COALGEBRE GRADUATE E SEQUENZE DI GOLDMAN-ROTA

di Luigi Cerlienco e Francesco Piras (Cagliari)

§1

1.1. Sia K un campo, C un K-spazio vettoriale di dimensione ω e $(b_i)_{i\in\omega}$ una fissata base di C. Supponiamo che su C agisca una comoltiplicazione coassociativa Δ_H data da

$$\text{(1)}\qquad \begin{array}{rcl} \Delta_H : C & \longrightarrow & C\otimes C \\ b_i & \longmapsto & \sum_{j=0}^{i} h_j^i\, b_j \otimes b_{i-j} \end{array} \qquad \text{con } h_i^i \neq 0$$

e indichiamo con $H=(h_j^i)$ la matrice triangolare inferiore formata con le costanti di struttura scelte. La coassociatività di Δ_H si traduce nella relazione

$$\text{(2)}\qquad h_j^i\, h_r^j = h_r^i\, h_{j-r}^{i-r}$$

tra le costanti di struttura.

Posto in (2) $i=j=r$ si ottiene $h_i^i=h_o^o$; converremo che

$$\text{(3)}\qquad h_i^i = 1$$

Posto invece $r=j\neq i$ si ha

$$\text{(4)}\qquad h_j^i = h_j^i\, h_o^{i-j}$$

da cui, per $j=0$, $(h_o^i)^2=h_o^i$; pertanto

$$\text{(5)}\qquad h_o^i = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad h_o^i = 0\ .$$

Se, per ogni i, vale la prima delle (5) allora, considerata l'applicazione lineare

$$\text{(6)}\qquad \begin{array}{rcl} \varepsilon : C & \longrightarrow & K \\ b_i & \longmapsto & \delta_i^o \end{array} \qquad \text{(counità)}$$

la terna $C_H=(C,\Delta_H,\varepsilon)$ è una coalgebra (coassociativa, counitaria); risulta in particolare commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} K\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes I"'] \arrow[r, "I\otimes\varepsilon"] & C\otimes K \\ & C \arrow[ul, "\phi"] \arrow[u, "\Delta_H"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

(ϕ è l'isomorfismo canonico). Diremo in tal caso che C_H è una *coalgebra triangolare* o *coalgebra graduata*. Se invece, per qualche i, si ha $h_o^i=0$, solo la parte destra del diagramma precedente risulta commutativa; diremo allora che ε è una counità destra e chiameremo C_H *coalgebra triangolare (o graduata) destra*.

Osserviamo che la (4) comporta

(7) $$h_o^i=0 \implies h_j^{i+j}=0 .$$

Inoltre ponendo r=0 in (2) si ricava

(8) $$(h_o^i=0 \wedge h_o^j\neq 0) \implies h_j^i=0 .$$

Indicheremo con $A_H = (C^*, m_H, e)$ l'algebra (triangolare o triangolare destra) duale di C_H. Denotata con $(b^i)_{i\in\omega}$ la pseudobase di C^* duale della (b_i) : $b^i(b_j)=\delta_j^i$, allora la moltiplicazione m_H e l'unità e sono le applicazioni lineari definite da

(9) $$\begin{aligned} m_H : C^*\otimes C^* &\longrightarrow C^* \\ b^i\otimes b^j &\longmapsto h_i^{i+j}\, b^{i+j} \end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned} e : K &\longrightarrow C^* \\ 1 &\longmapsto b^o . \end{aligned}$$

Se $h_o^i=1$ per ogni i, A_H è un anello d'integrità con unità b^o e ogni $\hat{s}=\sum_j s_j b^j \in A_H$ con $s_o\neq 0$ ammette un unico inverso $\hat{s}^{-1}$. Viceversa, se C_H è destra, allora b^o è elemento neutro solo a destra in A_H. Inoltre $\hat{s}$ ammette un unico inverso sinistro ma non necessariamente esiste, nè se esiste è unico, un suo inverso destro. Conveniamo di chiamare *equivalenti* due elementi $\hat{s}=\Sigma s_j b^j$ e $\hat{t}=\Sigma t_j b^j$ -in simboli: $\hat{s}\equiv\hat{t}$- se $s_i=t_i$ per ogni i per cui $h_o^i\neq 0$. Due elementi equivalenti hanno la stessa inversa sinistra. Inoltre se $\hat{s}\equiv 0$ allora, per ogni

$\hat{t}\in A_H$, $m_H(\hat{t}\otimes\hat{s})=0$.

Osserviamo infine che C_H è cocommutativa (equivalentemente, A_H commutativa) se e solo se

(11) $$h^i_j = h^i_{i-j} \quad ;$$

in tal caso è ovviamente da escludersi che qualche h^i_o possa annullarsi.

Più avanti faremo uso delle proposizioni seguenti.

<u>Prop. 1.</u> *Le h^i_j siano le costanti di struttura della coalgebra triangolare destra C_H. Qualunque sia la successione $(\pi_n)_{n\in\omega}$ di scalari non nulli (con $\pi_o=1$), anche le costanti*

$$\tilde{h}^i_j = \frac{\pi_j\,\pi_{i-j}}{\pi_i}\,h^i_j$$

soddisfano a (2) e (3) e l'applicazione lineare

(12) $$\begin{array}{ccc} C_H & \longrightarrow & C_{\tilde{H}} \\ b_i & \longmapsto & \pi_i b_i \end{array}$$

è un isomorfismo di coalgebre (dualmente, l'appl. lineare

(12') $$\begin{array}{ccc} A_H & \longrightarrow & A_{\tilde{H}} \\ b^i & \longmapsto & b^i/\pi_i \end{array}$$

è un isomorfismo d'algebra)

<u>Dimostrazione</u>. Per verifica diretta. ■

<u>Prop. 2.</u> *Nell'ipotesi della Prop.1., sia inoltre $h^j_1\neq 0$ per $1\leq j\leq s-1$ e $h^s_1=0$. Allora, per ogni $1\leq j\leq s-1$ e per ogni i si ha*

a) $$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_\eta := \frac{\eta_i\eta_{i-1}\cdots\eta_{i-j+1}}{\eta_1\eta_2\cdots\eta_j} = h^i_j \qquad \text{con } \eta=(\eta_n)=(h^n_1)\ ;$$

b) *se* $h^p_1=0$ *(con $p\geq s$) allora* $h^p_j=h^{p+1}_j=\ldots=h^{p+j-1}_j=0$;

c) $h^i_j h^{i+1}_j\ldots h^{i+s-j}_j=0$

Dimostrazione. Posto in (2) r=1 si ha $h^i_j = h^{i-1}_{j-1}\, h^i_1/h^j_1$, da cui, per induzione, la a).

In virtù della a), per ogni $0 \leq q \leq j-1$ si ha

$$h^{p+q}_j = \frac{h^{p+q}_1 h^{p+q-1}_1 \ldots h^p_1 \ldots h^{p+q-j+1}_1}{h^j_1 h^{j+1}_1 \ldots h^1_1} = 0$$

da cui la b).

Per quanto concerne la c), proviamola dapprima per $j=1$; per la (2) e per la a) si ha

$$h^{i+s-1}_s h^s_1 = h^{i+s-1}_1 h^{i+s-2}_{s-1} = h^{i+s-1}_1 \frac{h^{i+s-2}_1 \ldots h^i_1}{h^{s-1}_1 \ldots h^1_1}$$

da cui, giacchè $h^s_1=0$, $h^{i+s-1}_1 \ldots h^i_1=0$. Per $j>1$, la c) consegue dal caso $j=1$ e dalla b). ∎

Osservazione. Considerazioni simili alle precedenti avrebbero condotto a coalgebre triangolari sinistre se, in (1), si fosse sostituita la $h^i_i \neq 0$ con la $h^i_o \neq 0$ o anche se, conservando $h^i_i \neq 0$, si fosse definita la comoltiplicazione tramite la

$$\begin{aligned} \Delta_H :\ C_H &\longrightarrow C_H \otimes C_H \\ b_i &\longmapsto \sum_{j=o}^{i} h^i_{i-j}\, b_j \otimes b_{i-j} \end{aligned}$$

1.2. Esempi.

E_1) *Coalgebra dei polinomi* : $C=K[x]$, K campo di caratteristica zero, $b_i=x^i$, $h^i_j=\binom{i}{j}$; via l'identificazione $x^i \otimes x^j = x^i y^j$ di $K[x] \otimes K[x]$ con $K[x,y]$, la comoltiplicazione risulta essere la valutazione in $x+y$: $\Delta_H(p(x))=p(x+y)$. L'algebra duale è quella delle *serie di potenze divise*.

E_2) *Coalgebra delle potenze divise* e, dualmente, *algebra delle serie di potenze*: $h^i_j=1$ per $i \geq j$, $b^i=x^i$.

E_3) *Coalgebra q-euleriana:* $h^i_j = \binom{i}{j}_q = \dfrac{[i]_q!}{[j]_q!\ [i-j]_q!}$ dove

$[i]_q=1+q+q^2+\dots+q^{i-1}$, $[0]_q!=1$, $[i]_q!=[i-1]_q!\cdot[i]_q$. L'algebra duale è nota come *algebra delle serie euleriane formali*.

Con riferimento a tali esempi ed ai loro legami con la Combinatoria e, più in particolare, col Calcolo Umbrale si vedano [5], [8], [10], [11].

Gli esempi precedenti sono casi particolari del seguente:

E_4) *Coalgebra* C_η. Invertendo la a) della Prop.2., sia data in K la successione $\eta=(\eta_n)_{n\in\omega}$ tale che $\eta_0=0$, $\eta_1=1$ e $\eta_n\neq0$ per $n\geq1$; posto $\eta_0!=1$ e $\eta_n!=\eta_{n-1}!\cdot\eta_n$ le costanti di struttura di C_η sono date da

$$h^i_j=\frac{\eta_i!}{\eta_j!\,\eta_{i-j}!}=\begin{bmatrix}i\\j\end{bmatrix}_\eta \tag{13}$$

La condizione $\eta_n\neq0$ per $n\geq1$ comporta, in virtù della (7), che ora $h^i_0=1$ per ogni i; inoltre la (13) implica la (11). C_η è pertanto una coalgebra triangolare cocommutativa. Per coalgebre di questo tipo vale la

<u>Prop. 3.</u> *Siano* $\eta=(\eta_n)_{n\in\omega}$, $\zeta=(\zeta_n)_{n\in\omega}$, C_η *e* C_ζ *come in* E_4; *allora l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{ccc} C_\eta & \longrightarrow & C_\zeta \\ b_i & \longmapsto & \eta_i!/\zeta_i!\ \ b_i \end{array}$$

è un isomorfismo di coalgebra.

<u>Dimostrazione.</u> Per la Prop.1. con $\pi_i=\eta_i!/\zeta_i!$. ∎

E_5) Un esempio di coalgebra triangolare non cocommutativa si ha assumendo

$$h^{2i}_{2j+s}=\binom{i}{j}_{q^2}\delta^0_s\ ,\quad h^{2i+1}_{2j+s}=\binom{i}{j}_{q^2}q^{j\cdot\delta^s_0},\quad q\in K.$$

§2.

2.1. Nel seguito chiameremo *sequenza di polinomi* ogni collezione $\{P_i(X,Y) \mid i\epsilon\omega\} \subseteq K[X,Y]$ tale che

$$(14)\qquad P_i(X,Y) = \sum_{j=o}^{i} p_i^j X^j Y^{i-j} \quad \text{con } \pi_i = p_i^i \neq 0 \text{ e } P_o = \pi_o = 1 \quad ,$$

come pure ogni collezione $\{p_i(x) = P_i(x,1) \mid i\epsilon\omega\} \subseteq K[x]$.

In [7] Goldman e Rota hanno posto l'accento sulla relazione (teorema q-nomiale generale)

$$(15)\qquad P_i(X,Y) = \sum_{j=o}^{i} \binom{i}{j}_q P_j(X,Z)\, P_{i-j}(Z,Y)$$

soddisfatta dalla sequenza $P_i(X,Y) = \prod_{s=o}^{i-1}(X-q^sY)$; tale teorema è il q-analogo del teorema binomiale generale

$$(16)\qquad P_i(X,Y) = \sum_{j=o}^{i} \binom{i}{j} P_j(X,Z)\, P_{i-j}(Z,Y)$$

dove $P_i(X,Y) = (X-Y)^i$.

Prendendo spunto da (15) e (16) (si veda anche [4]), consideriamo la:

<u>Definizione 1.</u> *Diciamo che la sequenza di polinomi* $P_i(X,Y)$ *è una* <u>*G-R-sequenza*</u> *se, per opportuni scalari* h_j^i $(h_i^i \neq 0)$ *si ha*

$$(17)\qquad P_i(X,Y) = \sum_{j=o}^{i} h_j^i\, P_j(X,Z)\, P_{i-j}(Z,Y) \quad .$$

A tali sequenze si accompagnano in modo naturale quelle così caratterizzate:

<u>Definizione 2.</u> *Diciamo che la sequenza di polinomi* $S_i(X,Y) = \sum_{j=o}^{i} s_i^j X^j Y^{i-j}$ *è una* <u>*G-R-S-sequenza*</u> *se*

$$(18)\qquad S_i(X,Y) = \sum_{j=o}^{i} h_j^i\, P_j(X,Z)\, S_{i-j}(Z,Y) \quad .$$

Più avanti (Prop.6.) proveremo che le costanti h_j^i associate ad una G-R-sequenza possono essere assunte come costanti di struttura di una coalgebra triangolare destra C_H. Inoltre, nel §3, mostreremo come, viceversa, possono essere ottenute tutte le G-R-sequenze associate ad una data C_H.

Preliminarmente dimostriamo le due proposizioni seguenti.

Prop. 4. *Sia* $P_i(X,Y)=\sum_{j=0}^{i} p_i^j X^j Y^{i-j}$ *una G-R-sequenza soddisfacente a (17),* $P=(p_i^j)$, $H=(h_j^i)$ *(con* $h_j^i=0$ *per* $i<j$*),* $\pi_i=p_i^i$ *; posto* $\bar{H}=(h_j^i\ \pi_{i-j}/\pi_i)$ *si ha*

$$ {}^t\bar{H} = P^{-1} \quad . \tag{19} $$

Pertanto la G-R-sequenza $P_i(X,Y)$ *è univocamente determinata dalle costanti* h_j^i *e dai coefficienti* $\pi_i=p_i^i$.

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che le relazioni

$$ P_i(X,1) = \sum_{j=0}^{i} p_i^j X^j \tag{19'} $$

$$ X^i = \sum_{j=0}^{i} h_j^i\ \pi_{i-j}/\pi_i\ \ P_j(X,1) \tag{19''} $$

(quest'ultima si ottiene dalla (17) ponendo Y=0, Z=1) esprimono nei due sensi il cambiamento di riferimento dalla base X^i alla base $P_i(X,1)$ in K[X]. ∎

Prop. 5. *Con le notazioni introdotte in precedenza, sono equivalenti alla (18) le due relazioni seguenti*

$$ \sum_{j=r}^{k} h_j^i\ p_j^r\ s_{i-j}^{k-j} = \delta_r^k\ s_i^k \qquad (k\geq r) \tag{20} $$

$$ s_i^k\ h_t^k\ \pi_{k-t}/\pi_k = h_t^i\ s_{i-t}^{k-t} \quad . \tag{21} $$

Se in queste ultime si sostituiscono i coefficienti "s" con i coefficienti "p" si ha: $(17)\Longleftrightarrow(20)\Longleftrightarrow((21)\wedge(19))$.

Dimostrazione. Utilizzando l'identità

$$ \sum_{j=0}^{i}\sum_{r=0}^{j}\sum_{t=0}^{i-j} f(j,r,t) = \sum_{t=0}^{i}\sum_{r=0}^{i-t}\sum_{j=r}^{t+r} f(j,r,r+t-j) \tag{22} $$

trasformiamo il secondo membro di (18):

$$ S_i(X,Y) - \sum_{j=0}^{i} h_j^i\ P_j(X,Z)\ S_{i-j}(Z,Y) = $$

$$ = \sum_{r=0}^{i} s_i^r\ X^r Y^{i-r} - \sum_{j=0}^{i}\sum_{r=0}^{j}\sum_{t=0}^{i-j} h_j^i p_j^r s_{i-j}^{t}\ X^r Y^{i-j-t} Z^{j-r+t} = \quad \text{(per la (22))} $$

$$ = \sum_{r=0}^{i} s_i^r X^r Y^{i-r} - \sum_{t=0}^{i}\sum_{r=0}^{i-t}\sum_{j=r}^{t+r} h_j^i p_j^r s_{i-j}^{r+t-j}\ X^r Y^{i-r+t} Z^t = $$

$$= \sum_{r=0}^{i} \{s_i^r - h_r^i p_r^r s_{i-r}^o\} X^r Y^{i-r} - \sum_{t=1}^{i} \sum_{r=0}^{i-t} \{\sum_{j=r}^{t+r} h_j^i p_j^r s_{i-j}^{r+t-j}\} X^r Y^{i-r-t} Z^t = 0$$

che, posto $r+t=k$, equivale alla (20).

(20) $\Rightarrow$ (21) : moltiplichiamo ambo i membri di (20) per $h_t^r \pi_{r-t}/\pi_r$ e sommiamo su r:

$$s_i^k h_t^k \pi_{k-t}/\pi_k = \sum_{r=t}^{k} \delta_r^k s_i^k h_t^r \pi_{r-t}/\pi_r = \sum_{r=t}^{k} \sum_{j=r}^{k} h_j^i p_j^r s_{i-j}^{k-j} h_t^r \pi_{r-t}/\pi_r =$$

$$= \sum_{j=t}^{k} h_j^i s_{i-j}^{k-j} \sum_{r=t}^{j} p_j^r h_t^r \pi_{r-t}/\pi_r = \text{(per la (19))}$$

$$= \sum_{j=t}^{k} h_j^i s_{i-j}^{k-j} \delta_t^j = h_t^i s_{i-t}^{k-t} .$$

(21) $\Rightarrow$ (20) : $\delta_r^k s_i^k$ = (per la (19)) = $s_i^k \sum_{j=r}^{k} h_j^k \pi_{k-j}/\pi_j \; p_j^r$ =

(per la (21)) = $\sum_{j=r}^{k} h_j^i s_{i-j}^{k-j} p_j^r$. ∎

Siamo finalmente in grado di provare la

<u>Prop. 6.</u> *Le costanti h_j^i associate nella (17) ad una G-R-sequenza $p_i(X,Y)$ sono le costanti di struttura di una coalgebra triangolare destra C_H, con $H=(h_j^i)$.*

<u>Dimostrazione.</u> Si deve provare che (17) implica (2) e (3). Si ha

$$h_r^i h_{j-r}^{i-r} \pi_{i-j}/\pi_i = \sum_{k=r}^{i} \delta_k^i h_r^k h_{j-r}^{k-r} \pi_{k-j}/\pi_k = \text{(per la Prop.4.)}$$

$$= \sum_{k=r}^{i} \{\sum_{n=k}^{i} p_n^k h_n^i \pi_{i-n}/\pi_i\} h_r^k h_{j-r}^{k-r} \pi_{k-j}/\pi_k =$$

$$= \sum_{k=r}^{i} \sum_{n=k}^{i} h_n^j \pi_{i-n}/\pi_i \; h_{j-r}^{k-r} \pi_{k-j} \; p_n^k h_r^k/\pi_k = \text{(per la (21))}$$

$$= \sum_{k=r}^{i} \sum_{n=k}^{i} h_n^i \pi_{i-n}/\pi_i \; h_{j-r}^{k-r} \pi_{k-j} \; h_r^n p_{n-r}^{k-r}/\pi_{k-r} =$$

$$= \sum_{n=r}^{i} h_n^i h_r^n \pi_{i-n}/\pi_i \; \sum_{k=r}^{n} h_{j-r}^{k-r} \pi_{k-j}/\pi_{k-r} \; p_{n-r}^{k-r} = \text{(per la Prop.4.)}$$

$$= \sum_{n=r}^{i} h_n^i h_r^n \pi_{i-n}/\pi_i \; \delta_{j-r}^{n-r} = h_j^i h_r^j \pi_{i-j}/\pi_i$$

da cui, semplificando, si trae la (2).

Infine, sempre a causa della Prop.4. e per la condizione $\pi_o = p_o^o = 1$ si ha $h_o^o = 1$ e quindi $h_i^i = 1$. ∎

2.2. Vi è una sostanziale identità tra le G-R-(S-)sequenze e quelle definite qui di seguito.

Definizione 3. *Diciamo che la sequenza di polinomi* $p_i(x)=\sum_{j=0}^{i} p_i^j x^j$ *di* $K[x]$ *è una* E-A-sequenza *se, per opportuni scalari* h_j^i $(h_i^i\neq 0)$ *si ha*

$$p_i(xy) = \sum_{j=0}^{i} h_j^i\, p_j(x)\, y^j\, p_{i-j}(y)\ . \tag{23}$$

Diciamo inoltre che $s_i(x)=\sum_{j=0}^{i} s_i^j x^j \in K[x]$ *è una* E-S-A-sequenza *associata a* $p_i(x)$ *se*

$$s_i(xy) = \sum_{j=0}^{i} h_j^i\, p_j(x)\, y^j\, s_{i-j}(y)\ . \tag{24}$$

Le sequenze così definite generalizzano i concetti - introdotti da Andrews in [3] e corrispondenti al caso $h_j^i=\binom{i}{j}_q$ - di famiglia euleriana e di famiglia di Eulero-Sheffer .

Prop. 7. *L'uguaglianza* $s_i(x)=S_i(x,1)$ *determina una corrispondenza biunivoca tra le G-R-(S-)sequenze e le E-(S-)A-sequenze relative alle stesse costanti* h_j^i.

Dimostrazione. La posizione $X=xZ$ e $Z=yY$ trasforma (18) in (24). ∎

Come corollario di tale proposizione si ha che un'affermazione analoga alla Prop.6. vale anche per le E-A-sequenze. Nel paragrafo seguente mostreremo come esse siano naturalmente collegate ad opportune applicazioni lineari di C_H in sè. Ciò consentira anche di invertire la Prop.6.

In conclusione del presente paragrafo proviamo la

Prop. 8. *Sia* $p_n(x)$ *una E-A-sequenza; se, per un indice i positivo,* $h_o^i\neq 0$ *allore* $p_i(1)=0$. *In particolare ciò è vero per ogni* $i>0$ *se la corrispondente coalgebra* C_H *è triangolare.*

Dimostrazione. Ponendo nella (21): "p" in luogo di "s", t=0 e sommando su k si ha

$$\delta_o^i = \sum_{k=0}^{i} p_i^k h_o^k = h_o^i \sum_{k=0}^{i} p_i^k = h_o^i\, p_i(1)\ .$$ ∎

§3.

Faremo uso delle notazioni seguenti:

a) $\hat{s}=\Sigma s_j b^j$ è un arbitrario elemento di A_H;

b) $\hat{\pi}=\Sigma\pi_j b^j$ è un elemento di A_H tale che $\pi_o=1$ e $\pi_j\neq 0$;

c) $\tilde{\pi}$ è l'applicazione lineare definita da

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}\ :\ C_H &\longrightarrow C_H\\ b_i &\longmapsto \pi_i b_i\end{aligned}$$

d) $\hat{p}=\Sigma p_j b^j$ è l'inverso sinistro di $\hat{\pi}$; vale quindi la relazione

$$(25)\qquad \sum_{i=o}^{n} p_i \pi_{n-i} h_i^n = \delta_o^n \ ;$$

e) I è il morfismo identico su C_H;

f) ϕ: $C_H\otimes K \longrightarrow C_H$, $b\otimes h \longmapsto hb$ è l'isomorfismo canonico;

g) ψ: $C_H \longrightarrow K[x]$, $b_i \longmapsto x^i$ è l'isomorfismo canonico di spazi vettoriali;

h) σ è un'applicazione lineare associata a $\hat{s}$ e definita da

$$(26)\qquad \begin{aligned}\sigma=\phi\circ(I\otimes\hat{s})\circ\Delta_H\ :\ C_H &\longrightarrow C_H\\ b_i &\longmapsto \sum_{j=o}^{i}\sigma_i^j\, b_j\end{aligned}$$

dove

$$(27)\qquad \sigma_i^j = h_j^i\, s_{i-j} = h_j^i\, \sigma_{i-j}^o \ ;$$

a causa della (7), l'applicazione τ associata a $\hat{t}$ coincide con σ se $\hat{s}\equiv\hat{t}$;

i) s_π è un'applicazione lineare - che chiameremo G-R-S-applicazione associata alla coppia $(\hat{s},\hat{\pi})$ - definita da

$$(28)\qquad \begin{aligned}s_\pi=\tilde{\pi}\circ\sigma=\phi\circ(\tilde{\pi}\otimes\hat{s})\circ\Delta_H\ :\ C_H &\longrightarrow C_H\\ b_i &\longmapsto \sum_{j=o}^{i} s_i^j\, b_j\end{aligned}$$

dove

$$(29)\qquad s_i^j = h_j^i\,\pi_j\, s_{i-j} = h_j^i\,\pi_j\, s_{i-j}^o \ .$$

Se $\hat{s}=\hat{p}$, la corrispondente

$$(28')\qquad \begin{aligned}p_\pi\ :\ C_H &\longrightarrow C_H\\ b_i &\longmapsto \sum_{j=o}^{i} p_i^j b_j = \sum_{j=o}^{i} h_j^i\,\pi_j\, p_{i-j}\, b_j\end{aligned}$$

verrà detta G-R-applicazione associata a $\hat{\pi}$.

l) $\tilde{\pi}^*$, σ^* e $s^*_\pi = \sigma^* \circ \tilde{\pi}$ sono le duali di $\tilde{\pi}$, σ e s_π;

m) $\Pi_\delta = (\delta^i_j \, \pi_j)$, $\Pi_H(\hat{s}) = (\sigma^j_i)$ e $S = (s^j_i) = \Pi_\delta \cdot \Pi_H(\hat{s})$ sono le matrici che rappresentano le applicazioni lineari $\tilde{\pi}$, σ ed s_π, come pure le loro duali (con la convenzione che gli elementi di C_H sono rappresentati con vettori-colonna e quelli di A_H con vettori-riga).

Va notato che $\tilde{\pi}^* : A_H \longrightarrow A_H$ è l'operatore "prodotto di Hadamard per $\hat{\pi}$" e che σ^* è l'applicazione lineare "$m_H(-\otimes \hat{s})$" (moltiplicazione a destra per $\hat{s}$):

$$\sigma^* : A_H \longrightarrow A_H$$

$$b^j \longmapsto \sum_{i=j}^{\infty} s_{i-j} \, h^i_j \, b^i = m_H(b^j \otimes \hat{s})$$

Ciò premesso possiamo provare la

<u>Prop. 9.</u> *Con riferimento alla coalgebra triangolare destra C_H e alla sua algebra duale A_H, $H=(h^i_j)$, siano $\hat{\pi}$ un elemento fissato ed $\hat{s}$ un elemento variabile di A_H.*

i) Esiste una, ed una sola, E-A-sequenza $p_i(x)$:

$$(23) \qquad p_i(xy) = \sum_{j=o}^{i} h^i_j \, p_j(x) \, y^j \, p_{i-j}(y),$$

con π_i coefficiente direttore di $p_i(x)$; tale sequenza è data da

$$(30) \qquad p_i(x) = (\psi \circ p_\pi)(b_i) = \sum_{j=o}^{i} p^j_i \, x^j = \sum_{j=o}^{i} h^i_j \, \pi_j \, p_{i-j} \, x^j .$$

ii) Tutte le E-S-A-sequenze $s_i(x)$ associate a tale E-A-sequenza $p_i(x)$ sono date - al variare di $\hat{s}$ in A_H - da

$$(31) \qquad s_i(x) = (\psi \circ s_\pi)(b_i) = \sum_{j=o}^{i} s^j_i \, x^j = \sum_{j=o}^{i} h^i_j \, \pi_j \, s_{i-j} \, x^j .$$

Per la Prop.7. affermazioni simili valgono per le G-R-(S-)sequenze $P_i(X,Y)$ e $S_i(X,Y)$.

<u>Dimostrazione.</u> Osserviamo innanzitutto che, posto i=j in (30), si ottiene $p^i_i = \pi_i$. Proviamo che la sequenza (30) soddisfa alla (17) e quindi, per la Prop.7., alla (23). Facendo uso della Prop.5., basta dimostrare che sono ora soddisfatte sia la

(19) $$\sum_{i=j}^{t} p_i^j\, h_i^t\, \pi_{t-i}/\pi_t = \delta_j^t$$

che la

(21) $$p_i^k\, h_t^k\, \pi_{k-t}/\pi_k = h_t^i\, p_{i-t}^{k-t}\ .$$

Quest'ultima è di verifica immediata (con l'uso di (30) e (2)).
Per quanto concerne la (19), si ha:

$$\sum_i p_i^j\, h_i^t\, \pi_{t-i}/\pi_t = (\text{per } (30)) = \sum_i h_j^i\, \pi_j\, p_{i-j}\, h_i^t\, \pi_{t-i}/\pi_t = (\text{per } (2))$$

$$= \sum_i h_j^t\, h_{i-j}^{t-j}\, \pi_j\, p_{i-j}\, \pi_{t-i}/\pi_t = h_j^t\, \pi_j/\pi_t \sum_i h_{i-j}^{t-j}\, p_{i-j}\, \pi_{t-i} = (\text{per } (25))$$

$$= \delta_j^t\, h_j^t\, \pi_j/\pi_t = \delta_j^t .$$

L'unicità della sequenza soddisfacente alle condizioni richieste è poi assicurata dalla affermazione finale della Prop.4.
Infine, il fatto che la sequenza (31) soddisfi alla (24) viene provato con un ragionamento identico al precedente; per concludere basta osservare che ogni E-S-A-sequenza $s_i(x)$ si ottiene nel modo descritto ponendo $\hat{s} = \sum s_j^o\, b^j$. ∎

Osserviamo che - posto $\hat{\pi}(x) = \sum \pi_n x^n b^n$ - dalla (19") consegue

$$\hat{\pi}(x) = m_H((\sum_i p_i(x)\, b^i) \otimes \hat{\pi})$$

e quindi, nel caso in cui $h_o^i = 1$ per ogni i, si ha la "funzione generatrice" della E-A-sequenza $p_i(x)$: $m_H(\hat{\pi}(x) \otimes \hat{p}) = \sum_i p_i(x)\, b^i$.

Quanto contenuto nei paragrafi 2 e 3 si semplifica notevolmente se si aggiunge la condizione che siano monici i polinomi $p_i(x) = P_i(x,1)$ e quindi anche i loro associati $s_i(x) = S_i(x,1)$ (è facile provare in effetti che $s_i(x)$ ha lo stesso coefficiente direttore di $p_i(x)$).
Va anche notato che se $p_i(x)$ è una E-A-sequenza associata a C_H allora la sequenza monica $\tilde{p}_i(x) = \pi_i^{-1}\, p_i(x)$ è associata a $C_{\tilde{H}}$, con $\tilde{h}_j^i = h_j^i\, \pi_j \pi_{i-j}/\pi_i$; tuttavia i $\tilde{p}_i(x)$ non corrispondono ai $p_i(x)$ nell'isomorfismo (12).

B I B L I O G R A F I A

[1] W.R.Allaway, K.W.Yuen: Ring Isomorfisms for the Family of Eulerian Differential Operators. J.Math.Anal.Appl.77(1980),245-263

[2] W.R.Allaway: A Comparison of Two Umbral Algebras. J.Math.Anal. Appl. 85 (1982), 197-235

[3] G.E.Andrews: On the Foundations of Combinatorial Theory V, Eulerian Differential Operators. Stud. in Appl.Math.50(1971),345-375

[4] L.Cerlienco,F.Piras: Coefficienti binomiali generalizzati. Rend.Sem.Fac.Sci.Cagliari (in corso di stampa)

[5] L.Cerlienco, F.Piras: Aspetti coalgebrici del Calcolo Umbrale. Atti del Convegno "Geometria Combinatoria e di Incidenza" (1982)

[6] A.M.Garsia, S.A.Joni: Composition Sequences. Communications in Algebra 8 (1980) 1195-1266

[7] J.Goldman, G.-C.Rota: On the Foundations of Combinatorial Theory IV Finite Vector Spaces and Eulerian Generating Functions. Stud. in Appl. Math. 49 (1970),239-258

[8] S.A.Joni, G.-C.Rota: Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics Stud. in Appl.Math. 61 (1979), 93-139

[9] E.C.Ihrig, M.E.H.Ismail: A q-Umbral Calculus. J.Math.Anal.Appl. 84 (1981), 178-207

[10] B.Peterson, E.J.Taft: The Hopf Algebra of Linearly Recursive Sequences. Aeq.Math. 20 (1980),1-17

[11] E.J.Taft: Noncocommutative Sequences of Divided Powers. Lecture Notes in Math. 933 (1982) 203-209.