q-IDENTITÄTEN
(vom Rogers - Ramanujan Typ)

von

Peter Paule

q-Identitäten vom Rogers-Ramanujan Typ sind i.a. von der Gestalt ($|q| < 1$ sei stets vorausgesetzt)

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{a_n}} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j(q)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}, \tag{1}$$

wobei die a_n in den meisten Fällen bestimmten Restklassen angehören, während möglichst "schöne" bzw. "geschlossene" Formen für die $f_j(q)$ erwünscht sind.

Obwohl diese Identitäten üblicherweise innerhalb der Theorie der q-hypergeometrischen Reihen betrachtet werden, zeigt es sich, daß durch elementares Rechnen mit q-Binomialkoeffizienten $[{n \atop k}]$ und i.w. mit Verwendung des q-binomischen Lehrsatzes

$$(a+x)(a+qx)\dots(a+q^{n-1}x) = \sum_{k=0}^{n} [{n \atop k}]\, q^{\binom{k}{2}} x^k a^{n-k} \tag{2}$$

(siehe z.B. [3]) bzw. der q-Vandermonde Formel

$$[{r+s \atop n}] = \sum_{j=0}^{n} [{r \atop j}][{s \atop n-j}]\, q^{(n-j)(r-j)} \tag{3}$$

(z.B. [3]) eine große Anzahl dieser Identitäten auf sehr einfache Weise behandelt werden kann.

Ausgehend von der Identität

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[{a+c+\delta \atop a+k}\right]\left[{a+b+\delta \atop b+k}\right]\left[{b+c+\delta \atop c+k}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q)_{a+b+c+\delta-j}\, q^{j^2+\delta j}}{(q)_{a-j}(q)_{b-j}(q)_{c-j}(q)_{2j+\delta}} \cdot S_{2j+\delta}, \quad ($$

wobei $S_{2j+\delta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[{2j+\delta \atop j+k}\right] q^{-k^2+\delta . k}\, c_k$ und $\delta = 0$ oder 1, erhalten wir für $c \to \infty$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[{a+b+\delta \atop a+k}\right]\left[{a+b+\delta \atop b+k}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q)_{a+b+\delta}\, q^{j^2+\delta j}}{(q)_{a-j}(q)_{b-j}(q)_{2j+\delta}} \cdot S_{2j+\delta}. \quad (5)$$

Ein elementarer Beweis von (4) findet sich in [4].

Wählt man in (4) $c_k = (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(3k-1)}$ und $\delta = 0$, so erhält man den Fall $n = 3$ der q-Dyson Vermutung von ANDREWS [1].

Bemerkung: (5) läßt sich sehr einfach mit Hilfe der q-Vandermonde Formel zeigen. Siehe z.B. [5].

Für $b \to \infty$ in (5) ergibt sich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{(q)_{a+k}\,(q)_{a+\delta-k}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2+\delta j}}{(q)_{a-j}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q^{-k^2+\delta k}\, c_k}{(q)_{j+k}(q)_{j+\delta-k}} \quad (6)$$

(Falls $\delta = 0$ vgl. [2,(18)].)

Für geeignet gewählte c_k und $a \to \infty$ in (6) folgt

$$\frac{1}{(q)_\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2+\delta j}}{(q)_{2j+\delta}} \cdot S_{2j+\delta}. \quad (7)$$

Die weitere Vorgangsweise besteht darin, (6) und (7) geeignet zu kombinieren und das Produkt $\prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{a_n})^{-1}$ (linke Seite von (1)) auf ein möglichst einfaches $S_{2j+\delta}$ zu "reduzieren".

Auf diese Art erhält man nicht nur einfache Beweise wohlbekannter Identitäten, so z.B. das Eulersche Pentagonalzahlentheorem, die Rogers-Selberg oder die Göllnitz-Gordon Identitäten, sondern auch ihre sog. analytischen Verallgemeinerungen wie etwa die der Rogers-Selberg Identitäten

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0,\pm 2r \pmod{4k+3}\\ 1\le r\le k+1\\ k\ge 1}}^{\infty} (1-q^n)^{-1} = (-q)_\infty \sum_{j_1,\ldots,j_k\ge 0} \frac{q^{2J_1^2+\ldots+2J_k^2+2J_r+\ldots+2J_k}}{(q^2;q^2)_{j_1}\ldots(q^2;q^2)_{j_k}(-q)_{2j_k}}$$

$$(J_i = j_i+\ldots+j_k)$$

und

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0,\pm 1 \pmod{4k+3}\\ k\ge 1}}^{\infty} (1-q^n)^{-1} = (-q)_\infty \sum_{j_1,\ldots,j_k\ge 0} \frac{q^{2J_1^2+\ldots+2J_k^2+2J_1+\ldots+2J_k}}{(q^2;q^2)_{j_1}\ldots(q^2;q^2)_{j_k}(-q)_{2j_k+1}}\,.$$

welche neu zu sein scheinen. Diese und weitere Beispiele findet man in [5].

Abschließend möchte ich die oben skizzierte Technik anhand der Rogers-Ramanujan Identitäten demonstrieren:

Aus der Jacobi Identität (siehe z.B. [5,(9)]) folgt ($\lambda = 0$ oder 1)

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1+\lambda})(1-q^{5n+4-\lambda})} = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(5k-(1+2\lambda))}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2+\lambda j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(3k-1)}}{(q)_{j+k}(q)_{j+\lambda-k}}\,.$$

(wegen (7) mit $\delta = 0$ bei $\lambda = 0$, bzw. (7) mit $\delta = 1$ bei $\lambda = 1$)

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2+\lambda j} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{l^2+\lambda l}}{(q)_{j-l}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-(-1)^\lambda)}}{(q)_{l+k}(q)_{l+\lambda-k}} \right)$$

(wegen (6))

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2+\lambda j}}{(q)_j} \quad \text{(wegen (2)).}$$

Damit sind die Rogers-Ramanujan Identitäten bewiesen.

Literatur:

[1] ANDREWS G.E.: Problems and Prospects for Basic Hypergeometric Functions. Theory and Application of Special Functions.
Hrsg.: R.A. Askey, Academic Press, New York 1975.

[2] BRESSOUD D.M.: An Easy Proof of the Rogers-Ramanujan Identities J. Number Th. 16 (1983), 235-241.

[3] CIGLER J.: Operatorenmethoden für q-Identitäten. Mh.Math. 88 (1979), 87-105.

[4] PAULE P.: Zwei neue Transformationen als elementare Anwendungen der q-Vandermonde Formel. Dissertation. Wien 1982.

[5] PAULE P.: On identities of the Rogers-Ramanujan type. J.Math.Anal.Appl. Preprint 1983.

Adresse des Autors: Wanger 6, A-4921 Hohenzell