# EINFACHE IRRFAHRTEN AUF RADIALEN BÄUMEN

Wolfgang WOESS, Leoben

Wir betrachten lokalendliche, abzählbar unendliche Bäume $T(V,E)$. Die <u>einfache Irrfahrt auf T</u> ist die Markoffkette mit Zustandsraum $V$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{x,y}$, $x,y \in V$, gegeben durch

$$p_{x,y} = 1/d(x) \text{ , falls } [x,y] \in E \text{ ; } \quad p_{x,y} = 0 \text{ , sonst.}$$

Dabei bezeichnet $d(x)$ den Grad von $x$. Für $e, x \in V$ sei

$$p_{e,x}^{(n)} = \text{Wahrscheinlichkeit } [\, e \to x \text{ in } n \text{ Schritten} \,] \ .$$

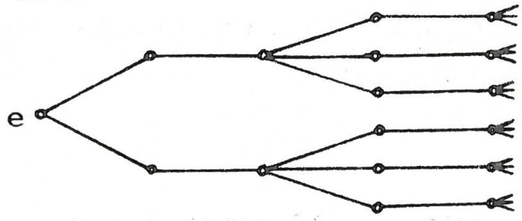
Wir interessieren uns für das asymptotische Verhalten von $p_{e,x}^{(n)}$, $n \to \infty$ ("<u>lokale Grenzwertsätze</u>").

Ein <u>radialer Baum</u> ($\mathbb{N}$-Baum) hat die folgende Eigenschaft:

$T$ bestitzt einen ausgezeichneten Knoten $e$, sodaß für $x \in V$ der Grad $d(x) = d_k$ nur von $k = \mathrm{dist}(e,x)$ abhängt.

Ein <u>periodischer Baum</u> ist ein radialer Baum, wo die Folge der Grade $(d_k)_{k \geq 1}$ periodisch ist.

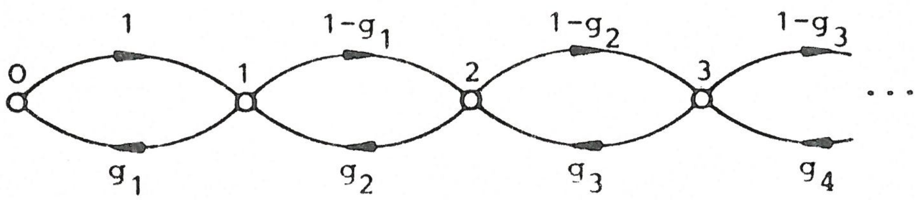
Beispiel eines radialen Baumes ($d_0=2$, $d_1=2$, $d_2=3$, $d_3=2$, $d_4=4,\ldots$) :




Die einfache Irrfahrt auf einem radialen Baum $T$ kann zu einer Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{0,1} = 1 \text{ ; } p_{k,k-1} = g_k \text{ , } p_{k,k+1} = 1-g_k \quad \text{für } k \geq 1$$

$(0 < g_k < 1)$ reduziert werden, und zwar: $g_k = 1/d_k$ , $k \geq 1$ .




Für $x \in V_k = \{\, y \in T \mid \mathrm{dist}(e,y) = k \,\}$ ist

$$\underset{\text{(in T)}}{p_{e,x}^{(n)}} = \underset{\text{(auf } \mathbb{N}_0\text{)}}{p_{0,k}^{(n)} / |V_k|}$$

Für die Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ seien

$$p_{0,0}^{(n)} = W[\,0 \to 0 \quad \text{in} \quad n \quad \text{Schritten}\,] \qquad (\,p_{0,0}^{(0)} = 1\,),$$

$$f_{0,0}^{(n)} = W[\,0 \to 0 \quad \text{in} \quad n \quad \text{Schritten zum 1.Mal}\,] \qquad (\,f_{0,0} = 0\,)\,,$$

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(2n)} z^n \quad \text{und} \quad F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{0,0}^{(2n)} z^n\,.$$

Für die beiden erzeugenden Funktionen gilt dann :

$G_0(z) = \dfrac{1}{1-F_0(z)}$ , und $F_0(z)$ hat die folgende Kettenbruchentwicklung :

$$F_0(z) = \frac{g_1 z\,|}{|\,1} - \frac{(1-g_1)g_2 z\,|}{|\,1} - \frac{(1-g_2)g_3 z\,|}{|\,1} - \frac{(1-g_3)g_4 z\,|}{|\,1} - \ldots\,.$$

Durch Studium dieses Kettenbruches kann man Aussagen über $p_{0,0}^{(2n)}$ $(n \to \infty)$ erhalten $(p_{0,0}^{(2n-1)} = 0 \;\; \forall\, n)$. Ist speziell $(g_k)_{k\geq 1}$ periodisch, so kann man mit der Methode von Darboux das asymptotische Verhalten bestimmen und erhält so unter anderem:

Satz: Für die einfache Irrfahrt auf einem periodischen Baum gilt:

- Ist $T$ "sternförmig" ($d_0$ beliebig, $d_k = 2$ für $k \geq 1$), so ist die einfache Irrfahrt null-rekurrent und

$$p_{e,x}^{(2n+\mathrm{dist}(e,x))} \sim C_x \cdot n^{-1/2} \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad (C_x > 0)\,.$$

- In jedem anderen Fall ist die einfache Irrfahrt $r$-transient mit $r > 1$ und

$$p_{e,x}^{(2n+\mathrm{dist}(e,x))} \sim C_x \cdot r^{-n} \cdot n^{-3/2} \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad (C_x > 0)\,.$$

Literatur:

CARTIER,P.: Fonctions harmoniques sur un arbre. Symposia Math. 9 (1972), 203-270.

GERL,P.: Über die Anzahl der Darstellungen von Worten. Monatsh.Math. 75 (1971) 205-214.

GERL,P.: Continued fraction methods for random walks on $\mathbb{N}$ and on trees. In "Probability Measures on Groups" (1983), Springer Lecture Notes in Math., to appear.

GERL,P. und WOESS,W.: Simple random walks on trees. Preprint (1983).

KARLIN,S. und McGREGOR,J.: Random walks. Illinois J.Math. 3 (1959), 66-81.

SAWYER, S.: Isotropic random walks in a tree. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 42 (1978), 279-292.

WALL, H.S.: Analytic Theory of Continued Fractions. Van Nostrand, 1948.

WOESS, W.: Random walks and periodic continued fractions. Preprint (1983).