Homologische Methoden in der Theorie der Hyperkarten

von

Antonio Machi

Das Ziel dieses Vortrags ist, einen Beweis der Riemann-Hurwitzschen Formel für Hyperkarten unter Verwendung von homologischen Methoden zu bringen. Die Beweise werden nur skizziert; vollständige Beweise kann man in der Arbeit [2] finden. Für die Definition und die Eigenschaften einer Hyperkarte vergleiche man den Vortrag von R. Cori in diesem Tagungsband.

Es sei (σ,α) eine Hyperkarte auf $B = \{1,2,\ldots,n\}$. Wir betrachten einen Vektorraum W mit Basis B und die Fixpunktteilräume V,E und F von σ , α bzw. $\alpha\sigma$. Diese Teilräume sind offenbar von der Dimension $\rho(V) = z(\sigma)$, $\rho(E) = z(\alpha)$ und $\rho(F) = z(\alpha\sigma)$.

Folgender Hilfssatz folgt leicht aus der Transitivität der Gruppe $<\sigma,\alpha>$.

<u>Hilfssatz 1:</u> <u>Es ist $V \cap E = V \cap F = E \cap F$, und dieser Teilraum hat die Dimension 1.</u>

Ist $(\sigma;\alpha)$ eine Hyperkarte, so ordnen wir ihr einen Kettenkomplex folgenderweise zu. Für eine beliebige Permutation β sei $\underline{\beta}_k$ der Vektor, der aus der Summe der Elemente im Zyklus von β , zu dem k gehört, gebildet wird. Wir definieren eine Abbildung

$$\phi : W \to V$$

durch

$$\phi(i) = \underline{\sigma}_i - \underline{\sigma}_{\alpha(i)} , \quad i \in B .$$

Man zeigt leicht, daß E und F im Kern von ϕ enthalten sind. Dabei ist folgendes kommutative Diagramm definiert:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "j"] \arrow[dr, dashed, "\partial_2"'] & W \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"] & V \\
& W/E \arrow[ur, dashed, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$(\partial_1 p = \phi,\ \partial_2 = pj)$. Setzen wir $C_o = V$, $C_1 = W/E$ und $C_2 = F$, so haben wir den Kettenkomplex:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_o$$

wobei $\partial_1 \partial_2 = 0$ ist. Seien K_i und I_i , i = 1,2 der Kern und das Bild von ∂_i . Dann ist $K_2 = F \cap E$. Nach Hilfssatz 1 gilt dann $\rho(K_2) = 1$, also folgt $\rho(I_2) = z(\alpha\sigma) - 1$.

Hilfssatz 2: Es ist $\rho(I_1) = z(\sigma) - 1$.

Satz 1: Ist g das Geschlecht von (σ,α), so ist $\rho(K_1/I_2) = 2g$.

Wir setzen $H_o = C_o/I_1$, $H_1 = K_1/I_2$ und $H_2 = K_2$. Diese Vektorräume sind von der Dimension 1, 2g und 1 .

Es sei nun η ein Automorphismus von (σ,α). Dann zeigt man leicht, daß die Teilräume V,E und F η-zulässig sind und daß η auf H_o,H_1 und H_2 eine lineare Abbildung bewirkt. Insbesondere ist die von η auf H_o und H_2 bewirkte Abbildung die identische Abbildung.

Durch Verwendung der Hopfschen Spurformel:

$$Sp(\eta|_{H_2}) - Sp(\eta|_{H_1}) + Sp(\eta|_{H_o}) = Sp(\eta|_{C_2}) - Sp(\eta|_{C_1}) + Sp(\eta|_{C_o})$$

ergibt sich:

Satz 2: Es sei $\eta \neq 1$ ein Automorphismus von (σ,α). Dann ist:

(1) $$Sp(\eta|_{H_1}) = 2 - (\chi_o+\chi_1+\chi_2)$$

wobei χ_o,χ_1 bzw. χ_2 die Zahl der Zyklen von σ,α bzw. $\alpha\sigma$ ist, die η festläßt.

Bemerkung: Für den Fall, daß (σ,α) eine Karte (d.h. α eine fixpunktfreie Involution) und W ein Z-Modul ist, kann man Satz 2 schon in [1] bewiesen finden.

Wir sind nun in der Lage, die Riemann-Hurwitzsche Formel für Hyperkarten zu beweisen. Angenommen, es sei die Charakteristik des Grundkörpers kein Teiler der Ordnung der Automorphismengruppe G von (σ,α) .

Hilfssatz 3: Der Fixpunktteilraum von G auf H_1 hat die Dimension:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\eta \in G} Sp(\eta|_{H_1}) = 2\gamma$$

wobei γ das Geschlecht der Faktorhyperkarte nach G ist.

Hauptsatz: (Die Riemann-Hurwitzsche Formel). Seien H = (σ,α) eine Hyperkarte, G eine Automorphismengruppe von H, g das Geschlecht von H, γ das Geschlecht der Faktorhyperkarte von H nach G, $\chi(\eta)$ die Zahl der Zyklen von σ,α und $\alpha\sigma$ die η festläßt. Dann gilt:

$$2g - 2 = |G|(2\gamma - 2) + \sum_{1 \neq \eta \in G} \chi(\eta)$$

Beweis: Summiert man (1) über die Elemente $1 \neq \eta \in G$, so erhält man

$$\sum_{1 \neq \eta \in G} Sp(\eta|_{H_1}) = 2(|G| - 1) - \sum_{1 \neq \eta \in G} \chi(\eta) .$$

Nach $Sp(1) = 2g$, gilt dann:

$$\sum_{\eta \in G} Sp(\eta|_{H_1}) = 2(|G| - 1) - \sum_{1 \neq \eta \in G} \chi(\eta) + 2g .$$

Die Behauptung folgt aus Hilfssatz 3.

Literatur

[1] N. Biggs, The symplectic representation of a map automorphism, Bull. London Math. Soc. 4 (1972), 303-306.

[2] A. Machi, Homology of Hypermaps, erscheint in Journal of the London Math. Soc.