

# WACHSTUM UND IRRFAHRTEN BEI GRUPPEN UND GRAPHEN

VON PETER GERL (SALZBURG)

§ 1. Fragestellung

§ 2. Wachstum

§ 3. Irrfahrten

§ 4. Der Spektralradius (einer Wahrscheinlichkeit)

§ 5. Rekurrenz und Transienz

§ 6. Quotientensätze und harmonische Funktionen

§ 7. Lokale Grenzwertsätze

§ 8. Ein Beispiel

## § 1. Fragestellung

In diesem (sehr subjektiven) Übersichtsartikel werden einige Aspekte des folgenden Problemkreises studiert:

*Untersuche in einem unendlichen Graphen alle Wege (eines gewissen Typs), die von einer festen Ecke  $e$  ausgehen und deren Länge höchstens gleich  $n$  ist.*

Insbesondere sollen alle solchen Wege abgezählt und, wenn möglich, diese Anzahlen für  $n \rightarrow \infty$  asymptotisch ausgewertet werden.

Das Abzählen von allen verschiedenen Endpunkten von Wegen (mit Anfangspunkt in einer festen Ecke  $e$  und Länge  $\leq n$ ) wird mit dem Schlagwort "Wachstum eines Graphen" bezeichnet. Wird dagegen die Anzahl aller Wege der Länge  $n$  mit Anfangs- und Endpunkt in einer festen Ecke  $e$  (dividiert durch die Gesamtzahl aller Wege der Länge  $n$  mit Anfangspunkt in  $e$ ) studiert, so spricht man von einer "Irrfahrt auf einem Graphen".

Je regelmäßiger ein Graph ist, umso besser werden die Ergebnisse sein. Und in der Tat, die meisten Resultate sind für *Cayley*-Graphen bekannt, einiges weiß man über Bäume und eigentlich recht wenig über allgemeine Graphen.

Das Wort Gruppe bedeutet im weiteren stets eine diskrete Gruppe. Ist  $A \subseteq G$  eine Teilmenge einer Gruppe  $G$ , dann sei wie üblich

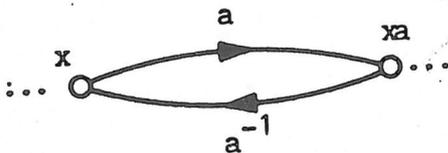
$$A^n = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in A\}$$

die Menge aller Produkte (bezüglich der Gruppenoperation) von  $n$  Elementen von  $A$ . Wir sagen, die Menge  $A \subseteq G$  erzeugt die Gruppe  $G$  (als Halbgruppe), wenn jedes Element von  $G$  das Produkt von Elementen von  $A$  ist, also wenn

$$G = \bigcup_{n \geq 1} A^n.$$

Wird die Gruppe  $G$  von der Menge  $A$  erzeugt, dann ist der Cayley-Graph von  $G$  (bezüglich  $A$ ) wie folgt erklärt (vgl. [6]):

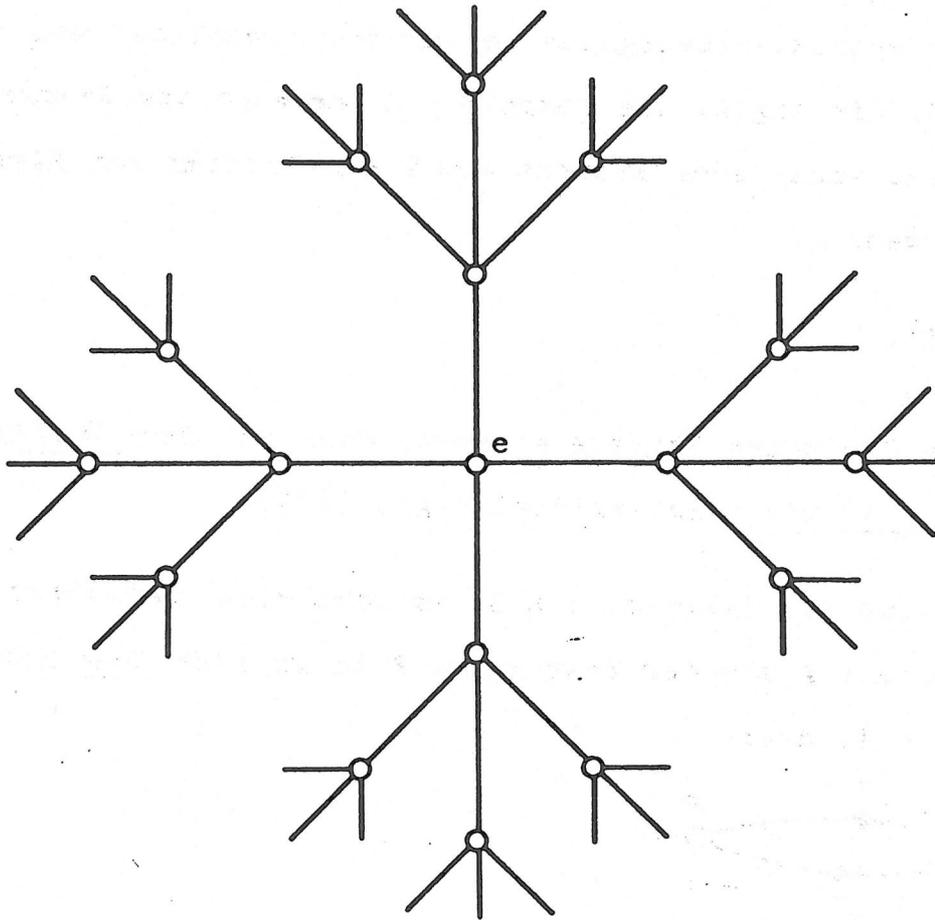
Die Ecken sind die Elemente von  $G$ ; es geht eine gerichtete Kante mit Namen  $a \in A$  von der Ecke  $x$  zur Ecke  $xa$  (für jede Ecke  $x$ ). Liegt auch  $a^{-1} \in A$ , dann



geht also auch eine gerichtete Kante mit Namen  $a^{-1}$  von  $xa$  nach  $x$ . Der Cayley-Graph einer Gruppe  $G$  hängt natürlich von der Wahl der erzeugenden Menge  $A$  ab. Dieser Graph ist sehr regelmäßig: Alle Ecken sind gleichberechtigt (haben den gleichen Grad) und es ist daher egal, welche Ecke mit  $e$  (= Gruppeneinheit) bezeichnet wird. Außerdem hat man in jeder Ecke die gleichen Kreise ( $\equiv$  Relationen in der Gruppe  $G$ ).

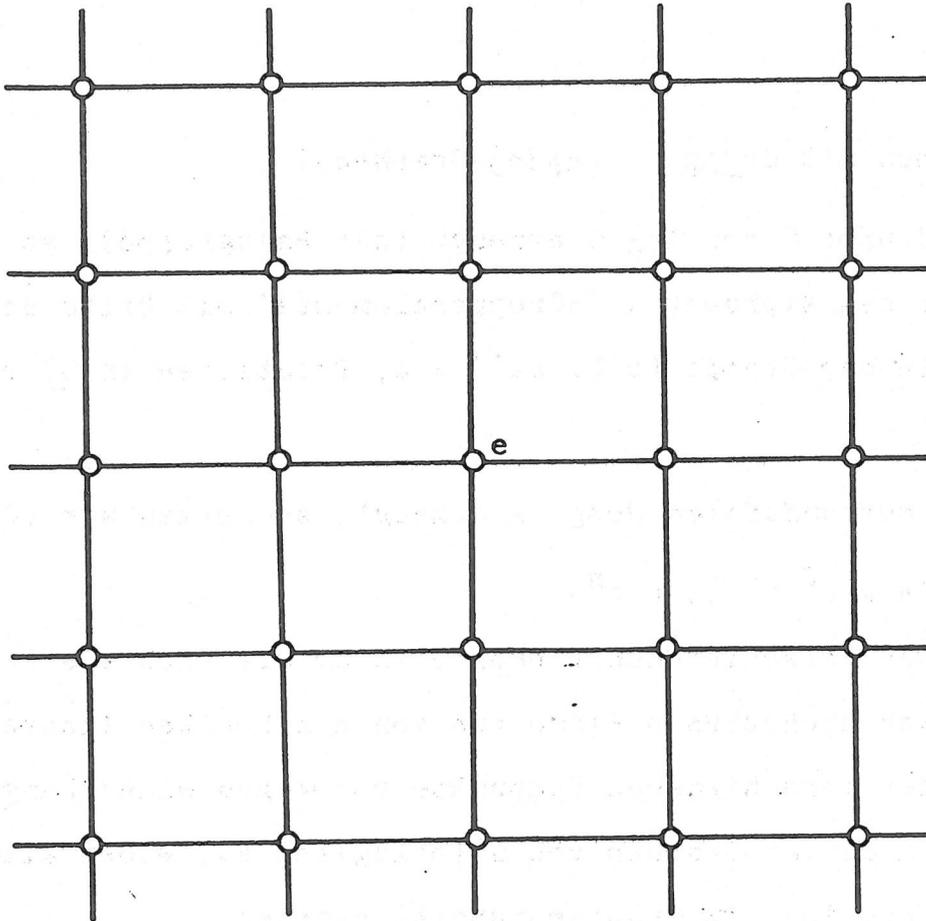
Beispiel 1.1:  $F_2 = \langle a, b \mid \rangle$ , die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden

$$A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$$



Allgemeiner ist ein *Cayley*-Graph einer freien Gruppe  $F_d$  mit  $d$  Erzeugenden ein homogener Baum vom Grad  $d$  (alle Ecken haben Grad  $d$ ).

*Beispiel 1.2:*  $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ , die freie abelsche Gruppe  
 $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$  mit zwei Erzeugenden



Da also jede diskrete Gruppe durch einen *Cayley*-Graphen darstellbar ist, können alle Ergebnisse für Gruppen sofort in Aussagen über *Cayley*-Graphen übersetzt werden.

Noch einige Bezeichnungen:

$\#(M)$  = Kardinalzahl der Menge  $M$

$W(E)$  = Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

## § 2. Wachstum

Wir beginnen mit Gruppen (*Cayley-Graphen*).

Wird die Gruppe  $G$  von  $A \subseteq G$  erzeugt (als Halbgruppe), so können die Worte über dem Alphabet  $A$  (=Gruppenelemente) mit Hilfe der Rechenregeln in der Gruppe (z.B.  $aa^{-1} = e$ , Relationen in  $G$ ) reduziert werden.

Wird  $G$  von der *endlichen* Menge  $A$  erzeugt, so setzen wir ([35])

$$\begin{aligned} \gamma_A(n) &= \# (A \cup A^2 \cup \dots \cup A^n) \\ &= \# \text{ der verschiedenen Elemente in } G, \text{ die sich als Produkt} \\ &\quad \text{von höchstens } n \text{ Elementen von } A \text{ schreiben lassen} \\ &= \# \text{ der verschiedenen Endpunkte von Wegen einer Länge } \leq n \\ &\quad \text{im } \textit{Cayley-Graphen} \text{ von } G \text{ (bezüglich } A \text{), wobei alle diese} \\ &\quad \text{Wege in } e \text{ (= Gruppeneinheit) starten.} \end{aligned}$$

Wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$c_1 n^k \leq \gamma_A(n) \leq c_2 n^k \quad (c_1, c_2 > 0; k \text{ fest}),$$

so sagen wir, die Gruppe  $G$  hat polynomiales Wachstum vom Grad  $k$ .

Wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\gamma_A(n) \geq c \cdot d^n \quad (c > 0, d > 1),$$

so sagen wir, die Gruppe  $G$  hat exponentielles Wachstum.

Sind  $A, B$  zwei endliche Mengen, die beide die Gruppe  $G$  erzeugen, so gilt

$$A \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \subseteq B \cup B^2 \cup \dots \cup B^{n \cdot m},$$

also  $\gamma_A(n) \leq \gamma_B(n \cdot m)$  für eine geeignete natürliche Zahl  $m$  und alle

$n \in \mathbb{N}$ . Die Begriffe polynomiales bzw. exponentielles Wachstum sind daher wirklich Eigenschaften der Gruppe  $G$  und hängen nicht von der Wahl der erzeugenden Menge ab.

Betrachten wir wieder unsere beiden Beispiele:

*Beispiel 2.1:*  $G = F_2$ ,  $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ .

Dann ist

$$\gamma_A(n) = 1 + 4 + 4 \cdot 3 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1} \geq 3^n,$$

(von  $e$ ,  $A$ ,  $A^2$ ,  $\dots$ ,  $A^n$ )

also hat  $F_2$  (allgemeiner: jede freie Gruppe mit mindestens 2 Erzeugenden) exponentielles Wachstum.

*Beispiel 2.2:*  $G = \mathbb{Z}^2$ ,  $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ .

Dann ist

$$\gamma_A(n) = 2n(n+1) + 1 = 2n^2 + 2n + 1,$$

also hat  $\mathbb{Z}^2$  (allgemeiner:  $\mathbb{Z}^d$ ) polynomiales Wachstum vom Grad 2 (d).

### Berechnung von $\gamma_A(n)$ :

Die Berechnung von  $\gamma_A(n)$  ist im allgemeinen (selbst bei sehr einfachen Gruppen) recht mühsam. In vielen Fällen führt folgende Methode zum Ziel:

Die Gruppe  $G$  wird erzeugt (als Halbgruppe) von der endlichen Menge  $A$ . Wir ordnen die Elemente von  $A$  (irgendwie) und können dann im *Cayley*-Graphen von  $G$  bezüglich  $A$  zu jeder Ecke den kürzesten und

im Sinne dieser Ordnung lexikographisch ersten Weg von  $e$  aus einzeichnen. Das ergibt einen spannenden Baum für den *Cayley*-Graphen, Dieser spannende Baum ist oft "periodisch" (das, was in der Nähe von  $e$  passiert, wiederholt sich weiter weg) und kann in diesem Fall durch einen endlichen, gerichteten Graphen  $\Gamma$  ersetzt werden. (In  $\Gamma$  sind die Kanten gerichtet und tragen Namen  $a \in A$ ).

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \gamma_A(n) &= \# \text{ der verschiedenen Wege einer Länge } \leq n \text{ von } e \text{ aus} \\ &\quad \text{im spannenden Baum} \\ &= \# \text{ der verschiedenen Wege einer Länge } \leq n \text{ von } e \text{ aus in } \Gamma. \end{aligned}$$

Da  $\Gamma$  endlich ist, ergibt sich sofort, daß die erzeugende Funktion

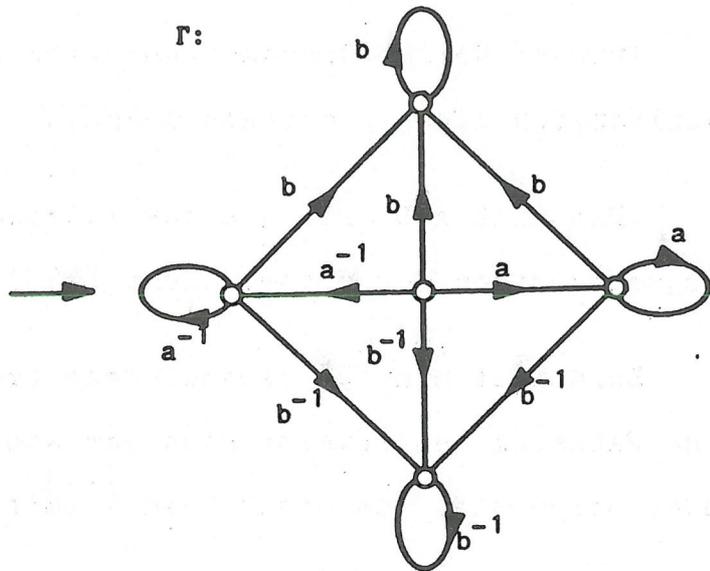
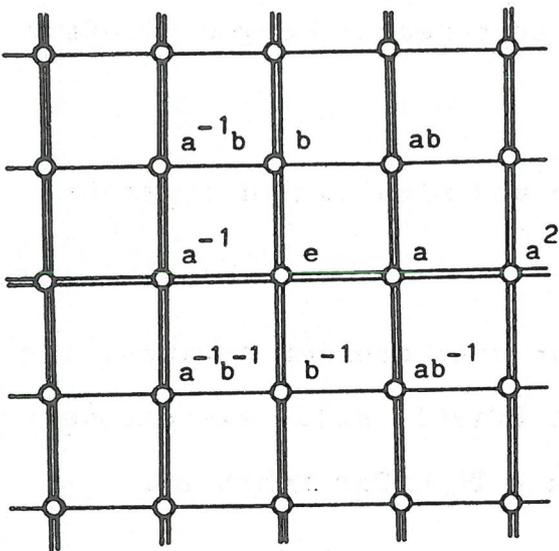
$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_A(n)x^n = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine rationale Funktion ist. Ein Studium der Nullstellen des Nenners liefert dann entweder exponentielles Wachstum oder polynomiales Wachstum vom Grad  $k$  (mit  $k \in \mathbb{N}_0$ ). Eine formalisierte, algorithmische Version dieser Methode findet sich in [22].

Ein einfaches Beispiel soll die Methode illustrieren. Sei  $G = \mathbb{Z}^2$ ,  $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ . Wir ordnen  $A$  wie folgt:

$$a < a^{-1} < b < b^{-1}.$$

Der daraus resultierende spannende Baum ist im Graphen mit doppelten



Linien eingezeichnet. Dieser Baum ist auf folgende Weise "periodisch": Von der Ecke  $a^2$  ( $a^3, \dots$ ) geht es genau so weiter wie von der Ecke  $a$ , von den Ecken  $a^{-1}b$  ( $a^{-2}b, \dots$ ) oder  $ab$  ( $a^2b, \dots$ ) geht es genau so weiter wie von der Ecke  $b$ , usw. Diese ganzen Informationen sind im endlichen Graphen  $\Gamma$  enthalten und die Wege der Länge  $n$ , die in  $e$  starten, entsprechen sich im spannenden Baum und in  $\Gamma$  umkehrbar eindeutig. Nach einigen Rechnungen mit der Adjazenzmatrix von  $\Gamma$  ergibt sich

$$\sum_{n \geq 0} r_A(n) z^n = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^3} = \sum_{n \geq 0} (2n^2 + 2n + 1) z^n.$$

Leider ist es nicht immer so, daß sich auf diese Weise ein endlicher Graph  $\Gamma$  und somit eine rationale erzeugende Funktion ergibt. Das kann gar nicht so sein, denn eine rationale erzeugende Funktion bewirkt, daß die Gruppe ein lösbares Wortproblem hat; bekanntlich gibt es aber endlich erzeugte (sogar endlich präsentierbare) Gruppen mit unlösbarem Wortproblem. Es stellt sich also das

*Problem:* Welche Gruppen (und welche erzeugenden Mengen) liefern schließlich einen endlichen Graphen  $\Gamma$  ?

(Das gilt z.B. für die euklidischen und nichteuklidischen Bewegungsgruppen der Ebene, siehe [46])

Berechnet man für verschiedene (mehr oder weniger bekannte) Gruppen ihr Wachstum, so erweist sich das stets (fast!, s.u.) als exponentiell oder polynomial von einem Grad  $k$  (mit  $k \in \mathbb{N}_0$ ). Das führt zur

*Frage:* Hat jede endlich erzeugte Gruppe exponentielles oder polynomiales (mit Grad  $k \in \mathbb{N}_0$ ) Wachstum?

Die Antwort darauf ist jedenfalls *ja* für große Klassen diskreter Gruppen, insbesondere für die Klasse der linearen Gruppen ([42]). Darüber hinaus weiß man, daß alle abelschen und nilpotenten Gruppen polynomiales Wachstum haben und daß jede auflösbare Gruppe entweder exponentielles oder polynomiales Wachstum hat; das letztere ist genau dann der Fall, wenn es eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index gibt ([27], [52]).

*Gromov* ([25]) zeigte sogar, daß der letzte Satz auch ohne die Voraussetzung auflösbar stimmt: Eine Gruppe hat genau dann polynomiales Wachstum, wenn sie eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index besitzt.

Die Antwort auf obige Frage ist allerdings nicht immer ja, und das ist sehr überraschend.

*Grigorchuk* [26] hat 1983 ein kompliziertes Beispiel einer Gruppe (das hängt mit der Konstruktion periodischer Gruppen von *Adjan - Novikov*

zusammen) angegeben, wo das Wachstum weder polynomial noch exponentiell ist, sondern dazwischen liegt.

Kehren wir wieder zu unserer Funktion  $\gamma_A(n)$  zurück. Da jedes Produkt von höchstens  $m+n$  Elementen von  $A$  aufgefaßt werden kann als Produkt zweier kürzerer Worte (eines hat Länge  $\leq m$ , das andere  $\leq n$ ) über  $A$ , so gilt

$$\gamma_A(m+n) \leq \gamma_A(m) \gamma_A(n).$$

$\gamma_A(n)$  ist daher submultiplikativ und es existiert somit folgender Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_A(n))^{1/n} = \gamma_A' (\geq 1).$$

Jeder endlich erzeugten Gruppe  $G$  kann man die Menge  $M(G)$  dieser Limiten zuordnen:

$$M(G) = \{\gamma_A \mid A \text{ endlich, } A \text{ erzeugt } G\}.$$

Welche Eigenschaften hat diese Menge  $M(G)$ ? Darüber ist fast nichts bekannt. Es ist leicht zu sehen, daß

$$\sup M(G) = 1 \text{ oder } \infty;$$

wenn  $\inf M(G) > 1$ , dann hat  $G$  exponentielles Wachstum. Was gilt, wenn  $\inf M(G) = 1$ ? Nicht einmal im vielleicht einfachsten, nicht-trivialen Fall, wo  $G = F_2$  ist, kennt man  $M(F_2)$ . Jedenfalls gilt

$$\inf M(F_2) \leq 1 + \sqrt{3};$$

die Zahl  $1 + \sqrt{3}$  erhält man für  $A = \{a, b, a^{-1}b^{-1}\}$ ; wahrscheinlich hat man Gleichheit.

Um das Wachstum eines Graphen zu studieren, kann man zunächst ähnlich vorgehen wie bei Gruppen; es ergeben sich aber Schwierigkeiten. Wählen wir eine feste Ecke  $e$ , so sei

$\gamma(n, e) = \#$  der verschiedenen Endpunkte von Wegen im Graphen, die in  $e$  starten und eine Länge  $\leq n$  haben.

Diese Zahl  $\gamma(n, e)$  hängt dann i.a. von der Ecke  $e$  ab; des weiteren braucht  $(\gamma(n, e))^{1/n}$  für  $n \rightarrow \infty$  nicht zu konvergieren.

Man kann wie bei Gruppen exponentielles bzw. polynomiales Wachstum vom Grad  $k$  definieren; diese Begriffe sind unabhängig von der Wahl von  $e$ .

### § 3. Irrfahrten

Wir betrachten zunächst wieder Gruppen.

Wird die Gruppe  $G$  von der *endlichen* Menge  $A$  (als Halbgruppe) erzeugt, so bilden wir wieder  $A^n$ , die Menge aller Produkte von  $n$  Elementen von  $A$ , und reduzieren diese Produkte mit Hilfe der Rechenregeln in der Gruppe. Ist  $x \in G$ , so setzen wir ([12])

$A_n(x) = \#$  wie oft  $x \in A^n$   
=  $\#$  der verschiedenen Darstellungen von  $x$  als Produkt von  $n$  Elementen von  $A$   
=  $\#$  der verschiedenen Wege der Länge  $n$  im *Cayley*-Graphen von  $G$  bezüglich  $A$ , die von  $e$  nach  $x$  führen.

Betrachten wir zunächst wieder unsere beiden Beispiele.

Beispiel 3.1:  $G = \mathbb{Z}^2$ ,  $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ ,  $x = e$ .

Dann ist

$$A_{2n+1}(e) = 0,$$

$$A_{2n}(e) = \binom{2n}{n}^2 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c \cdot \frac{16^n}{n} \quad (c > 0)$$

und wegen  $\#(A) = 4$  erhalten wir

$$\frac{A_{2n}(e)}{(\#(A))^{2n}} \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c \cdot \frac{1}{n}.$$

Beispiel 3.2:  $G = F_2$ ,  $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ ,  $x = e$ .

Dann ist  $([11])$

$$A_{2n+1}(e) = 0,$$

$$A_{2n}(e) = 16^n \left(1 - 4 \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{16}\right)^i \frac{1}{i} \binom{2i-2}{i-1}\right) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c \cdot \frac{12^n}{n^{3/2}} \quad (c > 0)$$

und wegen  $\#(A) = 4$  erhalten wird

$$\frac{A_{2n}(e)}{(\#(A))^{2n}} \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c \cdot \frac{(3/4)^n}{n^{3/2}}.$$

Es ist klar, daß

$$\begin{aligned} \frac{A_n(x)}{(\#(A))^n} &= \frac{\# \text{ wie oft } x \in A^n}{\# \text{ aller Elemente von } A^n} \\ &= \frac{\# \text{ aller Wege der Länge } n \text{ von } e \rightarrow x}{\# \text{ aller Wege der Länge } n \text{ von } e \text{ weg}} \end{aligned}$$

$$= \text{elem. Wahrscheinlichkeit, daß } x \in A^n = \boxed{W(x \in A^n)}.$$

Wir wollen nun diese Wahrscheinlichkeiten genauer untersuchen. Schon bei den beiden Beispielen zeigt sich ein wichtiger Unterschied: Während diese Wahrscheinlichkeiten für  $n \rightarrow \infty$  stets gegen 0 konvergieren (s.u.), ist diese Konvergenz bei  $F_2$  sehr rasch (geometrisch), bei  $\mathbb{Z}^2$  aber recht langsam.

Es erweist sich als bequem, das Problem etwas zu verallgemeinern und "beliebige" Wahrscheinlichkeiten zuzulassen. Zunächst einige Begriffe:

Eine Wahrscheinlichkeit  $p$  auf  $G$  ist eine Funktion

$$p: G \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } p(g) \geq 0, \quad \sum_{g \in G} p(g) = 1.$$

Der *Träger* einer Wahrscheinlichkeit  $p$  ist die Menge

$$\text{Tr}(p) = \{x \in G \mid p(x) > 0\}.$$

Die *Faltung* zweier Wahrscheinlichkeiten  $p, q$  ist erklärt durch

$$p * q(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} p(x_1) q(x_2).$$

Es ist dann auch  $p * q$  eine Wahrscheinlichkeit auf  $G$  und

$$\text{Tr}(p * q) = \text{Tr}(p) \cdot \text{Tr}(q).$$

Die *Faltungspotenzen* einer Wahrscheinlichkeit  $p$  sind gegeben durch

$$p^0 = \delta_e, \quad p^1 = p, \quad p^n = p^{n-1} * p.$$

Es ist dann  $p^n$  wieder eine Wahrscheinlichkeit und

$$\text{Tr}(p^n) = (\text{Tr}(p))^n.$$

Wir betrachten folgenden Spezialfall: Die Gruppe  $G$  wird von der endlichen Menge  $A$  erzeugt und die Wahrscheinlichkeit  $p$  ist die Gleichverteilung auf  $A$ , d.h.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\#(A)} & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} p^n(x) &= p^{n-1} * p(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} p^{n-1}(x_1) p(x_2) = \frac{1}{\#(A)} \sum_{\substack{x_1 x_2 = x \\ x_2 \in A}} p^{n-1}(x_1) = \dots \\ &= \frac{1}{(\#(A))^n} \cdot \sum_{\substack{x_1 \dots x_n = x \\ x_i \in A}} 1 = \frac{A_n(x)}{(\#(A))^n}, \end{aligned}$$

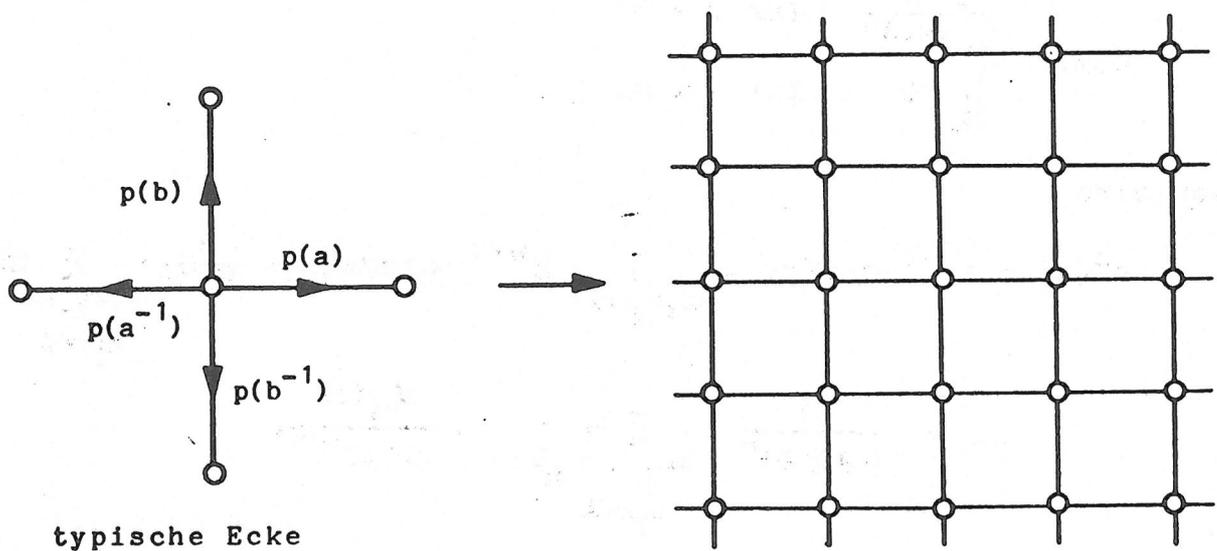
und gerade diesen Ausdruck wollen wir studieren. Also lautet unsere Aufgabe: Studiere für eine Wahrscheinlichkeit  $p$  auf  $G$  die Größe

$$p^n(x) = W(e \xrightarrow[\text{Schritten}]{\text{in } n} x)$$

für  $x \in G$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Setzt man  $A = \text{Tr}(p)$ , so bedeutet also  $p^n(x)$  die Wahrscheinlichkeit, im *Cayley*-Graphen von  $G$  bezüglich  $A$  von der Ecke  $e$  zur Ecke  $x$  in  $n$  Schritten zu gelangen, wobei die Kante  $a \in A$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p(a)$  gewählt wird. So etwas wird üblicherweise als Irrfahrt auf einer Gruppe (bzw. auf einem *Cayley*-Graphen) bezeichnet.

Das ist natürlich nur von Interesse, wenn der *Cayley*-Graph zusammenhängend ist, wenn also  $A$  die Gruppe  $G$  (als Halbgruppe) erzeugt. In diesem Fall werden wir die Wahrscheinlichkeit  $p$  irreduzibel nennen.

*Beispiel 3.3:* Sei  $G = \mathbb{Z}^2$  und  $p$  eine Wahrscheinlichkeit auf  $\mathbb{Z}^2$  mit  $\text{Tr}(p) = A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ . Die



Irrfahrt auf  $\mathbb{Z}^2$  verhält sich in jeder Ecke gleich. Man geht (in jeder Ecke) mit Wahrscheinlichkeit  $p(a)$  nach rechts,  $p(b)$  nach oben usw.

Wir betrachten jetzt Graphen: Diese sollen immer lokal endlich und zusammenhängend sein. Bei der (einfachen) Irrfahrt auf einem Graphen (wir werden nur diesen Fall betrachten) wandert man in einem Schritt von einer Ecke zu einer Nachbarecke, wobei in jeder Ecke Gleichverteilung vorliegt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind also gegeben durch

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{d(x)}, & \text{wenn } x,y \text{ Nachbarecken} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo  $d(x) = \text{Grad der Ecke } x$ . Die Beschränkung auf einfache Irrfahrten ist naheliegend, denn dadurch werden verschiedenen Eigenschaften des Graphen durch die Übergangswahrscheinlichkeiten gut beschrieben. Wir stellen dann wieder die Aufgabe: Studiere

$$W(e \xrightarrow{\text{in } n \text{ Schritten}} x) = p^n(e, x) = \sum_{y=\text{Ecke}} p(e, y) p^{n-1}(y, x)$$

für  $e, x = \text{Ecken des Graphen}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Um die Bezeichnung zu vereinheitlichen, schreiben wir auch bei Irrfahrten auf einer Gruppe  $G$ :

$$p^n(x, y) = p^n(x^{-1}y) \quad (x, y \in G, n \in \mathbb{N}).$$

Weiters nennen wir die Übergangswahrscheinlichkeit  $p$  (einer Irrfahrt auf einem Graphen oder auf einer Gruppe) irreduzibel, wenn man von jeder Ecke zu jeder anderen mit positiver Wahrscheinlichkeit gelangen kann, d.h. wenn gilt:

$$\forall \text{ Ecken } x, y \exists n \in \mathbb{N}: p^n(x, y) > 0.$$

Bedeutet für eine feste Ecke  $e$

$$d = \text{ggT } \{n \mid p^n(e, e) > 0\},$$

so heißt  $p$  aperiodisch, wenn  $d = 1$  gilt. Insbesondere haben wir also:

$$p \text{ ist irreduzibel} \Leftrightarrow \forall \text{ Ecken } x, y \exists n_0(x, y) \in \mathbb{N}:$$

$$\text{und aperiodisch} \quad p^n(x, y) > 0 \text{ für alle } n \geq n_0(x, y).$$

Wir werden im weiteren stets  $p$  als irreduzibel voraussetzen:

Und das ist ganz natürlich, denn über Ecken, zu denen man überhaupt nicht hingelangen kann, lassen sich ja auch keine Aussagen machen (jedenfalls nicht mit Hilfe von  $p$ ). Die Aperiodizität ist oft bequem (und läßt sich erreichen, indem man  $p^d$  als Übergangswahrscheinlichkeit für einen Schritt wählt; das ändert allerdings i.a. den Graphen!).

#### § 4. Der Spektralradius (einer Wahrscheinlichkeit)

Wir betrachten eine Irrfahrt auf einem Graphen (oder auf einer Gruppe) mit Übergangswahrscheinlichkeit  $p$ . Die Zahl

$$\sigma_p = \limsup_{n \rightarrow \infty} (p^n(x,y))^{1/n} \quad (x,y = \text{Ecken})$$

heißt Spektralradius von  $p$  (bzw. der Irrfahrt). Es ist natürlich stets  $\sigma_p \leq 1$ .

Für irreduzibles  $p$  gilt  $\sigma_p > 0$  und nach [32] ist  $\sigma_p$  unabhängig von den Ecken  $x$  und  $y$ .  $\sigma_p$  ist ein grobes Maß für die Anzahl der Kreise im Graphen: Ist  $\sigma_p$  groß, dann ist  $p^n(x,y)$  groß, es gibt also viele Wege von  $x$  nach  $y$ , der Graph enthält somit viele Kreise. Ist  $p$  irreduzibel und aperiodisch, dann gilt sogar ([21])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^{n+1}(x,y)}{p^n(x,y)} \text{ ex.} = \sigma_p \quad (x,y = \text{Ecken});$$

das bedeutet, daß sich die Folge  $p^n(x,y)$  ( $n = 1,2,3,\dots$ ) recht regelmäßig verhält.

Einige weitere Ergebnisse sind:

[30]:  $G =$  Gruppe,  $p$  irreduzibel. Aus  $\sigma_p = 1$  folgt, daß  $G$  mittelbar (amenable) ist. Ist  $G$  mittelbar und  $p$  symmetrisch ( $p(x) = p(x^{-1})$ ), dann gilt:  $\sigma_p = 1$ .

[1]:  $G =$  Gruppe,  $p$  irreduzibel und symmetrisch. Aus  $\sigma_p < 1$  folgt, daß  $G$  exponentielles Wachstum hat.

[21]:  $G =$  zusammenhängender Graph mit beschränktem Eckengrad. Aus  $\sigma_p < 1$  folgt, daß  $G$  exponentielles Wachstum hat. Die Umkehrung davon gilt nicht.

Wir nennen

$$r_p = \frac{1}{\sigma_p}$$

den Konvergenzradius der Irrfahrt und führen erzeugende Funktionen ein:

$$G_{x,y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(x,y) z^n \quad (x,y = \text{Ecken}).$$

Nach dem vorhin Gesagten haben alle diese Reihen den gleichen Konvergenzradius  $r_p \geq 1$  (unabhängig von  $x,y$  für irreduzibles  $p$ ).  $G_{x,y}(1)$  läßt sich deuten als Erwartungswert, wie oft die Irrfahrt bei Start in  $x$  die Ecke  $y$  besucht. Nach [9] bzw. [45] existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_p^n p^n(x,y);$$

diese sind von  $x,y$  unabhängig und endlich. Wie üblich nennen wir die Irrfahrt (alle Bedingungen sind von  $x,y$  unabhängig und es genügt, daß sie für ein Eckenpaar  $x,y$  erfüllt sind)

$r_p$  - positiv rekurrent, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_p^n p^n(x,y) > 0$ ,  $G_{x,y}(r_p) = \infty$

$r_p$  - null rekurrent, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_p^n p^n(x,y) = 0$ ,  $G_{x,y}(r_p) = \infty$

$r_p$  - transient wenn  $G_{x,y}(r_p) < \infty$ .

Im Falle  $r_p = 1$  sagt man nur positiv (null) rekurrent bzw. transient.

Für  $r_p > 1$  ist die Irrfahrt stets transient.

*Beispiel 4.1:*  $G = \mathbb{Z}^2$ ,  $p =$  Gleichverteilung auf  $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ .

Dann ist nach dem in § 3 Gesagten

$$r_p = 1, \quad G_{e,e}(1) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^n(e,e) = 0,$$

also ist die Irrfahrt auf  $\mathbb{Z}^2$  mit Übergangswahrscheinlichkeit  $p$  null rekurrent.

*Beispiel 4.2:*  $G = F_2$ ,  $p =$  Gleichverteilung auf  $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ .

Dann ist nach dem in § 3 Gesagten

$$r_p = \frac{4}{3}, \quad G_{e,e}\left(\frac{4}{3}\right) < \infty,$$

also ist die Irrfahrt auf  $F_2$  mit Übergangswahrscheinlichkeit  $p$   $\frac{4}{3}$ -transient.

## § 5. Rekurrenz und Transienz

Eine Gruppe  $G$  heißt rekurrent, wenn es eine irreduzible Wahrscheinlichkeit  $p$  gibt, die eine rekurrente Irrfahrt auf  $G$  induziert (d.h.

$$\sum_n p^n(x,y) = \infty).$$

Ein Graph  $\Gamma$  heißt rekurrent, wenn die einfache Irrfahrt auf  $\Gamma$  rekurrent ist.

Ganz analog sind die Begriffsbildungen für positiv rekurrent,  $r_p$ -rekurrent bzw.  $r_p$ -positiv rekurrent.

Eine Gruppe (Graph) heißt transient, wenn sie (er) nicht rekurrent ist.

Ein Graph ist also rekurrent, wenn die (einfache) Irrfahrt mit Sicherheit mindestens einmal ( $\Leftrightarrow$  unendlich oft) wieder zum Startpunkt zurückkehrt, wenn es somit viele Wege von  $e$  nach  $e$  (= beliebige Ecke) gibt, wenn der Graph also viele Kreise enthält.

Beispiel 4.1 zeigt, daß  $\mathbb{Z}^2$  eine rekurrente Gruppe ist,  $F_2$  dagegen (nicht mittelbar) ist transient (s.u.).

Wichtige Ergebnisse sind:

[3]: Jede rekurrente Gruppe ist mittelbar.

[28]: Eine Gruppe ist genau dann  $r_p$ -rekurrent, wenn sie rekurrent ist.

[10], [36]: Keine unendliche Gruppe ist positiv rekurrent. Daraus ergibt sich dann nach den Definitionen in § 4 sofort:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x,y) = 0 \quad \text{für alle } x,y \in G,$$

wo  $G$  eine beliebige unendliche Gruppe und  $p$  eine beliebige irreduzible Wahrscheinlichkeit auf  $G$  ist.

[16], [48]: Keine unendliche Gruppe ist  $r_p$ -positiv rekurrent. Das präzisiert das vorige Ergebnis und hat nach Definition von  $r_p$ -positiv rekurrent zur Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_p^n p^n(x,y) = 0 \quad \text{für alle } x,y \in G,$$

wo  $G$  eine beliebige unendliche Gruppe und  $p$  eine beliebige irreduzible Wahrscheinlichkeit auf  $G$  ist. Auf Grund der Definition von  $r_p(\sigma_p)$  folgt, daß  $r_p$  gerade der (richtige) exponentielle Anteil ist und es erhebt sich die Frage, wie rasch  $r_p^n p^n(x,y)$  gegen Null konvergiert; mehr darüber in § 7.

[21]: Kein unendlicher Graph ist positiv rekurrent; aber es gibt  $r$ -positiv rekurrente Graphen für gewisse (oder alle ?)  $r > 1$ . Ein Beispiel dazu kommt in § 8. Auf Grund der Definition in § 4 folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x,y) = 0 \quad \text{für alle Ecken } x,y$$

eines beliebigen unendlichen, lokal endlichen, zusammenhängenden Graphen. Eine graphentheoretische Charakterisierung  $r$ -positiv rekurrenter Graphen wäre sehr interessant, scheint aber schwierig zu sein.

Auch eine *Charakterisierung rekurrenter Gruppen* ist bis heute noch nicht restlos gelungen. Über einen Zusammenhang mit dem Wachstum ist die Rede in folgender

*Vermutung von Kesten* ([31]): Jede endlich erzeugte rekurrente Gruppe hat nichtexponentielles Wachstum (schärfer: hat polynomiales Wachstum mit einem Grad  $\leq 2$ ).

Die verschärfte Vermutung konnte bewiesen werden für

- die Klasse der zusammenhängenden Liegruppen ([4]),
- die Klasse der (diskreten) auflösbaren Gruppen ([44])
- die Klasse der (diskreten) Gruppen von polynomialem Wachstum ([43] und [25]).

Ist  $\gamma(n)$  eine Wachstumsfunktion der endlich erzeugten Gruppe  $G$  (siehe § 2), dann gilt nach [43]:

Ist  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{\gamma(n)} = \infty$ , so ist  $G$  rekurrent. Die Umkehrung dieser Aussage hängt mit der Vermutung von *Kesten* zusammen und wurde in einigen wichtigen Spezialfällen bewiesen.

Noch weit weniger zufriedenstellend ist die Situation bei Graphen. Es gibt zwar eine *Charakterisierung rekurrenter Graphen* ([37], [34]), aber es werden dabei nicht nur einfache Irrfahrten betrachtet und außerdem ist sie nicht rein graphentheoretisch. Eine Spezialisierung einer Richtung auf unsere Situation lautet (bei der Umkehrung ist der Zusammenhang mit einfachen Irrfahrten nicht klar):

Für einen lokal endlichen Graphen  $\Gamma$  mit Eckenmenge  $V$  sei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i, j \text{ Nachbarn} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (i, j \in V).$$

Wir setzen voraus:

- 1) Es gibt eine Partition  $(V_1, V_2, \dots)$  der Eckenmenge:

$$V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$$

- 2) Ist  $i \in V_k$ ;  $a_{ij} > 0$ , dann gilt  $j \in V_{k-1} \cup V_k \cup V_{k+1}$ .

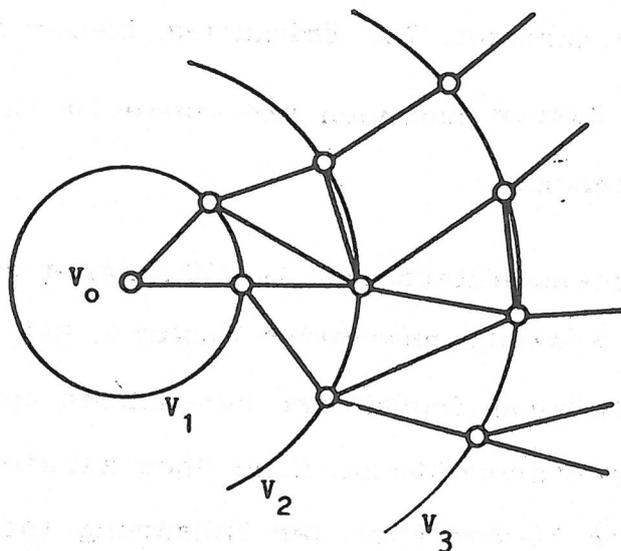
Wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i \in V_{k-1} \\ j \in V_k}} a_{ij} \right)^{-1} = \infty,$$

dann ist die einfache Irrfahrt auf  $\Gamma$  rekurrent.

Naiverweise können wir diese Aussage so anwenden:

$\Gamma$ :



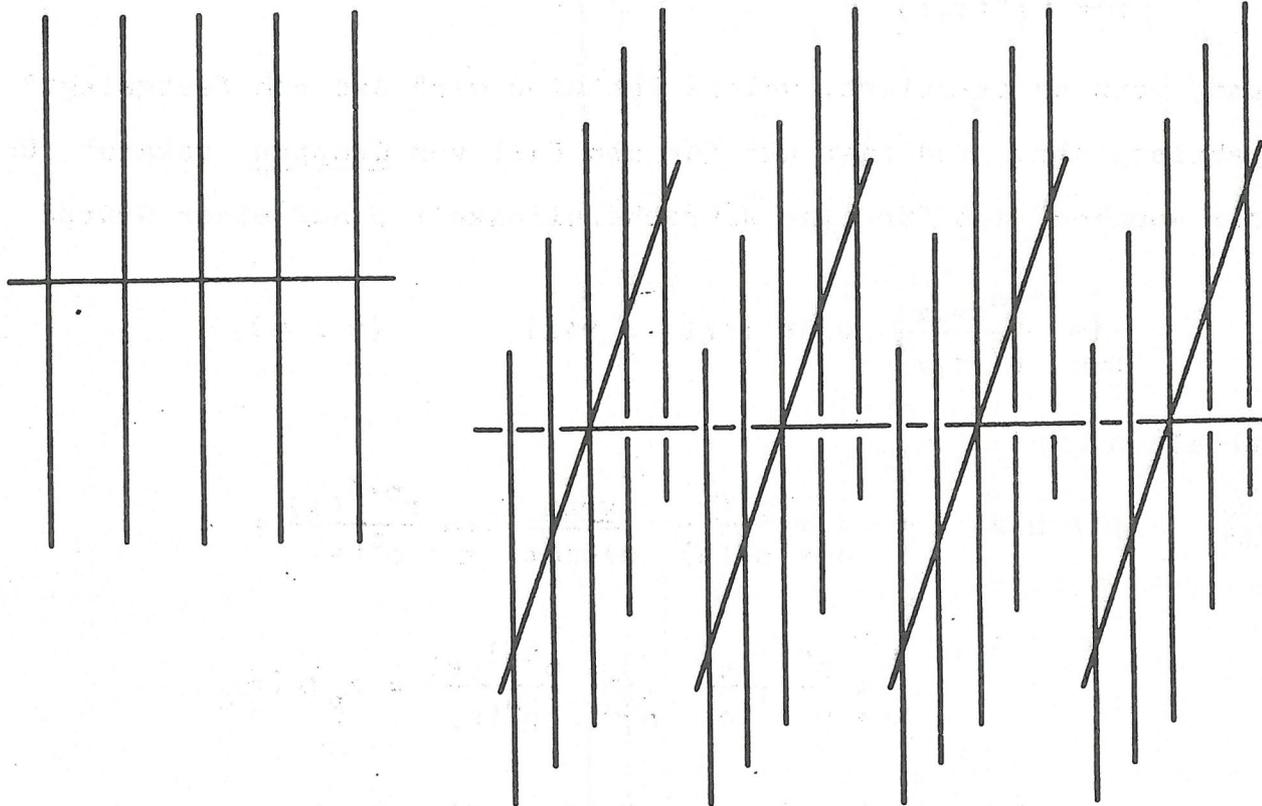
Wir wählen im Graphen  $\Gamma$  eine feste Ecke  $e$  und setzen  $V_0 = \{e\}$ ,  $V_k =$  alle Ecken, die von  $e$  die Entfernung  $k$  haben. Dann ist für die Rekurrenz der einfachen Irrfahrt auf  $\Gamma$  entscheidend, wieviele Kanten von  $V_{k-1}$  nach  $V_k$  führen. Kanten, die zwei Ecken von  $V_k$  verbinden, spielen keine Rolle. Man sollte wahrscheinlich Graphen unter diesem Gesichtspunkt ("Kantenwachstum") studieren.

Schließlich sei noch auf die alte Arbeit von *Polya* ([38]) hingewiesen: Die Gruppe  $\mathbb{Z}^k$  der Gitterpunkte im  $\mathbb{R}^k$  ist rekurrent für

$k = 1, 2$  und transient für  $k \geq 3$  (siehe auch [40]). Überraschend hingegen ist folgende Tatsache: Identifiziert man die Elemente von  $\mathbb{Z}^k$  mit jenen Punkten des  $\mathbb{R}^k$ , die in einem kartesischen Koordinatensystem

$k = 2$ :

$k = 3$ :



ganzzahlige Koordinaten haben, so verbinden wir  $(0, 0, \dots, 0)$  mit

$(a_1, a_2, \dots, a_k)$  durch den Weg

$(0, 0, \dots, 0) \rightarrow (a_1, 0, \dots, 0) \rightarrow (a_1, a_2, 0, \dots, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_k)$ .

Das ergibt einen spannenden Baum  $B_k$  für  $\mathbb{Z}^k$ . Alle diese Bäume  $B_k$

$(k = 1, 2, \dots)$  sind rekurrent. Daraus sieht man auch, daß die verschärfte Vermutung von Kesten für Bäume (Graphen) nicht mehr richtig ist, denn die Bäume  $B_k$  haben polynomiales Wachstum von Grad  $k$  wie  $\mathbb{Z}^k$ .

Frage: Sind alle spannenden Bäume von  $\mathbb{Z}^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) rekurrent?

§ 6. Quotientensätze und harmonische Funktionen

Es geht um folgende Problemstellung:

Wann existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n(e, x)}{p^n(e, e)} \quad (e, x = \text{Ecken})$$

und, wenn er existiert, welche Funktion wird dadurch festgelegt? Ergebnisse dazu sind fast nur für den Fall von Gruppen bekannt. Unter der Annahme, daß für eine Wahrscheinlichkeit  $p$  auf einer Gruppe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n(e, x)}{p^n(e, e)} \text{ existiert} = h(x) \quad (x \in G),$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} p * h(x) &= p * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n(x)}{p^n(e)} \quad \begin{array}{l} \text{wenn} \\ \text{erlaubt} \end{array} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^{n+1}(x)}{p^n(e)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^{n+1}(x)}{p^{n+1}(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^{n+1}(e)}{p^n(e)} = \sigma_p h(x). \end{aligned}$$

Es scheint also ein Studium der Faltungsgleichung

$$p * h = \sigma_p h$$

für diese Fragestellung wichtig zu sein (und es ist auch so). Lösungsfunktionen  $h$  nennt man meist  $\sigma_p$ -harmonisch (in Analogie zur *Poisson*'schen Integralformel für Funktionen, die im klassischen Fall harmonisch sind: Der Wert so einer Funktion in einem Punkt  $x$  (der Ebene) ist festgelegt durch die Funktionswerte in den Randpunkten einer Kreisscheibe um  $x$ . Bei uns ist

$$\sigma_p h(x) = p * h(x) = \sum_y p(x,y) h(y);$$

das heißt,  $h(x)$  ist festgelegt durch jene Funktionswerte  $h(y)$ , für die  $p(x,y) > 0$  ist, also durch die Funktionswerte in jenen Ecken, die von  $x$  den Abstand 1 haben).

Eine wichtige Methode zum Studium dieses Quotientenlimes ist die folgende: Man zeigt, daß die Faltungsgleichung  $p * h = \sigma_p h$  genau eine (positive) Lösung  $h$  mit  $h(e) = 1$  hat und kann dann schon folgern, daß der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n(e,x)}{p^n(e,e)} \text{ existiert} = h(x)$$

für alle  $x \in G$  ist.

Einige wichtige Ergebnisse sind:

[41]: Für eine abelsche Gruppe  $G$  und eine auf  $G$  irreduzible, aperiodische Wahrscheinlichkeit  $p$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n(x)}{p^n(e)} \text{ existiert} = 1 \quad \text{für alle } x \in G.$$

[2]: Ist  $G$  eine mittelbare Gruppe und  $p$  eine irreduzible, aperiodische und symmetrische Wahrscheinlichkeit auf  $G$  ( $\Rightarrow \sigma_p = 1$ ), dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n(x)}{p^n(e)} \text{ existiert} = 1 \quad \text{für alle } x \in G.$$

Weitere Ergebnisse und Verallgemeinerungen finden sich in [14], [18], [29], [33]. Insbesondere existiert der in Rede stehenden Quo-

tientenlimes stets für rekurrente Wahrscheinlichkeiten  $p$  und hat dann den Wert 1 (vgl. z.B. [40]); das gilt auch für Graphen und zeigt wiederum die Bedeutung rekurrenter Wahrscheinlichkeiten. Allerdings ist die Voraussetzung der Rekurrenz nur hinreichend, keinesfalls aber notwendig.

Auf Grund der obigen Ausführungen erscheint es naheliegend, harmonische Funktionen auf Graphen zu studieren, wobei wir sagen:

Eine Funktion  $h$  heißt *harmonisch* auf dem (lokal endlichen) Graphen  $\Gamma$ , wenn der Funktionswert in jeder Ecke das arithmetische Mittel der Funktionswerte in den Nachbarecken ist, also

$$h(x) = \frac{1}{d(x)} \sum_{\substack{y=\text{Nachbar} \\ \text{zu } x}} h(y) \quad \text{für alle Ecken } x$$

( $d(x)$  = Grad der Ecke  $x$ ) gilt. Ein Zusammenhang zwischen der Existenz nichtkonstanter und beschränkter harmonischer Funktionen mit dem Wachstum des Graphen findet sich in [24]. Das ist ein Anfang, allerdings bleibt hier noch viel zu tun übrig.

### § 7. Lokale Grenzwertsätze

Nach den in § 5 erwähnten Ergebnissen gilt für Irrfahrten auf unendlichen Gruppen und auch Graphen stets:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x,y) = 0 \quad \text{für alle Ecken } x,y.$$

Das soll nun genauer untersucht werden, nämlich wie schnell die  $n$ -te

Übergangswahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert.

Bei Gruppen gilt sogar genauer (§ 5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_p^n p^n(x,y) = 0 \quad \text{für alle } x,y$$

und  $r_p^n$  ist gerade der richtige exponentielle Anteil von  $p^n(x,y)$ , da ja nach Definition  $r_p^{-1} = \limsup_n (p^n(x,y))^{1/n}$ . Um das genaue asymptotische Verhalten von  $p^n(x,y)$  für  $n \rightarrow \infty$  zu finden, sind viel feinere Methoden notwendig: Harmonische Analyse (Fouriertransformation) oder kombinatorische Hilfsmittel (asymptotische Methoden). Einige typische Ergebnisse sind (wir setzen  $p = \text{aperiodisch}$  nur zur einfacheren Formulierung voraus; die Ergebnisse sind aber allgemeiner gültig):

[23],[40]: Ist  $G = \mathbb{Z}^d$  und  $p$  eine irreduzible, aperiodische Wahrscheinlichkeit, dann gilt

$$p^n(x,y) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c(x,y) \sigma_p^n n^{-d/2},$$

wo  $c(x,y)$  eine von  $n$  unabhängige Konstante ist.

[13], [17], [19], [39], [49]: Ist  $G = F_d$  eine freie Gruppe mit  $d(\geq 2)$  Erzeugenden und  $p$  eine irreduzible, aperiodische Wahrscheinlichkeit (die isotrop oder auf den Erzeugenden konzentriert ist; diese weitere Voraussetzung ist beweistechnisch bedingt und wahrscheinlich nicht notwendig), dann gilt:

$$p^n(x,y) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c(x,y) \sigma_p^n n^{-3/2},$$

wo  $c(x,y)$  eine von  $n$  unabhängige Konstante ist. Genau das gleiche Er-

Ergebnis ergibt sich auch für Gruppen mit "einfachen" Relationen (zB.  $a^k = b^1$  usw.) oder für freie Produkte endlicher Gruppen. Für diese und weitere Ergebnisse siehe [7], [8], [50].

Diese Resultate führen zu der folgenden

*Vermutung:* Zu jeder unendlichen Gruppe  $G$  gibt es eine natürliche Zahl  $k = k(G)$ , sodaß für alle irreduziblen (und aperiodischen) Wahrscheinlichkeiten  $p$  auf  $G$  gilt:

$$p^n(x,y) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c(x,y) \sigma_p^n n^{-k/2}.$$

Hat die Gruppe  $G$  polynomiales Wachstum vom Grad  $d$ , dann ist  $k = d$  (?).

Hat man für eine Gruppe einen lokalen Grenzwertsatz, dann ergibt sich daraus sofort ein Quotientensatz. Aus § 6 sieht man unmittelbar, daß die  $c(x,y)$  etwas mit harmonischen Funktionen auf der Gruppe zu tun haben. Viele Fragen sind hier noch zu untersuchen.

Bei Bäumen (und Graphen) ist die Situation etwas komplizierter; im Gegensatz zu den Gruppen gibt es nämlich für gewisse  $r > 1$   $r$ -positiv rekurrente Bäume (vgl. das Beispiel in § 8). Betrachtet man allerdings nur sogenannte  $\mathbb{N}$ -Bäume: Das sind Bäume mit einer Wurzel  $e$ , so daß der Grad einer Ecke nur von ihrer Entfernung von der Wurzel abhängt, dann lassen sich die Rückkehrwahrscheinlichkeiten zur Wurzel durch Studium einer Irrfahrt auf  $\mathbb{N}_0$  bestimmen. Diese Situation erleichtert vieles und es lassen sich bequem Kettenbruchmethoden anwenden (vgl. dazu [20]). So ergibt sich für die einfache Irrfahrt für große Klassen von  $\mathbb{N}$ -Bäumen:

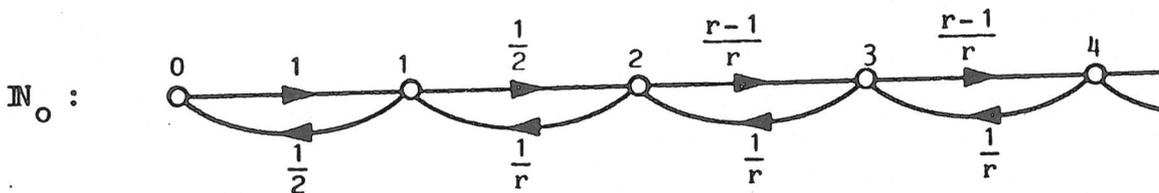
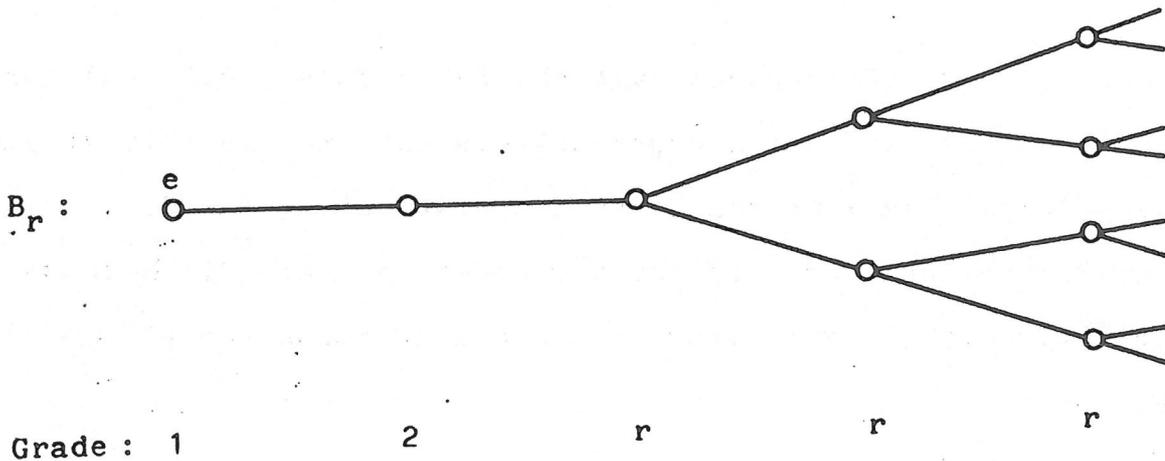
$$p^n(e,e) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} c \cdot \sigma_p^n n^{-a/2},$$

wo  $a = 0, 1, 3$  (meistens). Zur Zeit ist kein Beispiel eines  $\mathbb{N}$ -Baumes bekannt, wo  $a = 2$  oder  $a \geq 4$ , aber das liegt wahrscheinlich wohl an den eher bescheidenen Methoden, die zur Verfügung stehen.

### § 8. Ein Beispiel

Alles in diesem Abschnitt ist [20] entnommen. Wir betrachten einen  $\mathbb{N}$ -Baum  $B_r$  mit Wurzel  $e$  und bezeichnen mit  $d(i)$  den Grad einer Ecke in Entfernung  $i$  von  $e$ . Es sei

$$d(0) = 1, \quad d(1) = 2, \quad d(2) = d(3) = \dots = r.$$



Die Rückkehrwahrscheinlichkeiten in  $B_r$  von  $e$  nach  $e$  sind die gleichen wie jene in  $M_0$  von  $0$  nach  $0$ , wobei die Übergangswahrscheinlichkeiten wie in der Zeichnung sind. Damit ergibt sich sofort folgende Kettenbruchentwicklung:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^{2n}(e,e)z^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2r}z} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{r-1}{r^2}z} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{r-1}{r^2}z} \\
 &= \frac{1}{1 - \dots} \\
 &= \frac{4r - 3rz + 6z - 8 - z \sqrt{r^2 - 4(r-1)z}}{10z + 4r - 6rz - 8 + 2rz^2 - 2z^2}
 \end{aligned}$$

Aus der Theorie der Kettenbrüche (vgl. zB. [47]) folgt, daß  $G(z)$  genau eine Singularität  $z_0$  auf dem Konvergenzkreis hat und diese liegt auf der reellen Achse. Bestimmt man diese Singularität  $z_0$  aus der expliziten Darstellung für  $G(z)$  und verwendet man dann die Methode von Darboux (vgl. [5]) zur asymptotischen Auswertung von  $p^{2n}(e,e)$ , so ergibt sich:

$r$	Singularität $z_0 =$	$p^{2n}(e, e) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim}$	$B_r$ ist
2	1	$c_2 \cdot n^{-1/2}$	null rekurrent
3	9/8	$c_3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n n^{-3/2}$	$\sqrt{9/8}$ - transient
4	4/3	$c_4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n n^{-1/2}$	$\sqrt{4/3}$ - null rekurrent
$r \geq 5$	$\frac{r^2}{4(r-1)}$	$c_r \cdot \left(\frac{4(r-1)}{r^2}\right)^n$	$\frac{r}{2\sqrt{r-1}}$ - positiv rekurrent

Weitere Beispiele und Eigenschaften für Irrfahrten auf Bäumen und Graphen findet man in [21], [51].

L i t e r a t u r

- [1] AVEZ, A.: Entropie des groupes de type fini. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 275 (1972), 1363 - 1366
- [2] AVEZ, A.: Limite de quotients pour les marches aléatoires sur des groupes. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 276 (1973), 317 - 320
- [3] AZENCOTT, R.: Espaces de POISSON des groupes localement compacts. Springer Lecture Notes in Mathematics 148 (1970)
- [4] BALDI, P.: Caractérisation des groupes de Lie connexes récurrents. Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, 17 (1981), 281 - 308
- [5] BENDER, E.A.: Asymptotic methods in enumeration. SIAM Review, 16 (1974), 485 - 515
- [6] BOLLOBAS; B.: Graph theory. Springer - Verlag, 1979
- [7] BOUGEROL, Ph.: Comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur un espace symétrique. Astérisque 74 (1980), 29 - 45
- [8] BOUGEROL, Ph.: Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles. Institut Elie Cartan 1983, 11 - 39
- [9] CHUNG, K.L.: Markov chains. Springer - Verlag, 1967
- [10] DERRIENNIC, Y.: Lois "zéro ou deux" pour les processus de Markov. Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, 12 (1976), 111 - 129
- [11] GERL, P.: Über die Anzahl der Darstellungen von Wörtern. Monatsh. Mathematik 75 (1971), 205 - 214
- [12] GERL, P.: Diskrete, mittelbare Gruppen. Monatsh. Mathematik 77 (1973), 307 - 318

- [13] GERL, P.: Irrfahrten auf  $F_2$ . Monatsh. Mathematik 84 (1977), 29 - 35
- [14] GERL, P.: Wahrscheinlichkeitsmaße auf diskreten Gruppen. Archiv der Mathematik 31 (1978), 611 - 619
- [15] GERL, P.: Eine asymptotische Auswertung von Faltungspotenzen in gewissen Gruppen. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Abt. II, 186 (1978), 385 - 396
- [16] GERL, P.: Eine Konvergenzsatz für Faltungspotenzen. In "Probability measures on groups" (Ed.: H. Heyer). Springer Lecture Notes in Mathematics 706 (1979), 120 - 125
- [17] GERL, P.: Ein Gleichverteilungssatz auf  $F_2$ . In "Probability measures on groups" (Ed.: H. Heyer). Springer Lecture Notes in Mathematics 706 (1979), 126 - 130
- [18] GERL, P.: A ratio limit theorem. Astérisque 74(1980), 7 - 14
- [19] GERL; P.: A local limit theorem on some groups. In "The first Pannonian Symposium on Mathem. Statistics", L.N. in Statistics 8 (1981), 73 - 82
- [20] GERL, P.: Continued fraction methods for random walks on  $\mathbb{N}$  and on trees. In "Probability measures on groups" (Ed.: H. Heyer). Springer Lecture Notes in Mathematics, to appear
- [21] GERL; P. und WOESS, W.: Simple random walks on trees, preprint
- [22] GILMAN, R.H.: Presentations of groups and monoids. Journal of Algebra 57 (1979), 544 - 554
- [23] GNEDENKO, B.V. und KOLMOGOROV; A.N.: Limit distributions for sums of independent random variables, Addison Wesley, 1954
- [24] GRATZ, E.: Harmonische Funktionen auf Graphen, Diss. (Universität Salzburg), 1983

- [25] GROMOV, M.: Groups of polynomial growth and expanding maps.  
Publ. Math. IHES 53 (1981), 53 - 78
- [26] GRIGORCHUK, R.I.: Dokl. Akad. Nauk SSSR, im Druck
- [27] GUIVARC'H, Y.: Croissance polynomiale et périodes des fonctions  
harmoniques. Bull. Soc. Math. France 101 (1973), 333 - 379
- [28] GUIVARC'H, Y.: Sur la loi des grands nombres et le rayon  
spectral d'une marche aléatoire. Astérisque 74 (1980),  
47 - 98
- [29] GUIVARC'H, Y.: Théorèmes quotients pour les marches aléatoires.  
Astérisque 74 (1980), 15 - 28
- [30] KESTEN, H.: Full Banach mean values on countable groups. Math.  
Scand. 7 (1959), 146 - 156
- [31] KESTEN, H.: The Martin boundary of recurrent random walks on  
countable groups. Proc. 5th Berkeley Symposium Math.  
Statist. and Probab. 2 (1967), part 2, 51 - 74
- [32] KINGMANN, J.F.C.: The exponential decay of Markov transition  
probabilities. Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 337 - 358
- [33] LEPAGE, E.: Théorèmes quotients pour certaines marches  
aléatoires. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 279 (1974),  
69 - 72
- [34] LYONS, T.: A simple criterion for transience of a reversible  
Markov chain. The Annals of Prob. 11 (1983), 393 - 402
- [35] MILNOR, J.: A note on curvature and fundamental group. J.  
Differential Geometry 2 (1968), 1 - 7
- [36] MUKHERJEA, A. und TSERPES, N.A.: Measures on topological  
semigroups. Springer Lecture Notes in Mathematics 547  
(1976)

- [37] NASH-WILLIAMS, C.ST.J.A.: Random walks and electric currents in networks. Proc. Cambridge Phil. Soc. 55 (1959), 181 - 194
- [38] POLYA, G.: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. Math. Ann. 89 (1921), 149 - 160
- [39] SAWYER, S.: Isotropic random walks in a tree. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 42 (1978), 279 - 292
- [40] SPITZER, F.: Principles of random walk. Van Nostrand 1964
- [41] STONE, Ch.: Ratio limit theorems for random walks on groups. Transact. AMS 125 (1966), 86 - 100
- [42] TITS, J.: Free subgroups in linear groups. J. Algebra 20 (1972), 250 - 270
- [43] VAROPOULOS, N.Th.: Brownian motion and transient groups. Ann. Inst. Fourier 33 (1983), 241 - 261
- [44] VAROPOULOS, N.Th.: Random walks on soluble groups. preprint
- [45] VERE-JONES, D.: Geometric ergodicity in denumerable Markov chains. Quart. J. Math. 13 (1962), 7 - 28
- [46] WAGREICH, P.: The growth function of a discrete group. In "Group Actions and Vector fields" (Ed.: J.B.Carrell). Springer Lecture Notes in Mathematics 956 (1982), 125 - 144
- [47] WALL, H.S.: Analytic theory of continued fractions. Van Nostrand, 1948
- [48] WOESS, W.: Irrfahrten auf topologischen Gruppen.  $\pi \alpha \mu$ , Arbeitsbericht des Instituts für Mathematik der Univ. Salzburg, 2 (1980), 79 - 142
- [49] WOESS, W.: Puissances de convolution sur les groupes libres ayant un nombre quelconque de générateurs. Institut Elie Cartan 1983, 181 - 190

- [50] WOESS, W.: A random walk on free products of finite groups.  
1983 (preprint)
- [51] WOESS, W.: Random walks and periodic continued fractions. 1983  
(preprint)
- [52] WOLF, J.A.: Growth of finitely generated solvable groups and  
curvature of Riemannian manifolds. J. Differential  
Geometry 2 (1968), 421 - 446

Peter Gerl  
Institut für Mathematik  
der Universität Salzburg  
Petersbrunnstraße 19  
A-5020 Salzburg