Dimension von Summen von Graphen

P. Alles, TH Darmstadt

Für einen Graphen G bezeichne dim G die kleinste natürliche Zahl n derart, daß G ein (induzierter) Untergraph des n-fachen direkten Produktes vollständiger Graphen ist. $\chi(G)$ sei die (ecken-)chromatische Zahl von G; für zwei Graphen G,H ist die Summe G+H deren disjunkte Vereinigung.
Die Dimension von Summen von Graphen ist in [1] und [2] untersucht worden. Das folgende Theorem ist die Verallgemeinerung dieser Ergebnisse.

<u>Theorem:</u> Seien $G_1,\ldots,G_m$ beliebige Graphen, $d=\max\{\dim G_i \mid 1\le i\le m\}$, $n=\max\{\chi(G_i)\mid 1\le i\le m\}$ und sei $\underline{n}$ die kleinste Primzahlpotenz größer oder gleich n. Dann gilt:

$$\dim \sum_{i=1}^{m} G_i \le d+1+(\underline{n}-1)\lceil \log_{\underline{n}} m\rceil.$$

Der Beweis verwendet die Tatsache, daß q-1 paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung q existieren, wenn q eine Primzahlpotenz ist. Diese Quadrate werden dann zu größeren Matrizen zusammengesetzt, die die folgende "Überdeckungseigenschaft" besitzen:
Seien $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ zwei $n\times r$-Matrizen, $n\le r$ und $1\le a_{ij},b_{ij}\le n$ für alle i,j, so haben A und B die <u>Überdeckungseigenschaft</u>, wenn für beliebige $k,l\in\{1,\ldots,n\}$ Indizes i,j so existieren, daß $(k,l)=(a_{ij},b_{ij})$.
Ein wichtiges Hilfsmittel im Beweis ist der
<u>Satz</u> (Prop. 1.3 in [3]): Die Dimension von G ist die kleinste Anzahl von Äquivalenzrelationen $E_1,\ldots,E_n$ so, daß

$$E(\overline{G}) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{und} \quad \Delta = \bigcap_{i=1}^{n} E_i.$$

($\overline{G}$ ist der komplementäre Graph zu G.)

Literatur:

[1] P. Křivka, Dimension of the Sum of two copies of a Graph, Czechoslovak Math. J. 31(1981), 514-520

[2] S. Poljak & V. Rödl, Orthogonal partitions and covering of graphs, Czechoslovak Math. J. 30(1980), 475-485

[3] J. Nešetřil & A. Pultr, A Dushnik-Miller type Dimension of Graphs, LN in Comp. Sci. 50, 482-483

[4] L. Lovász, J. Nešetřil & A. Pultr, On a Product Dimension of Graphs, JCT B 29(1980), 47-67