KOMBINATORISCHE STRUKTUREN , UNIPOTENTE GRUPPEN UND POTENZREIHEN-DARSTELLUNGEN

Arne Dür
Institut für Mathematik der Universität Innsbruck
Innrain 52 , A-6020 Innsbruck , Österreich

Vorwort

Bei Abzählproblemen auf einer lokalendlichen geordneten Menge erweist sich häufig die zugehörige Inzidenzalgebra als nützliches algebraisches Hilfsmittel, man denke z.B. an die Möbius-Inversion. P.Doubilet,G.C.Rota und R.Stanley zeigen in ihrer Arbeit "The Idea of Generating Function" ([8]), daß die reduzierten Inzidenzalgebren wichtiger geordneter Mengen isomorph zu Algebren von formalen Potenzreihen sind, z.B. führen endliche Teilmengen einer abzählbaren Menge auf Exponentialreihen und endlich-dimensionale Unterräume eines Vektorraums abzählbarer Dimension über einem endlichen Körper auf Euler-Reihen. Kombinatorische Anwendungen davon bespricht M.Aigner in [1],pp.318.

Die vorliegende Arbeit setzt die Idee von Doubilet,Rota und Stanley, geordnete Strukturen mithilfe geeigneter erzeugender Funktionen zu untersuchen, fort. In §3,(i) wird z.B. gezeigt, wie die Verbände der Teilpartitionen endlicher Vektorräume und die Komposition endlicher Euler-Reihen zusammenhängen. Ich habe versucht, sowohl einen Überblick über die allgemeine Theorie der Inzidenzalgebren und der affinen Monoide multiplikativer Funktionen zu geben, wie sie in den Grundzügen bereits in [10] enthalten ist, alsauch in einer Reihe kombinatorisch interessanter Beispiele deren Anwendungen zu erläutern. Aus Platzgründen mußte dabei auf Beweise verzichtet werden. Einige der Beispiele wurden in [10] erwähnt, andere sind neu.

In §1 wird eine Konstruktion von Inzidenzalgebren zu kombinatorischen Strukturen besprochen, welche in kurzer Form in [10] vorgestellt wurde und die verschiedenen Arten von Inzidenzalgebren in [8] vereinheitlicht. Die von Doubilet,Rota und Stanley betrachteten Familien geordneter Mengen sind hier Familien von Unter- bzw. Faktorobjekten in einer Kategorie.

In §2 werden Bedingungen für die kombinatorische Struktur angegeben, unter denen die Inzidenzalgebra eine Bialgebra wird und durch das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen beschrieben werden kann. Hier weiche ich von der Arbeit [10] ab und folge [9]. Der wesentliche Bestandteil von G ist eine unipotente affine Gruppe, die im allgemeinen unendlich-dimensional ist.

In vielen Fällen besitzt das affine Monoid der multiplikativen Funktionen eine treue Darstellung durch Endomorphismen von Potenzreihenalgebren. Wie diese Darstellung zur Berechnung der Möbius-Funktion und zur Bestimmung erzeugender Funktionen von Anzahlen verwendet werden kann, wird am Ende von §2 erklärt. Das bekannteste Beispiel aus der Literatur sind Partitionen endlicher Mengen ([8],pp.100 und [1],pp.325), wo G isomorph zum Endomorphismen-Monoid der Potenzreihenalgebra in einer Variablen ist. Neue Beispiele dazu werden in §3 vorgestellt, unter anderem Darstellungen geordneter Mengen, invariante Äquivalenzrelationen auf endlichen Mengen unter Gruppen-Operation, Teilpartitionen endlicher Mengen und Teilpartitionen endlicher Vektorräume. Eine interessante Anwendung in der Numerischen Mathematik hat die aus den Wurzelwäldern konstruierte unipotente Gruppe, deren Darstellungen durch Butcher-Reihen in der Theorie der Runge-Kutta-Verfahren betrachtet werden ([12]). Die Darstellungen (3.1)-(3.9) zeigen, daß eine Reihe interessanter Strukturen mittels geeigneter Potenzreihenalgebren beschrieben werden können.

<u>Bezeichnungen:</u>

$\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}$ ... die Menge der natürlichen Zahlen mit bzw. ohne Null

$\mathbb{Z}$ ... der Ring der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ... der Körper der rationalen bzw. der reellen Zahlen

$|X| = \#(X)$ ... die Anzahl der Elemente der endlichen Menge X

$X+Y$ ... die disjunkte Vereinigung der Mengen X,Y

$X \cong Y$ ... die Objekte X,Y einer Kategorie sind isomorph

§1 Kombinatorische Strukturen und Inzidenzalgebren

In dieser Arbeit werden "kombinatorische Strukturen" betrachtet, die sich durch eine Kategorie $\underline{K}$, eine Klasse M von Morphismen in $\underline{K}$ und eine Äquivalenzrelation $\sim$ beschreiben lassen. Wie allgemein dieses Konzept ist, zeigen die Beispiele am Ende dieses Paragraphen und in §3.

Sei $\underline{K}$ eine Kategorie mit der Eigenschaft

($\underline{K}$1) $\underline{K}$ ist bis auf Isomorphie klein, dh. die Isomorphieklassen der Objekte von $\underline{K}$ bilden eine Menge.

Sei M eine Klasse von Morphismen in $\underline{K}$ mit den Eigenschaften (M1)-(M5):

(M1) M enthält nur Monomorphismen oder nur Epimorphismen. Alle Isomorphismen von $\underline{K}$ gehören zu M.

(M2) M ist bzgl. der Komposition abgeschlossen.

Die Dimension eines Morphismus $s \in M$ sei das Supremum in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der Längen aller Produkt-Darstellungen

$$s = s_l \ldots s_1 \quad ,$$

deren Faktoren $s_1, \ldots, s_l \in M$ keine Isomorphismen sind. Dimension 0 haben nur die Isomorphismen. Wir verlangen

(M3) Alle Morphismen in M haben endliche Dimension.

Für $l=2,3,\ldots$ sei

$$S_l(M) = \{(s_1,\ldots,s_l) \in M^l ; \text{die Komposition } s_l \ldots s_1 \text{ existiert}\}$$

die Klasse der l-Simplizes aus M. Wir definieren auf $S_l(M)$ eine Äquivalenzrelation durch $(s_1,\ldots,s_l) \approx (r_1,\ldots,r_l)$, falls Isomorphismen $a_1,\ldots,a_{l-1}$ existieren, sodaß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "id"'] & X_1 \arrow[r, "s_2"] \arrow[d, "a_1"] & X_2 \arrow[r, "s_3"] \arrow[d, "a_2"] & \ldots \arrow[r, "s_{l-2}"] & X_{l-2} \arrow[r, "s_{l-1}"] \arrow[d, "a_{l-2}"] & X_{l-1} \arrow[r, "s_l"] \arrow[d, "a_{l-1}"] & X_l \arrow[d, "id"] \\
Y_0 \arrow[r, "r_1"] & Y_1 \arrow[r, "r_2"] & Y_2 \arrow[r, "r_3"] & \ldots \arrow[r, "r_{l-2}"] & Y_{l-2} \arrow[r, "r_{l-1}"] & Y_{l-1} \arrow[r, "r_l"] & Y_l
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Menge der Äquivalenzklassen von $S_l(M)$ bzgl. $\approx$ bezeichnen wir mit

$$S_l[M] = S_l(M)/\approx \quad ,$$

ihre Elemente mit $[s_1,\ldots,s_l]$. Für $[s_1,\ldots,s_l] \in S_l[M]$ ist die Komposition $s_l \ldots s_1$ wohldefiniert. Die nächste Bedingung an M lautet

(M4) Jeder Morphismus $s \in M$ läßt sich - bis auf simpliziale Äquivalenz - nur endlich oft als Komposition zweier Morphismen aus M schreiben, dh. die Menge

$$\{[s_1,s_2] \in S_2[M] ; s_2 s_1 = s\}$$

ist endlich.

Daraus folgt dann die Endlichkeit von $\{[s_1,\ldots,s_l] \in S_l[M] ; s_l \ldots s_1 = s\}$ für alle $l \geq 2$.

Nach (M1) enthält M nur Monomorphismen oder nur Epimorphismen.

1.Fall: Alle Elemente von M sind Monomorphismen.

Sei Y ein beliebiges Objekt von $\underline{K}$. Wir definieren auf der Klasse $M(\rightarrow Y)$ aller Morphismen aus M mit Ziel Y eine Prä-Ordnung, indem wir $s_1 \leq s_2$ setzen, falls ein Morphismus s in $\underline{K}$ existiert mit $s_1 = s_2 s$.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "s_1"] \arrow[dd, dashed, "s"'] & \\ & Y \\ X_2 \arrow[ur, "s_2"'] & \end{tikzcd}$$

Dann ist s eindeutig bestimmt, wird mit $s_2^{-1} s_1$ bezeichnet und ist ein Monomorphismus.

Wir verlangen

(M5-Mono) Für $s_1, s_2 \in M$ mit $s_1 \leq s_2$ ist auch $s = s_2^{-1} s_1 \in M$.

Sei $\approx$ die zu obiger Prä-Ordnung gehörende Äquivalenzrelation auf $M(\rightarrow Y)$, dh. es sei $s_1 \approx s_2$ falls $s_1 \leq s_2$ und $s_2 \geq s_1$ ist. Dann ist die Menge der Äquivalenzklassen

$$\mathrm{Sub}_M(Y) = M(\rightarrow Y)/\approx \; = \{[s]; s \in M(\rightarrow Y)\}$$

geordnet mit der induzierten Ordnung, heißt die Menge der <u>Unterobjekte</u> von Y in M und besitzt als größtes Element $[\mathrm{id}_Y]$.

Simplizes und Unterobjekte hängen wie folgt zusammen.

(1.1) <u>Lemma:</u> Sei $s: X \rightarrow Y$ ein Monomorphismus und $l \geq 2$. Dann ist die Abbildung

$$\{[s_1, \ldots, s_l] \in S_l[M]; s_l \ldots s_1 = s\}$$
$$\downarrow$$
$$\{([u_2], \ldots, [u_l]) \in \mathrm{Sub}_M(Y)^{l-1}; [s] \leq [u_2] \leq \ldots \leq [u_l] \leq [\mathrm{id}_Y]\}$$
$$[s_1, \ldots, s_l]$$
$$\downarrow$$
$$([s_l \ldots s_2], \ldots, [s_l s_{l-1}], [s_l])$$

bijektiv. □

Insbesondere ist Axiom (M4) äquivalent zur Lokal-Endlichkeit der geordneten Mengen $\mathrm{Sub}_M(Y)$, Y ein Objekt von $\underline{K}$.

2.Fall: Alle Elemente von M sind Epimorphismen.

Sei X ein beliebiges Objekt von $\underline{K}$. Wir definieren auf der Klasse $M(X\rightarrow)$ aller Morphismen aus M mit Quelle X eine Prä-Ordnung, indem wir $s_1 \leq s_2$ setzen, falls ein Morphismus s in $\underline{K}$ existiert mit $s_2 = s s_1$.

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dd, dashed, "s"] \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "s_2"'] & \\ & Y_2 \end{tikzcd}$$

Dann ist s eindeutig bestimmt, wird mit $s_2 s_1^{-1}$ bezeichnet und ist ein Epimorphismus.

Wir verlangen

(M5-Epi) Für $s_1, s_2 \in M$ mit $s_1 \leq s_2$ ist auch $s = s_2 s_1^{-1} \in M$.

Durch Übergang zu Äquivalenzklassen wie im 1.Fall erhält man die geordnete Menge

$$\mathrm{Faktor}_M(X) = M(X\rightarrow)/\approx \; = \{[s]; s \in M(X\rightarrow)\}$$

der <u>Faktorobjekte</u> von X in M, deren kleinstes Element $[\mathrm{id}_X]$ ist.

Der Zusammenhang zwischen Simplizes und Faktorobjekten ist gegeben durch das

(1.2) Lemma: Sei $s:X\to Y$ ein Epimorphismus und $l\geq 2$. Dann ist die Abbildung

$$\{[s_1,\ldots,s_l]\in S_l[M];s_l\ldots s_1=s\}$$
$$\downarrow$$
$$\{([v_1],\ldots,[v_{l-1}])\in \mathrm{Faktor}_M(X)^{l-1};[id_X]\leq[v_1]\leq\ldots\leq[v_{l-1}]\leq[s]\}$$
$$[s_1,\ldots,s_l]$$
$$\downarrow$$
$$([s_1],[s_2s_1],\ldots,[s_{l-1}\ldots s_1])$$

bijektiv. □

In diesem Fall ist die Bedingung (M4) äquivalent zur Lokal-Endlichkeit der geordneten Mengen $\mathrm{Faktor}_M(X)$, X ein Objekt von $\underline{K}$. (Ende des 2.Falles)

Neben $\underline{K}$ und M sei weiters eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M mit den Eigenschaften ($\sim$1)-($\sim$4) gegeben. $\sim$ heißt Äquivalenz, die Elemente von

$$T = M/\sim$$

nennen wir Typen und bezeichnen sie mit $\bar{s}$, $s\in M$.

($\sim$1) Isomorphie impliziert Äquivalenz, dh. für $s_1,s_2\in M$ mit $a_2s_1=s_2a_1$, wobei a_1,a_2 Isomorphismen sind, gilt $s_1\sim s_2$.

($\sim$2) Die Isomorphismen von $\underline{K}$ sind bzgl. $\sim$ saturiert, dh. für $s_1\in M$ und einen Isomorphismus s_2 folgt aus $s_1\sim s_2$, daß auch s_2 ein Isomorphismus ist.

T läßt sich daher in die zwei disjunkten Teilmengen

$$T' = \{\bar{s};\ s \text{ ein Isomorphismus}\} \quad \text{und}$$
$$T(1) = \{\bar{s};\ s\in M,\ s \text{ kein Isomorphismus}\}$$

zerlegen.

($\sim$3) Für $s_1,s_2\in M$, $s_1:X_1\to Y_1$, $s_2:X_2\to Y_2$ folgt aus $s_1\sim s_2$ auch $id_{X_1}\sim id_{X_2}$ und $id_{Y_1}\sim id_{Y_2}$.

Dann sind die Abbildungen

$$\text{dom (für domain)}: T\to T'\ ,\ \overline{s:X\to Y}\mapsto\overline{id_X} \quad \text{und}$$
$$\text{cod (für codomain)}: T\to T'\ ,\ \overline{s:X\to Y}\mapsto\overline{id_Y}$$

wohldefiniert. Die wichtigste Bedingung an $\sim$ ist

($\sim$4) Für Typen $t,t_1,t_2\in T$ ist die Zahl

$$G(t;t_1,t_2) = \#\{[s_1,s_2]\in S_2[M];s_2s_1=s,\bar{s}_1=t_1,\bar{s}_2=t_2\}$$

unabhängig von der Wahl des Repräsentanten s von t.

Die Zahlen $G(t;t_1,t_2)$ heißen Schnittkoeffizienten (nach G.C. Rota in [13],p.96). $G(t;t_1,t_2)$ gibt an, wieoft man - bis auf simpliziale Äquivalenz - einen Morphismus vom Typ t in einen Morphismus vom Typ t_1 und einen Morphismus vom Typ t_2 aufteilen kann. Aus (1.1) und (1.2) folgt, daß $G(t;t_1,t_2)$ auch gewisse Unter- bzw. Faktorobjekte abzählt:

Für Typen t,t_1,t_2 und einen Repräsentanten $s:X\to Y$ von t ist

(1.3) $\quad G(t;t_1,t_2) = \#\{[u]\in \mathrm{Sub}_M(Y); [s]\leq[u]\leq[\mathrm{id}_Y], \overline{u^{-1}s}=t_1, \bar{u}=t_2\}$

$\quad$ bzw. $= \#\{[v]\in \mathrm{Faktor}_M(X); [\mathrm{id}_X]\leq[v]\leq[s], \bar{v}=t_1, \overline{sv^{-1}}=t_2\}$.

Das Standardbeispiel für Äquivalenz ist die Isomorphierelation auf M, die alle Bedingungen (~ 1)-(~ 4) erfüllt.

s_1 ist isomorph zu s_2,
falls es Isomorphismen a_1, a_2 gibt,
sodaß $a_2 s_1 = s_2 a_1$ ist.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "a_1"'] & Y_1 \arrow[d, "a_2"] \\ X_2 \arrow[r, "s_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Für Monomorphismen läßt sich die Äquivalenz $\sim$ oft definieren durch $s_1 \sim s_2$, falls die "Komplemente" der Bilder von s_1, s_2 in $\underline{K}$ isomorph sind. Beispiele hierfür findet man am Ende von §1.

Wegen (~ 4) kann die Dimension eines Typs t als die Dimension eines Repräsentanten s von t definiert werden. Für ein Unterobjekt $[u:X\to Y]$ ist $\dim(\bar{u})$ die maximale Länge einer Kette in $\mathrm{Sub}_M(Y)$ von $[u]$ nach $[\mathrm{id}_Y]$, für ein Faktorobjekt $[v:X\to Y]$ ist $\dim(\bar{v})$ die maximale Länge einer Kette in $\mathrm{Faktor}_M(X)$ von $[\mathrm{id}_X]$ nach $[v]$.

Aus den Daten $\underline{K}, M, \sim$ konstruieren wir nun die Inzidenzalgebra $k[[T]]$:
Sei k ein Hauptidealring der Charakteristik 0, z.B. $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$. Wir nehmen an, daß k die ganzen Zahlen enthält, und betrachten k als topologischen Ring mit der diskreten Topologie.

k^T wird mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation und der Produkttopologie zu einem linear topologischen k-Modul, der Hausdorff-Raum und vollständig ist. Mithilfe der topologischen Standardbasis

$$(e(t)=(0,..,0,1,0,..), 1 \text{ an } t\text{-ter Stelle}; t\in T)$$

läßt sich ein $f\in k^T$ eindeutig schreiben als konvergente Reihe

$$f = \Sigma_{t\in T}\, f(t)e(t) \quad .$$

(1.4) Satz: (vergleiche [10],p.147)
Mit der"Faltungsmultiplikation" $(f,g)\to fg$,

$$fg(t) = \Sigma_{t_1,t_2\in T}\, G(t;t_1,t_2) f(t_1) g(t_2) \quad \text{für } t\in T \quad ,$$

wird k^T eine assoziative topologische k-Algebra mit Einselement δ,

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t\in T' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

wird mit $k[[T]]$ bezeichnet und heißt die Inzidenzalgebra von M reduziert modulo $\sim$. Für $t, t_1, t_2 \in T$ ist

$$e(t_1)e(t_2) = \Sigma_{t\in T}\, G(t;t_1,t_2) e(t) \quad ,$$

dh. die Zahlen $G(t;t_1,t_2)$ aus (1.3) sind die Strukturkonstanten von $k[[T]]$ bzgl. der topologischen Basis $(e(t); t\in T)$. □

Die wesentlichen Aussagen dieses Satzes sind die Existenz des Faltungsprodukts $\dot{fg}$ -

(A) Zu $t\in T$ gibt es nur endlich viele $t_1,t_2\in T$ mit $G(t;t_1,t_2)\neq 0$

- und die Assoziativität der Faltungsmultiplikation, die auf folgende Beziehung zwischen den Schnittkoeffizienten hinausläuft:

(B) Für $t,t_1,t_2,t_3\in T$ ist

$$\Sigma_{x\in T}\ G(x;t_1,t_2)G(t;x,t_3) = \Sigma_{y\in T}\ G(t;t_1,y)G(y;t_2,t_3) \quad .$$

Diese zwei Eigenschaften der $G(t;t_1,t_2)$ folgen hier aus den Axiomen an $\underline{K}$,M und $\sim$. G.C.Rota und S.A.Joni hingegen gehen in [13],p.96 von Zahlen $(i|j,k)$ aus und konstruieren daraus - dual zu (1.4) - Coalgebren. A.Joyal leitet in [14],p.64 (A) und (B) aus den Coalgebra-Axiomen her.

Die algebraische Struktur von Inzidenzalgebren beschreibt der

(1.5) Satz:

(a) f ist invertierbar in $k[[T]]$ genau dann, wenn $f(t)$ invertierbar in k für alle $t\in T'$ ist.

(b) Für die abgeschlossenen zweiseitigen Ideale von $k[[T]]$

$$I(d) = \{f\in k[[T]];\ f(t)=0 \text{ für alle } t\in T \text{ mit } \dim(t)\leq d-1\} \quad , \quad d=0,1,2,...$$

gilt $\quad I(d_1)I(d_2)\subseteq I(d_1+d_2) \quad .$

(c) Die Filtrierung von $k[[T]]$

$$k[[T]]=I(0)\supseteq I(1)\supseteq I(2)\supseteq ...$$

konvergiert gegen 0, dh. zu jeder Umgebung U von 0 existiert ein d mit $I(d)\subseteq U$.

(d) $k[[T]]$ ist graduiert durch

$$V(d) = \{f\in k[[T]];\ f(t)=0 \text{ für alle } t\in T \text{ mit } \dim(t)\neq d\} \quad , \quad d=0,1,2,...$$

(dh. $V(d_1)V(d_2)\subseteq V(d_1+d_2)$ für alle d_1,d_2) genau dann, wenn für alle Objekte Y bzw. X in $\underline{K}$ die geordneten Mengen $Sub_M(Y)$ bzw. $Faktor_M(X)$ die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung erfüllen. □

<u>Definition:</u> Die konstante Funktion $\zeta:T\to k, t\mapsto 1$ nennen wir die <u>Zeta-Funktion</u>, ihre Inverse $\mu=\zeta^{-1}$ die <u>Möbius-Funktion</u>.

Die Namen erklären sich aus dem

<u>Spezialfall:</u> Lokale Inzidenzalgebren oder Inzidenzalgebren von geordneten Mengen

Sei P eine lokal-endliche geordnete Menge, dh. P sei geordnet und alle Intervalle von P seien endlich. Wir konstruieren aus P eine kleine Kategorie $\underline{K}$: Die Objekte von $\underline{K}$ seien die Elemente von P. Für Objekte x,y mit $x\leq y$ sei $(x,y)\in P^2$ der einzige Morphismus von x nach y. Falls $x\nleq y$ ist, gebe es keine Morphismen mit Quelle x und Ziel y. Die Komposition zweier Morphismen (x,y) und (y,z), $x\leq y\leq z$, wird definiert durch $(y,z)(x,y):=(x,z)$. Dann sind alle Morphismen von $\underline{K}$ sowohl Mono- alsauch Epimorphismen, und es gibt keine Isomorphismen außer den

Identitäten (x,x), $x\in P$.
Wir setzen $M=\{(x,y)\in P^2;\ x\leq y\}$ und wählen als Äquivalenz $\sim$ die Isomorphie, also die Gleichheit. Dann ist $T=M$ und

$$G((x,y);(x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x=x_1, y_1=x_2, y=y_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Daher ist das Faltungsprodukt von $f,g\in k^M$ gegeben durch

$$fg(x,y) = \sum_{x\leq z\leq y} f(x,z)g(z,y) \qquad \text{für alle } (x,y)\in M \quad .$$

Die Algebra $k[[M]]$ heißt in der Literatur die <u>Inzidenzalgebra</u> von P. Wir bezeichnen sie mit $k[[P]]$. Eine ausführliche Darstellung ihrer Theorie mit vielen kombinatorischen Anwendungen findet sich in [8] und [1].

Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück, in der eine Kategorie $\underline{K}$, eine Klasse M von Morphismen und eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M gegeben sind. Der folgende Satz stellt die Verbindung zwischen der großen Inzidenzalgebra $k[[T]]$ und den lokalen Inzidenzalgebren $k[[\mathrm{Sub}_M(Y)]]$ bzw. $k[[\mathrm{Faktor}_M(X)]]$ her (je nachdem, ob M eine Klasse von Monomorphismen oder eine Klasse von Epimorphismen ist).

(1.6) <u>Satz:</u> (vergleiche [10],p.148)
Die Abbildung $\quad \mathrm{lok}: k[[T]]\to k[[\mathrm{Sub}_M(Y)]]$ bzw. $k[[\mathrm{Faktor}_M(X)]]$,
definiert durch $\quad \mathrm{lok}(f)([s_1],[s_2]) = f(\overline{s_2^{-1}s_1})$ bzw. $f(\overline{s_2 s_1^{-1}})$
für $f\in k[[T]]$ und $[s_1]\leq[s_2]$ in $\mathrm{Sub}_M(Y)$ bzw. $\mathrm{Faktor}_M(X)$,
ist ein stetiger k-Algebra-Homomorphismus. lok erhält die Möbius-Funktion, dh. es ist

$$\mu_{\mathrm{Sub}_M(Y)}([s_1],[s_2]) = \mu(\overline{s_2^{-1}s_1}) \quad \text{bzw.} \quad \mu_{\mathrm{Faktor}_M(X)}([s_1],[s_2]) = \mu(\overline{s_2 s_1^{-1}}) \ . \quad \square$$

Die Konstruktion der Inzidenzalgebra $k[[T]]$ zu den Daten $\underline{K},M,\sim$ ist "natürlich" : Saturierte Teilklassen $M_0\subseteq M$ führen zu Unteralgebren von $k[[T]]$, Produkte von Strukturen $\underline{K}_1\times\underline{K}_2, M_1\times M_2, \sim_1\times\sim_2$ zu topologischen Tensorprodukten $k[[T_1]]\hat{\otimes}k[[T_2]]$ von Inzidenzalgebren.

<u>Beispiele:</u>

(a) Sei H das von der Indexmenge I erzeugte freie kommutative Monoid oder das Wortmonoid über dem Alphabet A. Sei $\underline{K}$ die Kategorie mit einem Objekt und Morphismen $s\in H$, sei $M=H$ und $\sim$ die Isomorphie, also die Gleichheit. Dann ist $T=H$ und $k[[T]]$ ist die Potenzreihenalgebra in den Unbestimmten $z(i)$, $i\in I$, bzw. die nicht-kommutative topologische Wortalgebra über dem Alphabet A (siehe [16],LA 4.13).

(b) Sei A ein Alphabet und Wo(A) das Wortmonoid über A. Sei $\underline{K}$ die Kategorie, deren Objekte die Wörter über A und deren Morphismen $s:v\to w$ die Einbettungen des Wortes v in das Wort w (in der gegebenen Reihenfolge) sind. Sei M die

Klasse aller Morphismen und sei $(s_1:v_1\to w_1)\sim(s_2:v_2\to w_2)$, falls die Restwörter $w_1-s_1(v_1)$ und $w_2-s_2(v_2)$ übereinstimmen. Dann ist T=Wo(A) und k[[T]] die topologische shuffle algebra (siehe [15],p.126).

(c) Sei $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen Mengen, M die Klasse der injektiven Abbildungen und sei $(s_1:X_1\to Y_1)\sim(s_2:X_2\to Y_2)$, falls die Komplemente $Y_1-s_1(X_1)$ und $Y_2-s_2(X_2)$ isomorph sind. Ein Unterobjekt $[s:X\to Y]$ der endlichen Menge Y identifiziert man üblicherweise mit der Teilmenge s(X) von Y. Dann ist die geordnete Menge $Sub_M(Y)$ die Potenzmenge von Y. Den Typen entsprechen bijektiv die natürlichen Zahlen 0,1,2,... durch

$$\overline{s:X\to Y} \to |Y-s(X)| \quad ,$$

und $\mathbb{Q}[[T]]$ ist isomorph zur Algebra der formalen Exponentialreihen unter

$$f \to \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{z^n}{n!} \qquad \text{(siehe [8],p.97)} \quad .$$

(d) Sei F ein endlicher Körper mit q Elementen. Sei $\underline{K}$ die Kategorie der endlich-dimensionalen F-Vektorräume, M die Klasse der injektiven linearen Abbildungen und sei $(s_1:X_1\to Y_1)\sim(s_2:X_2\to Y_2)$, falls die Faktorräume $Y_1/s_1(X_1)$ und $Y_2/s_2(X_2)$ isomorph sind. Identifiziert man Unterobjekte mit Unterräumen durch $[s:X\to Y]=s(X)$, so ist $Sub_M(Y)$ die projektive Geometrie von Y. Den Typen entsprechen bijektiv die natürlichen Zahlen 0,1,2,... durch

$$\overline{s:X\to Y} \to \text{F-Dimension von } Y/s(X) \quad ,$$

$\mathbb{Q}[[T]]$ ist isomorph zur Algebra der formalen Euler-Reihen unter

$$f \to \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{z^n}{(q)_n} \qquad \text{(siehe [8],p.98)} \quad .$$

(e) Sei $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen zyklischen Gruppen, M die Klasse der injektiven Gruppen-Homomorphismen und sei $(s_1:X_1\to Y_1)\sim(s_2:X_2\to Y_2)$, falls die Faktorgruppen $Y_1/s_1(X_1)$ und $Y_2/s_2(X_2)$ isomorph sind. Hier identifiziert man Unterobjekte mit Untergruppen. Den Typen entsprechen bijektiv die natürlichen Zahlen 1,2,3,... durch

$$\overline{s:X\to Y} \to \text{Ordnung von } Y/s(X) \quad ,$$

$\mathbb{Q}[[T]]$ ist isomorph zur Algebra der formalen Dirichlet-Reihen unter

$$f \to \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s \qquad \text{(siehe [8],p.97,98)} \quad .$$

(f) Weitere interessante Beispiele von Inzidenzalgebren findet man in [8] und [13], darunter die (topologische) Hall-Algebra ([8],pp.110). In [13] werden zu den kombinatorischen Strukturen nicht die Inzidenzalgebren konstruiert, sondern die dazu dualen Coalgebren.

§2 Spezielle kombinatorische Strukturen, Bialgebren und unipotente Gruppen

In §1 haben wir zu einer Kategorie $\underline{K}$, einer Klasse M von Morphismen und einer Äquivalenzrelation ~ die Inzidenzalgebra k[[T]] konstruiert. In diesem Paragraphen geben wir Bedingungen für $\underline{K}$,M und ~ an, unter denen k[[T]] eine topologische Bialgebra ist und durch eine unipotente affine Gruppe beschrieben werden kann. Beispiele dazu werden in §3 besprochen.

Die Kategorie $\underline{K}$ erfülle neben ($\underline{K}$1) noch die Bedingungen ($\underline{K}$2)-($\underline{K}$6):

($\underline{K}$2) In $\underline{K}$ gibt es ein Objekt 0 mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem Objekt X in $\underline{K}$ existiert genau ein Morphismus $0 \to X$.

Derartige Objekte nennen wir <u>initial</u>.

($\underline{K}$3) Zu zwei Objekten X_1, X_2 in $\underline{K}$ existieren ein Objekt X und Morphismen $u_1: X_1 \to X$ und $u_2: X_2 \to X$ so, daß für alle Objekte Y die Abbildung $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X_1,Y) \times \mathrm{Hom}(X_2,Y)$, $s \mapsto (su_1, su_2)$ bijektiv ist.

$X = X_1 \amalg X_2$ heißt die <u>direkte Summe</u> von X_1 und X_2.

($\underline{K}$4) Die Injektionen $u_1: X_1 \to X_1 \amalg X_2$ und $u_2: X_2 \to X_1 \amalg X_2$ sind Monomorphismen.

($\underline{K}$5) Die direkte Summe ist <u>disjunkt</u>, dh. in jedem kommutativen Diagramm von Monomorphismen

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "u_1"] & X_1 \amalg X_2 \\ Y \arrow[u] \arrow[r] & X_2 \arrow[u, "u_2"'] \end{tikzcd}$$

ist Y initial.

Ein Objekt X in $\underline{K}$ heißt <u>unzerlegbar</u> (in der Kombinatorik oft "zusammenhängend"), falls X nicht initial ist und in jeder Zerlegung $X \cong X_1 \amalg X_2$ X_1 oder X_2 initial ist.

Sei Y ein Objekt von $\underline{K}$ und sei

$$\mathrm{Sub}(Y) = \{[u];\ u: X \to Y \text{ ein Monomorphismus}\}$$

die geordnete Menge <u>aller</u> Unterobjekte von Y.

Eine <u>Partition</u> von Y in $\underline{K}$ ist eine endliche Teilmenge

$$\pi = \{[u: X(u) \to Y]\}$$

von Sub(Y) so, daß kein X(u) initial ist und der induzierte Morphismus $(u; [u] \in \pi): \amalg X(u) \to Y$ ein Isomorphismus ist. Falls alle X(u) unzerlegbar sind, heißt π eine <u>Krull-Schmidt-Partition</u> (kurz: KS-Partition).

Die letzte Bedingung an die Kategorie $\underline{K}$ lautet:

($\underline{K}$6) Jedes Objekt von $\underline{K}$ besitzt eine eindeutige KS-Partition.

<u>Beispiele:</u>

(a) In der Kategorie <u>Mef</u> der endlichen Mengen ist das initiale Objekt die leere Menge und die direkte Summe die disjunkte Vereinigung. Die unzerlegbaren

Objekte von Mef sind die einelementigen Mengen. Identifiziert man Unterobjekte mit Teilmengen durch $[u]$=Bild von u, so stimmt die kategorielle Definition einer Partition mit der in der Kombinatorik üblichen überein. Die eindeutige KS-Partition einer endlichen Menge X ist dann $\{\{x\};x\in X\}$.

(b) Sei F ein Körper und F-Vrf die Kategorie der endlich-dimensionalen F-Vektorräume. Die initialen Objekte von F-Vrf sind die einelementigen F-Vektorräume, die kategorielle direkte Summe ist die übliche direkte Summe. Die unzerlegbaren Objekte sind die eindimensionalen F-Vektorräume. Wir identifizieren Unterobjekte mit Unterräumen durch $[u]$=Bild von u. Dann ist eine Partition des F-Vektorraums V eine Menge π von Unterräumen von V, sodaß V die direkte Summe dieser Unterräume ist. In F-Vrf gilt offenbar nicht (K6).

(c) Sei A eine Gruppe und A-Mef die Kategorie der endlichen Mengen, auf denen A von links operiert. Die Morphismen von A-Mef sind die A-homogenen Abbildungen. Das Initialobjekt 0 ist die leere Menge, und die direkte Summe zweier A-Mengen ist die disjunkte Vereinigung der Mengen mit der induzierten Operation. Die unzerlegbaren Objekte von A-Mef sind die nichtleeren A-Mengen, auf denen A transitiv operiert. Die eindeutige KS-Partition einer endlichen A-Menge X ist die Menge $A\backslash X=\{Ax;x\in X\}$ der Bahnen von A auf X, wobei Unterobjekte mit A-stabilen Teilmengen identifiziert werden.

(d) In der Kategorie der endlichen ungerichteten Graphen ist das Initialobjekt 0 der leere Graph und die direkte Summe die disjunkte Vereinigung der Ecken- und Kantenmengen. Ein nichtleerer endlicher Graph ist genau dann unzerlegbar, wenn er zusammenhängend ist. Die eindeutige KS-Partition eines endlichen Graphen ist die Menge seiner Zusammenhangskomponenten.

Die Eigenschaften $(\underline{K}1)$-$(\underline{K}5)$ vererben sich von $\underline{K}$ auf die Kategorie Morph$(\underline{K})$, deren Objekte die Morphismen von $\underline{K}$ sind. Für zwei Objekte $r,s\in$ Morph$(\underline{K})$ sind die Morphismen von r nach s alle Paare (d,c) von Morphismen in $\underline{K}$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "d"'] & Y \arrow[d, "c"] \\ Z \arrow[r, "s"] & W \end{tikzcd}$$

kommutativ machen. Ein initiales Objekt von Morph$(\underline{K})$ ist $0\to 0$. Die direkte Summe zweier Morphismen $s_1:X_1\to Y_1$ und $s_2:X_2\to Y_2$ ist gegeben durch die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "u_i"'] & Y_i \arrow[d, "v_i"] \\ X_1 \amalg X_2 \arrow[r, "s_1 \amalg s_2"] & Y_1 \amalg Y_2 \end{tikzcd} \qquad (i=1,2)\quad .$$

Unterobjekte in der Kategorie Morph$(\underline{K})$ nennen wir Untermorphismen.

Die Klasse M von Morphismen in $\underline{K}$ besitze neben (M1)-(M5) noch die Eigenschaften (M6)-(M8):

(M6) Ist das Ziel eines Morphismus aus M initial, so ist auch die Quelle initial.

(M7) Für Morphismen s_1, s_2 in $\underline{K}$ ist $s_1 \amalg s_2 \in M$ genau dann, wenn $s_1, s_2 \in M$ sind.

Sei $s:X\to Y$ aus M und sei $\sigma=\{[(d,c):s(d,c)\to s]\}$ eine Partition von s in Morph($\underline{K}$).

$$\begin{tikzcd} X(d,c) \arrow[r, "s(d,c)"] \arrow[d, "d"'] & Y(d,c) \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

Dann nennen wir die Partition von Y

$$\pi = \{[c:Y(d,c)\to Y];[(d,c)]\in\sigma\}$$

die von σ induzierte <u>Bildpartition</u> von Y.

Die wichtigste Bedingung an M ist die "<u>Garbenbedingung</u>"

(M8) Sei $s:X\to Y$ aus M und $\pi=\{[u_1:Y_1\to Y],[u_2:Y_2\to Y]\}$ eine Partition von Y in zwei Unterobjekte. Dann gibt es genau eine Partition σ von s in zwei Untermorphismen, deren zugehörige Bildpartition π ist.

In der Kategorie $\underline{\mathrm{Mef}}$ erfüllt jeder Morphismus $s:X\to Y$ (M8):
Zur Partition $\pi=\{Y_1,Y_2\}$ von Y gehört die Partition $\{s|s^{-1}(Y_1):s^{-1}(Y_1)\to Y_1,$ $s|s^{-1}(Y_2):s^{-1}(Y_2)\to Y_2\}$ von s.

In der Kategorie F-$\underline{\mathrm{Vrf}}$ hingegen erfüllen die Monomorphismen nicht (M8):
Die Inklusion $X\to Y=Y_1\oplus Y_2$ ist i.a. nicht die direkte Summe der Inklusionen $X\cap Y_1\to Y_1$ und $X\cap Y_2\to Y_2$.

Aus den Axiomen an M folgt:

(i) Ein Morphismus $s:X\to Y$ aus M ist unzerlegbar in Morph($\underline{K}$) genau dann, wenn Y unzerlegbar in $\underline{K}$ ist.

(ii) Jeder Morphismus aus M besitzt eine eindeutige KS-Partition.

In der Kategorie $\underline{\mathrm{Mef}}$ ist die eindeutige KS-Partition von $s:X\to Y$ $\{s^{-1}(y)\to\{y\};y\in Y\}$.

Sei $\underline{P}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der unzerlegbaren Objekte von $\underline{K}$ und sei

$$\mathbb{N}_0^{(\underline{P})} = \{n=(n(P))_P\in \mathbb{N}_0^{\underline{P}};\ n(P)\neq 0 \text{ nur für endlich viele } P\in\underline{P}\}$$

das freie kommutative Monoid mit Basis $\underline{P}$. Wegen ($\underline{K}$6) gibt es für jedes Objekt X in $\underline{K}$ genau ein $n\in \mathbb{N}_0^{(\underline{P})}$ mit

$$X \simeq \coprod_{P\in\underline{P}} (\underbrace{P\amalg\ldots\amalg P}_{n(P)\text{-mal}}) = \coprod_P n(P)P \quad .$$

$n=n(X)$ heißt der <u>Krull-Schmidt-Typ</u> (kurz: KS-Typ) von X. Offenbar ist $n(0)=0$ und $n(X\amalg Y)=n(X)+n(Y)$. Falls M eine Klasse von Monomorphismen ist, so ist $\mathrm{Sub}_M(X)$ ordnungs-isomorph zum Produkt $\prod_{P\in\underline{P}} \mathrm{Sub}_M(P)^{n(P)}$.

In der Kategorie Mef ist z.B. $\underline{P}=\{\{\circ\}\}$, $\mathbb{N}_0^{(\underline{P})}=\mathbb{N}_0$ und der KS-Typ einer endlichen Menge X ihre Mächtigkeit. ($\{\circ\}$ ist eine beliebige einelementige Menge.)

(2.1) Folgerung: Sei X ein Objekt von $\underline{K}$ mit KS-Typ n. Dann ist die Automorphismen-Gruppe von X isomorph zum direkten Produkt

$$\prod_{P\in\underline{P}} S(n(P))\ltimes Aut(P)^{n(P)}$$

der Kranz-Produkte $S(n(P))\ltimes Aut(P)^{n(P)}$. Hier ist S(n(P)) die symmetrische Gruppe auf $\{1,\ldots,n(P)\}$ und Aut(P) die Automorphismen-Gruppe von P. Falls die Gruppen Aut(P) endliche Ordnungen a(P) besitzen, so ist

$$a(n) = |Aut(X)| = \prod_{P\in\underline{P}} n(P)!a(P)^{n(P)} = n!a^n \quad . \quad \square$$

Für die Äquivalenzrelation $\sim$ auf M verlangen wir neben ($\sim$1)-($\sim$4) noch ($\sim$5)-($\sim$6):

($\sim$5) Aus $r_1\sim r_2$ und $s_1\sim s_2$ in M folgt $r_1 \amalg s_1 \sim r_2 \amalg s_2$.

Die Menge der Typen $T=M/\sim$ wird dann mit der Addition

$$+: T\times T \to T,\ (\overline{r},\overline{s}) \to \overline{r\amalg s}$$

ein kommutatives Monoid mit Nullelement $0=\overline{0\to 0}$. Wir nennen einen Typ t unzerlegbar, falls $t\neq 0$ ist und in jeder Darstellung $t=t_1+t_2$ $t_1=0$ oder $t_2=0$ ist. Sei U die Menge der unzerlegbaren Typen. Es gelte

($\sim$6) Jeder Typ t besitzt eine Darstellung als Summe von unzerlegbaren Typen, die eindeutig bis auf die Reihenfolge ist.

Das kommutative Monoid T ist dann frei mit Basis U, dh.

$$T = \bigoplus_{u\in U} \mathbb{N}_0 u \quad , \quad t = \sum_{u\in U} t(u)u \quad .$$

Insbesondere ist für alle $t\in T$ die Menge $\{(t_1,t_2)\in T^2; t_1+t_2=t\}$ endlich. Für Typen t_1,t_2 ist $\dim(t_1+t_2)=\dim(t_1)+\dim(t_2)$, also die Dimension additiv.

Sei U' die Menge der unzerlegbaren Typen von Isomorphismen und sei U'' die Menge der unzerlegbaren Typen von Nicht-Isomorphismen. Wegen ($\sim$2) ist

$$U = U' + U'' \quad .$$

Das Standardbeispiel für Äquivalenz ist die Isomorphierelation auf M, die alle Eigenschaften ($\sim$1)-($\sim$6) besitzt. Die unzerlegbaren Typen sind die Isomorphietypen der unzerlegbaren Morphismen aus M.

Die hier betrachteten Strukturen $\underline{K}$,M, sind Verallgemeinerungen der "garbenähnlichen" Kategorien in [10],pp.150,155. Dort wurde die "Garbenbedingung" (M8) als die Universalität von Coprodukten formuliert.

Die kommutative Monoid-Struktur auf T induziert eine cokommutative topologische Coalgebra-Struktur auf $k^T=k[[T]]$:

(Im folgenden verwenden wir die Terminologie von [17] und [7] für Hopf-Algebren und affine Gruppen-Schemata.)

Die Comultiplikation ist

$$\Delta:\ k[[T]] \to k[[T]]\hat{\otimes}k[[T]],\ e(t) \to \sum_{t_1+t_2=t} e(t_1)\hat{\otimes}e(t_2)\quad ,$$

die Coeinheit ist

$$\varepsilon:\ k[[T]]\to k,\ e(t)\to\delta_{t,0}\quad \text{(Kronecker-Delta)}\quad .$$

Aus der Garbenbedingung folgt die Verträglichkeit der Algebra- und Coalgebra-Struktur auf $k^T=k[[T]]$.

(2.2) Satz: (vergleiche [10],pp.156)

Mit den k-Algebra-Homomorphismen Δ und ε wird die Inzidenzalgebra $k[[T]]$ zu einer cokommutativen topologischen Bialgebra. □

Die wesentliche Aussage dieses Satzes ist die Multiplikativität von Δ -

$$\Delta(fg)=\Delta(f)\Delta(g)\qquad \text{für } f,g\in k[[T]]\quad ,$$

die äquivalent zu folgender Eigenschaft der Schnittkoeffizienten ist:

(C) Für Typen v,w,t_1,t_2 ist

$$G(v+w;t_1,t_2) = \sum_{\substack{v_1+w_1=t_1\\ v_2+w_2=t_2}} G(v;v_1,v_2)G(w;w_1,w_2)\quad .$$

G.C.Rota und S.A.Joni gehen in [13],p.97 von Zahlen $(i|j,k)$ mit den Eigenschaften (A),(B) (siehe §1) und (C) aus und konstruieren daraus - dual zu (2.2) - Bialgebren (vergleiche auch [14],p.69). Hier hingegen können (A),(B),(C) aus den Axiomen an $\underline{K}$,M,~ allgemein abgeleitet werden.

(2.3) Definition: Für jede k-Algebra R sei Mon(T,R) die Menge der multiplikativen Funktionen von T nach R, dh. aller $f\in R^T$ mit

$$f(0)=1 \qquad \text{und} \qquad f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)\quad \text{für alle } t_1,t_2\in T\quad .$$

f ist dann durch die Werte auf der Basis U von T, dh. durch die Werte auf den unzerlegbaren Typen eindeutig bestimmt:

Für $t=\Sigma_{u\in U}t(u)u \in T$ ist

$$f(t) = \prod_{u\in U} f(u)^{t(u)}\quad .$$

(2.4) Satz: Für jede k-Algebra R ist Mon(T,R) ein multiplikatives Untermonoid von R[[T]]. Der Funktor

$$G:\ \underline{Al}_k\to\underline{Mon},\ R\to \mathrm{Mon}(T,R)$$

definiert ein k-freies affines Monoid, dessen covariante Bialgebra k[[T]] ist. G heißt das affine Monoid der multiplkativen Funktionen auf T. □

(2.5) Satz: (vergleiche [9],[10])

G enthält das abgeschlossene affine Untermonoid

$$G':\ \underline{Al}_k\to\underline{Mon},\ R\to\{f\in \mathrm{Mon}(T,R); f(u'')=0 \text{ für alle } u''\in U''\}$$

und die abgeschlossene affine Untergruppe

$$G'':\ \underline{Al}_k\to\underline{Gr},\ R\to\{f\in \mathrm{Mon}(T,R); f(u')=1 \text{ für alle } u'\in U'\}\quad .$$

Die affine Gruppe der Einheiten von G

$$E(G): \underline{Al}_k \to \underline{Gr},\ R \mapsto \{f \in Mon(T,R); f(u') \in E(R) \text{ für alle } u' \in U'\}$$

(E(R) ist die Einheitengruppe von R)

ist das semidirekte Produkt des diagonalisierbaren, i.a. unendlich-dimensionalen Torus E(G') und des unipotenten Normalteilers G'' und ist somit trigonalisierbar.

Die Operation von E(G') auf G'' durch innere Automorphismen ist gegeben durch

$$Int(g)(h)(t) = ghg^{-1}(t) = \frac{g(dom(t))}{g(cod(t))}\, h(t)$$

für $g \in E(G')(R), h \in G''(R)$ und $t \in T$. □

Der algebraisch interessante Bestandteil von G ist daher die unipotente affine Gruppe G''.

(2.6) Satz: G'' besitzt die Filtrierung

$$G''=G''(1) \supseteq G''(2) \supseteq G''(3) \supseteq \ldots$$

aus den abgeschlossenen affinen normalen Untergruppen

$$G''(d)(R)=\{f \in G''(R); f(u'')=0 \text{ für alle } u'' \in U'' \text{ mit } dim(u'') \leq d-1\}$$

und ist der inverse Limes der Gruppenfunktoren

$$G''/G''(d) \quad , \quad d=1,2,\ldots \quad . \ \square$$

Falls es nur endlich viele unzerlegbare Typen von Nicht-Isomorphismen mit Dimension kleiner als d gibt, ist G''/G''(d) endlich-dimensional, also eine unipotente algebraische Gruppe.

Die Zeta-Funktion $\zeta: T \to k, t \mapsto 1$ ist offenbar multiplikativ und in G''(k) enthalten. Daher liegt auch ihre Inverse, die Möbius-Funktion $\mu=\zeta^{-1}$ in G''(k). Für die in §2 betrachteten speziellen kombinatorischen Strukturen genügt es also,

$$\mu(u'') \qquad \text{für alle } u'' \in U''$$

zu kennen, um die Möbius-Funktionen auf den geordneten Mengen der Unter- bzw. Faktorobjekte nach (1.6) berechnen zu können.

Die Konstruktion des affinen Monoids G aus $\underline{K}$,M,~ ist "natürlich": Saturierte Teilklassen $M_o \subseteq M$ führen zu Untermonoiden von G, Produkte von Strukturen $\underline{K}_1 \times \underline{K}_2, M_1 \times M_2, \sim_1 \times \sim_2$ zu Produkten von Monoiden $G_1 \times G_2$.

In den kombinatorischen Anwendungen sucht man eine treue Darstellung von G durch Endomorphismen von Potenzreihenalgebren

$$\rho_R: G(R) \to End(R[[z(i); i \in I]]) \quad , \quad R \in \underline{Al}_k \ .$$

Damit kann $\mu=\zeta^{-1}$ durch Invertieren des Automorphismus $\rho_k(\zeta)$ berechnet werden. Weiters liefert die Darstellung ρ erzeugende Funktionen für Anzahlen von Unter- bzw. Faktorobjekten:

Falls $f,g \in G(k)$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen, zählen nach (1.3)

$$fg(t) = \Sigma_{t_1,t_2} G(t;t_1,t_2) f(t_1) g(t_2) \quad , \quad t \in T$$

gewisse Mengen von Unter- bzw. Faktorobjekten in der Kategorie $\underline{K}$ ab.

Zum Beispiel ist für $s:X\to Y$ aus M

$$\zeta^2(\bar{s}) = \Sigma_{t_1,t_2} G(\bar{s};t_1,t_2)$$

die Anzahl der Unterobjekte von Y größer gleich $[s]$ bzw. die Anzahl der Faktorobjekte von X kleiner gleich $[s]$.

Aus $\rho_k(fg)=\rho_k(f)\circ\rho_k(g)$ erhält man dann durch Anwenden auf $z(i)$, $i\in I$, erzeugende Funktionen für die Anzahlen $fg(t)$, $t\in T$ (siehe §3 Beispiele).

P.Doubilet, G.C.Rota und R.Stanley berechnen in [8], pp.100 mithilfe einer Potenzreihen-Darstellung der multiplikativen Funktionen auf den Typen von Partitionen endlicher Mengen (siehe §3, Beispiel (b)) die Möbius-Funktion auf den Partitionsverbänden sowie erzeugende Funktionen für die Anzahlen von Partitionen, von zusammenhängenden Graphen und von Permutationen s mit $s^d=id$.

Ob es immer eine treue Darstellung von G durch Endomorphismen von Potenzreihenalgebren gibt, ist mir derzeit nicht bekannt. Auf der Suche nach einer solchen Darstellung sollte man beachten

(2.7) <u>Satz:</u> Sei k ein Körper der Charakteristik 0, G'' eine unipotente affine Gruppe und $\rho_R: G''(R)\to Aut(R[[z(i);i\in I]])$, $R\in \underline{Al}_k$, eine Potenzreihen-Darstellung von G''. Dann operiert $G''(R)$ auf $R[[z(i);i\in I]]$ durch topologisch unipotente Automorphismen. □

§3 Beispiele

In diesem Paragraphen werden Beispiele zur allgemeinen Theorie von §2 besprochen. Wir erklären jeweils, was die Typen $t\in T$ der kombinatorischen Struktur $\underline{K}$,M,~ sind und geben eine treue Darstellung ρ des affinen Monoids G der multiplikativen Funktionen auf T mittels Potenzreihen an. Bei den Anwendungen der Darstellung ρ auf die Untersuchung der geordneten Mengen der Unter- bzw. Faktorobjekte beschränken wir uns meistens auf die Berechnung der Möbius-Funktion, gelegentlich stellen wir auch erzeugende Funktionen für Anzahlen von Unter- bzw. Faktorobjekten auf.

(a) Teilmengen endlicher Mengen:

Sei $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen Mengen, M die Klasse der injektiven Abbildungen und sei $(s_1:X_1\to Y_1)\sim(s_2:X_2\to Y_2)$, falls $|Y_1-s_1(X_1)|=|Y_2-s_2(X_2)|$ ist (siehe §1, Beispiel (c)). Da die Bijektion $T\to\mathbb{N}_o$, $\overline{s:X\to Y}\to|Y-s(X)|$ sogar ein Isomorphismus von Monoiden ist, identifizieren wir T mit $\mathbb{N}_o$. Dann hat T die Basis $U=\{1\}=U''$. Die Schnittkoeffizienten $G(t;t_1,t_2)$ sind die Binomialkoeffizienten

$$\binom{t}{t_1\ t_2}=\begin{cases}\dfrac{t!}{t_1!t_2!} & \text{falls } t_1+t_2=t\\ 0 & \text{sonst}\end{cases},$$

Bedingung (C) nach Satz (2.2) ist somit die Vandermonde-Identität für Binomialkoeffizienten. Für $f,g\in\mathrm{Mon}(T,R)$ ist

$$fg(1)=\Sigma_{t_1,t_2}G(1;t_1,t_2)f(t_1)g(t_2)=f(1)+g(1)\quad ,$$

und daher ist $G=G''$ isomorph zur eindimensionalen additiven Gruppe G_a unter dem funktoriellen Isomorphismus

$$\begin{aligned}F_R:\ G(R)&\to(R,+)\quad ,\quad R\in\underline{Al}_k\\ f&\to f(1)\ .\end{aligned}$$

Aus $F_k(\zeta)=1$ folgt $F_k(\mu)=-1$, also $\mu(t)=\mu(1)^t=(-1)^t$. Nach (1.6) kann die Möbius-Funktion auf der Potenzmenge von Y berechnet werden als

$$\mu_{Pot(Y)}(X,Z)=\mu(\overline{X\to Z})=\mu(|Z-X|)=\mu(1)^{|Z-X|}=(-1)^{|Z|-|X|}\ .$$

Eine treue Darstellung von G durch Automorphismen von Potenzreihenalgebren ist

(3.1) $$\begin{aligned}\rho_R:\ G(R)&\to\mathrm{Aut}(R[[w,z]])\quad ,\quad R\in\underline{Al}_k\\ f&\to\begin{bmatrix}w\to w\\ z\to z+f(1)w\end{bmatrix}\ .\end{aligned}$$

Die unipotente Gruppe zur Produkt-Struktur $\underline{K}^s,M^s,\sim^s$ ist isomorph zum s-fachen Produkt der additiven Gruppe G_a, ihre affine Algebra ist die "binomial coalgebra" von G.C.Rota in [13],p.101.

(b) Partitionen endlicher Mengen:

Sei $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen Mengen, M die Klasse der surjektiven Abbildungen und sei $\sim$ die Isomorphierelation auf M. Ein Faktorobjekt $[s:X\to Y]$ der endlichen Menge X ist gegeben durch die Urbild-Partition $\{s^{-1}(y);y\in Y\}$ von s. Daher ist die geordnete Menge $\mathrm{Faktor}_M(X)$ der Partitionsverband von X. Der Isomorphietyp einer surjektiven Abbildung $s:X\to Y$ ist eindeutig bestimmt durch den (in der Kombinatorik üblichen) "Typ" $(1^{t(1)}2^{t(2)}3^{t(3)}\ldots)$ der Urbild-Partition von s. Dabei ist $t(n)$ die Zahl der Blöcke mit n Elementen. Wir identifizieren T mit der Menge

$$\{t=(1^{t(1)}2^{t(2)}3^{t(3)}\ldots);\ t(n)\neq 0 \text{ nur für endlich viele } n\} \quad .$$

Die direkte Summe auf M induziert auf T die Addition

$$(1^{v(1)}2^{v(2)}\ldots)+(1^{w(1)}2^{w(2)}\ldots)=(1^{v(1)+w(1)}2^{v(2)+w(2)}\ldots)\quad ,$$

das Nullelement von T ist $(1^0 2^0\ldots)$. T besitzt die Basis $U=\{(n^1);n=1,2,\ldots\}$. Für $t\in T$ sei $\mathrm{gew}(t)=\Sigma_{n=1}^{\infty}nt(n)$ das Gewicht von t und $|t|=\Sigma_{n=1}^{\infty}t(n)$ der Betrag von t. Die Schnittkoeffizienten

$$G((n^1);t,(|t|^1))=\frac{n!}{t(1)!(1!)^{t(1)}t(2)!(2!)^{t(2)}\ldots}\qquad \begin{matrix} n=1,2,\ldots\\ t\in T\\ \mathrm{gew}(t)=n\end{matrix}$$

zählen die Partitionen von $\{1,\ldots,n\}$ vom Typ $t=(1^{t(1)}2^{t(2)}\ldots)$ ab und heißen bei Rota die Faà di Bruno-Koeffizienten (siehe [13],pp.110). Das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen auf T besitzt nach P.Doubilet,G.C.Rota und R.Stanley über $\mathbb{Q}$ die treue Darstellung

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} \rho_R:\ G(R) &\to \mathrm{End}(R[[z]]) \qquad , \qquad R\in \underline{Al}_{\mathbb{Q}}\\ f &\to [z\to \Sigma_{n=1}^{\infty}f((n^1))\tfrac{z^n}{n!}]\\ \zeta &\to [z\to \exp(z)-1]\end{aligned}$$

durch Endomorphismen der Potenzreihenalgebra in einer Variablen. Mit der am Ende von §2 besprochenen Methode erhält man daraus die Möbius-Funktion auf den Partitionsverbänden sowie die erzeugenden Funktionen für die Bellzahlen und die Stirlingzahlen 2.Art

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}B(n)\frac{z^n}{n!}=\exp(\exp(z)-1)-1 \qquad \text{und} \qquad \Sigma_{n=1}^{\infty}S(n,l)\frac{z^n}{n!}=\frac{(\exp(z)-1)^l}{l!}\quad .$$

Die affine Algebra von G nennt Rota die Faà di Bruno-Bialgebra.

(c) Darstellungen endlicher geordneter Mengen:

Sei J eine endliche geordnete Menge. Unter einer Darstellung von J verstehen wir eine monotone Abbildung $J\to \mathrm{Pot}(X)$, $j\to X^j$, wobei X eine endliche Menge und $\mathrm{Pot}(X)$ die Potenzmenge von X ist. Wir schreiben dafür $(X,(X^j))$. Ein Morphismus von einer Darstellung $(X,(X^j))$ zu einer Darstellung $(Y,(Y^j))$ ist eine Abbildung $s:X\to Y$, sodaß $s(X^j)\subseteq Y^j$ für alle $j\in J$ ist.

Sei $\underline{K}$ die Kategorie der Darstellungen von J. Falls J leer ist, ist $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen Mengen. Für eine Kette J erhält man die Kategorie der endlichen Mengen mit einer Kette von Teilmengen, für eine Antikette die Kategorie der endlichen Mengen mit einer Familie von Teilmengen.

Das Initialobjekt 0 von $\underline{K}$ ist die leere Darstellung $(\emptyset,(\emptyset))$, die direkte Summe von $(X,(X^j))$ und $(Y,(Y^j))$ ist die disjunkte Vereinigung $(X+Y,(X^j+Y^j))$.

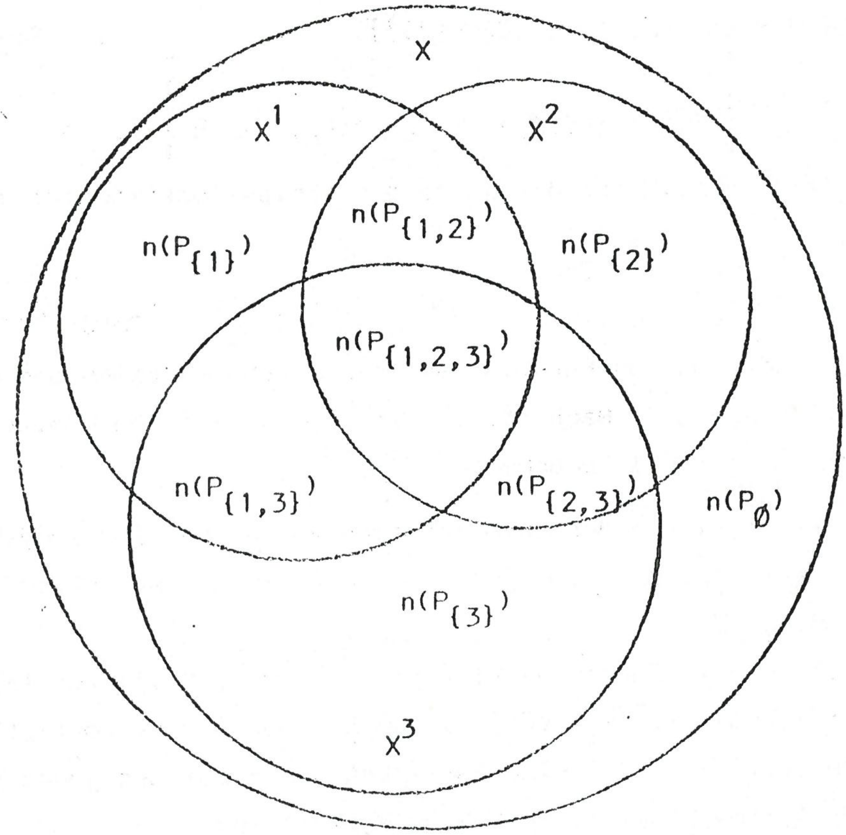
Die unzerlegbaren Objekte von $\underline{K}$ sind alle $(W,(W^j))$, wo W nur ein Element besitzt. Dann ist $\{j\in J; W^j=W\}$ ein Coideal von J. Ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren Objekte von $\underline{K}$ modulo Isomorphie ist die endliche Menge

$$\underline{P} = \{P_C;\ C \text{ ein Coideal von } J\} \quad ,$$

wobei $P_C=(\{\circ\},(\{\circ\}$ für $j\in C$, $\emptyset$ für $j\notin C))$ und $\{\circ\}$ eine beliebige einelementige Menge ist. Sei Co(J) die endliche Menge der Coideale von J. Der KS-Typ $n\in \mathbb{N}_0^{\underline{P}}$ von $(X,(X^j))$ ist gegeben durch

$$n(P_C) = \#\{x\in X;\ x\in X^j \text{ für } j\in C,\ x\notin X^j \text{ für } j\notin C\} \quad , \quad C\in Co(J) \quad .$$

Falls z.B. J die Antikette $\{1,2,3\}$ ist, liest man den KS-Typ $n\in \mathbb{N}_0^{\underline{P}}$ aus dem folgenden Diagramm ab.



In $\underline{K}$ erfüllen alle Morphismen die Garbenbedingung. Nach (2.1) besitzt die Automorphismen-Gruppe eines Objekts $(X,(X^j))$ vom KS-Typ n die Ordnung

$$a(n) = n! = \Pi_C n(P_C)! \quad .$$

<u>1.Fall:</u> Sei M die Klasse der Monomorphismen von $\underline{K}$, dh. der injektiven Abbildungen $s:X\to Y$ mit $s(X^j)\subseteq Y^j$ für alle $j\in J$. Die Äquivalenz $\sim$ sei die Isomorphierelation auf M.

Wir identifizieren ein Unterobjekt $[s:(X,(X^j))\to(Y,(Y^j))]$ von $(Y,(Y^j))$ mit dem Objekt $(s(X),(s(X^j)))$. Dann ist $\mathrm{Sub}(Y,(Y^j))$ die Menge aller Objekte $(Z,(Z^j))$, wo $Z\subseteq Y$ und $Z^j\subseteq Y^j$ für alle $j\in J$ ist. In $\mathrm{Sub}(Y,(Y^j))$ ist

$$(X,(X^j))\le(Z,(Z^j)) \quad , \quad \text{falls } X\subseteq Z \text{ und } X^j\subseteq Z^j \text{ für alle } j\in J \text{ ist.}$$

Jeder unzerlegbare Monomorphismus in $\underline{K}$ ist isomorph zu genau einem der Monomorphismen

$$0\to P_C \ , \ C\in \mathrm{Co}(J) \qquad \text{oder} \qquad P_B\to P_C \ , \ B,C\in\mathrm{Co}(J),\ B\subseteq C \ .$$

Wir können daher

$$U=\{(0,P_C);C\in\mathrm{Co}(J)\}+\{(P_B,P_C);B,C\in\mathrm{Co}(J),B\subseteq C\} \qquad \text{und}$$
$$T=\bigoplus_{u\in U}\mathbb{N}_0 u \qquad \text{setzen.}$$

(3.3) <u>Satz:</u> Das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen auf T ist algebraisch und besitzt die treue Darstellung

$$\rho_R:\ G(R)\to \mathrm{End}(R[[w,z(C);C\in\mathrm{Co}(J)]]) \qquad , \qquad R\in\underline{Al}_k$$
$$f \mapsto \begin{bmatrix} w\to w \\ z(C)\to f(0,P_C)w+\Sigma_{B\subseteq C}f(P_B,P_C)z(B)\end{bmatrix} \ . \ \square$$

Aus $\rho_k(\mu)=\rho_k(\zeta)^{-1}$ erhält man die Werte der Möbius-Funktion auf den unzerlegbaren Typen:

$$\mu(0,P_C)=\begin{cases}-1 & \text{für } C=\emptyset\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mu(P_B,P_C)=\mu_{\mathrm{Co}(J)}(B,C) \ .$$

Hier ist $\mu_{\mathrm{Co}(J)}$ die Möbius-Funktion auf der durch Inklusion geordneten Menge $\mathrm{Co}(J)$ der Coideale von J. Nach (1.6) läßt sich daraus die Möbius-Funktion auf den Verbänden $\mathrm{Sub}(Y,(Y^j))$ berechnen.

<u>2.Fall:</u> Sei M die Klasse der Epimorphismen von $\underline{K}$, dh. der surjektiven Abbildungen $s:X\to Y$ mit $s(X^j)\subseteq Y^j$ für alle $j\in J$. Die Äquivalenz $\sim$ sei wieder die Isomorphierelation auf M.

Wir identifizieren ein Faktorobjekt $[s:(X,(X^j))\to(Y,(Y^j))]$ von $(X,(X^j))$ mit dem Objekt $(\{s^{-1}(y);y\in Y\},(\{s^{-1}(y);y\in Y^j\}))$ von $\underline{K}$. Dann ist $\mathrm{Faktor}(X,(X^j))$ die Menge aller Objekte $(F,(F^j))$, wo F eine Partition von X ist und jedes X^j von den Blöcken in F^j überdeckt wird. In $\mathrm{Faktor}(X,(X^j))$ ist

$(F,(F^j))\le(H,(H^j))$, falls F eine Verfeinerung von H ist und jeder Block von F^j in einem Block von H^j enthalten ist.

Jeder unzerlegbare Epimorphismus in $\underline{K}$ ist isomorph zu genau einem der Epimorphismen

$$\coprod_B n(P_B)P_B\to P_C \quad ,$$

wobei $n\in\mathbb{N}_0^{\underline{P}}$ ungleich 0, $C\in Co(J)$ und $n(P_B)=0$ für alle B ist, die nicht in C liegen. Wir setzen daher

$$U=\{(n,P_C);0\neq n\in\mathbb{N}_0^{\underline{P}},C\in Co(J),n(P_B)=0 \text{ für alle } B\not\subseteq C\} \quad \text{und}$$

$$T=\bigoplus_{u\in U}\mathbb{N}_0 u \quad .$$

(3.4) <u>Satz:</u> Das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen auf T besitzt über $\mathbb{Q}$ die treue Darstellung

$$\rho_R: G(R)\to \mathrm{End}(R[[z(C);C\in Co(J)]]) \quad , \quad R\in \underline{Al}_{\mathbb{Q}}$$
$$f \mapsto [z(C)\to \Sigma_n f(n,P_C)\frac{z^n}{n!}] \quad .$$

Hier ist $z^n=\Pi_B z(B)^{n(P_B)}$ und $n!=\Pi_B n(P_B)!=a(n)$. □

Durch Invertieren von $\rho_{\mathbb{Q}}(\zeta)=[z(C)\to\Sigma_n z^n/n!=\exp(\Sigma_{B\subseteq C}z(B))-1]$ lassen sich die Werte von μ auf den unzerlegbaren Typen berechnen:

$$\mu(n,P_C) = \begin{cases}(-1)^{l-1}(l-1)!\,\mu_{Co(J)}(B,C) & \text{für } n=lP_B,\ l\in\mathbb{N},B\subseteq C\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \quad .$$

(d) <u>Idempotente Endomorphismen auf endlichen Mengen:</u>

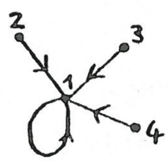
Wir betrachten folgende Kategorie $\underline{K}$: Die Objekte von $\underline{K}$ sind alle Paare (X,p), wo X eine endliche Menge und $p:X\to X$ ein idempotenter Endomorphismus ist (dh. $p^2=p$). Ein Morphismus von (X,p) nach (Y,q) ist eine Abbildung $s:X\to Y$, sodaß $sp=qs$ gilt.

Das Initialobjekt 0 von $\underline{K}$ ist die leere Menge mit dem leeren Endomorphismus, die direkte Summe $(X,p)\amalg(Y,q)$ ist die disjunkte Vereinigung $(X+Y,p+q)$. Ein Objekt (X,p) ist unzerlegbar, falls p genau einen Fixpunkt besitzt. Ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren Objekte von $\underline{K}$ modulo Isomorphie ist

$$\underline{P}=\{P_n;\ n=1,2,\dots\} \quad ,$$

wobei die Objekte P_n aus der Menge $X_n=\{1,\dots,n\}$ und dem idempotenten Endomorphismus $p_n:X_n\to X_n, i\mapsto 1$ bestehen.

P_4 :



Sei M die Klasse der Monomorphismen von $\underline{K}$, dh. der injektiven Morphismen, und sei $\sim$ die Isomorphierelation auf M.

Die Unterobjekte von (Y,q) können mit den q-stabilen Teilmengen von Y identifiziert werden. Dann ist die Ordnung auf $Sub(Y,q)$ die Inklusion.

Jeder unzerlegbare Monomorphismus von $\underline{K}$ ist isomorph zu genau einer der Inklusionen

$$0\to P_n \ ,\ n\in\mathbb{N} \qquad \text{oder} \qquad P_l\to P_n \ ,\ l,n\in\mathbb{N},\ l\leq n \quad .$$

Wir setzen daher

$$U=\{(0,P_n);n\in\mathbb{N}\}+\{(P_l,P_n);l,n\in\mathbb{N},l\leq n\} \quad \text{und}$$

$$T=\bigoplus_{u\in U}\mathbb{N}_0 u \quad .$$

(3.5) Satz: Das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen auf T besitzt über $\mathbb{Q}$ die treue Darstellung

$$\rho_R: G(R) \to \mathrm{End}(R[[w,z_1,z_2,\ldots]]) \quad , \quad R\in\underline{Al}_{\mathbb{Q}}$$

$$f \to \begin{bmatrix} w \to w \\ z_n \to f(0,P_n)w/(n-1)! + \Sigma_{l=1}^{n} f(P_l,P_n)z_l/(n-l)! \end{bmatrix} ,$$

$$\mu \to \begin{bmatrix} w \to w \\ z_1 \to -w + z_1 \\ z_n \to \Sigma_{l=1}^{n}(-1)^{n-l} z_l/(n-l)! \quad , \quad n=2,3,\ldots \end{bmatrix} . \quad \square$$

(e) Invariante Äquivalenzrelationen auf Mengen unter Gruppen-Operation:

Sei A eine Gruppe und A-Mef die Kategorie der endlichen Mengen, auf denen A von links operiert (siehe §2, Beispiel (c)). Sei M die Klasse der Epimorphismen von K, dh. der surjektiven A-homogenen Abbildungen. Als Äquivalenz $\sim$ wählen wir die Isomorphierelation auf M.

Sei X eine endliche A-Menge. Dann operiert A auf der Potenzmenge von X durch $aZ=\{az;z\in Z\}$. Eine mengentheoretische Partition von X, deren Blöcke unter der Operation von A permutiert werden, nennen wir äquivariant. Beispiele für äquivariante Partitionen sind $\{\{x\};x\in X\}$ und die kategoriellen Partitionen von X in A-Mef, wo A die Blöcke sogar fix läßt. Eine äquivariante Partition π von X kann man als A-invariante Äquivalenzrelation $\approx$ auf X auffassen: Es sei $x\approx y$ genau dann, wenn x und y im gleichen Block von π liegen. Dann folgt aus $x\approx y$ auch $ax\approx ay$ für alle $a\in A$. Umgekehrt liefert eine A-invariante Äquivalenzrelation auf X eine äquivariante Partition von X in Äquivalenzklassen.

Die Menge der Faktorobjekte von X ist ordnungs-isomorph zum Verband der äquivarianten Partitionen von X mit der Verfeinerungs-Relation unter der Abbildung

$$[s:X\to Y] \to \{s^{-1}(y);y\in Y\} \quad .$$

Wir können daher Faktorobjekte mit äquivarianten Partitionen identifizieren. Für die triviale Gruppe haben wir das schon in Beispiel (b) getan.

Die explizite Berechnung des affinen Monoids G der multiplikativen Funktionen scheint für beliebiges A schwierig zu sein. Wir beschränken uns im folgenden auf eine endliche abelsche Gruppe A (mit Addition +).

Sei P(A) die endliche Menge der Untergruppen von A. Ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren Objekte von A-Mef modulo Isomorphie sind die homogenen Räume

$$\underline{P} = \{A/V;\ V\in P(A)\} \quad .$$

Der KS-Typ $n\in \mathbb{N}_0^{\underline{P}}$ einer endlichen A-Menge X ist gegeben durch

$$n(A/V) = \text{Anzahl der Bahnen von A auf X mit Stabilisator V} \quad , \quad V\in P(A).$$

Jeder unzerlegbare Epimorphismus von A-Mef ist isomorph zu genau einem der Epimorphismen

$$\coprod_V n(A/V)A/V \to A/W \ , \quad a+V \to a+W \ ,$$

wobei $n\in \mathbb{N}_0^{P}$ ungleich 0, $W\in P(A)$ und $n(A/V)=0$ für alle $V\in P(A)$ ist, die nicht in W liegen. Wir setzen daher

$$U=\{(n,A/W);0\neq n\in \mathbb{N}_0^{P},V\in P(A),n(A/V)=0 \text{ für alle } V\nsubseteq W\} \qquad \text{und}$$

$$T=\bigoplus_{u\in U} \mathbb{N}_0 u \quad .$$

(3.6) <u>Satz:</u> Das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen auf T besitzt über $\mathbb{Q}$ die treue Darstellung

$$\rho_R\colon G(R) \to \mathrm{End}(R[[z(W);W\in P(A)]]) \quad , \quad R\in \underline{Al}_{\mathbb{Q}}$$

$$f \to [z(W) \to \Sigma_n f(n,A/W)\frac{z^n}{a_W(n)}] \quad .$$

Hier ist $z^n=\Pi_V z(V)^{n(A/V)}$ und $a_W(n)=|\mathrm{Aut}(\coprod_V n(A/V)W/V)|=\Pi_V\left(\frac{|W|}{|V|}\right)^{n(A/V)} n(A/V)!$ ist die Ordnung der Automorphismen-Gruppe von $\coprod_V n(A/V)W/V$ in der Kategorie $\underline{W\text{-}Mef}$. □

Durch Invertieren von $\rho_{\mathbb{Q}}(\zeta)$ erhält man die Werte von μ auf den unzerlegbaren Typen:

$$\mu(n,A/W) = (-1)^{l-1}(l-1)!\ \Pi_{p \text{ prim}}(-1)^{o(p)(o(p)+2l-3)/2}$$

falls $n=lA/V$ mit $l\in \mathbb{N}$, $V\trianglelefteq W$ und $W/V\cong\Pi_{p\text{ prim}}(\mathbb{Z}_p)^{o(p)}$ ist, und

$$\mu(n,A/W) = 0 \quad \text{sonst} \ .$$

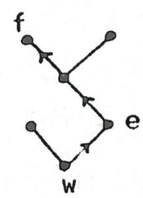
($\mathbb{Z}_p$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung p.)

Nach (1.6) kann daraus die Möbius-Funktion auf den Verbänden der äquivarianten Partitionen berechnet werden. Die Anzahl der A-invarianten Äquivalenzrelationen auf einer A-Menge X vom KS-Typ n ist $\zeta^2(n,A/A)$. Aus $\rho_{\mathbb{Q}}(\zeta^2)(z(A))=$ $=\rho_{\mathbb{Q}}(\zeta)\circ\rho_{\mathbb{Q}}(\zeta)\ (z(A))$ ergibt sich die erzeugende Funktion

$$\Sigma_n\zeta^2(n,A/A)\frac{z^n}{a_A(n)} = \exp(\Sigma_W\frac{|W|}{|A|}[\exp\{\Sigma_{V\trianglelefteq W}\frac{|V|}{|W|}z(V)\}-1])-1 \quad .$$

(f) <u>Wurzelwälder und Butcher-Reihen:</u>

Ein Wurzelwald X ist ein endlicher ungerichteter Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Wurzelbäume sind. Wir ordnen die Eckenmenge von X auf natürliche Weise: Eine Ecke e ist kleiner oder gleich einer Ecke f, falls der Weg von der Wurzel w nach f über e führt.



Ein Unterwurzelwald von X ist ein Untergraph von X, der selbst Wurzelwald ist und dessen Wurzeln auch Wurzeln von X sind.

Ein Morphismus von Wurzelwäldern ist eine Abbildung zwischen den Eckenmengen, die Wurzeln, Nachbarschaft und die Ordnung erhält.

Sei $\underline{K}$ die Kategorie der Wurzelwälder. Das Initialobjekt 0 ist der leere Wald, direkte Summen bildet man durch disjunkte Vereinigung der Ecken- und Kantenmengen. Die unzerlegbaren Wurzelwälder sind die Wurzelbäume. Die Monomorphismen von $\underline{K}$ sind injektiv, und wir identifizieren Unterobjekte mit Unterwurzelwäldern. Dann ist die eindeutige KS-Partition eines Wurzelwalds die Menge seiner Zusammenhangskomponenten.

Sei Y ein Wurzelwald und Z ein Unterwurzelwald von Y. Den Wurzelwald Y-Z erhält man, indem man aus Y alle Ecken von Z und alle angrenzenden Kanten entfernt und als neue Wurzeln die übriggebliebenen minimalen Ecken wählt.

Auf der Klasse M der Monomorphismen von $\underline{K}$ betrachten wir folgende Äquivalenzrelation $\sim$: Sei $(s_1:X_1\to Y_1)\sim(s_2:X_2\to Y_2)$, falls die Wurzelwälder $Y_1-s_1(X_1)$ und $Y_2-s_2(X_2)$ isomorph sind.

Sei $\underline{P}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen von Wurzelbäumen. Das Monoid der Typen $T=M/\sim$ ist isomorph zu $\mathbb{N}_0^{(\underline{P})}$ unter der Abbildung

$$\overline{s:X\to Y} \to \text{KS-Typ von } Y-s(X) \quad .$$

Wir setzen daher $T=\mathbb{N}_0^{(\underline{P})}$ und $U=\underline{P}$. Die Dimension eines Typs t ist die Anzahl der Ecken von $\coprod_P t(P)P$. Für Typen t,t_1,t_2 und einen Wurzelwald Y vom KS-Typ t gibt der Schnittkoeffizient $G(t;t_1,t_2)$ laut (1.3) die Zahl der Unterwurzelwälder von Y mit KS-Typ t_1 an, nach deren Wegnahme ein Wurzelwald vom KS-Typ t_2 übrigbleibt.

Da U' leer ist, bilden die multiplikativen Funktionen auf T eine unipotente affine Gruppe G=G'' über $\mathbb{Z}$. Zum Beispiel ist für $f,g\in G(R)$

$$fg(\curlyvee) = \Sigma_{t_1,t_2} G(\curlyvee;t_1,t_2)f(t_1)g(t_2) = f(\curlyvee)+2f(\,\mathfrak{l}\,)g(\bullet)+f(\bullet)g(\bullet)^2+g(\curlyvee) \quad .$$

Der Gruppe $G(\mathbb{R})$ begegnet man auch in der numerischen Mathematik bei der Integration autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe [12]):

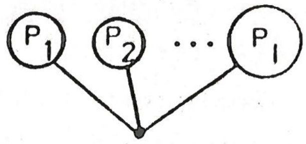
Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $F:U\to\mathbb{R}^m$ unendlich oft differenzierbar. Wir betrachten das Anfangswert-Problem $\quad (*) \quad y'=F(y) \ , \ y(x_0)=y_0$.

Für $P\in\underline{P}$ ist das "elementare Differential" $DF(P):U\to\mathbb{R}^m$ rekursiv definiert durch

$$DF(\bullet)(y)=F(y) \qquad \text{und}$$

$$DF(P)(y)=F^{(l)}(y)(DF(P_1)(y),\ldots,DF(P_l)(y)) \quad ,$$

wobei $F^{(l)}(y)$ die l-te Ableitung von F an der Stelle y und $P_1,\ldots,P_l\in\underline{P}$ (bis auf Isomorphie) die Äste von P sind.

P = 

Wurzel

Für $n\in\mathbb{N}_0^{(\underline{P})}$ sei $a(n)$ die Ordnung der Automorphismen-Gruppe von $\coprod_P n(P)P$ und $mon(P)$ die Zahl der bijektiven monotonen Abbildungen von $\coprod_P n(P)P$ nach $\{1<2<\ldots<\dim(n)\}$. Nach J.C.Butcher ([12],p.2) gilt für die d-te Ableitung der Lösung y von (*)

$$y^{(d)}(x_0) = \Sigma_{P\in\underline{P},\dim(P)=d} \frac{mon(P)}{a(P)} DF(P)(y_0) \quad .$$

Zum Beispiel ist $y''(x_0)=\frac{1}{1}DF(\,\mathfrak{l}\,)(y_0)=F'(y_0)(F(y_0))$. Die Taylor-Reihe von y um x_0

ist somit

$$\Sigma_{d=0}^{\infty} y^{(d)}(x_o)\frac{h^d}{d!} = y_o + \Sigma_{P\in\underline{P}} \frac{\mathrm{mon}(P)}{a(P)} DF(P)(y_o)\frac{h^{\dim(P)}}{\dim(P)!} .$$

Formale Reihen der Form

$$y_o + \Sigma_{P\in\underline{P}} f(P)DF(P)(y_o)\frac{h^{\dim(P)}}{a(P)} ,$$

wobei $f:\underline{P}\to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist, heißen in [12] Butcher-Reihen. Mit ihrer Hilfe studieren E.Hairer und G.Wanner numerische Verfahren zur Lösung von (*), unter anderem Runge-Kutta-Verfahren. Die Hintereinander-Ausführung dieser Methoden wird dabei durch die Komposition der zugehörigen Butcher-Reihen beschrieben. Die zentrale Rolle der Gruppe $G(\mathbb{R})$ in der Theorie der Butcher-Reihen erklärt der folgende Satz:

Für jedes Anfangswert-Problem (*) ist durch

$$(3.7) \qquad f \to y_o + \Sigma_{P\in\underline{P}} f(P)DF(P)(y_o)\frac{h^{\dim(P)}}{a(P)}$$

eine Darstellung der Gruppe $G(\mathbb{R})$ gegeben. Damit kann für beliebiges $F:U\to \mathbb{R}^m$ die Komposition der numerischen Verfahren beschrieben und deren Ordnung angegeben werden.

(g) <u>Matroide:</u>

Sei <u>Matf</u> die Kategorie der endlichen Matroide ([6],[18]).

Sei K eine Klasse endlicher Matroide mit folgenden Eigenschaften:

(1) K ist bzgl. Isomorphie in <u>Matf</u> abgeschlossen.

(2) Für jedes Matroid in K ist auch die zugehörige kombinatorische Geometrie in K enthalten.

(3) K ist bzgl. direkter Summe und Zerlegung in direkte Summanden in <u>Matf</u> abgeschlossen.

(4) Reduktion und Kontraktion eines Matroids in K auf bzw. durch abgeschlossene Teilmengen ergibt wieder ein Matroid in K.

Beispiele hierfür sind freie Matroide, graphische Matroide, seriell-parallele Netzwerke und andere (siehe [13],p.137).

Sei <u>K</u> die volle Unterkategorie von <u>Matf</u> mit Objektklasse K. Sei M die Klasse aller Monomorphismen $s:X\to Y$ in <u>K</u>, deren Bild abgeschlossen ist und die X isomorph auf die Reduktion $Y|s(X)$ abbilden. Identifiziert man Unterobjekte von Y aus M mit abgeschlossenen Teilmengen von Y, so ist die geordnete Menge $\mathrm{Sub}_M(Y)$ der geometrische Verband von Y. Zwei Morphismen $s_i:X_i\to Y_i$ aus M seien äquivalent, falls die kombinatorischen Geometrien der Kontraktionen $Y_i-s_i(X_i)$ isomorph sind. Den Typen $t\in T$ entsprechen hier bijektiv die Isomorphieklassen kombinatorischer Geometrien aus K. Die multiplikativen Funktionen auf T bilden eine unipotente affine Gruppe $G=G''$, deren affine Algebra G.C.Rota in [13],pp.135 eine "hereditary bialgebra" nennt.

(h) <u>Teilpartitionen endlicher Mengen:</u>

Wir betrachten folgende Kategorie $\underline{K}$: Die Objekte von $\underline{K}$ seien Paare (X,π), wobei X eine endliche Menge und π eine Partition von X (in der Kategorie der endlichen Mengen) ist. Ein Morphismus von (X,π) nach (Y,σ) ist eine Abbildung $s:X\to Y$, sodaß jeder Block von π in einen Block von σ abgebildet wird. Natürlich kann man $\underline{K}$ auch als die Kategorie der endlichen Mengen mit einer Äquivalenzrelation auffassen, in der die Morphismen die äquivalenz-erhaltenden Abbildungen sind.
Das Initialobjekt von $\underline{K}$ ist die leere Menge mit der leeren Partition $(\emptyset,\emptyset)$, die direkte Summe $(X,\pi)\amalg(Y,\sigma)$ ist die disjunkte Vereinigung $(X+Y,\pi+\sigma)$. Ein Objekt (Z,τ) ist unzerlegbar, falls τ nur einen Block besitzt. Ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren Objekte von $\underline{K}$ modulo Isomorphie ist

$$\underline{P} = \{(\{1,\ldots,m\},\{\{1,\ldots,m\}\});\ m=1,2,\ldots\} \ .$$

Der KS-Typ $n\in \mathbb{N}_0^{(\underline{P})}$ eines Objekts (X,π) gibt an, wieviele Blöcke zu m Elementen jeweils π besitzt. Wir können daher anstelle der KS-Typen die in der Kombinatorik üblichen "Typen" $(1^{\alpha(1)}2^{\alpha(2)}\ldots)$ von Partitionen ([3],p.38) verwenden.
Sei M die Klasse der Monomorphismen von $\underline{K}$, dh. der injektiven Morphismen, und sei $\sim$ die Isomorphierelation auf M. Wir identifizieren ein Unterobjekt $[s:(X,\pi)\to(Y,\sigma)]$ von (Y,σ) mit der Partition $\{s(B);B\in\pi\}$ von $s(X)$. Dann ist $\mathrm{Sub}(Y,\{Y\})$ die Menge aller "Teilpartitionen" von Y, dh. aller Partitionen von Teilmengen von Y. In $\mathrm{Sub}(Y,\{Y\})$ ist

$$\pi \leq \tau \quad , \quad \text{falls jeder Block von } \pi \text{ in einem Block von } \tau \text{ enthalten ist} \ .$$

$\mathrm{Sub}(Y,\{Y\})$ ist ein Verband und enthält den Partitionsverband von Y als Unterverband.
Der Isomorphietyp eines unzerlegbaren Monomorphismus $s:(X,\pi)\to(Y,\{Y\})$ ist durch den Typ α der Partition π und die Mächtigkeit m von Y eindeutig bestimmt. Da s injektiv ist, gilt $|X|=\mathrm{gew}(\alpha)=\Sigma_{i=1}^{\infty} i\alpha(i) \leq m=|Y|$. Wir setzen daher

$$U = \{(\alpha,m);\ \mathrm{gew}(\alpha)\leq m\} \qquad \text{und} \qquad T = \bigoplus_{u\in U} \mathbb{N}_0 u \ .$$

(3.8) <u>Satz:</u> Das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen auf T besitzt über $\mathbb{Q}$ die treue Darstellung

$$\rho_R\colon G(R) \to \mathrm{End}(R[[w,z_1,z_2,\ldots]]) \qquad , \qquad R\in \underline{\mathrm{Al}}_{\mathbb{Q}}$$

$$f \to \begin{bmatrix} w \to w \\ z_m \to \Sigma_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (l!\Sigma_{\alpha,\mathrm{gew}(\alpha)=l} f(\alpha,m)\frac{z^\alpha}{a(\alpha)}) \ w^{m-l} \end{bmatrix} \ .$$

Hier ist $\binom{m}{l}$ der Binomialkoeffizient, $z^\alpha=\Pi_{i=1}^{\infty}(z_i)^{\alpha(i)}$, $\alpha=(1^{\alpha(1)}2^{\alpha(2)}\ldots)$, und $a(\alpha)=\Pi_{i=1}^{\infty}\alpha(i)!a((i^1))^{\alpha(i)}=\Pi_{i=1}^{\infty}\alpha(i)!(i!)^{\alpha(i)}$ ist die Ordnung der Automorphismen-Gruppe eines Objekts (X,π), π vom Typ α. $\square$
Analog zu Beispiel (b), wo Partitionsverbände endlicher Mengen betrachtet wurden, können mithilfe dieser Darstellung die Verbände der Teilpartitionen untersucht

werden. Durch Invertieren von $\rho_{\mathbb{Q}}(\zeta)$ erhält man die Werte der Möbius-Funktion auf den unzerlegbaren Typen:

$$\mu((1^0 2^0\ldots),1) = -1 \quad , \quad \mu((1^1 2^0 3^0\ldots),1) = 1$$

und für $m\geq 2$ ist

$$\mu(\alpha,m) = \begin{cases} (-1)^{|\alpha|-1}(|\alpha|-1)! & \text{falls } \mathrm{gew}(\alpha)=m \\ 0 & \text{falls } \mathrm{gew}(\alpha)<m \end{cases}$$

($|\alpha|=\Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha(i)$).

Im folgenden Zählproblem fragt man nach der Mächtigkeit von Intervallen: Sei Y eine Menge mit m Elementen, X eine Teilmenge von Y und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei α der Typ der Partition $X/\sim$. Unter einer "Erweiterung von $\sim$ in Y" verstehen wir ein Paar $(Z,\approx)$, wobei $X\subseteq Z\subseteq Y$ ist und für alle $x_1,x_2\in X$ aus $x_1\sim x_2$ auch $x_1\approx x_2$ folgt. Den Erweiterungen von $\sim$ in Y entsprechen bijektiv die Teilpartitionen von Y größer gleich $X/\sim$. Daher ist die Zahl der Erweiterungen von $\sim$ in Y gleich $\zeta^2(\alpha,m)$ und besitzt die erzeugende Funktion

$$\Sigma_{(\alpha,m)\in U}\ \zeta^2(\alpha,m)\ \frac{z^{\alpha}}{a(\alpha)}\ \frac{w^{m-\mathrm{gew}(\alpha)}}{(m-\mathrm{gew}(\alpha))!} = \exp(w+\exp(w+\Sigma_{i=1}^{\infty}z_i/i!)-1)-1 \quad .$$

(l) Teilpartitionen endlicher Vektorräume - ein q-Analogon zu (h):

Sei F ein Körper mit q Elementen und $\underline{K}$ folgende Kategorie: Die Objekte von $\underline{K}$ seien Paare (V,π), wobei V ein endlich-dimensionaler F-Vektorraum und π eine Partition von V in der Kategorie F-Vrf ist (siehe §2, Beispiel (b)). Ein Morphismus von (V,π) nach (W,σ) ist eine lineare Abbildung $s:V\to W$, sodaß jeder Block von π in einen Block von σ abgebildet wird.

Die initialen Objekte von $\underline{K}$ sind die einelementigen F-Vektorräume mit der leeren Partition $(\{\circ\},\emptyset)$, die direkte Summe $(V,\pi)\amalg(W,\sigma)$ ist $(V\oplus W,\pi+\sigma)$. Ein Objekt (Z,τ) ist unzerlegbar, falls τ nur einen Block besitzt. Ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren Objekte von $\underline{K}$ modulo Isomorphie ist

$$\underline{P} = \{(F^m,\{F^m\});\ m=1,2,\ldots\} \quad .$$

Der KS-Typ $n\in \mathbb{N}_0^{(\underline{P})}$ eines Objekts (V,π) gibt an, wieviele Blöcke der Dimension m jeweils π besitzt. Wir definieren den "Typ" $(1^{\alpha(1)}2^{\alpha(2)}\ldots)$ von π durch

$$\alpha(m) = \text{Zahl der Blöcke von } \pi \text{ der Dimension } m \quad , \quad m=1,2,\ldots$$

und verwenden anstelle der KS-Typen die "Typen" $(1^{\alpha(1)}2^{\alpha(2)}\ldots)$ aus der Kombinatorik.

Sei M die Klasse der Monomorphismen von $\underline{K}$, dh. der injektiven Morphismen, und sei $\sim$ die Isomorphierelation auf M. Wie im Beispiel (h) identifizieren wir ein Unterobjekt $[s:(V,\pi)\to(W,\sigma)]$ von (W,σ) mit der Partition $\{s(B);B\in\pi\}$ von s(V) in F-Vrf. Dann ist $\mathrm{Sub}(W,\{W\})$ die Menge aller "Teilpartitionen" von W, dh. aller Partitionen von Unterräumen von W in F-Vrf. In $\mathrm{Sub}(W,\{W\})$ ist

$$\pi \leq \tau \quad , \quad \text{falls jeder Block von } \pi \text{ in einem Block von } \tau \text{ enthalten ist} \quad .$$

Mit dieser Ordnung ist Sub(W,{W}) ein endlicher Punktverband.
Der Isomorphietyp eines unzerlegbaren Monomorphismus $s:(V,\pi)\to(W,\{W\})$ ist durch den Typ α der Partition π und die Dimension m von W eindeutig bestimmt. Da s injektiv ist, gilt $\dim(V)=\mathrm{gew}(\alpha)=\Sigma_{i=1}^{\infty} i\alpha(i) \leq m=\dim(W)$. Wir setzen daher

$$U = \{(\alpha,m);\ \mathrm{gew}(\alpha)\leq m\} \qquad \text{und} \qquad T = \bigoplus_{u\in U} \mathbb{N}_0 u \quad .$$

Der folgende Satz ist ein q-Analogon zu (3.8).

(3.9) Satz: Das affine Monoid G der multiplikativen Funktionen auf T besitzt über $\mathbb{Q}$ die treue Darstellung

$$\rho_R\colon G(R) \to \mathrm{End}(R[[w,z_1,z_2,\dots]]) \quad ,$$

REAL $\mathbb{Q}$

$$f \to \begin{bmatrix} w \to w \\ z_m \to \Sigma_{l=0}^{m} \binom{m}{l}_q \left(b_q(l)\Sigma_{\alpha,\mathrm{gew}(\alpha)=l} f(\alpha,m)\frac{z^\alpha}{a_q(\alpha)}\right) w^{m-l} \end{bmatrix} .$$

Hier ist $\binom{m}{l}_q$ der Gauß-Koeffizient, der die Zahl der l-dimensionalen Unterräume von F^m angibt (siehe [11],p.240). $b_q(l)=(q^l-1)(q^l-q)\dots(q^l-q^{l-1})$ ist die Ordnung der allgemeinen linearen Gruppe auf F^l. Für $\alpha=(1^{\alpha(1)}2^{\alpha(2)}\dots)$ ist $z^\alpha=\Pi_{i=1}^{\infty}(z_i)^{\alpha(i)}$, und $a_q(\alpha)=\Pi_{i=1}^{\infty}\alpha(i)!\,b_q(i)^{\alpha(i)}$ ist die Ordnung der Automorphismen-Gruppe eines Objekts (V,π), π vom Typ α. □

In der Darstellung ρ treten endliche Euler-Reihen in unendlich vielen Variablen auf. Mithilfe von ρ lassen sich - nach der am Ende von §2 skizzierten Methode - erzeugende Funktionen für Anzahlen von Teilpartitionen aufstellen und die Möbius-Funktion $\mu\in G''(\mathbb{Q})$ berechnen. Für die Möbius-Funktionen auf den Verbänden $L_m=\mathrm{Sub}(F^m,\{F^m\})$ $(m=1,2,\dots)$ erhält man nach (1.6)

$$\mu_{L_m}(\emptyset,\{F^m\}) = -\frac{1}{m}\,\Pi_{i=1}^{m-1}(q^m-q^i) \qquad (\ \mu_{L_1}(\emptyset,\{F\}) = -1\ ) \quad .$$

Damit läßt sich folgendes Zählproblem lösen:
Wieviele m×m-Matrizen über F gibt es, die keinen Eigenwert in F besitzen ?
Die Menge aller m×m-Matrizen über F bezeichnen wir mit $M_m(F)$. Für $\pi,\sigma\in L_m$ sei
$A(\pi)=\{a\in M_m(F);\pi$ ist die Teilpartition von F^m in Eigenräume von $a\}$ und
$B(\sigma)=\{a\in M_m(F);a$ ist auf jedem Block von σ eine Skalarmultiplikation$\}$.
Die gesuchte Zahl $z_q(m)$ ist offenbar $|A(\emptyset)|$.
Aus $B(\sigma)=\Sigma_{\sigma\leq\pi}A(\pi)$, also $|B(\sigma)|=\Sigma_{\sigma\leq\pi}|A(\pi)|$ folgt durch Möbius-Inversion auf L_m

$$|A(\emptyset)| = \Sigma_\pi\, \mu_{L_m}(\emptyset,\pi)|B(\pi)| \quad .$$

Daraus läßt sich eine explizite Formel für $z_q(m)$ ableiten, in der über alle Typen $\alpha=(1^{\alpha(1)}2^{\alpha(2)}\dots)$ mit $\mathrm{gew}(\alpha)\leq m$ summiert wird. Als erzeugende Funktion der $z_q(m)$ ergibt sich

$$1+\Sigma_{m=1}^{\infty} z_q(m)\frac{w^m}{b_q(m)} = \frac{1}{1-w}\,\Pi_{n=0}^{\infty}(1-q^n w)^{1-q} = e_q\left(-\frac{w}{q-1}\right)^{q-1}/(1-w) \quad .$$

Hier ist $e_q(x)=\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{[k]!}$ J.Ciglers q-Exponentialfunktion ([4],p.29).

Die Wahrscheinlichkeit $z_q(m)/q^{m^2}$, daß eine m×m-Matrix über F keinen Eigenwert in F besitzt, strebt für $m \to \infty$ gegen

$$e_q\left(-\frac{1}{q-1}\right)^q = \Pi_{n=1}^{\infty}(1-q^{-n})^q \quad .$$

Zum Beispiel ist für $F=\{0,1\}$ $e_2(-1)^2 \approx 0.083$.

Literatur:

[1] Aigner M.,Kombinatorik I,Springer 1975

[2] Andrews G.E.,The Theory of Partitions,Addison-Wesley 1976

[3] Berge C.,Principles of Combinatorics,Academic Press 1971

[4] Cigler J.,Elementare q-Identitäten,Publ.IRMA,Strasbourg (1982),23-57

[5] Content M.-F.Lemay-P.Leroux,Catégories de Möbius et fonctorialités: un cadre général pour l'inversion de Möbius,J. of Comb.Th.,Ser.A 28 (1980),169-190

[6] Crapo H.-G.C.Rota,Combinatorial Geometries,Studies in Appl.Math.49 (1970),109-133

[7] Demazure M.-P.Gabriel,Groupes Algébriques,North Holland 1970

[8] Doubilet P.-G.C.Rota-R.Stanley,The Idea of Generating Function, in: Finite Operator Calculus,Academic Press 1975

[9] Dür A.,Unipotente Gruppen in der Kombinatórik,Dissertation, Innsbruck 1983

[10] Dür A.-U.Oberst,Incidence Algebras,Exponential Formulas and Unipotent Groups,LN in Math.969 (1982),133-166

[11] Goldman J.-G.C.Rota,Finite Vector Spaces and Eulerian Generating Functions,Studies in Appl.Math.49 (1970),239-258

[12] Hairer E.-G.Wanner,On the Butcher group and general multivalue methods, Computing 13 (1974),1-15

[13] Joni S.A.-G.C.Rota,Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics, Studies in Appl.Math.61 (1979),93-139

[14] Joyal A.,Une théorie combinatoire des séries formelles, Adv. in Math. 42 (1981),1-82

[15] Lothaire M.,Combinatorics on Words,Addison-Wesley 1982

[16] Serre J.P.,Lie Algebras and Lie Groups,Benjamin 1965

[17] Sweedler M.E.,Hopf Algebras,Benjamin 1969

[18] Welsh D.J.A.,Matroid Theory,Academic Press 1976 .