Giuseppe PIRILLO (Firenze)

SU UN TEOREMA DI JUSTIN

Riassunto. Commentiamo brevemente un profondo teorema di Justin sui semigruppi a generazioni di cardinale limitato e diamo qualche indicazione su una più semplice dimostrazione di questo risultato.

Definizione 1. Diciamo che un semigruppo S è a generazioni di cardinale limitato da un intero positivo m su un suo insieme di generatori G (brevemente "S è di tipo (m,G)") se per ogni intero positivo i la i-esima generazione di G in S, cioè il sottoinsieme G^i di S, contiene al più m elementi.

Osservazione. Un semigruppo finito F è di tipo (card F,G) per ogni suo insieme di generatori G ed il semigruppo additivo degli interi positivi è di tipo $(1,\{1\})$.

Il risultato più interessante conosciuto su questa classe di semigruppi è il seguente:

Teorema (Justin). Esistono due applicazioni γ: $N \to N$ e δ: $N \to N$ tali che per ogni semigruppo S di tipo (m,G) esistono un semigruppo finito D di cardinale inferiore o uguale a $\delta(m)$, un intero j inferiore o uguale a $\gamma(m)$, un sottosemigruppo T di NxD, un morfismo χ: $T \to S$ tali che

$$1) \quad \chi(T) = \bigcup_{i\geq j} G^i$$

$$2) \quad \chi(T\cap\{n\}xD)=G^n \qquad (n\geq j).$$

La dimostrazione che si trova in [2] è molto lunga e tecnica; una dimostrazione un pò più semplice è basata su un lemma che stabilisce che ogni elemento s di un semigruppo S si tipo (m,G) ammette una fattorizzazione

$$s=uv^n u'$$

dove n è un intero e u,v,u' appartengono ad S ed hanno "grado" non superiore a m ([5]).

Il precedente teorema di Justin, oltre ad avere un intrinseco interesse, gioca un ruolo importante nello studio dei semigruppi ripetitivi, che ci apprestiamo a definire.

Definizione 2. Data un'applicazione

$$\alpha\colon A^+ \longrightarrow E$$

da A^+ in un insieme E ed un intero positivo k, diciamo che una parola $w\varepsilon A^+$ è una k-potenza modulo α se esiste una fattorizzazione

$$w=w_1 w_2 \dots w_k \qquad (w_i \varepsilon A^+)$$

tale che

$$\alpha(w_1)=\alpha(w_2)=\dots=\alpha(w_k).$$

Definizione 3. Diciamo che una parola w contiene una k-potenza modulo α se ha un fattore che è una k-potenza modulo α.

Definizione 4. Diciamo che un'applicazione

$$\alpha\colon A^+ \longrightarrow E$$

è ripetitiva se per ogni intero positivo k esiste un intero positivo h tale che ogni parola $w\varepsilon A^+$ di lunghezza h contiene una k-potenza modulo α.

Definizione 5. Diciamo che un semigruppo S è ripetitivo se per ogni alfabeto finito A, ogni morfismo

$$\varphi\colon A^+ \longrightarrow S$$

è ripetitivo.

Può essere utile conoscere quanto dice in proposito Lotario ([4]). Qui ci limitiamo brevemente alle considerazioni seguenti. Una caratterizzazione dei semigruppi ripetitivi nella classe di tutti i semigruppi non è ancora nota. Si conosce però la seguente caratterizzazione dei semigruppi ripetitivi commutativi (dovuta a Justin): Un semigruppo commutativo è ripetitivo sse non contiene NxN come sottosemigruppo. La dimostrazione è in [3] : una costruzione di Evdokimov ([1]), ritoccata da Justin, interviene nella dimostrazione della parte "solamente se" mentre una tappa fondamentale della dimostrazione della parte "se" è proprio il teorema di Justin oggetto di questa comunicazione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Evdokimov, A. A., 1968, Strongly asymmetric sequences generated by a finite number of symbols, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 179, 1268-1271 (ed anche Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 536-539).
2. Justin, J., 1969, Propriétés combinatoires de certains semigroupes, C.R. Acad. Sci. Paris, A, 269, 1113-1115.
3. Justin, J., 1972, Characterization of repetitive commutative semigroups, J. Algebra, 21, 87-90.
4. Lotario, Combinatorics on words, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 17, Addison-Wesley,1982.
5. Pirillo, G., 1981, Thèse de 3ème cycle, Université Paris 7.

Giuseppe Pirillo
Istituto di Analisi Globale del CNR
c/o Istituto Matematico "U. Dini"
viale Morgagni 67/A
50134 FIRENZE (ITALIA)