RAMSEY THEORIE

Ein Überblick

Walter Deuber, Bielefeld

I. MENGEN

§ 1 Der Satz von Ramsey, abzählbare Version

Der einfachste Fall des Satzes von Ramsey lautet:

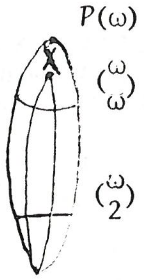
SATZ: *Jeder abzählbare Graph enthält einen vollständigen oder leeren abzählbaren Subgraphen.*

<u>Bezeichnung:</u> Sei X eine Menge, n eine Kardinalzahl. Dann bezeichnet $\binom{X}{n}$ die Menge aller Teilmengen von X der Kardinalität n.

Die obige einfachste Version des Satzes von Ramsey lautet dann (ω die Menge der natürlichen Zahlen)

SATZ: *Sei* $\Delta : \binom{\omega}{2} \to \{0,1\}$ *eine Abbildung. Dann gibt es* $X \in \binom{\omega}{\omega}$ *mit* $\Delta \upharpoonright \binom{X}{2} = \text{const.}$

Es genügt nämlich Δ als die charakteristische Funktion der Kantenmenge eines Graphen mit Punktmenge ω aufzufassen. Man kann sich den Satz von Ramsey auch wie folgt veranschaulichen:



$$\forall \Delta : \binom{\omega}{2} \to \{0,1\}$$

$$\exists\, X \in \binom{\omega}{\omega} \quad \text{mit} \quad \Delta \upharpoonright \binom{X}{2} = \text{const.}$$

Der Satz von Ramsey läßt sich wie folgt verallgemeinern:

1) Statt $\Delta : \binom{\omega}{2} \to \{0,1\}$ betrachte man Abbildungen (Färbungen, Partitionen) mit endlich vielen Werten $\Delta : \binom{\omega}{2} \to \{0,\dots,n-1\}$.

Diese Verallgemeinerung ist bei allen Sätzen der Ramseytheorie möglich und bringt gelegentlich beweistechnische Vereinfachung. Andererseits können grundsätzlich die Versionen mit 2 Farben auch ohne den Umweg über mehr Farben bewiesen werden.

2) Statt $\Delta : \binom{\omega}{2} \rightarrow \{0,1\}$ betrachte für festes $k \in \omega$:

$$\Delta : \binom{\omega}{k} \rightarrow \{0,1\}$$

d.h. Partitionen von "k-Tupeln" oder Kanten in k-regulären Hypergraphen.

SATZ [Ram 30]: *Sei* $k \in \omega$ *und* $\Delta : \binom{\omega}{k} \rightarrow \{0,1\}$. *Dann gibt es* $X \in \binom{\omega}{\omega}$ *mit* $\Delta \restriction \binom{X}{k} = \text{const.}$

<u>Beweis:</u> Induktion nach k . Für $k=1$ ist die Aussage das Schubfachprinzip. Angenommen, der Satz gelte für ein $k-1 \geq 1$. Sei $\Delta : \binom{\omega}{k} \rightarrow \{0,1\}$ gegeben. Sei $X_o = \omega$.

Sei nun $x_i = \min X_i$

und $X_{i+1} \subset X_i \setminus \{x_i\}$ so, daß

α) X_{i+1} unendlich ist und

β) $\forall Y, Y' \in \binom{X_{i+1}}{k-1}$:

$$\Delta(\{x_i\} \cup Y) = \Delta(\{x_i\} \cup Y') =: \Delta^*(x_i)$$

(X_{i+1} erhält man mittels der Induktionsannahme aus X_i) .

Sei $X^* = \{x_i \mid i \in \omega\}$.

Mit dem Schubfachprinzip erhält man

$$X \subset X^* \quad \text{mit} \quad \Delta^* \restriction \binom{X}{1} = \text{const.}$$

Man bemerkt, daß der Beweis auf folgenden Ideen beruht:

Für $Z = \{z_o \ldots z_{k-1}\} \in \binom{\omega}{k}$ betrachte

$$\text{In } Z = \{z_o\} \in \binom{\omega}{1} \text{ , End } Z = \{z_1 \ldots z_{k-1}\} < \binom{\omega}{k-1}$$

Dann haben wir bewiesen:

<u>Lemma:</u> Sei $\Delta : \binom{\omega}{k} \to \{0,1\}$.

Dann existiert $X^* \in \binom{\omega}{\omega}$ so daß für alle $Z,Z' \in \binom{X^*}{k}$ gilt:

$$\text{In } Z = \text{In } Z' \quad \text{impliziert} \quad \Delta(Z) = \Delta(Z') \ .$$

Dies erreichte man durch iterierte Anwendung der Induktionsannahme. Das Schubfachprinzip erlaubte dann X mit $\Delta \restriction \binom{X}{2} = \text{const}$ zu erhalten.

Dabei haben wir zwei Funktoren

$$\text{In, End} : \text{SET} \to \text{SET}$$

benutzt, welche den Rang erniedrigen. Diese beiden Funktoren In Z, End Z beschreiben Z vollständig. Eine ähnliche Idee werden wir später beim Vektorraumsatz antreffen. K.Leeb untersuchte in seiner Pascaltheorie [Le 73] das rekursive Verhalten von solchen Funktoren um damit elegant kombinatorische Theoreme zu beweisen.

§ 2 Der Satz von Ramsey, endliche Version, Kompaktheit

Aus der unendlichen Version des Satzes von Ramsey folgt mittels eines Kompaktheitsargumentes eine endliche Version, die wir hier im einfachsten Fall vorstellen.

SATZ [Ram 30]: $\forall m \in \omega \exists r \in \omega :$

$$\forall \Delta : \binom{\{0 \ldots r-1\}}{2} \to \{0,1\}$$

$$\exists X \in \binom{\{0_1 \ldots r-1\}}{2} \ \textit{mit} \ \Delta \restriction \binom{X}{2} = \text{const.}$$

Der Beweis geschieht indirekt. Die Gegenannahme lautet:

$$\exists m \forall r \exists \Delta \forall \underbrace{X : \Delta : \binom{X}{2} \neq \text{const}}_{\text{def.: "}\Delta\text{ schlecht für r"}}$$

Sei also m fest so gewählt, daß für alle $r \in \omega$ ein schlechtes $\Delta : \binom{r}{2} \to \{0,1\}$ existiert.

Definiere einen Baum.

Punkte: Schlechte Färbungen
$\Delta : \binom{r}{2} \to \{0,1\} \quad r \in \omega$

Kanten: Für schlechte Färbungen $\Delta : \binom{r}{2} \to \{0,1\}$ und $\Delta' : \binom{r+1}{2} \to \{0,1\}$ ist $\{\Delta,\Delta'\}$ eine Kante genau wenn Δ' eine Extension von Δ ist.

Damit ist ein unendlicher lokalfiniter Baum definiert, Königs Baumlemma liefert einen unendlichen Pfad

$$\emptyset - \Delta_1 - \Delta_2 - \dots$$

von schlechten sich fortsetzenden Färbungen.

Setze $\Delta^* = \lim \Delta_i : \binom{\omega}{2} \rightarrow \{0,1\}$.

Nach Ramsey existiert eine m elementige Teilmenge X mit $\Delta^* \restriction \binom{X}{2} = \text{const.}$ Daher ist Δ^* nicht schlecht für $\max X$. Nach Definition von Δ^* als Limes, ist auch $\Delta_{\max X}$ nicht schlecht, ein Widerspruch. Analog beweist man

SATZ [Ram 30]: $\forall m\, k\, n \in \omega\, \exists\, r \in \omega :$

$$\forall \Delta : \binom{\{0 \dots r-1\}}{k} \rightarrow \{0,\dots,n-1\}$$

$$\exists\, X \in \binom{\{0 \dots r-1\}}{m} \textit{ mit } \Delta \restriction \binom{X}{k} = \text{const.}$$

Die kleinste Zahl $r = r(m,k,n)$ heißt Ramseyzahl.

$r(3,2,2) = 6$ $r(4,2,2) = 18$ [GG 55]

$42 \leq r(5,2,2) \leq 55$ ist unbekannt, was auch nicht so erstaunlich ist. (Wieviele Schritte rechnet ein Computer?!) Nennen wir $r(5,2,2)$ kurz $r(K_5)$ so ist von Frau I. Mengersen (Braunschweig) berechnet worden (1984)

$$23 \leq r(k_5 - \text{Kante}) \leq 24$$

Das Kompaktheitsargument ist auch in Untersuchungen von Paris und Harrington wesentlich eingegangen. Zunächst bemerkt man:

SATZ [PH 77]: $\forall k,n\ \Delta : \binom{\omega}{k} \rightarrow \{0,\dots,n-1\}\ \exists\, X \subset \omega$ *mit*

i) $|X| > \min X\ ,\ k+1$

ii) $\Delta \restriction \binom{X}{k} = \text{const.}$

Beweis: Man nehme die ersten $(\min X)+1$ Elemente der nach dem Satz von Ramsey existierenden unendlichen Menge X mit $\Delta \mid \binom{X}{k} = \text{const.}$

Mit Kompaktheit erhält man

SATZ [PH 77]: $\forall k,n\ \exists r^* = r^*(k,n)$

$$\forall\Delta : \binom{\{0,\dots,r^*-1\}}{k} \to \{0,\dots,n-1\}$$

$\exists\, X \subset \{0,\dots,r^*-1\}$ *mit*

i) $|X| > \min X\ ,\ k+1$

ii) $\Delta \mid \binom{X}{k} = \text{const.}$

Mit einem Kompaktheitsargument ist der Beweis einfach. Allerdings haben Paris und Harrington [PH 77] gezeigt, daß dieser Satz in der Welt der endlichen Mengen (Peano Arithmetik erster Stufe) nicht beweisbar ist. Dies bedeutet, daß nichtkonstruktive Methoden, wie sie z.B. dem Kompaktheitsargument inhärent sind, wesentlich benötigt werden. Der tiefere kombinatorische Grund, warum dieser Satz in der Peano-Arithmetik nicht beweisbar ist, liegt in der Tatsache, daß r^* eine sehr rasch wachsende Funktion ist. Hier beweisen wir ein etwas schwächeres einfacheres Resultat als dasjenige von Paris und Harrington. Immerhin werden einige wesentliche Ideen desselben eingehen.

<u>Definition</u>: (Ackermann-Funktion)

Sei
$$f_o(x) = x+1$$
$$f_{n+1}(x) = f_n^{(x+1)}(1)$$

wo $f^{(x)}$ die x-fach Iterierte von f ist.

$$f(x) = f_x(x)$$

heißt Ackermannfunktion. Sie wächst schneller als jede primitiv rekursive Funktion.

SATZ (Paris): $r^* = r^*(2,2n+3) \geq f(n)$

<u>Beweis:</u> Definiere
$$\Delta \binom{1,\dots,r^*}{2} \to \{1,\dots,2n+3\} \quad \text{durch}$$

$$\Delta\{a,b\}_< = \begin{cases} \min\{a,b\} & \text{falls} \quad \min\{a,b\} \leq n+2 \\ n+2+\mu & \text{sonst} \end{cases}$$

wo $\mu = \max\{k \leq n \mid f_k(a)-2 \leq b-2\}$.

Zunächst bemerkt man, daß μ wegen $a<b$ wohldefiniert ist:

$a+1 = f_o(\min(ab)) \leq \max\{ab\}$, also ist die Menge der möglichen k's nichtleer und μ wohldefiniert.

Weiter leistet $X = \{a_1,\dots,a_{|X|}\}$ mit $|X| \geq \min X$ und $\Delta\upharpoonright\binom{X}{2} = \mathrm{const.}$ das Gewünschte.

Wegen $|X| \geq 3$ ist diese Konstante von der Form $n+2+k$ für ein festes k .

Nach Definition von Δ heißt dies

$$f_k(a_1-2) \leq a_2-2 \dots$$

und wegen der Monotonie der Ackermannfunktion

$$a_1-2 \leq f_k(a_1-2) \leq a_2-2 \leq f_k(a_2-2) \leq \dots \leq a_{|X|}-2 \quad .$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $k=n$.

Hierzu beachten wir

$$a_{|X|}-2 \underset{①}{\geq} f_k^{(|X|-1)}(a_1-2) \underset{②}{\geq} f_k^{(a_1-1)}(a_1-2)$$

$$\underset{③}{\geq} f_k^{(a_1-1)}(1) \underset{④}{=} f_{k+1}(a_1-2) \ .$$

Begründung:

① Iteriertes Anwenden von f_k auf vorige Ungleichungskette

② $|X|-1 \geq a_1-1$ und Monotonie

③ Monotonie

④ Definition von f_{k+1} .

Also muß in der Definition von μ für $\{a,b\} = \{a_1,a_{|X|}\}$ das maximal mögliche $k=n$ genommen werden.

Wegen $a_1 \geq n+2$ hat man schließlich

$$f_n(n) \leq f_n(a_1-2) \leq a_{|X|-2} \leq r^*(2,2n+3) \ .$$

§ 3 Galvin - Prikry

Wir haben gezeigt, daß der Satz von Ramsey für Färbungen von k-Tupeln in ω gilt. Natürlich kann man ihn endlich oft iterieren und Färbungen von 1 Tupeln 2 Tupeln ... k_o-Tupeln simultan betrachten. Allerdings ist diese Iteration nicht ω oft möglich.

SATZ [ER 52]: $\exists \Delta \bigcup\limits_{k\in\omega} \binom{\omega}{k} \to \{0,1\}$

$\forall A \in \binom{\omega}{\omega}\ \exists\ X,X'\ ,\ |X|=|X'|<\omega$ *und*

$\Delta(X) \neq \Delta(X')$.

Beweis: Für $Z \in U\binom{\omega}{k}$ setze

$$\Delta(Z) = \begin{cases} 0 & |Z| < \min Z \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe des Auswahlaxioms weist man auch folgendes nach

SATZ [ER 52]: $\exists\, \Delta : \binom{\omega}{\omega} \to \{0,1\}$

$\forall A \in \binom{\omega}{\omega}\ \exists\, X, X' \in \binom{A}{\omega}$

$\Delta(X) \neq \Delta(X')$.

Beweis: Sei $(X_i)_{i<\omega_1}$ eine Aufzählung von $\binom{\omega}{\omega}$. Definiere rekursiv eine Abbildung $\Delta: \binom{\omega}{\omega} \to \{0,1\}$.

$$\Delta(X_i) \neq \Delta(X_{i^*})$$

wo i^* der kleinste Index einer unendlichen echten Teilmenge von X_i ist. Der Ausweg aus diesen negativen Resultaten besteht darin, daß nur gutartige Konstruktive Δ's zugelassen werden. Der hierfür begangene Weg besteht in der Einführung einer Topologie.

Notation: Sei s eine endliche Teilmenge von ω und $A \in \binom{\omega}{\omega}$.

$$[s,A] = \{X \in \binom{\omega}{\omega} \mid X = s \cup X',\ X' \in \binom{A}{\omega} \text{ und } \min X' > \max s\} .$$

$[s,A]$ ist also die Menge der unendlichen Teilmengen von $A \cup s$ mit Anfangsstück s und Fortsetzung in A .

Definition: Eine Teilmenge X von $\binom{B}{\omega}$ heißt basisoffen, falls $s, A \subseteq B$ existieren mit $X = [s,A]$.
Damit ist auf $\binom{B}{\omega}$ eine Topologie definiert, die man Anfangsstücktopologie nennt. Die basisoffenen Mengen sind also durch endliche Anfangsstücke charakterisiert. In diesem Sinne sind offene Mengen durch "endliche Information" und Borelmengen durch "abzählbare Information" definiert.

SATZ [GP 73]: *Ist* $\Delta : \binom{\omega}{\omega} \to \{0,1\}$ *eine Abbildung mit* $\Delta^{-1}(0)$ (*und* $\Delta^{-1}(1)$) *Borel in Anfangsstücktopologie auf* $\binom{\omega}{\omega}$, *so existiert* $A \in \binom{\omega}{\omega}$ *mit* $\Delta \restriction \binom{A}{\omega} = \text{const.}$

Der Beweis beruht auf der Methode des kombinatorischen Forcings [N-W 65], welches insbesondere für den Fall, daß $\Delta^{-1}(0)$ offen ist, gebraucht wird. Wir stellen nur diesen Teil des Beweises dar, da der Rest mit Induktion über die Hierarchie der Borelmengen geschehen kann.

Definition: Sei $\mathcal{O} \subseteq \binom{\omega}{\omega}$.

$[s,U]$ heißt *gut für $\mathcal{O}$* falls kein $V \in \binom{U}{\omega}$ existiert mit $[s,V] \subseteq \mathcal{O}$.

$[s,U]$ heißt *streng gut für $\mathcal{O}$* , falls $[s,U]$ gut ist, und zudem für jedes $u \in U \setminus \{0,\dots \max s\}$ auch $[s \cup \{u\}, U]$ gut ist.
Offenbar ermöglichen streng gute Paare Fortsetzungen des Anfangsstücks, eine für rekursive Definitionen angenehme Tatsache.

Lemma: Sei $\mathcal{O} \subseteq \binom{\omega}{\omega}$ offen.
Ist $[s,U]$ gut, dann existiert $V \in \binom{U}{\omega}$, so daß $[s,V]$ streng gut ist.

Beweis: Angenommen $[s,U]$ sei gut und kein $[s,V]$ streng gut.
Setze $W_o = U \setminus \{0,\dots \max s\}$. Angenommen wir haben $W_o > \dots > W_i$ und $n_o < \dots < n_{i-1}$ gewählt mit

i) $W_{j+1} \in (W_j \setminus \{0,\dots,n_j\})$

ii) $n_j \in W_j$

iii) $[s \cup \{n_j\}, W_j]$ nicht gut

iv) $[s \cup \{n_j\}, W_{j+1}] \subseteq \mathcal{O}$

für alle $j < i$.
Dann definieren wir n_i, W_{i+1} wie folgt:
Wegen $W_i \subset U$ ist $[s,W_i]$ gut, aber nach Annahme nicht streng gut. Somit gibt es ein kleinstes $n_i \in W_i$, so daß $[s \cup \{n_i\}, W_i]$ nicht gut ist. Also gibt es $W_{i+1} \in \binom{W_i \setminus \{0,\dots,n_i\}}{\omega}$ mit $s \cup \{n_i\}, W_{i+1}] \subseteq \mathcal{O}$. Setze $V = \{n_i \mid i \in \omega\}$. Nach Konstruktion ist $[s,V] \subset \mathcal{O}$ also $[s,U]$ nicht gut, was den gewünschten Widerspruch liefert.
Nach dem Lemma darf im Folgenden stillschweigend angenommen werden, daß jedes gute $[s,U]$ auch streng gut ist.

SATZ (Der Spezialfall offener Partitionen):

Ist $\Delta : \binom{\omega}{\omega} \to \{0,1\}$ *mit*
$\Delta^{-1}(0) = 0$ *offen; dann gibt es*
$X \in \binom{\omega}{\omega}$ *mit* $\Delta \restriction \binom{X}{\omega} = \text{const.}$

Beweis: Sei $\mathcal{O} \subset \binom{\omega}{\omega}$ offen. Falls U existiert mit $\binom{U}{\omega} \subset \mathcal{O}$, sind wir fertig. Nehmen wir also an, daß keine solche unendliche Menge U existiert; dann ist $[\emptyset,\omega]$ gut. Sei nach dem Lemma $U_o \in \binom{\omega}{\omega}$ so, daß $[\emptyset,U_o]$ streng gut ist. Angenommen, wir haben $U_o > \dots > U_i$ und $n_o < n_i < \dots < n_{i-1}$ gewählt mit

i) $U_{j+1} \in (U_j \setminus \{0,\underset{\omega}{\ldots},n_j\})$

ii) $n_j \in U_j$

iii) $[s,U_j]$ ist streng gut für alle endlich vielen Anfangsstücke $s \subseteq \{n_0,\ldots,n_{j-1}\}$,

für alle $j < i$.

Dann definieren wir n_i, U_{i+1} wie folgt:

Sei $n_i = \min U_i$. Da nach iii) die $[s,U_i]$ für alle endlich vielen Anfangsstücke $s \subseteq \{n_0,\ldots,n_{i-1}\}$ streng gut sind, gibt es $U_{i+1} \in (U_i \setminus \{0,\ldots,n_i\})$, so daß für jedes Anfangsstück $s \subseteq \{n_0,\ldots,n_i\}$ auch $[s,U_{i+1}]$ gut und daher streng gut ist. Technisch ist hier die endliche Menge aller dieser Anfangsstücke jedesmal unter Anwendung des Lemmas abzuarbeiten.

Setze nun $X = \{n_i \mid i \in \omega\}$. Offenbar ist X unendlich.

Behauptung: $\binom{X}{\omega} \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

Beweis: Angenommen es gäbe $Y \in \binom{X}{\omega} \cap \mathcal{O}$. Da $\mathcal{O}$ offen ist, enthält $\mathcal{O}$ eine Basisumgebung die Y enthält, d.h. es gibt $[s,W]$ mit $Y \in [s,W] \subset \mathcal{O}$. Sei i_o minimales i mit $s \subseteq \{n_o,\ldots,n_{i-1}\}$. Dann ist $Y \setminus \{0,\ldots,\max s\} \subseteq X \setminus \{0,\ldots,\max s\} \subseteq U_{i_o}$. Damit ist $Y \setminus \{0,\ldots,\max s\} \subseteq U_{i_o} \cap W$. Also ist $U_{i_o} \cap W$ unendlich und natürlich in W enthalten. Somit $[s,U_{i_o} \cap W] \subseteq \mathcal{O}$, ein Widerspruch zur Güte von $[s,U_{i_o}]$.

Der Satz von Galvin und Prikry spielt in der weiterführenden Theorie der Wohlordnungen diejenige Rolle, die der Satz von Ramsey in der klassischen WqO Theorie spielt.

Einer der wichtigsten Anwendungen des Satzes von Galvin und Prikry ist:

Definition: Seien X,Y topologische Räume. $f : X \to Y$ heißt Borelabbildung genau wenn das Urbild einer jeden offenen Menge in Y eine Borelmenge in X ist.

SATZ: *Ist* Q *ein diskreter Raum, und* $f : \binom{\omega}{\omega} \to Q$ *eine Borelabbildung.*
[S 79] *Dann gibt es* $B \in \binom{\omega}{\omega}$ *so daß die Restriktion* $f \restriction \binom{\omega}{\omega} \to Q$ *stetig ist.*

Beweis: Zunächst behaupten wir, daß das Bild von f abzählbar ist. Angenommen nicht, ist $|\mathrm{Im}\ f| \geq \omega_1$. Betrachte die Urbilder $f^{-1}(q)$ $(q \in Q)$. Da in Q jede Menge Q' offen ist, ist $f^{-1}(Q')$ eine Borelmenge. Also hat man mindestens 2^{ω_1} Borelmengen in $\binom{\omega}{\omega}$, ein Widerspruch.

Sei $\mathrm{Im}\ f = \{x_i \mid i \in \omega\}$

Sei $A_o = \omega$ und $A_o,\ldots,A_i$, $n_o,\ldots,n_{i-1}$ gewählt mit

i) $n_j = \min A_j$

ii) $A_{j+1} \in (A_j \setminus \{n_o,\ldots,n_j\})^{\omega}$

iii) für jedes $s \subseteq \{n_o,\ldots,n_j\}$ ist

$[s,A_{j+1}] \subset f^{-1}(x_j)$ oder $[s,A_{j+1}] \cap f^{-1}(x_j) = \emptyset$

für alle $j < i$.

Bei der Definition von A_{i+1} werden alle $s \subseteq \{n_o,\ldots,n_i\}$ iterativ mit Hilfe des Satzes von Galvin, Prikry abgearbeitet.

Sei $n_i = \min A_i$. Nun arbeiten wir iterativ alle $s \subseteq \{n_o,\ldots,n_i\}$ ab, beschreiben aber nur den typischen Schritt für ein festes s . Da $f^{-1}(x_i)$ [jedes Singleton ist offen in einem diskreten Raum] eine Borelmenge ist, gibt es nach dem Satz von Galvin,Prikry ein
$A_{i+1} \in (A_i \setminus \{n_o,\underset{\omega}{\ldots},n_i\})$ mit $[s,A_{i+1}] \subseteq f^{-1}(x_i)$ oder $[s,A_{i+1}] \cap f^{-1}(x_i) = \emptyset$.
Setze nun $B = \{n_i \mid i \in \omega\}$
Dann gilt für jedes $Z \in \binom{B}{\omega}$ und jedes $i \in \omega$:
$Z \in f^{-1}(x_i)$ genau wenn $[Z \cap \{n_o,\ldots,n_i\}\ ,\ A_{i+1}] \subseteq f^{-1}(x_i)$.
Damit enthält $f^{-1}(x_i)$ mit jedem Z auch eine Umgebung von Z und f ist stetig.

§ 4 Kanonische Partitionssätze

Ramsey betrachtete Abbildungen Δ in eine feste endliche Menge, z.B. typisch $\{0,1\}$. Dies war nützlich für seine Untersuchungen in der zweiwertigen Logik. Abbildungen Δ mit beliebigen Nachbereichen treten ebenso natürlich auf. In dieser Situation kann man nicht mehr erwarten, daß Δ in konstanter Weise auf einer geeigneten unendlichen Menge operiert. Mindestens der injektive Fall $\Delta(X) \neq \Delta(X')$ für alle $X \neq X'$ muß mitberücksichtigt werden. Es gilt also alle auftretenden Fälle zu charakterisieren.

SATZ [ER 50]: *Sei* $\Delta\binom{\omega}{2} \to \omega$ *eine beliebige Abbildung. Dann gibt es* $A \in \binom{\omega}{\omega}$ *so daß* $\Delta \restriction \binom{A}{2}$

entweder	konstant	$\Delta(X) = \Delta(X')$ $\forall X, X'$
oder	injektiv	$\Delta(X) \neq \Delta(X')$ $\forall X, X'$ $(X \neq X')$
oder	max	$\Delta(X) = \Delta(X')$ *falls* max X = max X'
oder	min	$\Delta(X) = \Delta(X')$ *falls* min X = min X'

ist.

<u>Beweis:</u> Zu $\Delta : \binom{\omega}{2} \to \omega$ definiere eine Hilfsabbildung Δ^* auf $\binom{\omega}{3}$ wie folgt:

Zu $\{x_o, x_1, x_2\}_{<} \in \binom{\omega}{3}$ betrachte den Graphen $G(x_o, x_1, x_2)$ mit Punktmenge $0,1,2$ und Kanten

$$\{i,j\} \quad \text{für} \quad \Delta(x_i) = \Delta(x_j) \ .$$

Sei $\Delta^*(x_o, x_1, x_2) = G(x_o, x_1, x_2)$.

Ramsey's Satz liefert ein $A \in \binom{\omega}{\omega}$ mit $\Delta^* \mid \binom{A}{3} = \text{const}$. Falls der zugehörige Graph vollständig oder leer ist, wirkt Δ auf $\binom{A}{2}$ konstant oder injektiv. Ist der Graph nicht vollständig, so zeigt Transitivität, daß Δ auf $\binom{A}{2}$ entweder min oder max ist.

Man bemerkt, daß keiner der 4 Fälle weggelassen werden kann. Hierzu betrachte man konstante, injektive, min und max Färbungen auf $\binom{\omega}{2}$. Diese sind hereditär auf Teilmengen.
Der Beweis zeigt, daß ein kanonisches Resultat für k-Tupel leicht zu erhalten ist, falls ein Ramseysatz für k+1 Tupel zur Verfügung steht, was glücklicherweise Ramsey für uns bewies. Analoge Situationen werden wir später mehrfach antreffen.

SATZ [ER 50]: *Sei* $\Delta : \binom{\omega}{k} \to \Delta$ *eine Abbildung. Dann gibt es* $A \in \binom{\omega}{\omega}$ *und* $K \in \{0, \dots, k-1\}$ *so daß für alle* $X = \{x_o, \dots, x_{k-1}\}$, $X' = \{x'_o, \dots, x'_{k-1}\}$ *gilt*
$\Delta(X) = \Delta(X')$ *genau wenn* $x_j = x'_j$ *für alle* $j \in K$.

Wiederum kann keiner der 2^k vielen Fälle weggelassen werden.

II. VEKTORRÄUME

§ 1 Normalform

Rota vermutete, daß ein Ramseysatz nicht nur für Mengen, sondern auch für endliche Vektorräume gelte. Der Beweis wurde von Graham, Leeb, Rothschild [GLR 72] gemeinsam publiziert. Wir folgen hier einer Version von Deuber und Voigt [DV 83] .

Sei $F = GF(q)$ ein endlicher Körper und $F\binom{m}{n}$ die Menge der n-dimensionalen Unterräume von F^m . Sei $\vec{e}_o \ldots \vec{e}_{m-1}$ die kanonische Basis in F^m die im weiteren festgehalten wird. Um einen gegebenen n-dimensionalen Unterraum V von F^m zu beschreiben, genügt die Angabe von geeignet gewählten n linear unabhängigen Vektoren, die wir spaltenweise nebeneinander schreiben um die Abbildungsmatrix $NF(V) : F^n \to F^m$ zu erhalten.

Sei also V gegeben. Teste nacheinander, ob ein Vektor $\bar{x} \in V$ die Koordinate $\vec{e}_o, \vec{e}_1 \ldots$ benutzt. Sei $\vec{e}_{i_o}$ die erste aktive Koordinate und $\vec{x}_{i_o}$ ein zugehöriger Vektor.

Durch Skalarmultiplikation kann erreicht werden, daß

$$\vec{x}_{i_o} = \vec{e}_{i_o} + \sum_{i_o+1}^{m-1} \lambda_\ell^{(i_o)} \vec{e}_\ell \quad .$$

Nun teste analog alle von $\bar{x}_{i_o}$ unabhängigen Vektoren in analoger Weise und erhalte $i_o < i_1 < i_2 < \ldots i_{n-1}$ mit

$$\vec{x}_{i_j} = \vec{e}_{i_j} + \sum_{i_j+1}^{m-1} \lambda_\ell^{(i_j)} \vec{e}_\ell \quad .$$

Damit hat die Matrix zunächst die folgende Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 & & < \qquad n \qquad > \\
\begin{array}{c} \wedge \\ \\ \\ \\ m \\ \\ \\ \vee \end{array} & \begin{array}{c} \\ i_o \\ \\ \\ i_1 \\ i_2 \\ i_{n-1} \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi & \xi & \xi & \xi & 1 \\ \xi & \xi & \xi & \xi & \xi & \xi \end{pmatrix}
\end{array}$$

Dabei stehen in den Positionen ξ beliebige Elemente aus F . Durch Linearkombination der Spalten erreicht man nun noch, daß in den Zeilen $i_o, i_1 \ldots i_{n-1}$ außer den führenden 1 nur Nullen stehen. Wir erhalten damit die Normalform NF(V) .

$$NF(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi & \xi & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \xi & \xi & \xi & \xi & \xi \end{pmatrix}$$

Dabei stehen die ξ für beliebige Körperelemente über die vorab keine Kontrolle besteht.

Offenbar hat $NF(V)$ Rang n und das Matrixprodukt von 2 Normalformen ist wieder eine Normalform die der Inklusion der entsprechenden Räume entspricht. Wir bezeichnen mit $F\binom{m}{n}$ die Menge aller Normalformen.
Für unsere Überlegungen müssen wir noch einen Schritt weiter verallgemeinern.

Definition: Sei $t \in \omega$. Dann ist

$$F_t\binom{m}{n} \subset F\binom{t+m}{t+n}$$

die Menge der Matrizen

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \langle \quad t \quad \rangle & \langle \quad n \quad \rangle \end{array} \\
\begin{array}{c} \wedge \\ t \\ \vee \\ \wedge \\ m \\ \vee \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \xi & X \in F\binom{m}{n} \end{array}\right)
\end{array}$$

Dabei sind die Elemente ξ wieder beliebige aus F unter Berücksichtigung der Normierung der Zeilen mit führenden Einsen in X zu wählen.

Bemerkungen:

i) $A \in F_t\binom{m}{n}$, $B \in F_t\binom{n}{p}$
$\Rightarrow$ $A \cdot B \in F_t\binom{m}{p}$

ii) $F_o\binom{m}{n} = F\binom{m}{n}' =$ Menge
der (Normalformen von) n dimensionalen Unterräumen in F^m
(projektive Situation)

iii) $F_1\binom{m}{n}$ = Affine Situation.

Als nächstes definieren wir Anfangs- und Endstücke

Sei $A \in F_t\binom{m}{n}$

$$A = \begin{array}{c} \wedge \\ t \\ \vee \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{\langle\quad t\quad\rangle}{\begin{matrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{matrix}} & 0 \\ \hline \boxed{\mathrm{Anf}(A)} & 0 \\ \hline 0\;0\;0\;0 & 1\;0\;0\;0\;0\;0 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right) \mathrm{End}\ A$$

Anf(A) ist also die Teilmatrix welche unterhalb der führenden $t \times t$ Einheitsmatrix sich befindet, bis zum nächsten Auftreten einer führenden 1. End(A) erhält man durch wegstreichen aller Zeilen, die zu Anf(A) gehören.

Bemerkung: $\mathrm{End}(A) \in F_{t+1}\binom{?}{n-1}$

(? = Anzahl weggestrichener Zeilen).

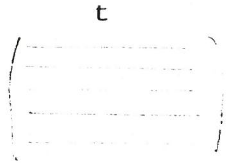
SATZ [GLR 72]

$$\forall t,m,k\ \exists r\ \forall \Delta : F_t\binom{r}{k} \to \{0,1\}$$
$$\exists A \in F_t\binom{r}{m}$$
mit $$\Delta_A = \Delta \restriction \{AX \mid X \in F_t\binom{m}{k}\} = \text{const.}$$

Beweis: Induktion über alles mögliche. Man überlegt sich, daß der Satz für $k=0$ und beliebige t,m gilt. Das ist eine bekannte Anwendung des Satzes von Hales-Jewett. Nehmen wir also an, der Satz gelte für ein $k-1 \geq 0$ und beliebige t,m und betrachten nun den Fall k.
Hierzu zerlegen wir jedes $X \in F_t\binom{r}{k}$ in Anf X und End $X \in F_{t+1}\binom{?}{k-1}$. Hält man Anf X fest, so liefert die Induktionsannahme angewandt auf End X ein homogenes A. Arbeitet man nun iterativ alle Anfangsstücke ab, so erhält man

Lemma: *Ohne Beschränkung der Allgemeinheit erfüllt* Δ *die Bedingung*
$\forall X,X' \in F_t\binom{A}{k}$ *gilt:*
$\mathrm{Anf}(X) = \mathrm{Anf}(X')$ *impliziert* $\Delta(X) = \Delta(X')$.

Betrachten wir nun die Anfangsstücke Anf(X) , $X \in F_t\binom{m}{o}$



Matrix: Zeilen in F^t
Anzahl Zeilen: unbekannt
(jedenfalls $\leq m$)

Anfangsstücke := Wort mit Buchstaben in F^t . Wir brauchen also einen Satz über Wörter, der eine Art Schubfachprinzip ist. Hales-Jewett liefert dies. Wählt man F^t als Alphabet, so ist damit der Satz von Graham, Leeb, Rothschild bewiesen.

Der Grundgedanke von Hales und Jewett besteht darin, die kartesische Potenz A^n einer endlichen Menge A mit geeignetem n als die zu färbende Grundmenge zu betrachten und hierzu eine einfarbige "Parametermenge" zu finden.

<u>Definition:</u> Es sei A eine endliche Menge. A^n bezeichnet das n-fache cartesische Produkt $A\text{x}\ldots\text{x}A$. Ein m-Funktional f in A^n ist ein n-Tupel $f = (f_o,\ldots,f_{n-1}) \in (A \cup \{\lambda_o,\ldots,\lambda_{m-1}\})^n$, in dem jeder der "Parameter" $\lambda_o,\ldots,\lambda_{m-1}$ mindestens einmal auftaucht. Dabei ist es vernünftig zu vereinbaren, daß $A \cap \{\lambda_o,\lambda_1,\ldots,\} = \emptyset$. Zu $(a_o,\ldots,a_{m-1}) \in A^m$ sei $f(a_o,\ldots,a_{m-1}) \in A^n$ dasjenige n-Tupel, das aus f entsteht, indem man überall λ_i durch a_i ersetzt. Mengen der Gestalt $f \circ A^m = \{f(a_o,\ldots,a_{m-1}) \mid (a_o,\ldots,a_{m-1}) \in A^m\} \subseteq A^n$ heißen m-Parametermengen in A^n .

<u>Beispiel:</u> Es sei $A = \{0,1,2\}$. Die Menge

$$M = \{(0,1,0,2)\ ,\ (1,1,1,2)\ ,\ (2,1,2,2)\}$$

ist eine 1-Parametermenge. Hierzu gehört das 1-Funktional $f=(\lambda_o,1,\lambda_o,2)$. Die oben definierte Abbildung F liefert die arithmetische Progression $F(M) = \{3+2\,\lambda_o \mid \lambda_o \in \{0,1,2\}\}$. Die Menge

$$N = \{(1,2,1,0)\ ,\ (2,1,1,0)\ ,\ (0,0,1,0)\}$$

ist keine 1-Parametermenge.

Faßt man die Menge $A = \{0,1,2\}$ als den Körper Z_3 auf, so sind sowohl M als auch N affine Geraden in $(\mathbb{Z}_3)^4$. Allgemein ist jede m-Parametermenge in $GF(q))^n$ ein m-dimensionaler affiner Unterraum von $(GF(q))^n$, aber wie das obige Beispiel zeigt, gilt im allgemeinen nicht die Umkehrung.

SATZ [HJ 63]: *Sei* A *eine endliche Menge und seien* m,r *positive ganze Zahlen. Dann gibt es eine Zahl* $n = HJ(|A|,m,r)$ *so, daß es zu jeder Färbung* $\Delta : A^n \to \{0,\dots,r-1\}$ *ein m-Funktional* f *in* A^n *derart gibt, daß* $\Delta \rceil f \cdot A^m = \text{const.}$, *d.h.* $\Delta(f(a_0,\dots,a_{m-1})) = \Delta(f(b_0,\dots,b_{m-1}))$ *gilt für alle* $(a_0,\dots,a_{m-1})$, $(b_0,\dots,b_{m-1}) \in A^m$.

<u>Beweis:</u> Seien t,m,r positive ganze Zahlen. Man zeigt:

(1) $HJ(t,m+1,r) \leq HJ(t,1,r) + HJ(t,m,r^{t^{HJ(t,1,r)}})$, und

(2) $HJ(t+1,1,r+1) \leq HJ(t,1+HJ(t+1,1,r),r+1)$.

Zusammen mit dem trivialen Induktionsanfang "$HJ(1,m,r) = m$" bekommt man sofort einen Beweis des Satzes durch Induktion über t,m und r .

ad (1) Es sei $\Delta : A^{n'+n''} \to \{0,\dots,r-1\}$ eine Färbung, wobei $|A| = t$, $n' = HJ(t,1,r)$ und $n'' = HJ(t,m,r^{t^{HJ(t,1,r)}})$. Für $\bar{b} = (b_0,\dots,b_{n''-1}) \in A^{n''}$ sei die Färbung $\Delta_{\bar{b}} : A^{n'} \to r$ definiert durch $\Delta_{\bar{b}}(a_0,\dots,a_{n'-1}) = \Delta(a_0,\dots,a_{n'-1}, b_0,\dots,b_{n''-1})$. Nach Wahl von n'' findet man ein m-Funktional g in $A^{n''}$ so, daß $\Delta_{g(\bar{b})} = \Delta_{g(\bar{b}')}$ für alle $\bar{b},\bar{b}' \in A^m$. Betrachte also die Färbung $\Delta' : A^{n'} \to r$ mit $\Delta'(a_0,\dots,a_{n'-1}) = \Delta_{g(\bar{b})}(a_0,\dots,a_{n'-1})$, wobei nach Konstruktion $\bar{b} \in A^m$ beliebig ist. Nach Wahl von n' findet man ein 1-Funktional f in $A^{n'}$ so, daß $\Delta' \rceil (f \cdot A) = \text{constant}$. Offensichtlich ist dann $\Delta \rceil (f \cdot A \times g \cdot A^m)$ konstant, und $f \cdot A \times g \cdot A^m$ ist eine (1+m)-Parametermenge in $A^{n'+n''}$.

ad (2) Sei $\Delta : (A \cup \{b\})^n \to \{0,\dots,r\}$ eine Färbung, wobei $|A| = t$, $b \notin A$ und $n = HJ(t,1+HJ(t+1,1,r),r+1)$. Es bezeichne Δ_A die Restriktion $\Delta \rceil A^n : A^n \to \{0,\dots,r\}$. Nach Wahl von n findet man ein (1+m)-Funktional g in A^n so, daß $\Delta_A \rceil g \cdot A^{1+m} = \text{constant}$ mit $m = HJ(t+1,1,r)$; ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $\Delta_A \rceil g \cdot A^{1+m}$ konstant in der Farbe r ist. Falls nun $\Delta(g(b,a_0,\dots,a_{m-1})) = r$ für ein $(a_0,\dots,a_{m-1}) \in (A \cup \{b\})^m$ ist, so ersetze alle in $(b,a_0,\dots,a_{m-1})$ vorkommenden b's durch λ_0 und bezeichne das so entstehende 1-Funktional in A^{1+m} mit h . Offensichtsichtlich ist dann $\Delta \rceil g \cdot h \cdot (A \cup \{b\}) = \text{constant}$. Andernfalls betrachte die

Färbung $\Delta_b : (A \cup \{b\})^m \to \{0,\dots,r-1\}$, die durch $\Delta_b(a_o,\dots,a_{m-1}) = \Delta(g(b,a_o,\dots,a_{m-1}))$ definiert ist. Nach Wahl von m findet man ein einfarbiges 1-Funktional $h = (h_o,\dots,h_{m-1})$ in $(A \cup \{b\})^m$. Dann ist aber $g(b,h_o,\dots,h_{m-1})$ ein 1-Funktional in $(A \cup \{b\})^n$ und $\Delta \rceil g(b,h_o,\dots,h_{m-1}) \cdot (A \cup \{b\}) =$ constant.

Wir haben hier den Beweis des Vektorraumsatzes bewußt nur skizziert um die Struktur deutlich werden zu lassen, und damit zu zeigen wie die Ansätze des Beweises des Satzes von Ramsey verallgemeinert werden können. Details findet man in [DV 83].

§ 2 Korollare, Bemerkungen und Erweiterungen

Für $t=0$ erhalten wir

Korollar: Sei $F = GF(q)$. Zu k,m existiert r mit folgender Eigenschaft: Sei Δ eine Partition der k dimensionalen linearen Unterräume von F^r in zwei Klassen. Dann gibt es einen m dimensionalen linearen Unterraum A , auf welchem Δ konstant ist.

Für $t=1$ erhalten wir

Korollar: Sei $F = GF(q)$. Zu k,m existiert r mit folgender Eigenschaft: Sei Δ eine Partition der k dimensionalen affinen Unterräume von F^r in zwei Klassen. Dann gibt es einen m dimensionalen affinen Unterraum A , auf welchem Δ konstant ist.

Eine unendliche Version gilt für GF(2) .

SATZ [Hin 74, Bau 74]: *Sei* Δ $P(\omega) \to \{0,1\}$
Dann gibt es eine Folge (X_i) *von endlichen* $i \in \omega$ *Teilmengen von* ω
mit *i)* $\max X_i < \min X_{i+1} \quad \forall_i$
ii) $\Delta \mid \{ \bigcup_{j \in J} X_j \mid J$ *endlich* $J \subset \omega\} =$ const.

Eine unendliche Version gilt nicht für $GF(q)$, $q \geq 3$.

<u>Beispiel:</u> $F_o\binom{\omega}{1}$. Eine typische Normalform sieht wie folgt aus:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ \xi \\ \xi \\ \xi \end{pmatrix} \qquad \xi \text{ beliebige Körperelemente}$$

Setze $\Delta(X) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

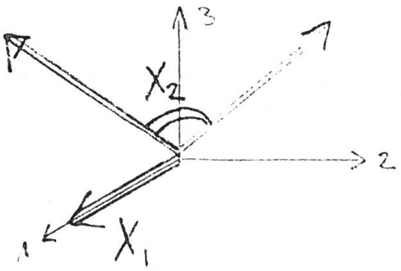
Neuerdings ist es gelungen, eine schwache unendliche Version zu beweisen.

<u>Definition</u> [Voi 83]: Sei $(X_i)_{i\in\omega}$ eine Folge von Unterräumen in F^{ω}. $(X_i)_{i\in\omega}$ heißt <u>aufsteigend</u> falls

i) $\forall i \ \dim X_i = i$

ii) Projektion von X_{i+1} in Richtung X_i ist i dimensional.

<u>Beispiel:</u> Die Folge (X_1, X_2) im untenstehenden Bild ist aufsteigend.



SATZ [Voi 83]: *Zu jedem* $k \in \omega$ *und* $\Delta : F_o\binom{\omega}{k} \to \{0,1\}$

gibt es eine aufsteigende Folge $(X_i)_{i\in\omega}$

mit $\Delta \restriction \bigcup_i \binom{X_i}{k} = \text{const}$.

Natürlich braucht eine aufsteigende Folge nicht Anlaß zu einem unendlich dimensionalen Raum in $\bigcup_i X_i$ zu geben. Andererseits ist die Aussage stark genug um eine Paris-Harrington-Version für Vektorräume zu erlauben. Dabei ist nicht klar, ob die zugehörige Funktion r^* (s. Kap. I) noch viel stärker wächst als die zur klassischen Paris-Harrington-Situation gehörige.

Um eine topologische Version zu erhalten, topologosiert man $F_o\binom{\omega}{k}$ (Menge der Normalform von Rang k mit k Spalten, ω Zeilen), indem man setzt

$$d(X,X') = \frac{1}{i+1} \quad \text{genau wenn}$$

X und X' auf den ersten i Zeilen übereinstimmen. Dies ist die natürliche Verallgemeinerung der bei Galvin,Prikry betrachteten Topologie.

SATZ [Voi xx]: *Ist* $\Delta : F_t\binom{\omega}{k} \to \{0,1\}$ *eine Baireabbildung (d.h.* $\Delta^{-1}(i)$ *je eine Bairemenge) so gibt es* $A \in F_t\binom{\omega}{\omega}$ *mit* $\Delta \mid F_t\binom{A}{k} = \text{const.}$

Auch kanonische Versionen sind bekannt [Voi 84] .

§ 3 Abelsche Gruppen

So wie sich vor einigen Jahren herausgestellt hat, daß eine Übertragung kombinatorischer Untersuchungen für Mengensysteme auf den Fall der endlichen Vektorräume sinnvoll ist (q-Analoga), so ist eine weitere Verallgemeinerung auf endliche Abelsche Gruppen und Moduln fruchtbar geworden. Gerade bei endlichen Abelschen Gruppen hat man einen klassischen Darstellungssatz mit direkten Summen, welcher Beweisansätze ermöglicht. Besonders schön ist aber, daß schließlich ein in der Formulierung von Darstellungsfragen unabhängiger Ramseysatz gefunden wurde. Allerdings beruht der schöne Beweis von Voigt [Voi 80] des folgenden Satzes auf der Übertragung der Normalformen in die q-Version.

<u>Definition:</u> Ab $\binom{A}{B}$ = Menge der Untergruppen von A welche isomorph zu B sind.

SATZ: *Sei* K *eine endliche abelsche Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) Jeder Automorphismus α' *einer Untergruppe von* K *besitzt eine Ausdehnung* α *, die Automorphismus von* K *ist.*

ii) Zu jeder endlichen abelschen Gruppe M *gibt es eine ebensolche Gruppe* R *mit:*

$$\forall \Delta : \mathrm{Ab}\binom{R}{K} \to \{0,1\} \quad \exists M \in \mathrm{Ab}\binom{R}{M}$$

mit $\quad \Delta \restriction \binom{M}{K} = \text{const.}$

Weiteres findet man auch in [DRo76,Deu 82, P 82].

III. ARITHMETISCHE PROGRESSIONEN

(Dieses Kapitel ist eine ausschnittsweise Überarbeitung und Erweiterung von [DV 83])

§ 1 Arithmetische Progressionen

1926 bewies der damals 23jährige B.L. van der Waerden folgendes Resultat:

SATZ [v.d.W. 27]: *Zu jedem Paar* k *und* r *von positiven ganzen Zahlen gibt es eine positive ganze Zahl* $n = vdW(k,r)$ *so, daß es zu jeder Färbung* $\Delta : \{0,\dots,n-1\} \to \{0,\dots,r-1\}$ *der nichtnegativen ganzen Zahlen kleiner als* n *mit* r *Farben eine einfarbige arithmetische Progression* $a, a+d, \dots, a+(k-1)\cdot d$ *bestehend aus* k *Termen gibt, d.h.* $\Delta(a) = \Delta(a+1\cdot d)$, $0 \leq i < k$.

Hierzu gilt folgendes Dichtheitsresultat, welches von Erdös vermutet wurde:

SATZ [Sze 75]: *Es sei* k *eine positive ganze Zahl und sei* $\varepsilon > 0$ *eine (beliebig kleine) reelle Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* $n_o = Sz(k,\varepsilon)$ *so, daß alle positiven ganzen Zahlen* $n > n_o$ *folgende Eigenschaft besitzen:*

Jede Menge $S \subseteq \{0,\dots,n-1\}$ *mit* $|S| > \varepsilon\cdot n$ *enthält eine arithmetische Progression der Länge* k .

Für höhere Dimensionen gilt:

SATZ [Ra 33, Wi 51]: *Es sei* $X = \{x_o,\dots,x_{t-1}\} \subseteq E^\ell$ *eine endliche Menge von Punkten im* ℓ*-dimensionalen, euklidischen Raum. Dann hat die Menge* $X^* = \{\sum_{i=0}^{t-1} m_i \cdot x_i \,|\, m_i \in \mathbb{N} , \sum_{i=0}^{t-1} m_i = HJ(t,1,r)\}$ *folgende Eigenschaft:*

Zu jeder Färbung $\Delta : X^* \to \{0,\dots,r-1\}$ *der Punkte in* X^* *mit* r *Farben gibt es einen Punkt* $a \in E^\ell$ *sowie eine positive ganze Zahl* d , *so daß* $\Delta(a + d \cdot x_0) = \Delta(a + d \cdot x_i)$ *für alle* $i = 0,\dots,t-1$. *Insbesondere ist also* $a + d \cdot x_i \in X^*$ *für jedes* $0 \leq i \leq t$.

Geometrisch gesprochen ist die Abbildung $H : E^\ell \to E^\ell$ mit $H(x) = a + d \cdot x$ eine Homothetie (Translation plus Streckung), d.h. die Bildmenge von X ist eine homothetische Kopie von X . Der Satz besagt also insbesondere, daß es zu jeder Färbung des ℓ-dimensionalen euklidischen Raumes E^ℓ mit

endlich vielen Farben stets eine einfarbige homothetische Kopie von X gibt, wo X eine beliebige endliche Konfiguration in E^ℓ ist.
Die zugehörige Dichtheitsversion wurde von Fürstenberg, Katznelson bewiesen:

SATZ [FK 78]: *Seien* k *und* ℓ *positive ganze Zahlen und sei* $\varepsilon > 0$ *eine (beliebig kleine) reelle Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl* $n_0 = FK(k,\ell,\varepsilon)$ *so, daß alle positiven ganzen Zahlen* $n \geq n_0$ *folgende Eigenschaft besitzen:*
Jede Menge $S \subseteq \{0,\ldots,n-1\}^\ell$ *von Punkten im* ℓ*-dimensionalen Würfel der Größe* n *mit* $|S| > \varepsilon \cdot n^\ell$ *enthält eine homothetische Kopie von* $\{0,\ldots,k-1\}^\ell$, *dem* ℓ*-dimensionalen Würfel der Größe* k.

Wenden wir uns nun kanonischen Versionen zu. Für arithmetische Progressionen gilt:

SATZ [EG 80]: *Zu jeder positiven ganzen Zahl* k *gibt es eine positive ganze Zahl* n *mit der folgenden Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : \{0,\ldots,n-1\} \to \mathbb{N}$ *gibt es eine* k*-elementige arithmetische Progression* $a+i\cdot d$, $i=0,\ldots,k-1$ *so, daß entweder* $\Delta(a+i\cdot d) = \Delta(a+j\cdot d)$ *für alle* $0 \leq i,j < k$ *(d.h.* $a+i\cdot d$ *ist eine einfarbige arithmetische Progression) oder* $\Delta(a+i\cdot d) \neq \Delta(a+j\cdot d)$ *für alle* $0 \leq i < j < k$ *(d.h.* $a+i\cdot d$ *ist eine injektiv gefärbte arithm. Progression)*

Beweis: Indirekt! Sei k fest so daß für jedes n eine Färbung $\Delta_n : \{0,\ldots,n-1\} \to \mathbb{N}$ ohne konstant oder injektiv gefärbte arithmetische Progression der Länge k existiert.
Zählen wir nun auf zwei Arten die Anzahl $*$ der bezüglich Δ_n einfarbigen Zweiermengen in $\{0,\ldots,n-1\}$. (n sehr groß).
Gibt es keine konstant gefärbte arithmetische Progression der Länge k so gilt nach Szemeredi:

$$* = \sum_i \binom{\Delta^{-1}(i)}{2} < \frac{1}{\varepsilon} \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 .$$

Gibt es keine injektiv gefärbte arithmetische Progression der Länge k, so enthält jede solche eine einfarbige Zweiermenge. Jede einfarbige Zweiermenge ist aber in höchstens $\binom{k}{2}$ Progressionen der Länge k enthalten. Daher

$$* \geq c n^2$$

für ein c unabhängig von n.
Für große n klafft hier eine gewünschte Lücke!

Es ist mit Hilfe des Satzes von Fürstenberg, Katznelson gelungen, eine mehrdimensionale Version zu beweisen.

SATZ [DGPV 83]: *Es sei* $X = \{x_o, \ldots, x_{t-1}\} \subseteq E^\ell$ *eine endliche Menge von Punkten im* ℓ*-dimensionalen euklidischen Raum. Dann gibt es eine endliche Menge* $X^* \subseteq E^\ell$ *mit folgender Eigenschaft:*
Zu jeder Färbung $\Delta : X^* \to \mathbb{N}$ *gibt es einen linearen Unterraum* $W \subseteq E^\ell$ *sowie eine homothetische Kopie* $a+d\cdot X \subseteq X^*$, $a \in E^\ell$, $d \in \mathbb{N}$, *von* X *so, daß für alle* $x_i, x_j \in X$ *gilt:*

(*) $$\Delta(a+d\cdot x_i) = \Delta(a+d\cdot x_j) \Leftrightarrow x_i - x_j \in W ,$$

d.h. x_i *und* x_j *liegen in derselben Nebenklasse von* W .

Zunächst konnte der Fall, daß $X \subseteq \mathbb{N}^\ell$ im Gitternetz liegt, erledigt werden. Spencer zeigte anschließend, wie man den allgemeinen Fall darauf zurückführt.

Weiter zeigte dann Spencer [Spe 83], daß unter zusätzlicher Zulassung von Rotationen nicht Nebenklassenfärbungen, sondern vielmehr konstant oder injektiv gefärbte Kopien auftreten.
Mittlerweile ist es Prömel, Rödl [PRö 84] gelungen zu zeigen, wie man diese Sätze ohne Dichtheitsversionen, also direkt elementar beweisen kann. Weitere Verallgemeinerungen stehen in [PRo 84].

§ 2 Partitionsreguläre lineare Gleichungssysteme

Betrachten wir die folgenden Gleichungssysteme:

i) $x_{i+1} - x_i = x_o$ für $i = 1, \ldots, k-1$

ii) $\sum_{i \in I} x_i = x_I$ für $I \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$, $I \neq 0$

iii) $x_2 + x_1 = 3 \cdot x_o$.

Die ersten beiden haben folgende Eigenschaft: Zu jeder Zerlegung der positiven ganzen Zahlen in endlich viele Klassen gibt es in einer der Klassen Zahlen $x_o, \ldots, x_k$, die eine Lösung von (i) bilden.
Ebenso gibt es in einer Klasse Zahlen $x_o, \ldots, x_{m-1}$ sowie Zahlen x_I für jedes nichtleere $I \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$, die eine Lösung von (ii) bilden.
Gleichungssystem (iii) besitzt eine solche Eigenschaft nicht: Schreibt man jede positive ganze Zahl n als $n = 5^{n'} \cdot n''$ mit $n'' \not\equiv 0 \pmod 5$, so erhält man eine Färbung $\Delta_5 : \mathbb{N} \to \{1,2,3,4\}$ durch $\Delta_5(n) = i \Leftrightarrow n'' \equiv i \pmod 5$.

Man rechnet leicht nach, daß es keine 3 Zahlen x_0, x_1, x_2 gibt, die (iii) erfüllen und unter Δ_5 alle gleichgefärbt sind.

Definition [Ra 33]: Eine ganzzahlige Matrix A (bzw. das durch A beschriebene homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$) ist partitionsregulär, genau wenn zu jeder Zerlegung der positiven ganzen Zahlen in endlich viele Klassen stets in einer dieser Klassen Elemente $x_0, \ldots, x_{n-1}$ existieren mit $A \cdot (x_0, \ldots, x_{n-1})^T = 0$, d.h. eine der Klassen enthält eine Lösung von $A \cdot x = 0$.

Rado gelang in seiner Dissertation die folgende schöne Charakterisierung der partitionsregulären Matrizen:

SATZ [Ra 33]: *Eine Matrix* A *bestehend aus den Spalten* $(a^0, \ldots, a^{n-1})$ *ist partitionsregulär, genau wenn sie die Spalteneigenschaft besitzt, d.h. für eine positive Zahl* ℓ *gibt es eine Zerlegung von* $\{0, \ldots, n-1\}$ *in paarweise disjunkte Mengen* $I_0, \ldots, I_{\ell-1}$ *derart, daß*

i) $\sum_{i \in I_0} a^i = 0$, *d.h. die Summe der Spalten, die zur Spaltenklasse* 0 *gehören, ist der Nullvektor,*

ii) $\sum_{i \in I_{j+1}} a^i = \sum \{\lambda_{i,j+1} a^i \mid i \in I_0 \cup .. \cup I_j\}$ *für geeignete rationale Zahlen* $\lambda_{i,j+1}$, *d.h. die Summe der Spalten in der Spaltenklasse* $j+1$ *läßt sich als rationale Linearkombination der Spalten früherer Spaltenklassen darstellen.*

Um zeigen zu können, daß partitionsreguläre Matrizen die im Satz angegebene "Spalteneigenschaft" besitzen, benützt Rado Färbungen $\Delta_p : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, p-1\}$, die analog der oben angegebenen Färbung Δ_5 definiert sind. Um zu zeigen, daß die Spalteneigenschaft die Partitionsregularität nach sich zieht, kommt der Satz von van der Waerden ins Spiel.

Noch deutlicher wird der Zusammenhang zwischen partitionsregulären Gleichungssystemen und arithmetischen Progressionen, wenn man anstelle der Matrizen solcher Systeme Mengen von natürlichen Zahlen charakterisiert, die als Lösungsmengen für partitionsreguläre Gleichungssysteme im wesentlichen in Frage kommen.

Definition: Es seien m, p, c positive ganze Zahlen. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ heißt (m,p,c)-Menge, genau wenn es positive ganze Zahlen $d_0, \ldots, d_m$ derart gibt, daß M genau aus den Zahlen besteht, die in folgender Liste auftauchen:

$$\begin{array}{rrrrr}
cd_o + \lambda_1 d_1 & + \lambda_2 d_2 & + & \dots & + \lambda_m d_m \\
cd_1 & + \lambda_2 d_2 & + & \dots & + \lambda_m d_m \\
 & cd_2 & + & \dots & + \lambda_m d_m \\
 & & \cdot & & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot \\
 & & & & \cdot \\
 & & & & cd_m
\end{array}$$

$$\lambda_i \in Z, \ -p \leq \lambda_i \leq p \qquad i = 1,\dots,m$$

Für c=1, m=1 und p=k-1 enthalten (1,k-1,1)-Mengen Lösungen des Gleichungssystems (i), während für c=1 und p=1 die (m,1,1)-Mengen Lösungen des Gleichungssystems (ii) enthalten. Intuitiv sind (m,p,c)-Mengen "m-fach iterierte arithmetische Progressionen mitsamt den c-fachen Differenzen".

SATZ [Deu 73]: *(1) Eine ganzzahlige Matrix* A *(bzw. das Gleichungssystem* $A \cdot x = 0$) *ist partitionsregulär, genau wenn es positive ganze Zahlen* m,p,c *gibt, so daß jede* (m,p,c)-Menge *eine Lösung von* $A \cdot x = 0$ *enthält. Weiter sind* (m,p,c)-Mengen *selbst Teilmengen von Lösungen partitionsregulärer Gleichungssysteme.*
(2) Zu jeder Wahl von positiven ganzen Zahlen m,p,c *und* r *gibt es Zahlen* n,q,d *, daß zu jeder Färbung* $\Delta : N \rightarrow \{0,\dots,r-1\}$ *einer* (n,q,d)-Menge N *eine einfarbige* (m,p,c)-Menge $M \subseteq N$ *existiert.*

Teil (2) dieses Satzes wurde ursprünglich mit Hilfe des Satzes von van der Waerden bewiesen. Später bemerkte dann Leeb, daß man durch Benutzung des Satzes von Hales und Jewett einen kürzeren Beweis erhalten kann.
Mit Hilfe dieses Satzes gelang es, eine alte Vermutung von Rado zu lösen: Nennt man eine Menge von natürlichen Zahlen <u>partitionsregulär</u>, falls in ihr alle partitionsregulären Gleichungssysteme lösbar sind, so besagt der Satz: M *ist partitionsregulär, genau wenn* M *zu jedem Tripel* (m,p,c) *mindestens eine* (m,p,c)-Menge *enthält.*

SATZ [Deu 73]: *Ist* $M \subseteq \mathbb{N}$ *partitionsregulär und* $\Delta : M \rightarrow \{0,\dots,r-1\}$ *eine Färbung von* M *, dann gibt es eine einfarbige partitionsreguläre Teilmenge von* M .

Erwähnt sei eine weitere alte Vermutung von Rado, die noch immer unbewiesen ist: Eine Matrix A heiße r-regulär, wenn es zu jeder Zerlegung der positiven ganzen Zahlen in r Klassen in einer dieser Klassen eine Lösung von $A \cdot x = 0$ gibt. Zum Beispiel ist das Gleichungssystem (iii) 2-regulär (aber natürlich nicht regulär).

Vermutung [Ra 33]: Zu jedem n gibt es ein $r(n)$ so, daß jede $r(n)$-reguläre Matrix A mit höchstens n Spalten (d.h. $A \cdot x = 0$ besitzt höchstens n Unbekannte) sogar regulär ist.

Es ist immer noch nicht bekannt, welche unendlichen homogenen Gleichungssysteme partitionsregulär sind.

Das unendliche Gleichungssystem

(i*) $x_{i+1} - x_i = x_o \quad , \quad i > 0$

ist nicht partitionsregulär. Dies zeigt die Färbung $\Delta : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$, mit $\Delta(m) = 0$, genau wenn $\Leftrightarrow 2^k \leq m < 2^{k+1}$ und $k \equiv 0 \pmod 2$.

Dagegen ist das unendliche Gleichungssystem

(ii**) $\sum\limits_{i \in I} x_i = x_I$ für $I \subseteq \mathbb{N}$, $I \neq \emptyset$, $|I| < \infty$

partitionsregulär. Dies ist die Aussage des Satzes von Hindman [Hin 74], der eine starke Verallgemeinerung des Rado'schen Summensatzes darstellt. Das "größte" derzeit bekannte unendliche partitionsreguläre Gleichungssystem besteht aus der Vereinigung aller endlichen partitionsregulären Gleichungssysteme mit dem Hindman'schen System (ii**):

SATZ [FW 78]: *Zu jeder Zerlegung der natürlichen Zahlen in endlich viele Klassen gibt es in einer dieser Klassen Lösungen für (ii*) sowie für jedes endliche partitionsreguläre Gleichungssystem.*

Es ist nicht klar, ob es - abgesehen von Subsystemen - hiervon überhaupt weitere unendliche partitionsreguläre (lineare, homogene) Gleichungssysteme gibt.

Kürzlich ist es Lefmann [Lef xx] gelungen, die kanonische Version zu den partitionsregulären Gleichungssystemen anzugeben. Wir deuten seine Idee an: Der Einstieg geschieht über die (m,p,c)-Mengen, die man sich gemäß Definition als Folge von "Zeilen" vorstellen soll, wobei jede Zeile eine iterierte arithmetische Progression ist. Wendet man auf jede Zeile i die kanonische Version des Satzes von van der Waerden an, so erhält man

	Δ	wirkt mit Konstante
Zeile 1	c_1	oder injektiv
2	c_2	.
.		.
.		.
.		.
.		.
m	c_m	oder injektiv

Durch Aussieben erhält man nun genügend viele Zeilen, $Z(i)$ so, daß Δ auf $\bigcup Z(i)$ injektiv oder konstant ist oder aber die Konstanten paarweise verschieden sind.

Übersetzt man dies wieder in die Sprache der partitionsregulären Gleichungssysteme so erhält man

SATZ [Lef ××]: *Sei* $A \in Z_{m,n}$ *eine partitionsreguläre Matrix und* $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine Abbildung. Dann gibt es eine Lösung* $z_1, \ldots, z_n$ *von* $Az = 0$ *so daß* $\Delta \mid \{z_1, \ldots, z_n\}$ *entweder*

konstant

oder *injektiv ist* ,

oder $\Delta(z_i) = \Delta(z_j)$ *gilt genau wenn* z_i *und* z_j *in derselben Zeile der* m, p, c Menge, *d.h. zu derselben Spaltenklasse der Spalteneigenschaft von* A *gehören.*

LITERATURVERZEICHNIS

[Bau 74] BAUMGARTNER, J.E., A short proof of Hindman's Theorem, Journal of Combinatorial Theory (A) 17, 1974, 384-386.

[Deu 73] DEUBER, W., Partitionen und lineare Gleichungssysteme, Math.Z. 133, Springer-Verlag 1973, 109-123.

[Deu 82] DEUBER, W., Recent Results in Partition Theory, Institut de Recherche Mathematique Avancée, Strasbourg, Seminaire Lotharingien de Combinatoire (Bayreuth, Erlangen, Strasbourg), 6ème Session: 29 septembre-1er octobre 1982, 99-101.

[DGPV 83] DEUBER, W., GRAHAM, R.L., PRÖMEL, H.J., VOIGT, B., A canonical partition theorem for equivalence relations on Z^t, Journal of Combinatorial Theory 34, 1983, 331-339.

[DRo 76] DEUBER, W., ROTHSCHILD,B.L.,Categories without the Ramsey property, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 18. Combinatorics, Keszthely (Hungary), 1976, 225-249.

[DV 83] DEUBER, W., VOIGT, B., Partitionseigenschaften endlicher affiner und projektiver Räume, Europ.J.of Combinatorics 3, 1982, 329-340.

[EG 80] ERDÖS, P., GRAHAM, R.L., Old and new problems and results in Combinatorial number theory, L'Enseign. Math. Geneve 1980.

[ER 50] ERDÖS, P., RADO, R., A combinatorial theorem, J. London Math. Soc. 25, 1950, 249-255.

[ER 52] ERDÖS, P., RADO, R., Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set, Proc.London Math. Soc. 3, 1952, 417-439.

[FK 78] FÜRSTENBERG, H., KATZNELSON, Y., An ergodic Szemeredi theorem for commuting transformations, Journal d'Analyse Mathematique 34, 1978, 275-291.

[FW 78] FÜRSTENBERG, H., WEISS, B., Topological dynamics and combinatorial number theory, J. d'Analyse Mathematique 34, 1978, 61-85.

[GP 73] GALVIN, F., PRIKRY, K., Borel sets and Ramsey's theorem, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 38, 1973, 193-198.

[GLR 72] GRAHAM, R.L., LEEB, K., ROTHSCHILD, B.L., Ramsey theorem for a class of categories, Advances in Math. 8, 1972, 417-433.

[GG 55] GREENWOOD, R.E., GLEASON, A.M., Combinatorial relations and chromatic graphs, Canad. J. Math. 7, 1955, 1-7.

[HJ 63] HALES, A.W., JEWETT, R.I., Regularity and positional games, Trans.Amer.Math.Soc. 106, 1963, 222-229.

[Hin 74] HINDMAN, N., Finite sums from sequences within cells of a partition of N , J. Combinatorial Theory, Ser.A 17, 1974, 1-11.

[Le 73] LEEB, K., Vorlesungen über Pascaltheorie, Erlangen, 1973.

[Lef xx] LEFMAN, H., A canonical version for partition regular systems of linear equations, preprint, Bielefeld 1983, to appear in J. Combinatorial Theory, Ser. A.

[N-W 65] NASH-WILLIAMS, C.St.J.A, On well-quasi-ordering transfinite sequences, Proc. Comb. Phil. Soc. 61, 1965, 33-39.

[PH 77] PARIS, J., HARRINGTON, L., A mathematical incompleteness in Peano arithmetic, in 'Handbook of mathematical logic', ed.: J. Barwise, North-Holland, Amsterdam, 1977, 1133-1142.

[P 82] PRÖMEL, H.J., Induzierte Partitionssätze, Dissertation, Bielefeld 1982.

[PRö 84] PRÖMEL, H.J., RÖDL, V., An elementary proof of the canonizing version of Gallai-Witt's theorem, to appear: J. Combinatorial Theory, Ser. A.

[PRo 84] PRÖMEL, H.J., ROTHSCHILD, B.L., A canonical restricted version of van der Waerden's theorem, preprint 1984.

[Ra 33] RADO, R., Studien zur Kombinatorik, Math. Z. 36, 1933, 424-480.

[Ram 30] RAMSEY, F.P., On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. 30, 1930, 264-286.

[S 79] SIMPSON, St.G., BQO Theory and Fraïssé's Conjecture, preprint 1979.

[Spe 83] SPENCER, J., Canonical configuration, J. Combinatorial Theory 34, 1983, 325-330.

[Sze 75] SZEMEREDI, E., On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, Acta Arithm. 27, 1975, 199-245.

[Voi 80] VOIGT, B., The partition problem for finite abelian groups, J. Combinatorial Theory 28, 1980, 257-271.

[Voi 83] VOIGT, B., Parameter words, trees and vector spaces, preprint Bielefeld 1983.

[Voi 84] VOIGT, B., Canonization theorems for finite affine and linear spaces, Combinatorica, Vol. 4, (2-3), 1984, 219-234.

[Voi xx] VOIGT, B., Extensions of the Graham-Leeb-Rothschild theorem, to appear in: J. Reine und Angew. Math.

[v.d.W.27] WAERDEN, van der, B.L., Beweis einer Baudet'schen Vermutung, Nieuw Arch. Wisk. 15, 1927, 212-216.

[Wi 51] WITT, E., Ein kombinatorischer Satz der Elementargeometrie, Math. Nachr. 6, 1951, 261-262.