}^F S / L] = (0);$$

P_L ist also ein primitives Ideal von FS und damit ein Primideal.

Nach Formanek und Lawrence kann man jedem Primideal $P \neq (0)$ von FS umkehrbar eindeutig eine - notwendig endliche - Menge T_P von paarweise unvergleichbaren Rechteckpartitionen zuordnen, die nicht gleichzeitig zwei Partitionen der Form (1^1) und (k) ($1, k \in \mathbb{N}$) enthält.

Ist zu einem solchen Primideal $P \subset L \triangleleft FS$ mit $P_L = P$, so kann man eine eindeutig bestimmte Partition α_P - die sich durch T_P ergibt - konstruieren, welche für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq n_0$ in einem globalen Sinne die FS_n -Moduln

$$FS_n / L \cap FS_n$$

beschreibt. Dazu beachte man, daß

$$FS / L \cong \varinjlim (FS / L \cap FS_n) .$$

Dieser Beschreibung entspricht im Falle $P_L = (0)$ die globale Beschreibung von FS / L durch unendliche Folgen von Partitionen $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k, \dots)$ mit

$$\lambda^0 < \lambda^1 < \dots < \lambda^k \dots$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_{\lambda^k} = \infty ;$$

dabei ist für eine Partition

$$q_{\lambda} := \max\{i \mid (i^i) \leq \lambda\} .$$

Zu jedem Primideal P von FS - dazu gehört auch (0) - kann man ein $L \triangleleft FS$ konstruieren mit $P_L = P$.

Literatur:

Formanek, E./Lawrence, J.: "The Group Algebra of the Infinite Symmetric Group." Israel J. Math., 23 (1976), 325-331

Golembiowski, A.: "Zur Darstellungstheorie der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe über Körpern der Charakteristik 0", Bayreuther Math. Schr. 11 (1982), 1-55

Golembiowski, A.: "Zur Darstellungstheorie...I", erscheint demnächst

Müller, W.: "Radikal und Sockel in Gruppenalgebren über lokal-endlichen Gruppen." Archiv der Mathematik 25 (1974), 476-482