

PERMANENTEN IN DER KOMBINATORIK

Norbert Seifter

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie

Montanuniversität Leoben

A-8700 Leoben, Austria

1. EINLEITUNG

Die Permanente läßt sich hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit zwar nicht mit der Determinante vergleichen, doch gibt es einige Gebiete wie z.B. Wahrscheinlichkeitstheorie ([38],[13]), Physik ([6],[16]) und Kombinatorik wo der Permanentenbegriff nutzbringend verwendet werden kann. In dieser Arbeit werden folgende Problemkreise näher betrachtet:

- Die Abzählung lateinischer Rechtecke.
- Die Bestimmung der charakteristischen Konstanten im Dimerenproblem.
- Die Abzählung nichtisomorpher Steinerscher Tripelsysteme.
- Die Abzählung der 1-Faktoren von Graphen.
- Die Bestimmung der Anzahl Eulerscher Orientierungen von Graphen.
- Die Charakterisierung konvertibler $(0,1)$ -Matrizen.
- Das Permanentenpolynom von Graphen.

Bei den ersten fünf Anwendungen handelt es sich um die Verwendung von Permanentenungleichungen zur Lösung der betrachteten Probleme. Im Abschnitt "Die Charakterisierung konvertibler $(0,1)$ -Matrizen" wird der umgekehrte Weg beschritten. Dort werden, bezugnehmend auf eine Arbeit von C.H.C. Little [21], die konvertiblen $(0,1)$ -Matrizen mit Hilfe graphentheoretischer Methoden charakterisiert.

Das charakteristische Polynom, $\det (xI-A(G))$, von Graphen (das ist das charakteristische Polynom der Adjazenzmatrix $A(G)$) wurde bereits sehr eingehend untersucht. Einen umfassenden Überblick über diese Untersuchungen geben z.B. Cvetkovic, Doob und

Sachs in ihrem Buch "Spectra of Graphs" [8], sowie Biggs in [1]. Nun gibt es aber auch erste Untersuchungen über das Permanentenpolynom, $\text{per}(xI - A(G))$, von Graphen. Einige Ergebnisse zu diesem Problemkreis werden im Abschnitt "Das Permanentenpolynom von Graphen" angegeben.

Eine wesentliche Rolle im Zusammenhang mit beinahe all diesen Betrachtungen spielt der Begriff der Inzidenzmatrix, der im nächsten Abschnitt eingehend betrachtet wird.

2. Die Inzidenzmatrix

Es seien X_1, \dots, X_m beliebige Teilmengen einer n -Menge $S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Die Inzidenzmatrix $B = (b_{ij})$ von X_1, \dots, X_m ist wie folgt definiert:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_j \in X_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Eine Folge (s_1, \dots, s_m) von verschiedenen Elementen aus S heißt System verschiedener Vertreter (SVV) von X_1, \dots, X_m falls $s_i \in X_i$ für alle i , $1 \leq i \leq m$.

Zu einem beliebigen System von Teilmengen X_1, \dots, X_m braucht es natürlich kein SVV zu geben. Wir untersuchen nun die Frage, wie viele SeVV zu einem gegebenen System X_1, \dots, X_m existieren.

Wenn (s_1, \dots, s_m) ein SVV ist, so gilt natürlich $m \leq n$ und es existiert eine Einbettung $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ so, daß $x_{\sigma(i)} \in X_i$ für alle i , $1 \leq i \leq m$. Aus der Definition der Inzidenzmatrix folgt dann, daß $b_{i\sigma(i)} = 1$ für alle i . Natürlich gilt auch die Umkehrung. Es gibt also zu X_1, \dots, X_m genau dann ein SVV wenn eine Einbettung $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ existiert, mit $b_{i\sigma(i)} = 1$ für alle i . Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung

$$\prod_{i=1}^m b_{i\sigma(i)} = 1.$$

Um die Anzahl der SeVV zu bestimmen, summieren wir über alle

Einbettungen σ und erhalten auf diese Art die Permanente der Inzidenzmatrix

$$\sum_{\sigma} \prod_{i=1}^m b_{i\sigma(i)} = \text{per } B.$$

Beispiel:

$$S = \{1,2,3,4\}, \quad X_1 = \{1,3\}, \quad X_2 = \{1,2\}, \quad X_3 = \{2,3,4\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{per } B = 5$$

SeV: (1,2,3), (1,2,4), (3,1,5), (3,1,4), (3,2,4).

3. Die Abzählung lateinischer Rechtecke.

Ein lateinisches $r \times n$ - Rechteck ist ein rechteckiges Zeichenschema, in dem jede Zeile eine Permutation von n fest gewählten Elementen ist und jede Spalte verschiedene Elemente enthält ($r \leq n$).

Mit A_n^k bezeichnen wir die Menge aller $n \times n$ -(0,1)-Matrizen mit genau k Einsen in jeder Zeile und Spalte; ferner sei $L(r,n)$ die Anzahl lateinischer $r \times n$ -Rechtecke über einer beliebigen n -Menge S .

Wir betrachten jetzt ein beliebiges lateinisches $t \times n$ -Rechteck R , $1 \leq t \leq n$. Die Menge all jener Elemente aus S , die nicht in der j -ten Spalte von R auftreten, werde mit S_j bezeichnet ($|S_j| = n - t$ für alle j , $1 \leq j \leq n$). Bilden wir aus R ein lateinisches $(t+1) \times n$ -Rechteck, so kommen für die neue Zeile auf Grund der Spaltenbedingung nur Elemente aus den Mengen S_j in Frage. Daraus und aus der Spaltenbedingung folgt, daß die neue Zeile ein SVV der Mengen S_1, \dots, S_n ist. Ist nun B die Inzidenzmatrix von S_1, \dots, S_n so erhalten wir mit den Überlegungen aus dem vorhergehenden Abschnitt, daß die Anzahl der Möglichkeiten, das lateinische $t \times n$ -Rechteck zu ergänzen, gleich der Permanente von B , $B \in A_n^{n-t}$, ist.

Es seien

$$m(k,n) \leq \min \{ \text{per} A : A \in \Lambda_n^k \}$$

$$M(k,n) \geq \max \{ \text{per} A : A \in \Lambda_n^k \} .$$

Damit erhalten wir die Beziehung

$$n! \prod_{t=1}^{r-1} m(n-t,n) \leq n! \prod_{t=1}^{r-1} \text{per} B(t) \leq n! \prod_{t=1}^{r-1} M(n-t,n),$$

wobei $\prod_{t=1}^{r-1} \text{per} B(t)$ die Anzahl der Möglichkeiten angibt, aus einer vorgegebenen Zeile ein $r \times n$ -Rechteck zu bilden. Da es für die erste Zeile $n!$ Möglichkeiten gibt, erhalten wir also $L(r,n) = n! \prod_{t=1}^{r-1} \text{per} B(t)$ (da die Inzidenzmatrizen ja von t abhängen, wurde die Schreibweise $B(t)$ gewählt).

Nun gilt für $n \times n$ - $(0,1)$ -Matrizen A mit den Zeilensummen r_1, \dots, r_n die Abschätzung

$$\text{per} A \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i}$$

(Vermutung von Minc [27], Beweis von Bregman [2] und Schrijver [30])

Da $B(t) \in \Lambda_n^{n-t}$ ist $\frac{1}{n-t} B(t)$ natürlich eine doppelt stochastische Matrix. Somit gilt auch

$$\text{per} B(t) \geq (n-t)^n \frac{n!}{n^n}$$

(Vermutung von van der Waerden [37], Beweis von Falikman [10] und Egorychev [9]). Für $L(r,n)$ erhalten wir sodann

$$n! \prod_{t=1}^{r-1} \frac{n!}{n^n} (n-t)^n \leq L(r,n) \leq n! \prod_{t=1}^{r-1} \prod_{i=1}^n ((n-t)!)^{1/(n-t)}$$

und mit einfacher Rechnung

$$\frac{(n!)^r}{n^{n(r-1)}} \prod_{t=1}^{r-1} (n-t)^n \leq L(r,n) \leq n! \prod_{t=1}^{r-1} ((n-t)!)^{n/(n-t)} .$$

Für die Anzahl $L(n)$ der lateinischen n -Quadrate folgt sofort

$$(1) \quad L(n) \geq \frac{(n!)^n}{n^{n(n-1)}} ((n-1)!)^n = \frac{(n!)^{2n}}{n^n} .$$

Einen anderen Zugang ermöglicht der folgende Satz von M. Hall [14] (erweitert und neu bewiesen von Mann und Ryser [22]):

Für eine $n \times n$ - $(0,1)$ - Matrix A mit $t < n$ Einsen in jeder Zeile und $\text{per} A > 0$ gilt $\text{per} A \geq (t!)^n$.

Unsere Matrizen $B(t)$ sind Vielfache von doppelt-stochastischen Matrizen, weshalb nach einem Satz in [19] $\text{per} B(t) > 0$ gilt. Dann gilt aber auch $\text{per} B(t) \geq t!$ für alle $t < n$ und somit

$$(2) \quad L(n) = n! \prod_{t=1}^{n-1} \text{per} B(t) \geq \prod_{t=1}^n t!.$$

Wie man sich unter Verwendung der Beziehung

$$e^n > 1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots + \frac{n^t}{t!} > \frac{n^t}{t!}$$

leicht überzeugt, liefert (1) eine bessere Abschätzung als (2).

Nun liegt aber die Vermutung nahe, daß die untere Schranke für Matrizen aus Λ_n^k , die man unter Verwendung des Satzes von Falikman - Egorychev erhält, noch verbessert werden kann. In [32] wird folgende Schranke vorgeschlagen:

$$(3) \quad \text{per} A \geq \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} \right)^n, \quad A \in \Lambda_n^k.$$

Bewiesen ist (3) aber nur für $k=3$ (siehe [36]).

Ein Beweis von (3) würde nicht nur für die untere Schranke von $L(r,n)$ bzw. $L(n)$ sondern auch für die in den folgenden Kapiteln behandelten Probleme verbesserte Ergebnisse liefern.

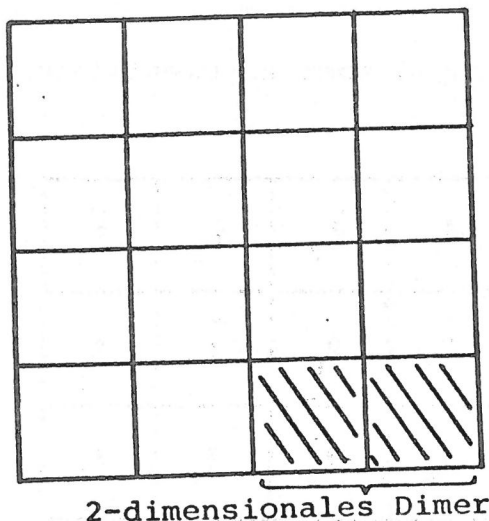
4. Die Bestimmung der charakteristischen Konstanten im

Dimerenproblem

Problemstellungen im Zusammenhang mit bestimmten Strukturen wie dem Ising-Modell des Ferromagnetismus, der Kristalltheorie und der Adsorption zweiatomiger Moleküle in Atomgittern lassen sich auf die Bestimmung der Anzahl möglicher Überdeckungen der zugrundeliegenden Struktur durch sogenannte Dimere zurückführen. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe.

Unter einem n -Quader verstehen wir ein d -dimensionales Parallelepipèd vom Volumen n , dessen Kanten die ganzzahligen Längen a_1, \dots, a_d haben. Einen 2-Quader nennen wir Dimer.

Beispiel: 2-dimensionaler 16-Quader



Zur Bestimmung der Anzahl $f_\alpha, \alpha = (a_1, \dots, a_d)$, der Möglichkeiten einen n -Quader (n ist natürlich immer gerade) mit Dimeren zu überdecken, wurde von J.M. Hammersley [16] die folgende Vorgangsweise gewählt:

Wir teilen den n -Quader in n Einheitswürfel t_1, \dots, t_n und färben diese so schwarz und weiß, daß benachbarte Würfel verschieden gefärbt sind. Mit T_i bezeichnen wir die Menge der zu t_i benachbarten Würfel und mit B die Inzidenzmatrix zu T_1, \dots, T_n . In dieser Inzidenzmatrix sind die Zeilen- und Spaltensummen höchstens $2d$, wobei die Gleichheit nur dann nicht gilt, wenn es sich um einen am Rand des n -Quaders gelegenen Würfel handelt.

Nun sei σ eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ so, daß

$$(4) \quad \prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)} = 1$$

gilt, d.h. die Würfel t_i und $t_{\sigma(i)}$ sind für alle $i, 1 \leq i \leq n$, benachbart. Wir überdecken nun die Würfel t_i und $t_{\sigma(i)}$ mit einem schwarzen (weißen) Dimer falls t_i schwarz (weiß) gefärbt ist. Da es $\frac{n}{2}$ weiße und schwarze Würfel gibt, werden auf diese Art alle Einheitswürfel, und somit der n -Quader, mit Dimeren überdeckt. Es gibt also zu jedem positiven Produkt der Art (4) zwei Überdeckungen des n -Quaders mit Dimeren.

Umgekehrt ergeben je zwei Überdeckungen ein positives Produkt in (4). Summieren wir jetzt über alle möglichen Permutationen σ so erhalten wir

$$\sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)} = \text{per } B = f_{\alpha}^2.$$

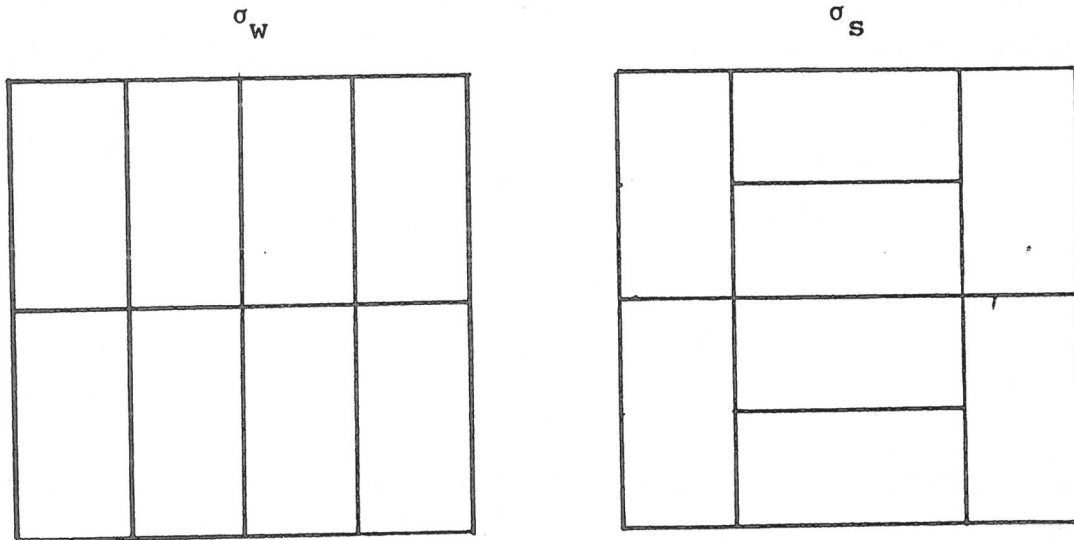
Zur Veranschaulichung dieser Argumentation das folgende Beispiel:

t_1	\bar{t}_2	t_3	\bar{t}_4
\bar{t}_5	t_6	\bar{t}_7	t_8
t_9	\bar{t}_{10}	t_{11}	\bar{t}_{12}
\bar{t}_{13}	t_{14}	\bar{t}_{15}	t_{16}

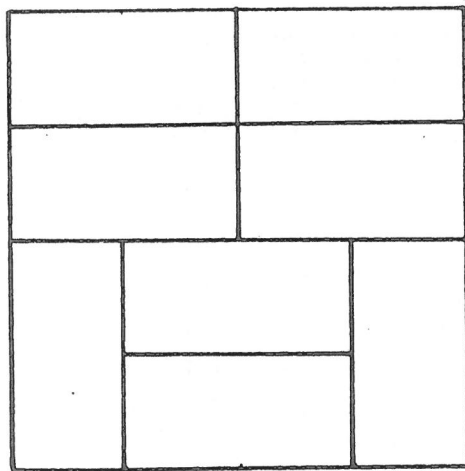
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 4 & 13 & 11 & 15 & 16 & 9 & 10 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_w = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 & 9 & 11 & 14 & 16 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 13 & 15 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 10 & 12 & 13 & 15 \\ 3 & 8 & 1 & 6 & 11 & 16 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$



Nun wählen wir σ_w wie in der obigen Skizze und σ_s beliebig: z.B.:



$$\sigma_s = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 13 & 10 & 15 & 12 \\ 1 & 3 & 6 & 8 & 9 & 11 & 14 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 & 8 & 4 & 13 & 11 & 15 & 16 & 9 & 10 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

und erhalten daraus diese neue Permutation σ' .

Hammersley [16] zeigte, daß für $a_i \rightarrow \infty$ (für alle $i, 1 \leq i \leq d$) der Ausdruck $\frac{1}{n} \ln f_\alpha$ gegen einen Grenzwert λ_d strebt. Das Problem besteht nun darin, λ_d für $d \geq 3$ zu berechnen. Nach Hammersley gelten die Ungleichungen

$$(6) \quad \frac{1}{4\pi^d} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \ln \left\{ 4 \prod_{i=1}^d \sin^2 \theta_i \right\} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_d \leq \lambda_d \leq \frac{1}{2} \ln d.$$

Für $d=3$ erhält man daraus $0.41835 \leq \lambda_d \leq 0.54931$. Bessere Schranken für λ_d erhalten wir unter Verwendung von Permanentenungleichungen. Die folgenden Überlegungen wurden ebenfalls bereits von Hammersley angestellt, wobei er seine Abschätzungen allerdings nur vorbehaltlich der Richtigkeit der van der Waerden-Vermutung angeben konnte:

Man identifiziert gegenüberliegende Seiten des n -Quaders und erhält auf diese Art einen "Torusquader". Damit werden alle Einheitswürfel zu inneren Würfeln und die dazugehörige Inzidenzmatrix \bar{B} hat in jeder Zeile und Spalte genau $2d$ Einsen. Berechnen wir nun per \bar{B} so erhalten wir anstelle von f_α einen Wert $\bar{f}_\alpha \geq f_\alpha$. Hammersley hat aber gezeigt, daß

$$\lim_{a_i \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \bar{f}_\alpha = \lim_{a_i \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln f_\alpha = \lambda_d.$$

Somit können wir zur Bestimmung der unteren Schranke für λ_d den Satz von Falikman - Egorychev auf \bar{B} anwenden und erhalten

$$\lambda_d \geq \frac{1}{2} \ln d - 0.153.$$

Diese Abschätzung ist allerdings nur für $d \geq 4$ besser als jene Schranke die Hammersley mit (6) erhielt.

Würde für die Permanente von Matrizen aus Λ_n^k jene untere Schranke bewiesen werden können, die in [32] (siehe auch Abschnitt 3 in dieser Arbeit) vorgeschlagen wurde, so könnte nach Minc [26] die untere Schranke für λ_3 auf $0.4400758 \dots$ verbessert werden

Als obere Schranke für λ_d erhalten wir mit der ebenfalls bereits früher verwendeten oberen Schranke für Matrizen aus Λ_n^k die folgende Beziehung:

$$f_{\alpha}^2 = \text{per } B \leq \text{per } \bar{B} \leq ((2d)!)^{n/(2d)}$$

$$f_{\alpha} \leq ((2d)!)^{n/(4d)}$$

$$\lambda_d = \lim_{a_i \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln f_{\alpha} \leq \frac{1}{4d} \ln (2d)! = \frac{1}{2} \ln((2d)!)^{1/2d}$$

Wegen $((2d)!)^{1/2d} < d$ für alle $d \geq 3$ ist diese Ungleichung, besser als jene, die Hammersley mit (6) erhielt. Für $d=3$ haben wir z.B.:

$$\lambda_3 \leq 0.54827.$$

5. Die Abzählung nichtisomorpher Steinerscher Tripelsysteme.

S sei wieder eine n -Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 3$. Ein Steinersches Tripelsystem (STS) S_n der Ordnung n ist eine Menge von dreielementigen Teilmengen (Tripeln) von S so, daß jede zweielementige Teilmenge von S in genau einem Tripel enthalten ist.

Beispiele: $S_3 = \{\{1, 2, 3\}\}$

$$S_7 = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \\ \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\}$$

Wir wollen uns zuerst überlegen, zu welchen n ein STS existiert. Dazu betrachten wir ein beliebiges S_n mit b Tripeln. Nun können aus einer n -elementigen Menge $\binom{n}{2}$ verschiedene Paare (wir unterscheiden (x_i, x_j) und (x_j, x_i) nicht) gebildet werden. Jedes dieser Paare ist in genau einem Tripel enthalten, umgekehrt können aus den Elementen eines Tripels genau 3 Paare gebildet werden. Es gilt also

$$\binom{n}{2} = 3b \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{n(n-1)}{6}.$$

Nun wählen wir ein festes x_i . Natürlich ist x_i in genau $n-1$ Paaren enthalten. Ist x_i im Tripel T_j enthalten, so können 2 Paare aus den Elementen von T_j gebildet werden, die x_i enthalten.

x_i ist also in

$$r = \frac{n-1}{2}$$

Tripeln enthalten. r und b sind ganze Zahlen, folglich gilt

$$(7) \quad n \equiv 1 \pmod{6} \quad \text{oder} \quad n \equiv 3 \pmod{6}.$$

Ein STS S_n existiert also nur dann wenn (7) gilt. Die Inzidenzmatrix von T_1, \dots, T_b ist also eine $b \times n$ - Matrix mit genau 3 Einsen in jeder Zeile und r Einsen in jeder Spalte. Zwei STSe S_n und S_n' nennen wir isomorph, wenn ihre Inzidenzmatrizen durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen ineinander überföhrbar sind.

R.M. Wilson [39] ermittelte für die Anzahl $N(n)$ nichtisomorpher STSe der Ordnung n die folgenden Schranken:

$$(e^{-5}n)^{n^2/12} \leq N(n) \leq (e^{-1/2}n)^{n^2/6}, \quad n \geq 7.$$

Nun gelang es Wilson die untere Schranke mit der Anzahl $L(n)$ der lateinischen Quadrate in Verbindung zu bringen, was unter Verwendung des Satzes von Falikman-Egorychev zur besseren Abschätzung

$$N(n) \geq (e^{-5}n)^{n^2/6}$$

föhrte.

Dazu wäre zu bemerken, daß Wilson diese Abschätzung durchföhrte, bevor die Richtigkeit der van der Waerden-Vermutung bewiesen war, was ja auch bei der Bestimmung der charakteristischen Konstanten im Dimerenproblem der Fall war. Unter Verwendung der Vermutung von Schrijver und Valiant (siehe vorangehendes Kapitel) könnte natürlich auch die untere Schranke für $N(n)$ weiter verbessert werden.

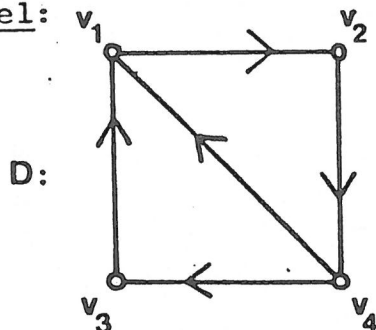
6. Die Abzählung von 1-Faktoren von Graphen

Einige Zusammenhänge bestehen zwischen der Permanenten- und Graphentheorie. Dieser und die folgenden drei Abschnitte behandeln einige dieser Verbindungen.

Es sei D ein gerichteter Graph mit n Knoten. Ein linearer Untergraph L ist ein überdeckender Untergraph von D (ein überdeckender Untergraph enthält alle Knoten des Graphen, seine Kantenmenge ist eine Teilmenge der Kantenmenge des Graphen) so, daß von jedem Knoten in L genau eine Kante wegführt und genau eine Kante zu jedem Knoten hinführt. Um die Anzahl der linearen Untergraphen von D bestimmen zu können, benötigen wir die Adjazenzmatrix $A(D) = a_{ij}$ von D , die wie folgt definiert ist:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn die Kante } (v_i, v_j) \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:



$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nun gehört zu jedem positiven Produkt in der Permanentenentwicklung von $A(D)$ natürlich ein linearer Untergraph, umgekehrt erhält man für jeden linearen Untergraphen ein positives Produkt in der Permanentenentwicklung von $A(D)$. Die Anzahl der linearen Untergraphen ist also durch $\text{per } A(D)$ gegeben.

Ein komplizierteres Problem ist die Bestimmung der Anzahl der 1-Faktoren von Graphen. Ein 1-Faktor ist ebenfalls ein überdeckender Untergraph eines Graphen G , in dem aber jeder Knoten den Grad 1 hat. Ein 1-Faktor F ist also eine Menge von disjunkten Kanten von G so, daß jeder Knoten mit genau einer Kante von F inzidiert. Klarerweise gibt es höchstens dann 1-Faktoren, wenn die Knotenanzahl von G gerade ist (ob der Graph gerichtet oder ungerichtet

ist, spielt keine Rolle). Ein 1-Faktor repräsentiert dann aber auch eine Permutation, die aus k disjunkten Transpositionen besteht. Wir erhalten also die Anzahl $\mu(G)$ der 1-Faktoren eines Graphen G mit $2k$ Knoten durch

$$(8) \quad \mu(G) = \sum_{\sigma \in T} \prod_{i=1}^{2k} a_{i\sigma(i)}$$

wobei über die Menge T aller $(2k)!/(2^k k!)$ Permutationen summiert wird, die als Produkt von k Transpositionen darstellbar sind. Der unter (8) angeführte Ausdruck stellt gleichzeitig die Definition einer Matrizenfunktion dar, die von Caianiello ([4], [5]) eingeführt wurde, und die wir hafnesches Aggregat nennen. Es gilt also

$$\mu(G) = \text{haf } A(G).$$

Es gibt allerdings keine effiziente Methode $\text{haf } A(G)$ auszurechnen. Für symmetrische, nichtnegative Matrizen M (die Adjazenzmatrizen ungerichteter Graphen erfüllen diese Voraussetzungen) konnte Gibson [11] einen Zusammenhang zwischen $\text{haf } M$ und $\text{per } M$ herstellen. Er zeigte, daß

$$\text{haf } M \leq \sqrt{\text{per } M}.$$

Somit gilt auch

$$\mu(G) \leq \sqrt{\text{per } A(G)} \leq \prod_{i=1}^{2k} (r_i!)^{1/2 r_i}$$

wobei r_i die Zeilensumme der i -ten Zeile von $A(G)$ (das ist die Anzahl der zum Knoten v_i inzidenten Kanten) ist.

Ein bipartiter Graph $G(V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E ist wie folgt definiert:

V kann so in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden, daß die Kanten von E nur Knoten aus V_1 mit Knoten von V_2 verbinden.

Ist $G(V, E)$ mit $|V|=2k$ und $|V_1|=|V_2|=k$ ein bipartiter Graph, so kann seine Adjazenzmatrix wie folgt dargestellt werden:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & C(G) \\ C(G)^T & 0 \end{bmatrix}, \text{ wobei } C(G) \text{ eine } k \times k \text{-}(0,1)\text{-Matrix ist.}$$

Man sieht leicht, daß in diesem Fall

$$\text{haf } A(G) = \text{per } C(G) = \sqrt{\text{per } A(G)}$$

gilt, eine Beziehung die im Abschnitt 8 noch eine gewisse Rolle spielen wird.

7. Die Anzahl eulerscher Orientierungen von Graphen

Ausgehend vom Königsberger Brückenproblem hat Euler 1736 folgende Frage gestellt und beantwortet:

Wann kann man in einem ungerichteten Graphen $G(V,E)$ einen Weg finden, der jede Kante genau einmal enthält und im Ausgangsknoten endet?

Euler hat gezeigt, daß dies genau dann möglich ist, wenn jeder Knoten von G geraden Grad hat. Erfüllt ein Graph diese Bedingung so sprechen wir von einem eulerschen Graphen.

Nun sei $G(V,E)$ ein ungerichteter eulerscher Graph. Orientieren wir die Kanten von G so, daß für jeden Knoten des orientierten Graphen der Eingangsgrad gleich dem Ausgangsgrad ist, so sprechen wir von einer eulerschen Orientierung von G . Die Anzahl der eulerschen Orientierungen bezeichnen wir mit $\epsilon(G)$. Für $2k$ -reguläre Graphen mit n Knoten hat Schrijver [31] folgende Schranken angegeben:

$$(2^{-k} \binom{2k}{k})^n \leq \epsilon(G) \leq (\sqrt{\binom{2k}{k}})^n.$$

Der Zusammenhang mit der Permanententheorie ist hier auf folgende Art gegeben:

Es sei $B(G)$ die Inzidenzmatrix des Graphen $G(V,E)$ wobei $|E| = m$ und $|V| = n$ (hier ist V die zugrundeliegende n -Menge und die Kanten sind die in der allgemeinen Definition der Inzidenzmatrix verwendeten Teilmengen). Aus $B(G)$ bilden wir die Matrix $B^*(G)$ indem wir jede Spalte k -mal wiederholen (G ist $2k$ -regulär). Somit ist $B^*(G)$ eine mxm -Matrix. Dann gilt

$$\epsilon(G) = \frac{\text{per } B^*(G)}{(k!)^n}.$$

Nachdem G $2k$ -regulär ist, gilt auch $B^*(G) \in \Lambda_m^{2k}$. Somit können wir wieder die bekannte Ungleichung von Bregman verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \epsilon(G) &= \frac{\text{per} B^*(G)}{(k!)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^m ((2k)!)^{1/2k}}{\prod_{i=1}^n k!} \stackrel{(i)}{=} \\ &= \frac{\left(\prod_{i=1}^n ((2k)!)^{1/2k} \right)^k}{\prod_{i=1}^n k!} = \prod_{i=1}^n \frac{(2k!)^{1/2}}{k!} = \prod_{i=1}^n \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \left(\sqrt{\binom{2k}{k}} \right)^n. \end{aligned}$$

(i) gilt, da für $2k$ -reguläre Graphen $m = kn$. Die untere Schranke wird auf rein graphentheoretischem Weg bewiesen und ist besser als jene Schranken, die man mit dem Satz von Falikman-Egorychev oder der Vermutung von Schrijver - Valiant erhält.

8. Die Charakterisierung konvertibler $(0,1)$ -Matrizen

In allen vorhergehenden Abschnitten wurden verschiedene Probleme durch die Verwendung von Ergebnissen aus der Permantentheorie gelöst. In diesem Abschnitt wird der entgegengesetzte Weg beschritten; wir lösen ein Problem aus der Permantentheorie auf graphentheoretischem Wege. Dazu einige Definitionen:

Die $n \times n$ -Matrix $C = A * B$ ist Hadamard-Produkt der beiden $n \times n$ -Matrizen A und B wenn

$$c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}.$$

Einer Fragestellung von Polya [29] folgend, hat Szegö [34] bewiesen, daß es zu jeder $n \times n$ - $(1,-1)$ -Matrix A , $n > 2$, eine $n \times n$ -Matrix M gibt mit

$$(9) \quad \text{per}(M * A) \neq \det M.$$

(9) kann auch in der Form

$$\text{per}(M * A) \neq \det((M * A) * A)$$

geschrieben werden, womit Szegös Ergebnis auch gilt wenn wir (9) durch

$$(10) \quad \text{per} M \neq \det(M * A)$$

ersetzen. Szegö hat eigentlich gezeigt, daß es eine $n \times n$ - $(0,1)$ -Matrix M gibt so, daß für alle $n \times n$ - $(1,-1)$ -Matrizen A die Beziehung

(10) gilt (für alle $n > 2$).

Eine $(0,1)$ -Matrix M nennen wir konvertibel wenn

$$(11) \quad \text{per } M = \det (M^*A)$$

für mindestens eine $(1,-1)$ -Matrix A gilt.

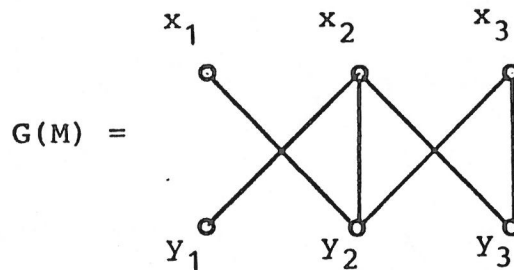
Gibson[12] hat gezeigt, daß konvertible $n \times n$ - $(0,1)$ -Matrizen mindestens $\Omega_n = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ Nullen enthalten. Für jene Matrizen mit genau Ω_n Nullen wurden von Kräuter und Seifter [20] Aussagen über die Anzahl sowie Anordnung der negativen Elemente in M^*A bewiesen.

Little hat nun in [21] die konvertiblen $(0,1)$ -Matrizen mit Hilfe graphentheoretischer Methoden charakterisiert. Dazu mußte er zunächst die Problemstellung in die Graphentheorie "übersetzen", was wir im folgenden nachvollziehen.

Es sei M eine $n \times n$ - $(0,1)$ -Matrix. Der zu M gehörende Graph $G(M)$ hat dann die Knotenmenge $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ wobei x_i genau dann mit y_j durch eine Kante verbunden ist, wenn $m_{ij} = 1$. Der so konstruierte Graph ist natürlich bipartit.

Beispiel:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A(G(M)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nun sei G ein gerichteter Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$
Die $n \times n$ -Matrix $R(G) = (r_{ij})$ ist wie folgt definiert:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (v_i, v_j) \in E(G) \\ -1 & \text{wenn } (v_j, v_i) \in E(G) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$F = \{f_1, \dots, f_k\}$ sei die Menge der 1-Faktoren eines gerichteten Graphen G^* . Dem 1-Faktor

$$f_i = \{(u_{i1}, w_{i1}), (u_{i2}, w_{i2}), \dots, (u_{in}, w_{in})\}, u_{ij}, w_{ij} \in V(G^*), 1 \leq j \leq n,$$

wird ein positives Vorzeichen zugeordnet wenn

$$u_{i1}^{w_{i1}} u_{i2}^{w_{i2}} \dots u_{in}^{w_{in}}$$

eine gerade Permutation von

$$u_{i1}^{w_{i1}} u_{i2}^{w_{i2}} \dots u_{in}^{w_{in}}$$

ist, sonst ein negatives Vorzeichen. Natürlich hängt das Vorzeichen von f_i von der Wahl des 1-Faktors f_1 ab, nicht aber die Partition der 1-Faktoren in 2 Mengen mit demselben Vorzeichen.

Einen ungerichteten Graphen G bezeichnen wir als pfaffschen Graphen wenn die Kanten von G so orientiert werden können, daß alle 1-Faktoren des aus G erhaltenen Graphen G^* dasselbe Vorzeichen haben.

Nun sei M eine $n \times n$ - $(0,1)$ -Matrix und $G = G(M)$. G^* sei ein gerichteter Graph, der aus G durch Orientierung der Kanten entsteht. Wir definieren $M^* = (m_{ij}^*)$ wie folgt:

$$m_{ij}^* = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (x_i, y_i) \in E(G^*) \\ -1 & \text{wenn } (y_j, x_i) \in E(G^*) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt

$$R(G^*) = \begin{bmatrix} 0 & M^* \\ -M^{*T} & 0 \end{bmatrix}$$

wenn wir die Knoten entsprechend nummerieren, und somit

$$|\det R(G^*)| = (\det M^*)^2.$$

Von Cayley [7] wurde gezeigt, daß für schiefssymmetrische Matrizen A die Beziehung

$$(\text{pf}(A))^2 = \det A$$

gilt, wobei $\text{pf}(A)$ das pfaffsche Aggregat von A bezeichnet (dieser Satz wurde von Halton [15] auf rein kombinatorische Art neu bewiesen). Damit erhalten wir

$$|\text{pf } R(G^*)| = |\det M^*|.$$

Kasteleyn [18] hat weiters gezeigt, daß

$$|F| = |\text{pf } R(G^*)|$$

gilt, wenn alle 1-Faktoren von G^* dasselbe Vorzeichen haben. Es gilt also auch

$$(12) \quad |F| = |\det M^*|.$$

Wie bereits an früherer Stelle erwähnt (siehe Kapitel 6) gilt natürlich auch die Beziehung

$$(13) \quad |F| = \text{per } M.$$

Haben also alle 1-Faktoren von G^* dasselbe Vorzeichen so gilt mit (12) und (13) auch

$$|\det M^*| = \text{per } M.$$

Eine $(0,1)$ -Matrix M ist somit genau dann konvertibel, wenn der Graph $G(M)$ pfaffscher Graph ist. Da $G(M)$ bipartit ist, genügt es, die bipartiten pfaffschen Graphen zu charakterisieren. Um den entsprechenden Satz von Little formulieren zu können, benötigen wir noch einige Begriffe.

Es sei $G = G(V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph, f ein 1-Faktor von G . \underline{Gf} ist der Graph der aus G entsteht, wenn wir jede Kante von f so orientieren daß sie von V_1 wegführt, und jede Kante von $E(G) - f$ so orientieren, daß sie zu V_1 hinführt.

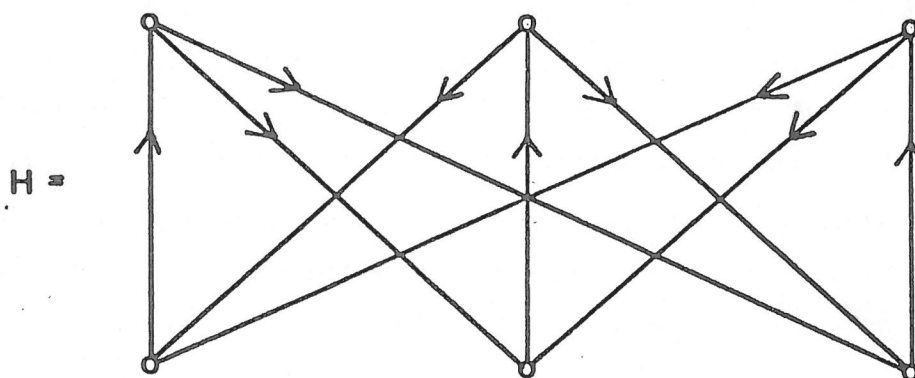
Ersetzen wir in einem Graphen G eine Kante (v_i, v_j) durch zwei Kanten (v_i, w) und (w, v_j) so sprechen wir von einer elementaren Unterteilung der Kante (v_i, v_j) .

Zwei Graphen G und G' sind homöomorph, wenn wir G' und G

durch eine Folge von elementaren Unterteilungen aus demselben Graphen G'' konstruieren können.

Der Satz von Little lautet nun folgendermaßen:

Ein bipartiter Graph G ist genau dann nicht pfaffscher Graph wenn ein 1-Faktor f von G existiert so, daß ein Untergraph von Gf homöomorph zu H ist, wobei



9. Das Permanentenpolynom von Graphen.

Es sei M eine $n \times n$ -Matrix über einem Körper K . Das Permanentenpolynom von M ist dann die Permanente der charakteristischen Matrix:

$$\text{per}(xI-M) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n c_n.$$

Mit $S_{\text{per}}(M)$ bezeichnen wir die Menge der Nullstellen des Permanentenpolynoms (Permanentenwurzeln).

Bevor wir das Permanentenpolynom von Graphen betrachten, wenden wir uns einigen allgemeinen Ergebnissen zu, wobei K immer der Körper der komplexen Zahlen ist.

Von Brenner und Brualdi [3] stammt das folgende Resultat:
 M sei $n \times n$ -Matrix über K mit dem Spektralradius r . Dann gilt

$$S_{\text{per}}(M) \subset \{z \mid |z| \leq r\}.$$

Für normale nx-n-Matrizen M hat Merris [24] bewiesen, daß

$$(14) \quad S_{\text{per}}(M) \subset \{z \mid |z| \leq cr\}$$

wobei $c = (1 + (2n/\pi)^2)^{1/2}$.

Für hermitsche Matrizen mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ wurde in [24] auch gezeigt, daß jede reelle Permanentenwurzel im Intervall $[\lambda_n, \lambda_1]$ liegt. Dies führte zur Vermutung, daß für hermitsche Matrizen die Konstante c in (14) durch 1 ersetzt werden kann.

Von Fiedler (siehe [25]) wurde aber das folgende Gegenbeispiel zu dieser Vermutung gefunden:

Die Matrix $M = 4I_4 - J_4$ ($I_4 \dots 4 \times 4$ -Einheitsmatrix $J_4 \dots 4 \times 4$ -Matrix deren Elemente alle 1 sind) hat das charakteristische Polynom $x(x-4)^3$, aber eine Permanentenwurzel um $\frac{9}{2}$.

Weitere allgemeine Ergebnisse über das Permanentenpolynom einer Matrix M über K sind z.B. in [25] angeführt. Wir wenden uns im folgenden dem Permanentenpolynom

$$\text{per}(xI - A(G))$$

von Graphen zu ($A(G) \dots$ Adjazenzmatrix). Die betrachteten Graphen sind dabei immer endlich und enthalten keine Mehrfachkanten oder Schlingen. Die über das Permanentenpolynom von Graphen bisher bewiesenen Ergebnisse sind im Gegensatz zu den Ergebnissen über das charakteristische Polynom, $\det(xI - A(G))$, noch nicht sehr zahlreich (eine umfangreiche Übersicht über $\det(xI - A(G))$ bietet z.B. [8]). Sehr gute Kenntnis hat man aber bereits über die Koeffizienten des Permanentenpolynoms:

Es sei

$$\text{per}(xI - A(G)) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n c_n.$$

Dann gilt

$$c_i = \sum_H 2^{k(H)}, \quad 1 \leq i \leq n$$

wobei über alle Untergraphen H von G mit i Knoten, deren Komponenten Kanten und Kreise sind, summiert wird. $k(H)$ ist dann jeweils die Anzahl der Kreise in H.

Ein ganz ähnliches Ergebnis kennt man schon lange für das charakteristische Polynom

$$\det(xI - A) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n.$$

Es gilt nämlich

$$a_i = (-1)^i \sum_H (-1)^{r(H)} 2^{k(H)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

wobei H und $k(H)$ wie oben definiert sind. $r(H) = i - c$, wobei c die Anzahl der Komponenten von H ist.

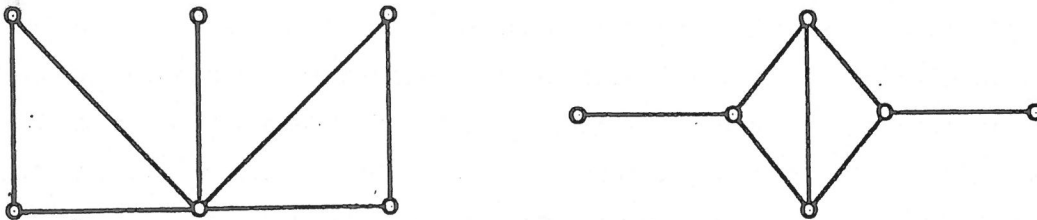
Für Bäume sind die Zusammenhänge noch enger. Es gilt sogar

$$(15) \quad c_i = |a_i|.$$

Unmittelbar einsichtig ist die Tatsache, daß isomorphe Graphen dasselbe charakteristische und dasselbe Permanentenpolynom haben. Nun hat man sich in der Graphentheorie auch mit der umgekehrten Fragestellung beschäftigt.

Kann man aus der Gleichheit der charakteristischen Polynome zweier Graphen G und G' schließen, daß G und G' isomorph sind?

Dies ist im allgemeinen nicht möglich, da z.B. die folgenden beiden nichtisomorphen Graphen dasselbe charakteristische Polynom haben:



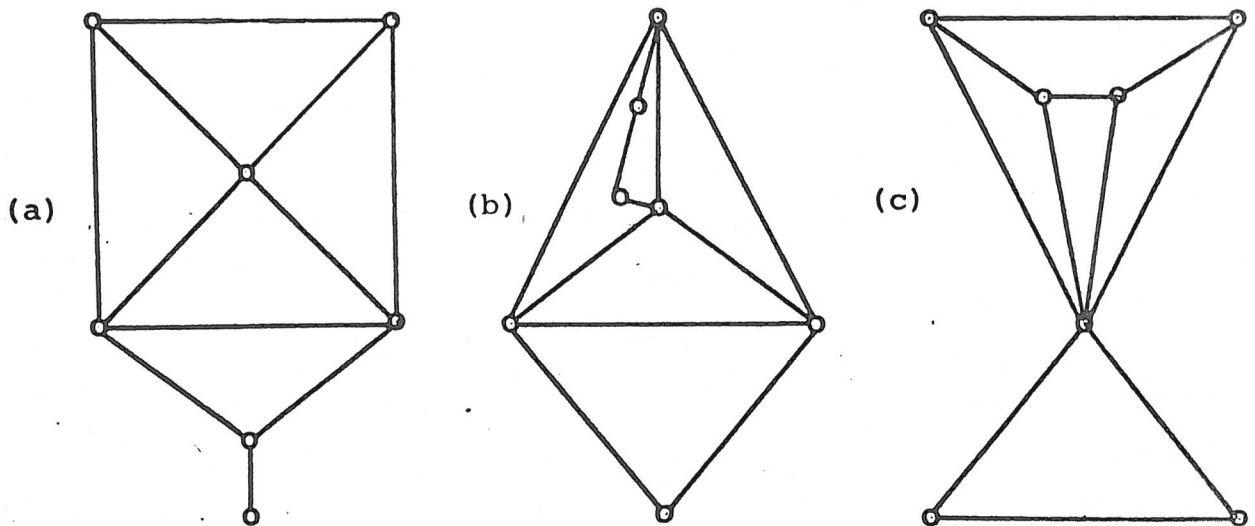
$$\det(xI - A(G)) = \det(xI - A(G')) = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1.$$

Allgemein hat Schwenk [33] für das charakteristische Polynom von Bäumen bewiesen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{t_n} = 0,$$

wobei t_n die Anzahl der Bäume mit n Knoten ist und s_n die Anzahl der Bäume mit n Knoten die zu keinem anderen Baum kospektral sind.

Nun kann man dieselbe Fragestellung auch vom Permanentenpolynom aus betrachten. Wegen der Beziehung (15) ist aber sofort klar, daß das Ergebnis von Schwenk auf das Permanentenpolynom übertragbar ist. Allerdings haben z.B. die beiden oben angegebenen kospektralen Graphen mit 6 Knoten verschiedene Permanentenpolynome. Dies gilt auch für die drei folgenden kospektralen Graphen mit 7 Knoten:



Turner [35] hat aber zwei nichtisomorphe kospektrale Graphen mit 9 Knoten gefunden, die auch dasselbe Permanentenpolynom haben. Das Permanentenpolynom dürfte für Untersuchungen bzgl. des Isomorphieproblems also zwar geringfügig, aber nicht grundlegend besser geeignet sein als das charakteristische Polynom.

Von Johnson und Newman [17] wurde das charakteristische Polynom der Matrix $A_y(G)$ untersucht, wobei $A_y(G)$ wie folgt definiert ist:

Jede Null in $A(G)$ wird durch eine Eins, jede Eins durch eine Variable y ersetzt.

Nun hatten die beiden kospektralen Graphen mit 6 Knoten wohl verschiedene charakteristische Polynome, wenn $A(G)$ durch $A_y(G)$ ersetzt wurde, nicht aber die beiden mit (a) bzw. (b) bezeichneten Graphen mit 7 Knoten. Untersuchungen über $\text{per}(xI - A_y(G))$ wurden bisher noch nicht angestellt.

Weitere Ergebnisse gibt es noch für das Permanentenpolynom der Laplace-Matrix $L(G)$ eines Graphen, wobei $L(G) = D(G) - A(G)$, wenn

$D(G)$ jene Matrix ist, die in der Hauptdiagonale die Grade der Knoten enthält (sonst 0).

Nun sei H ein echter Untergraph von G , mit

$$\text{per}(xI-L(H)) = x^k - b_1 x^{k-1} + b_2 x^{k-2} - \dots + (-1)^k b_k.$$

Dann gilt

$$c_i > b_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq k$$

und

$$c_{n-j} > b_{k-j} \quad \text{für } 0 \leq j \leq k,$$

wobei die c_s , $1 \leq s \leq n$, die Koeffizienten des Permanentenpolynoms von G sind.

In [24] hat R. Merris einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms und des Permanentenpolynoms der Laplace-Matrix von Bäumen hergestellt. Zur Formulierung des entsprechenden Ergebnisses benötigen wir noch einige neue Begriffe.

Es sei $G = G(V, E)$ und $[V, E] = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in e\}$. Zwei geordnete Paare (v_1, e_1) und (v_2, e_2) aus $[V, E]$ nennen wir überlappend wenn $v_1 = v_2$ oder $e_1 = e_2$. Eine Teilmenge $X \subset [V, E]$ nennen wir nicht-überlappend, wenn sich die Elemente von X paarweise nicht überlappen. Wenn $z \in E$ so ist

$$[V \setminus z, E] = \{(v, e) \in [V, E] \mid v \notin z\}.$$

Für jedes k bestimmen wir jetzt Werte $c_{k,t}(G)$ wobei $1 \leq t \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Dazu bilden wir $X = \prod_{j=1}^t [V \setminus z_j, E]$. $c_{k,t}(G)$ ist dann die Anzahl der $(k-2t)$ -elementigen nicht überlappenden Teilmengen von X (im Fall $t = k/2$ ist $c_{k,t}(G)$ die Anzahl der Mengen mit $k/2$ paarweise disjunkten Kanten).

Nun sei T ein Baum mit n Knoten und

$$\det(xI-L(T)) = x^n - d_1 x^{n-1} + d_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n d_n$$

$$\text{per}(xI-L(T)) = x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n.$$

Dann gilt

$$p_k = d_k + \sum_{t=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^t c_{k,t}(T).$$

Für die Permanente der Laplace-Matrix wurden in [23] bzw. [25]

auch obere und untere Schranken angegeben. Ist G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, so gilt

$$2(n-1) \leq \text{per}L(G) \leq n! \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-r} n^r}{r!},$$

wobei die Gleichheit nach unten genau dann gilt, wenn G ein Stern ist (ein Stern mit n Knoten ist ein vollständiger bipartiter Graph mit $|V_1| = 1$ und $|V_2| = n-1$). In der Abschätzung nach oben gilt Gleichheit genau dann, wenn G der vollständige Graph mit n Knoten ist.

LITERATUR

- [1] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge Univ. Press, 1974.
- [2] L.M. Bregman, Certain properties of nonnegative matrices and their permanents, Soc. Mathematics Doklady 14 (1973), 945-949.
- [3] J.L. Brenner, R.A. Brualdi, Eigenschaften der Permanentenfunktion, Arch. Math. 18 (1967), 585-586.
- [4] E.R. Caianiello, On quantum field theory, I. Explicit solution of Dyson's equation in electrodynamics without use of Feynman graphs, Nuovo Cimento (9) 10 (1953), 1634-1652.
- [5] E.R. Caianiello, Proprieta pfaffiani e hafniani, Ricerca, Napoli 7 (1956), 25-31.
- [6] E.R. Caianiello, Regularization and renormalization, I, Nuovo Cimento (10) 13 (1959), 637-661.
- [7] A. Cayley, Sur les determinants gauches, Crelle's J. 38 (1847), 93-96.
- [8] D.M. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, Spectra of Graphs, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1980.
- [9] G.P. Egorychev, The solution of van der Waerden's problem for permanents, Adv. in Math. 42 (1981), 299-305.
- [10] D.I. Falikman, Proof of the van der Waerden conjecture regarding the permanent of a doubly stochastic matrix, Math. Notes of the Acad. of Sciences of the USSR 29 (1981), 475-479.
- [11] P.M. Gibson, Combinatorial matrix functions and 1-factors of graphs, SIAM J. Appl. Math. 19 (1970), 330-333.
- [12] P.M. Gibson, Conversion of the permanent into the determinant, Proc. Amer. Math. Soc. 27 (1971), 471-476.
- [13] B. Gyires, On the permanent - derivatives of doubly stochastic matrices, Demonstration Math. 6 (1973), 83-85.

- [14] M. Hall jr., Distinct representatives of subsets, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 922-926.
- [15] J. Halton, A combinatorial proof of Cayley's theorem on pfaffians, J. Comb. Theory 1 (1966), 224-232.
- [16] J.M. Hammersley, An improved lower bound for the multi-dimensional dimer problem, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968), 455-463.
- [17] C.R. Johnson, M. Newman, A note on cospectral graphes, J. Comb. Th. Ser. B 28 (1980), 96-103.
- [18] P.W. Kasteleyn, Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press, New York, 1967.
- [19] D. König, Über Graphen und ihre Anwendungen auf Determinanten und Mengenlehre, Math. Annalen 77 (1916), 453-465.
- [20] A.R. Kräuter, N. Seiffter, On convertible $(0,1)$ -matrices J.Lin. Multilin. Algebra 13 (1983), 311-322.
- [21] C.H.C. Little, A characterization of convertible $(0,1)$ -matrices, J. Comb. Theory (B) 18 (1975), 187-208.
- [22] H.B. Mann, H.J. Ryser, Systems of distinct representatives Americ. Math. Monthly 60 (1953), 397-401.
- [23] R. Merris, The laplacian permanental polynomial for trees, Czechosl. Math. J. 32 (107) (1982), 397-403.
- [24] R. Merris, Two problems involving Schur functions, Lin. Alg. a. Appl. 10 (1975), 155-162.
- [25] R. Merris, K.R. Rebman, W. Watkins, Permanental Polynomials of Graphs, Lin. Alg. a. Appl. 38 (1981), 273-288.
- [26] H. Minc, Theory of Permanents 1978-1981, Linear and Multilinear Alg. 12 (1983), 227-263.
- [27] H. Minc, Upper bounds for permanents of $(0,1)$ -matrices, Bull. Americ. Math. Soc. 69 (1963), 789-791.

- [28] J.K. Percus, *Combinatorial Methods*, Appl. Math. Sciences, Vol. 4, Springer, New York, (1971).
- [29] G. Polya, Aufgabe 424, Arch. Math. Phys. 20 (1913), 271.
- [30] A. Schrijver, A short proof of Minc's conjecture, J. Comb. Theory (A) 25 (1978), 80-83.
- [31] A. Schrijver, Bounds on permanents, and the number of 1-factors and 1-factorizations of bipartite graphs, *Surveys in Combinatorics*, Lect. Notes London Math. Soc. 82 (1983), 107-134.
- [32] A. Schrijver, W.G. Valiant, On lower bounds for permanents, Indag. Math. 42 (1980), 425-427.
- [33] A.J. Schwenk, Almost all trees are cospectral, *New Directions in Graph Theory*, Academic Press (1973).
- [34] G. Szegö, Lösung zu 424, Arch. Math. Phys. 21 (1913), 291-292.
- [35] J. Turner, Generalized matrix functions and the graph isomorphism problem, SIAM J. Appl. Math. 16 (1968), 520-526.
- [36] M. Voorhoeve, A lower bound for the permanents of certain $(0,1)$ -matrices, Indag. Math. 41 (1979), 83-86.
- [37] B.L. van der Waerden, Aufgabe 45, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 35 (1926), 117.
- [38] H.S. Wilf, A mechanical counting method and combinatorial applications, J. Comb. Theory 4 (1968), 246-258.
- [39] R.M. Wilson, Nonisomorphic Steiner Triple Systems, Math. Zeitschr. 135 (1974), 303-313.